

Уравнения переноса: ответы на вопросы

НЕМ

5 января 2026 г.

Содержание

1	Основные понятия теории разностных схем	3
1.1	Основные понятия теории разностных схем	3
1.2	Норма и пространство сеточных функций	3
1.3	Сходимость разностной схемы	3
1.4	Аппроксимация разностной схемы	3
1.5	Устойчивость разностной схемы	4
1.6	Корректность дифференциальной задачи	4
1.7	Основная теорема вычислительной математики	4
1.8	Замечание	4
2	Методы построения схем для численного решения уравнения переноса	5
2.1	Конечно-разностный метод	5
2.2	Метод неопределенных коэффициентов	5
2.3	Интерполяционно-характеристический метод	6
2.4	Метод прямых	7
2.5	Вывод схемы Лакса-Вендроффа из вычитания главного члена погрешности аппроксимации явной четырехточечной схемы	8
3	Гиперболические системы уравнений в частных производных первого порядка. Инварианты Римана. Корректная постановка краевых условий для гиперболических систем уравнений	10
3.1	Граничные условия	10
4	Первое дифференциальное приближение (ПДП) разностной схемы	11
4.1	Понятие первого дифференциального приближения (ПДП)	11
4.2	ПДП для схемы «явный уголок»	11
4.3	Устойчивость как корректность задачи для ПДП.	12

1 Основные понятия теории разностных схем

1.1 Основные понятия теории разностных схем

Рассматривается дифференциальная задача (Д.З.) с начальными (Н.У.) и граничными условиями (Г.У.)

$$Lu(x, t) = f(x, t), \quad u(x, t) \in U,$$

где L — дифференциальный оператор.

Ей ставится в соответствие разностная задача (Р.З.)

$$\mathcal{L}y = \mathcal{F},$$

где \mathcal{L} — разностный оператор, $y \in \mathcal{U}$ — сеточная функция.

Вводится равномерная сетка:

$$x_m = mh, \quad t^n = n\tau,$$

$$u(x, t) \longrightarrow [u]_{h\tau} = \{u(mh, n\tau)\}.$$

1.2 Норма и пространство сеточных функций

В пространстве сеточных функций \mathcal{U} вводится норма $\|\cdot\|_{\mathcal{U}}$, удовлетворяющая аксиомам:

1. $\|y\|_{\mathcal{U}} \geq 0, \quad \|y\|_{\mathcal{U}} = 0 \iff y = 0;$
2. $\|\alpha y\|_{\mathcal{U}} = |\alpha| \|y\|_{\mathcal{U}};$
3. $\|y + z\|_{\mathcal{U}} \leq \|y\|_{\mathcal{U}} + \|z\|_{\mathcal{U}}.$

1.3 Сходимость разностной схемы

Определение. Решение разностной задачи сходится к решению дифференциальной задачи, если

$$\|[u]_{h\tau} - y\|_{\mathcal{U}} \xrightarrow{h, \tau \rightarrow 0} 0.$$

Если

$$\|[u]_{h\tau} - y\|_{\mathcal{U}} \leq C_1 h^p + C_2 \tau^q,$$

то порядок сходимости совпадает с порядком аппроксимации.

1.4 Аппроксимация разностной схемы

Определение. Разностная задача (Р.З.) аппроксимирует дифференциальную задачу (Д.З.) на её решении, если

$$r_{h\tau} = \mathcal{L}[u]_{h\tau} - \mathcal{F} \xrightarrow{h, \tau \rightarrow 0} 0,$$

где $r_{h\tau}$ — невязка разностной задачи.

Если выполняется оценка

$$\|r_{h\tau}\|_{\mathcal{U}} \leq C_3 h^p + C_4 \tau^q,$$

то говорят, что схема имеет порядок аппроксимации p по h и q по τ .

1.5 Устойчивость разностной схемы

Определение. Разностная задача (Р.З.) называется устойчивой, если для любых возмущений правой части

$$\mathcal{L}y^{(1)} = \mathcal{F} + \varepsilon^{(1)}, \quad \mathcal{L}y^{(2)} = \mathcal{F} + \varepsilon^{(2)},$$

выполняется оценка

$$\|y^{(1)} - y^{(2)}\|_{\mathcal{U}} \leq C (\|\varepsilon^{(1)}\|_{\mathcal{U}} + \|\varepsilon^{(2)}\|_{\mathcal{U}}),$$

где константа C не зависит от h и τ .

