# X24 — Атмосферное электричество

**A1**[0.80] Пусть проводящий шар радиусом $R$, несущий заряд $Q$, помещён в однородное электростатическое поле напряжённостью $\vec{E}_0$. Определите полную напряжённость $\vec{E}$ электрического поля в точке с радиус-вектором $\vec{r}$ относительно центра шара, находящейся вне шара. Ответ выразите через $Q$, $\vec{E}_0$, $R$, $\varepsilon_0$ и $\vec{r}$.

**0.20** Указано, что напряжённость электростатического поля вне шара представляет собой суперпозицию однородного поля, поля точечного заряда и поля диполя, расположенного в центре шара.

**0.10** Записано выражение для напряжённости поля диполя с дипольным моментом $\vec{p}$:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right).$$

**0.20** Предложен метод определения дипольного момента шара.

**0.20** Определён дипольный момент шара:

$$\vec{p} = 4\pi R^3 \varepsilon_0 \vec{E}_0$$

**0.10** Получен ответ:

$$\vec{E} = \vec{E}_0\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right) + \frac{3(\vec{E}_0\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^2}\frac{R^3}{r^3} + \frac{Q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}.$$

**A2**[0.40] Пусть $\theta$ - угол между направлением вектора электростатического поля $\vec{E}_0$ и радиус-вектором $\vec{r}$ некоторой точки поверхности шара относительно его центра. Определите проекцию напряжённости электрического поля $E_n(\theta)$ на направление нормали. Ответ выразите через $Q$, $E_0$, $R$, $\varepsilon_0$ и $\theta$.

**0.40** Получено выражение для $E_n$:

$$E_n = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} + 3E_0\cos\theta$$

**A3**[0.20] При каких значениях заряда $Q$ шара величина $E_n$ может обращаться в ноль? Ответ выразите через $E_0$, $\varepsilon_0$ и $R$. Далее во всех пунктах считайте, что заряд шара $Q$ попадает в найденный вами диапазон.

**0.10** Записано условие равенства нулю компоненты напряжённости $E_n$:

$$Q = -12\pi\varepsilon_0 R^2 E_0\cos\theta.$$

**0.10** Определён искомый диапазон $Q$:

$$Q \in \left[-12\pi R^2\varepsilon_0 E_0; 12\pi R^2\varepsilon_0 E_0\right].$$

**A4**[0.50] Пусть заряд шара равен $Q$. При каком значении угла $\theta_0$ компонента напряжённости $E_n(\theta_0)$ обращается в ноль? Ответ выразите через $Q$, $E_0$, $\varepsilon_0$ и $R$. Определите также, при каких значениях угла $\theta$ на поверхность шара попадают отрицательные ионы, а при каких - положительные. Ответы выразите через $\theta_0$.

**0.10** Определено значение угла $\theta_0$:

$$\theta_0 = \arccos\left(-\frac{Q}{12\pi R^2\varepsilon_0 E_0}\right).$$

**4 × 0.10** Определён диапазон углов, соответствующий попаданию ионов (по 0.1 балла за границу): Отрицательные ионы попадают на поверхность шара при $\theta \in [0,\theta_0]$; Положительные ионы попадают на поверхность шара при $\theta \in [\theta_0,\pi]$.

**A5**$^{1.00}$ Определите полную производную по времени заряда шара $dQ/dt$. Ответ выразите через $Q$, $E_0$, $\varepsilon_0$, $R$, $\sigma_+$, $\sigma_-$ и, если понадобится, $\theta_0$.

**0.20** Записано выражение для компоненты $dQ_-/dt$, обусловленной попаданием отрицательных ионов:

$$\frac{dQ_-}{dt} = -\sigma_- \int_0^{\theta_0} \left(\frac{Q}{2\varepsilon_0} + 6\pi R^2 R_0 \cos\theta\right) \sin\theta d\theta.$$

**0.20** Вычислен интеграл для $dQ_-/dt$:

$$\frac{dQ_-}{dt} = -\sigma_- \left(\frac{Q(1-\cos\theta_0)}{2\varepsilon_0} + 3\pi R^2 E_0 \sin^2\theta_0\right).$$

**0.20** Записано выражение для компоненты $dQ_+/dt$, обусловленной попаданием положительных ионов:

$$\frac{dQ_+}{dt} = -\sigma_+ \int_{\theta_0}^{\pi} \left(\frac{Q}{2\varepsilon_0} + 6\pi R^2 E_0 \cos\theta\right) \sin\theta d\theta,$$

**0.20** Вычислен интеграл для $dQ_+/dt$:

$$\frac{dQ_+}{dt} = -\sigma_+ \left(\frac{Q(1+\cos\theta_0)}{2\varepsilon_0} - 3\pi R^2 E_0 \sin^2\theta_0\right).$$

**0.20** Получен ответ для $dQ/dt$:

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q(\sigma_+ + \sigma_-)}{2\varepsilon_0} + (\sigma_+ - \sigma_-)\left(3\pi R^2 E_0 \sin^2\theta_0 - \frac{Q\cos\theta_0}{2\varepsilon_0}\right).$$

**A6**$^{0.80}$ Определите стационарный заряд шара $Q_0$, при котором он остаётся постоянным во времени. Ответ выразите через $E_0$, $\varepsilon_0$, $R$, $\sigma_+$ и $\sigma_-$.

