

## X24 — Физика дождевых капель

**A1<sup>1.00</sup>** Найдите изменение свободной энергии водяного пара, если из него образовать каплю радиуса  $r$ . Выразите ответ через  $r, \sigma, \phi, R, T, \rho_L, \mu$ .

**0.30** Записан поверхностный вклад в свободную энергию  $\Delta G_{surf} = 4\pi\sigma r^2$ .

**0.20** Найдено количество вещества в капле  $\nu = \frac{4\pi\rho_L r^3}{3\mu}$ .

**0.30** Объемный вклад в свободную энергию  $-\frac{4\pi\rho_L}{3\mu} r^3 RT \ln \phi$

**0.20** Правильные знаки

**A2<sup>0.80</sup>** Найдите критическое значение радиуса капли  $r_c$ , при котором  $\Delta G$  максимально, а также соответствующее значение  $\Delta G_c$ . Выразите ответ через  $\sigma, \phi, R, T, \rho_L, \mu$ . Найдите численное значение  $r_c$  при  $\phi = 1.01$ .

**0.20** Вычислена производная  $\partial\Delta G/\partial r$

**0.20**  $r_c = \frac{2\sigma\mu}{\rho_L RT \ln \phi}$ .

**0.10**  $r_c = 1.15 \cdot 10^{-7} \text{ м}$

**0.30**

$$\Delta G_c = \frac{16\pi}{3} \frac{\sigma^3 \mu^2}{\rho_L^2 R^2 T^2 \ln^2 \phi}$$

-

**0.10** Ошибка в безразмерном численном коэффициенте в  $\Delta G_c$

**A3<sup>0.70</sup>** Рассмотрим каплю критического радиуса  $r_c$ . Определите время  $\tau$ , за которое количество молекул в ней увеличится на  $g$ . Выразите ответ через  $r_c, g, p_s, m, k, T, \phi$ . Считайте, что в процессе роста радиус капли не меняется, испарением молекул из капли можно пренебречь. Известно, что на площадь  $dS$  поверхности за время  $dt$  попадает

$$dN = dt dS \frac{p_v}{\sqrt{2\pi m k T}}$$

молекул. Здесь  $p_v$  - давление пара,  $m$  - масса молекул,  $T$  - температура газа.

**0.10**  $p_v = p_s \phi$

**0.30** Записан полный поток молекул в каплю

**0.30**

$$\tau = \frac{g \sqrt{2\pi m k T}}{4\pi r_c^2 p_s \phi}.$$

-

**0.20** Ошибка в численном коэффициенте

**A4<sup>0.60</sup>** Найдите количество капель  $J$ , которые образуются в единицу времени в единице объема перенасыщенного водяного пара. Выразите ответ через  $\sigma, \phi, p_s, r_c, T, g$ .

**0.10** Использована формула  $J = n_c/\tau$

**0.40**

$$J = \frac{4\pi r_c^2}{\sqrt{2\pi m k T}} \frac{p_s^2 \phi^2}{k T} \frac{1}{g} \exp\left(-\frac{16\pi}{3 k T} \frac{\sigma^3 \mu^2}{\rho_L^2 R^2 T^2 \ln^2 \phi}\right) = \frac{4\pi r_c^2}{\sqrt{2\pi m k T}} \frac{p_s^2 \phi^2}{k T} \frac{1}{g} \exp\left(-\frac{4\pi r_c^2 \sigma}{3 k T}\right).$$

**0.10** Концентрация выражена через давление  $p_s$

**0.20** Ошибка в численном коэффициенте или в ответе остались не приведенные в условии величины

**A5<sup>0.90</sup>** Из результатов предыдущего пункта следует, что скорость образования капель очень сильно зависит от коэффициента перенасыщения пара. Определите численно значение коэффициента перенасыщения пара  $\phi$ , при котором при температуре  $T = 283\text{K}$  в  $1\text{см}^3$  воздуха рождается одна капля в секунду. Считайте, что  $g = 100$ . Остальные численные данные приведены в начале задачи.