1.6 Корректность дифференциальной задачи

Определение (Адамар). Дифференциальная задача (Д.З.) называется корректно поставленной, если:

1. решение существует;
2. решение единственно;
3. решение устойчиво по отношению ко входным данным.

1.7 Основная теорема вычислительной математики

Теорема (Лакса-Рибенского). Если разностная задача (Р.З.) аппроксимирует корректно поставленную дифференциальную задачу (Д.З.) на её решении и является устойчивой, то решение разностной задачи сходится к решению дифференциальной задачи. При этом порядок сходимости равен порядку аппроксимации.

1.8 Замечание

Для линейного оператора \mathcal{L} условия устойчивости эквивалентны оценке

$$\|y\|_{\mathcal{U}} \leq C \|\mathcal{F}\|_{\mathcal{U}}.$$

2 Методы построения схем для численного решения уравнения переноса

Будем рассматривать уравнение переноса в некоторой области:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Введем сетку из M узлов по пространству и N по времени, h, τ – соответствующие шаги.

2.1 Конечно-разностный метод

Конечно-разностный метод состоит в замене дифференциальных операторов $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}$ разностными отношениями.

Схема «явный правый угол»: метод конечных разностей

Рассмотрим шаблон схемы "явный правый угол" (точки $(m-1, n), (m, n), (m, n+1)$). Аппроксимируем дифференциальные операторы правыми производными:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{y_{m+1}^n - y_m^n}{h}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau}$$

Получаем разностную схему:

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} + c \frac{y_m^n - y_{m-1}^n}{h} = 0$$

2.2 Метод неопределенных коэффициентов

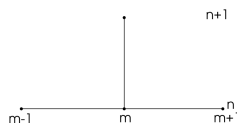
Любую разностную схему на некотором шаблоне можно представить в виде:

$$\sum a_k y_m^n = 0$$

где m, n принадлежат шаблону, k – номер коэффициента.

Тогда для получения разностной схемы необходимо подставить в разностный оператор разложения u в ряд Тейлора и приравнять коэффициенты так, чтобы разностный оператор давал исходную дифференциальную задачу. Приведем пример: вывод схемы Лакса-Вендроффа.

Схема Лакса-Вендроффа: МНК



Запишем разностную схему:

$$ky_n^{n+1} + ly_{m+1}^n + py_n^m + qy_{m-1}^n = 0$$

Используем следствие дифференциальной задачи: $\frac{\partial^{(k)}}{\partial t^{(k)}} u = (-c)^k \frac{\partial^{(k)}}{\partial x^{(k)}} u$

$$k(u_n^m + \dot{u}\tau + \underbrace{\ddot{u}\tau^2/2}_{u''c\tau^2/2} + O(\tau^3)) + l(u_n^m + u'h + u'h^2/2 + O(h^3)) + pu_n^m + q(u_n^m - u'h + u'h^2/2 + O(h^3)) = \dot{u} + cu'$$

Получаем:

$$\begin{aligned} u_m^n &: k + l + p + q = 1 \\ \dot{u} &: k\tau = 1 \\ u' &: lh - qh = c \\ u'' &: kc^2\tau^2/2 + lh^2/2 + qh^2/2 = 0 \end{aligned}$$

Откуда имеем систему:

$$\begin{cases} 1/\tau + l + p + q = 0 \\ lh - qh = c \\ c^2\tau + lh^2 + qh^2 = 0 \end{cases}$$

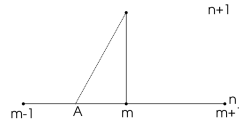
Откуда $l = \frac{c}{2h} - \frac{c^2\tau}{2h^2}$, $q = -\frac{c}{2h} - \frac{c^2\tau}{2h^2}$, $p = -\frac{1}{\tau} - \frac{c^2\tau}{h^2}$. Подставляя в разностную схему, получаем схему Лакса-Вендроффа:

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} + c \frac{y_{m+1}^n - y_{m-1}^n}{2h} - c^2\tau \frac{y_{m+1}^n - 2y_m^n + y_{m-1}^n}{2h^2} = 0$$

2.3 Интерполяционно-характеристический метод

Интерполяционно-характеристический метод основан на интерполяции значений на n -м временном слое в точку A , лежащую на характеристике, опущенной из точки $(m; n+1)$. Таким образом, в точку $(m; n+1)$ решение переносится точно. Интерполяцию в A можно выполнять любым способом, это определяет порядок аппроксимации.