**0.40** Подставлено значение $\theta_0$ и получено квадратное уравнение относительно $Q_0$:

$$Q_0^2 - Q_0\frac{24\pi R^2\varepsilon_0 E_0(\sigma_+ + \sigma_-)}{(\sigma_+ - \sigma_-)} + 144\pi^2 R^4 \varepsilon_0^2 E_0^2 = 0.$$

**0.20** Правильно решено квадратное уравнение:

$$Q_0 = 12\pi R^2 \varepsilon_0 E_0 \left(\frac{\sqrt{\sigma_+} + \sqrt{\sigma_-}}{\sqrt{\sigma_+} - \sqrt{\sigma_-}}\right)^{\pm 1}.$$

**0.20** Выбран нужный корень и получен ответ для $Q_0$:

$$Q_0 = 12\pi R^2 \varepsilon_0 E_0 \left( \frac{\sqrt{\sigma_+} - \sqrt{\sigma_-}}{\sqrt{\sigma_+} + \sqrt{\sigma_-}} \right).$$

**A7**[0.60] При малых значениях $\Delta Q$ зависимость $\dot{Q}(\Delta Q)$ можно представить в виде:

$$\dot{Q} \approx A \Delta Q.$$

Выразите $A$ через $\sigma_+$, $\sigma_-$ и $\varepsilon_0$. Является ли найденное значение заряда $Q_0$ устойчивым? Ответ обоснуйте.

**0.30** Для зависимости $\dot{Q}(Q)$ в виде:

$$\dot{Q} = aQ^2 - bQ + c$$

записано приближение:

$$\dot{Q} = -(b - 2aQ_0)\Delta Q$$

**0.20** Определено значение $A$:

$$A = -\frac{\sqrt{\sigma_+ \sigma_-}}{\varepsilon_0}.$$

**0.10** Для своего знака $A$ сделан вывод об устойчивости значения заряда $Q_0$.

**A8**[0.30] Получите зависимость отклонения заряда шара $\Delta Q$ от времени $t$. Ответ выразите через $\Delta Q_0$, $\varepsilon_0$, $\sigma_+$, $\sigma_-$ и $t$. Покажите также, что вид временной зависимости определяется только произведением $\sigma_+ \sigma_-$.

**0.20** Для своего значения $A$ получено:

$$\Delta Q(t) = \Delta Q_0 e^{At}$$

**0.10** Получено выражение для $\Delta Q(t)$ в следующем виде:

$$\Delta Q(t) = \Delta Q_0 \exp\left( -\frac{\sqrt{\sigma_+ \sigma_-} t}{\varepsilon_0} \right).$$

**B1**[0.50] Определите вектор $\vec{E}$ напряжённости электростатического поля в области пересечения изолированных эллипсоидов. Ответ выразите через $\rho$, $\vec{l}$, $\varepsilon_0$ и $A$.

**0.20** Показано, что компоненты напряжённости $E_x$ и $E_y$ в области пересечения равны нулю.

**0.30** Получено выражение для $\vec{E}$:

$$\vec{E} = -\frac{\rho A \vec{l}}{\varepsilon_0}.$$

**- 0.10** Пункт оценивается при неправильном знаке в выражении для $\vec{E}$.

**B2**[0.30] Рассмотрим изолированный равномерно поляризованный вдоль оси $z$ эллипсоид. Пусть напряжённость электростатического поля внутри эллипсоида равняется $\vec{E}$. Определите вектор поляризации эллипсоида $\vec{P}$. Ответ выразите через $\vec{E}$, $\varepsilon_0$ и $A$.

**0.10** Записана связь величины $\rho \vec{l}$ с вектором поляризации $\vec{P}$:

$$\vec{P} = \rho \vec{l}.$$

**0.10** Выражение для $\vec{E}$ записано в виде:

$$\vec{E} = -\frac{A\vec{P}}{\varepsilon_0}.$$

**0.10** Получен ответ для $\vec{P}$:

$$\vec{P} = -\frac{\varepsilon_0 \vec{E}}{A}.$$

**B3**[0.30] Определите вектор поляризации $\vec{P}$ эллипсоида. Ответ выразите через $\vec{E}_0$, $\varepsilon_0$ и $A$. Определите также максимальную величину поверхностной плотности заряда $\sigma_{max}$ на поверхности эллипсоида. Ответ выразите через $P$.