2 ×

**0.20** Найдены численные значения коэффициента перед экспонентой ( $J_0$ ) и постоянной в экспоненте  $A$ , или аналогичные им

**0.50** Численный ответ  $\phi \in [3.8, 3.9]$

**B1<sup>0.80</sup>** Для насыщенного пара, находящегося в равновесии с жидкостью, выразите производную давления по температуре  $dp_s/dT$  через  $p_s$ ,  $L$ ,  $R$ ,  $T$ ,  $\mu$ . Используя полученный результат, найдите относительное изменение плотности насыщенного водяного пара  $\Delta\rho_s/\rho_s$  при малом изменении температуры  $\Delta T$ . Выразите ответ через  $\Delta T$ ,  $T$ ,  $L$ ,  $\mu$ ,  $R$ . Вы можете использовать связь малых изменений давления, плотности и температуры идеального газа

$$\frac{\Delta p_s}{p_s} = \frac{\Delta \rho_s}{\rho_s} + \frac{\Delta T}{T}.$$

**0.30** Использовано или получено уравнение Клапейрона-Клаузиуса в любом виде

**0.20**

$$\frac{dp_s}{dT} = \frac{L\mu p_s}{RT^2}.$$

**0.30**

$$\frac{\Delta \rho_s}{\rho_s} = \frac{\Delta T}{T} \left( \frac{\mu L}{RT} - 1 \right).$$

**B2<sup>0.20</sup>** Выразите  $dQ/dt$  через  $dM/dt$  и  $L$ .

**0.20**

$$\frac{dQ}{dt} = L \frac{dM}{dt}$$

**B3<sup>0.30</sup>** Используя результат предыдущего пункта и уравнение теплопроводности, выразите разность температур капли и атмосферы,  $T_r - T$ , через  $dM/dt$ , а также  $r$ ,  $L$ ,  $K$ .

**0.10**

$$T_r - T = \frac{1}{4\pi r K} \frac{dQ}{dt}$$

**0.20**

$$T_r - T = \frac{L}{4\pi r K} \frac{dM}{dt}.$$

**B4<sup>0.30</sup>** Будем считать, что вблизи поверхности капли плотность водяного пара равна плотности насыщенного пара при температуре капли. Считая разности температур и плотностей малыми и используя результаты B1, B3 выразите отношение  $(\rho_r - \rho_s)/\rho_s$  ( $\rho_r$  - давление пара вблизи поверхности капли) через  $L$ ,  $r$ ,  $K$ ,  $\mu$ ,  $R$ ,  $T$  и  $dM/dt$ .

**0.30**

$$\frac{\rho_r - \rho_s}{\rho_s} = \left( \frac{\mu L}{RT} - 1 \right) \frac{L}{4\pi r K T} \frac{dM}{dt}.$$

**B5<sup>0.30</sup>** Используя уравнение диффузии, выразите отношение  $(\rho_r - \rho_v)/\rho_s$  через  $dM/dt$ ,  $r$ ,  $D$ ,  $\rho_s$ .

0.30

$$\frac{\rho_r - \rho_v}{\rho_s} = -\frac{1}{4\pi r \rho_s D} \frac{dM}{dt}$$

-

0.10 Ошибка в знаке

B6<sup>0.60</sup>

Исключив из ответов в двух предыдущих пунктах плотность пара вблизи поверхности капли  $\rho_r$ , получите выражение для  $dM/dt$ . Выразите ответ через  $\varphi, \mu, R, T, D, p_s, L, K, r$ .

0.30

Получено корректное соотношение, не содержащее  $\rho_r$

0.30

$$\frac{dM}{dt} = \frac{4\pi r(\varphi - 1)}{\left(\frac{\mu L}{RT} - 1\right) \frac{L}{KT} + \frac{RT}{\mu p_s D}}$$

-

0.10 Не подставлено значение  $\rho_s$ B7<sup>0.50</sup>

Скорость увеличения радиуса капли имеет вид

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\xi}{r^k}.$$

Определите  $k$  и  $\xi$ , выразите ответ через  $\varphi, \rho_L, \mu, R, T, D, p_s, L, K$ .

0.20

$dr/dt$  выражено через  $dM/dt$

0.10

$k = 1$

0.20

$$\xi = \frac{\varphi - 1}{\left(\frac{\mu L}{RT} - 1\right) \frac{L}{KT} + \frac{RT}{\mu p_s D}} \frac{1}{\rho_L}.$$

B8<sup>0.50</sup>

Найдите зависимость радиуса капли от времени. Начальный радиус капли равен  $r_0$ . Выразите ответ через  $r_0, \xi, t$ .

0.20

Уравнение корректно проинтегрировано

0.30

$$r(t) = \sqrt{r_0^2 + 2\xi t}.$$

-

0.10 Ошибка в численном коэффициенте

B9<sup>0.50</sup>

Пусть начальный радиус капли равен  $r_0 = 0.7$  мкм. Найдите численное значение времени, за которое она вырастет до размера  $r_1 = 10$  мкм при коэффициенте перенасыщения  $\varphi = 1.1$ . Остальные численные значения приведены в начале этой части.

0.30

$$t = \frac{r_1^2 - r_0^2}{2\xi}$$

0.20

$$t = 5.50 \text{ с.}$$