Схема Лакса-Вендроффа: интерполяционно-характеристический метод



Разностная схема примет вид:

$$y_m^{n+1} = P_{m-1}(x_A)y_{m-1}^n + P_m(x_A)y_m^n + P_{m+1}(x_A)y_{m+1}^n$$

$x_A = x_m - \sigma h$ – из уравнения характеристики, $\sigma = c\tau/h$. Для интерполяции используем трехточечные полиномы Лагранжа (что обеспечит второй порядок аппроксимации решения).

$$P_{m-1}(x) = \frac{(x - x_m)(x - x_{m+1})}{(x_{m-1} - x_m)(x_{m-1} - x_{m+1})}$$

$$\begin{aligned} P_{m-1}(x_A) &= \frac{(x_m - \sigma h - x_m)(x_m - \sigma h - x_{m+1})}{(x_{m-1} - x_m)(x_{m-1} - x_{m+1})} \\ &= \frac{(-\sigma h)(-h - \sigma h)}{-h(-2h)} = \frac{1}{2}\sigma(1 + \sigma) \end{aligned}$$

$$P_m(x) = \frac{(x - x_{m-1})(x - x_{m+1})}{(x_m - x_{m-1})(x_m - x_{m+1})}$$

$$\begin{aligned} P_m(x_A) &= \frac{(x_m - \sigma h - x_{m-1})(x_m - \sigma h - x_{m+1})}{(x_m - x_{m-1})(x_m - x_{m+1})} \\ &= \frac{(h - \sigma h)(-h - \sigma h)}{(h)(-h)} = (1 - \sigma)(1 + \sigma) \end{aligned}$$

$$P_{m+1}(x) = \frac{(x - x_{m-1})(x - x_m)}{(x_{m+1} - x_{m-1})(x_{m+1} - x_m)}$$

$$\begin{aligned} P_{m+1}(x_A) &= \frac{(x_m - \sigma h - x_{m-1})(x_m - \sigma h - x_m)}{(x_{m+1} - x_{m-1})(x_{m+1} - x_m)} \\ &= \frac{(h - \sigma h)(-\sigma h)}{(2h)(h)} = \frac{1}{2}(-\sigma)(1 - \sigma) \end{aligned}$$

Получаем разностную схему:

$$y_m^{n+1} = \frac{1}{2}\sigma(1 + \sigma)y_{m-1}^n + (1 - \sigma)(1 + \sigma)y_m^n + \frac{1}{2}(-\sigma)(1 - \sigma)y_{m+1}^n$$

$$y_m^{n+1} = y_m^n - \frac{\sigma}{2}(y_{m+1}^n - y_{m-1}^n) + \frac{\sigma^2}{2}(y_{m+1}^n - 2y_m^n + y_{m-1}^n)$$

2.4 Метод прямых

Метод прямых состоит некоторой пространственной дискретизации дифференциального оператора $\frac{\partial u}{\partial x}$ и последующем получении системы ОДУ, которые могут быть интегрированы каким-либо образом: метод Эйлера, Рунге-Кутты нужного порядка и т.п.

Метод прямых обладает большей гибкостью. Соответственно, более вычислительно сложен при использовании более точных методов интегрирования дифференциального уравнения.

Схема «явный левый уголок»: метод прямых

Рассмотрим шаблон схемы «явный левый уголок» (точки $(m-1, n)$, (m, n) , $(m, n+1)$). Тогда,

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx F_h = c \frac{y_m^n - y_{m-1}^n}{h}$$

Тогда получаем обыкновенное дифференциальное уравнение. Начальное условие для него известно из начального условия исходной дифференциальной задачи.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -F_h$$

Данное обыкновенное дифференциальное уравнение можно решать каким-либо способом. Применяя явный метод Эйлера, получим

$$\begin{aligned} y_m^{n+1} &= y_m^n - c F_h \tau \\ \frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} + c \frac{y_m^n - y_{m-1}^n}{h} &= 0 \end{aligned}$$

Получили схему «явный левый уголок».