**0.10** Получен ответ для $\vec{P}$:

$$\vec{P} = \frac{\varepsilon_0 \vec{E}_0}{A}.$$

**0.20** Получен ответ для $\sigma_{max}$:

$$\sigma_{max} = P.$$

**B4**[0.40] Выразите полную компоненту напряжённости электростатического поля $E_n$ на поверхности проводника через поверхностную плотность заряда $\sigma$ и $\varepsilon_0$. Определите максимальную величину напряжённости $E_{max}$ электростатического поля на поверхности эллипсоида. Ответ выразите через $E_0$ и $A$.

**0.20** Из теоремы Гаусса получено:

$$E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

**0.10** Указано, что величина $E_n$ максимальна при максимальном значении $\sigma$.

**0.10** Получен ответ для $E_{max}$:

$$E_{max} = \frac{E_0}{A}.$$

**B5**[0.40] В листах ответов приведён рисунок, на котором над бесконечной проводящей плоскостью расположен точечный диполь, дипольный момент которого направлен перпендикулярно плоскости. В листах ответов приведите электростатическое изображение диполя в проводящей плоскости. Используя полученный результат, приведите в листах ответов электростатическое изображение половины равномерно поляризованного эллипсоида вращения, контактирующего с проводящей плоскостью экваториальным сечением.

**0.10** Указано, что изображение точечного диполя с дипольным моментом $\vec{p}$ представляет собой диполь с тем же дипольным моментом $\vec{p}$ и расположено на том же расстоянии от плоскости.

**0.10** В листах ответов приведено электростатическое изображение точечного диполя.

**0.10** Указано, что электростатическое изображение половины равномерно поляризованного эллипсоида дополняет его до целого.

**0.10** В листах ответов приведено электростатическое изображение половины равномерно поляризованного эллипсоида.

**B6**[0.50] Покажите, что выражение для максимальной напряжённости электростатического поля $E_{max}$ совпадает с выражением, найденным в пункте B4, и найдите его численное значение. Достаточно ли величины напряжённости электростатического поля $E_0$ для пробоя воздуха в какой-либо точке пространства, если он происходит при напряжённости, равной $E_{пр} = 30$кВ/см?

**0.30** Обосновано, что если половина эллипсоида поляризована равномерно, на плоской поверхности выполняются граничные условия.

**0.10** Рассчитана величина $E_{max}$:

$$E_{max} \approx 7.4 \cdot 10^{12}\text{В/м}.$$

**0.10** Сделан вывод, что величины $E_0$ достаточно для пробоя воздуха.

**C1**[0.30] Принимая потенциал шара равным потенциалу на поверхности Земли, т.е нулю, определите величину заряда $q_0$ шара. Ответ выразите через $\varepsilon_0$, $E_0$, $R_0$ и $h$. Влиянием электростатического поля шара на электростатическое поле Земли можно пренебречь. Влиянием электростатического поля зарядов, расположенных на проводе, можно пренебречь во всём пространстве.

**0.20** Записано условие равенства потенциала шара нулю:

$$E_0 h + \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 R_0} = 0.$$

**0.10** Получен ответ для $q_0$:

$$q_0 = -4\pi\varepsilon_0 R_0 h E_0.$$

**C2**[0.40] Определите величину силы тока $I$, перетекающего из атмосферы в шар, если проводимость воздуха во всей атмосфере можно принять равной $\sigma_0$. Ответ выразите через $E_0$, $R_0$, $h$, $\varepsilon_0$ и $\sigma_0$.

**0.20** Записано выражение для силы тока $I$:

$$I = -4\pi R_0^2 \sigma_0 E.$$

**0.10** Получено выражение для $E$:

$$E = -\frac{E_0 h}{R_0}.$$

**0.10** Получен ответ для силы тока $I$:

$$I = 4\pi R_0 h \sigma_0 E_0.$$

**C3**[0.30] Запишите выражение для условия равенства нулю потенциала шара. В уравнение могут войти $E_0$, $h$, $q_0$, $q$, $R_0$ и $R$.

**0.20** Потенциал электростатического поля сферических поверхностей в центре шара составляет:

$$\varphi_q + \varphi_{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_0}{R_0} + \frac{q}{R}\right).$$

**0.10** Получено правильное уравнение:

$$E_0 h + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_0}{R_0} + \frac{q}{R}\right) = 0.$$

**C4**[0.30] Из условия равенства силы текущего тока $I$, пересекающего сферическую поверхность внутри и вне ионизированного слоя, получите уравнение, связывающее заряды $q_0$ и $q$. В уравнение также могут войти проводимости $\sigma_0$ и $\sigma$.