2.5 Вывод схемы Лакса-Вендроффа из вычитания главного члена погрешности аппроксимации явной четырехточечной схемы

Рассмотрим четырехточечный шаблон (точки $(m-1, n)$, (m, n) , $(m+1, n)$, $(m, n+1)$) (см. картинки выше). Введем разностную схему для **неоднородного** уравнения переноса с помощью правых разностей:

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} + c \frac{y_{m-1}^n - y_{m+1}^n}{2h} = f_m^n$$

Рассмотрим невязку:

$$\begin{aligned} r_{\tau h} &= \mathcal{L}[u]_{\tau h} - f \\ &= \underbrace{\dot{u} - cu' - f}_{=0} + \frac{1}{2}\ddot{u}\tau + \frac{c}{6}u'''h^2 + O(\tau^2, h^2) \end{aligned}$$

Как видим, порядок аппроксимации первый. Идея: вычесть аппроксимацию члена $\frac{1}{2}\ddot{u}\tau$ для получения первого порядка. В силу того, что по времени точки лишь две, нужно перейти к пространственным производным, чтобы аппроксимировать вторую производную центральной разностью. Для этого используем дифференциальные следствия исходной задачи:

$$\ddot{u} = -c\dot{u}' + \dot{f}, \quad \dot{u}' = -cu'' + f';$$

$$\ddot{u} = c^2u'' - cf' + \dot{f}$$

Аппроксимируем u'' центральной разностью:

$$u'' \approx \frac{y_{m+1}^n - 2y_m^n + y_{m-1}^n}{h^2}$$

Вычтем $\frac{\tau}{2}u''$, заменив u'' аппроксимацией. Получаем разностную схему:

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} + c \frac{y_{m+1}^n - y_{m-1}^n}{2h} - c^2 \tau \frac{y_{m+1}^n - 2y_m^n + y_{m-1}^n}{2h^2} = f_m^n + \frac{c\tau}{2} f' - \frac{\tau}{2} \dot{f}$$

Полученная схема будет иметь порядок аппроксимации $O(\tau^2, h^2)$

3 Гиперболические системы уравнений в частных производных первого порядка. Инварианты Римана. Корректная постановка краевых условий для гиперболических систем уравнений

Рассмотрим систему одномерных дифференциальных уравнений первого порядка вида:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + A \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \vec{f}$$

где $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, матрица A - с постоянными коэффициентами

Определение Система является гиперболической в том случае, если матрица A обладает полным набором левых собственных векторов (различные вещественные собственные числа различны (строгая гиперболичность))

$$\exists \{ \lambda_i, \vec{e}_i \}_{i=1}^n \quad \vec{e}_i^T A = \lambda_i \vec{e}_i^T$$

Тогда исходная система приводится к несвязным линейным уравнениям переноса относительно новых переменных - **инвариантов Римана**

$$\mathbf{E} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \mathbf{E} A \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \mathbf{E} \vec{f}$$

$$\frac{\partial \mathbf{E} \vec{u}}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial \mathbf{E} \vec{u}}{\partial x} = \mathbf{E} \vec{f}$$

где \mathbf{E} - матрица строки которой составлены из собственных векторов матрицы A , Λ - диагональная матрица с элементами на диагонали - собственные значения A

Переменные задаваемые соотношением $R = (R_1, R_2, R_3) = \mathbf{E} \vec{u}$ - инварианты Римана

3.1 Граничные условия

Задача является поставленной корректно, если заданы начальные условия для всех компонент вектора \vec{u} и граничные условия удовлетворяющие:

- На левой границе - условия и значения инвариантов приходящих с правой границы должны давать возможность определить значения инвариантов уходящих с левой границы внутрь расчетной области
- На правой границе - условия и значения инвариантов приходящих с левой границы должны давать возможность определить значения инвариантов уходящих с правой границы внутрь расчетной области

Если условия на границе и выражения для инвариантов линейно зависят от компонент \vec{u} , то для корректности достаточно чтобы СЛАУ была разрешима.

4 Первое дифференциальное приближение (ПДП) разностной схемы

4.1 Понятие первого дифференциального приближения (ПДП)

Рассмотрим линейное уравнение переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad a = \text{const},$$

и разностную схему, аппроксимирующую данное уравнение,

$$\mathcal{L}y = 0.$$

Определение. Первым дифференциальным приближением (ПДП) разностной схемы называется дифференциальное уравнение, получаемое из разностной схемы путём:

1. подстановки точного гладкого решения $u(x, t)$ вместо сеточной функции y_m^n ;
2. разложения всех разностных выражений в ряд Тейлора;
3. отбрасывания членов более высокого порядка малости.

ПДП описывает **не исходное уравнение**, а то дифференциальное уравнение, которое *фактически решает* разностная схема.

4.2 ПДП для схемы «явный уголок»

Рассмотрим схему «явный уголок» при $a > 0$:

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} + a \frac{y_m^n - y_{m-1}^n}{h} = 0.$$

Подставляем точное решение $u(x, t)$:

$$u(x_m, t^{n+1}) = u + \tau u_t + \frac{\tau^2}{2} u_{tt} + O(\tau^3),$$

$$u(x_m - h, t^n) = u - h u_x + \frac{h^2}{2} u_{xx} + O(h^3).$$

Подставляя в схему:

$$\frac{u + \tau u_t + \frac{\tau^2}{2} u_{tt} - u}{\tau} + a \frac{u - (u - h u_x + \frac{h^2}{2} u_{xx})}{h} = 0.$$

Упрощая, получаем:

$$u_t + \frac{\tau}{2} u_{tt} + a u_x - \frac{ah}{2} u_{xx} + O(\tau^2 + h^2) = 0.$$

Отбрасывая члены более высокого порядка, получим **гиперболическую форму ПДП**:

$$\boxed{u_t + a u_x = \frac{ah}{2} u_{xx} - \frac{\tau}{2} u_{tt}.$$

Используя дифференциальное продолжение:

$$u_t = -au_x, \quad u_{tt} = a^2 u_{xx}.$$

Подставляя, получим **параболическую форму ПДП**:

$$u_t + au_x = \left(\frac{ah}{2} - \frac{a^2\tau}{2} \right) u_{xx}.$$

Получаем ПДП:

$$u_t + au_x = \mu u_{xx}, \quad \mu = \frac{ah}{2}(1 - \sigma), \quad \sigma = \frac{a\tau}{h},$$

где σ – число Куранта, μ – коэффициент схемной вязкости.

4.3 Устойчивость как корректность задачи для ПДП.

Рассмотрим задачу Коши для первого дифференциального приближения. Корректность данной задачи определяется знаком коэффициента μ . При $\mu \geq 0$ уравнение является параболическим (или гиперболическим при $\mu = 0$), и задача Коши корректно поставлена по Адамару, то есть решение существует, единственно и непрерывно зависит от начальных данных. В случае $\mu < 0$ уравнение становится обратно-параболическим, что приводит к экспоненциальному росту малых возмущений и, следовательно, к некорректности задачи.

Таким образом, необходимым условием корректности ПДП является неравенство

$$\mu \geq 0.$$

Подставляя выражение для коэффициента μ , получаем

$$\frac{ah}{2}(1 - \sigma) \geq 0.$$

Поскольку при $a > 0$ и $h > 0$ выполняется неравенство

$$\frac{ah}{2} > 0,$$

знак коэффициента μ определяется только выражением $(1 - \sigma)$. Отсюда следует условие

$$1 - \sigma \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sigma \leq 1,$$

или

$$\frac{a\tau}{h} \leq 1.$$

Следовательно, при выполнении условия Куранта $\sigma \leq 1$ первое дифференциальное приближение схемы «явный уголок» является корректно поставленной задачей по Адамару.

Утверждение. Если первое дифференциальное приближение

- является корректно поставленной задачей по Адамару;
- имеет коэффициент диффузии $\mu \geq 0$,

то соответствующая разностная схема является устойчивой.

Из выполненных рассуждений следует, что при условии

$$\frac{a\tau}{h} \leq 1$$

схема «явный уголок» устойчива.