**0.10** Записано выражение для $I_{in}$:

$$I_{in} = -\frac{q_0 \sigma}{\varepsilon_0}.$$

**0.10** Записано выражение для $I_{out}$:

$$I_{out} = -\frac{(q_0 + q)\sigma_0}{\varepsilon_0}.$$

**0.10** Получено правильное уравнение:

$$(q_0 + q)\sigma_0 = q_0\sigma.$$

**C5**[0.20] Определите величину силы тока $I$, перетекающего из атмосферы в шар в этом случае. Ответ выразите через $E_0$, $R_0$, $R$, $h$, $\varepsilon_0$, $\sigma_0$ и $\sigma$.

**0.10** Получено выражение для $q_0$:

$$q_0 = -\frac{4\pi\varepsilon_0 R_0 h E_0}{1 + \frac{R_0}{R}\left(\frac{\sigma}{\sigma_0} - 1\right)}.$$

**0.10** Получено выражение для $I$:

$$I = \frac{4\pi R_0 h \sigma E_0}{1 + \frac{R_0}{R}\left(\frac{\sigma}{\sigma_0} - 1\right)}.$$

**C6**[0.10] Покажите, что при $R \approx R_0$ приближённое выражение для силы тока $I$ переходит в выражение, соответствующее отсутствию ионизированного слоя.

**0.10** Выражение для $I$ приведено к виду:

$$I \approx 4\pi R h \sigma_0 E_0.$$

**D1**[0.20] Определите величину дрейфовой скорости $u$ движения электронов. Ответ выразите через $e$, $E$, $\lambda$, $m$ и $\bar{v}_\text{т}$.

**0.10** Записано выражение для $a$:

$$a = \frac{eE}{m}.$$

**0.10** Получено выражение для $u$:

$$u = \frac{eE\lambda}{2m\bar{v}_\text{т}}.$$

**D2**[0.40] Из баланса энергии определите среднюю величину $\overline{\Delta W}$ потери кинетической энергии электрона при столкновении с молекулами воздуха. Ответ выразите через $e$, $E$, $\lambda$, $m$ и $\overline{W}$.

**0.20** Записано выражение для средней мощность электростатического поля по перемещения одного электрона:

$$\overline{P} = eEu$$

**0.10** Записано выражение для $\Delta W$:

$$\overline{\Delta W} = eEu\tau.$$

**0.10** Получен ответ для $\overline{\Delta W}$:

$$\overline{\Delta W} = \frac{(eE\lambda)^2}{4W}.$$

К данному пункту применяется PEP от пункта D1.

**D3**[1.00] Получите точное выражение для величины $\overline{\Delta W}/\overline{W}$. Ответ выразите через $m$ и $M$. Упростите ваш ответ с учётом $m \ll M$. Если вы не смогли решить этот пункт - в дальнейшем считайте, что $\overline{\Delta W}/\overline{W} = m/M$.

**0.20** Определена скорость молекулы воздуха в системе отсчёта центра масс:

$$v' = v_C = \frac{mv}{m+M}.$$

**0.30** Определена скорость молекулы воздуха в лабораторной системе отсчёта:

$$v_M = 2v_C \cos(\varphi/2).$$

**0.20** Записано выражение для $\overline{\Delta W}$:

$$\Delta W = \frac{Mm^2v^2}{4\pi(m+M)^2}\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)\cdot 2\pi\sin\varphi d\varphi.$$

**0.10** Вычислен интеграл для $\overline{\Delta W}$:

$$\overline{\Delta W} = \frac{Mm^2v^2}{(m+M)^2}.$$

**0.10** Получено выражение для $\overline{\Delta W}/\overline{W}$:

$$\frac{\overline{\Delta W}}{\overline{W}} = \frac{2Mm}{(M+m)^2}.$$

**0.10** Правильное приближение для $\overline{\Delta W}/\overline{W}$:

$$\frac{\overline{\Delta W}}{\overline{W}} \approx \frac{2m}{M}.$$

**D4**[0.80] Определите стационарное значение кинетической энергии теплового движения электронов $\overline{W}$ и скорости образования искрового канала $u$. Ответы выразите через $m$, $M$, $e$, $E$ и $\lambda$. Рассчитайте полученные значения.

**2 × 0.20** Получен ответ для $\overline{W}$ (по 0.2 балла за формулу и численное значение):

$$\overline{W} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{M}{2m}}eE\lambda \approx 4.2\cdot 10^{-17}\text{Дж}.$$

К данному пункту применяется PEP от пунктов D1 – D3.

**2 × 0.20** Получен ответ для $u$ (по 0.2 балла за формулу и численное значение):

$$u = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{eE\lambda\sqrt{2}}{\sqrt{Mm}}} \approx 27.6\text{км/с}.$$

К данному пункту применяется PEP от пунктов D1 – D3.