W21 — Тише, мыши...

A1[5.00] Найдите максимально возможное начальное расстояние L_{max} между мышами и Леопольдом.

Предисловие: Последняя “перестрелка” Леопольда и мышей произошла в 2002 году, с тех пор мыши кота не беспокоили. Спустя 18 лет, в 2020 году, нашлись новые подводные камушки для легендарной рогатки и мыши решили “тряхнуть стариной”. Примечание: в ходе перестрелки никто из животных не пострадал.

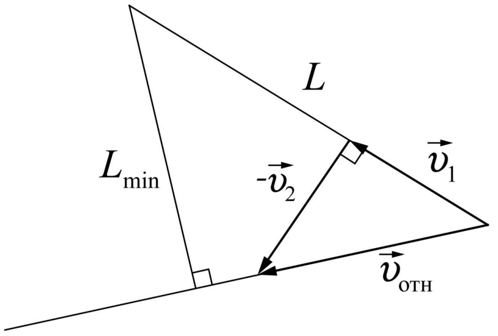

Рис. 1:

В системе отсчёта Леопольда камень движется прямолинейно с постоянной скоростью $v_{\text{отн}}$. Расстояние от Леопольда до камня минимально, когда соединяющий их отрезок перпендикулярен вектору относительной скорости (см. рис.). Из подобия треугольников определим перемещение камня относительно Леопольда:

$$S_{\text{отн}} = L\frac{v_1}{v_{\text{отн}}} = v_{\text{отн}}t$$

откуда

$$L = \frac{v_{\text{отн}}^2 t}{v_1}$$

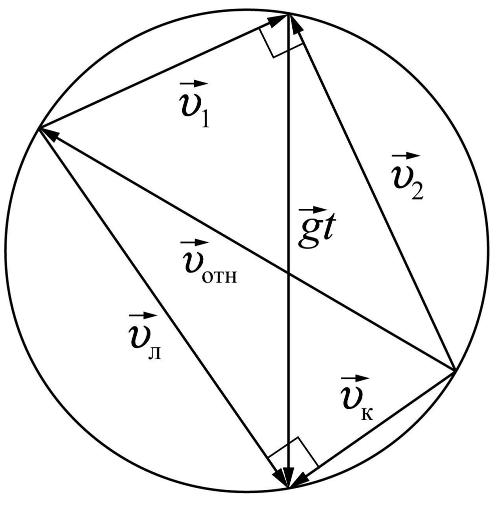

Рис. 2:

Найдем максимально возможное время, через которое скорости камня и Леопольда вновь станут перпендикулярны. Построим треугольники скоростей камня и Леопольда для максимального сближения, объединив их в один четырёхугольник. Заметим, что этот четырёхугольник можно вписать в окружность, поскольку сумма противоположных углов равна 180°. Диаметр окружности фиксирован и равен

$v_{\text{отн}}$. Поскольку L максимально при максимальном значении t, необходимо, чтобы вторая диагональ четырёхугольника, равная gt, также была максимальна. Это достигается если gt – диаметр данной окружности. Таким образом,

$$t_{max} = \frac{v_{\text{отн}}}{g}$$

и окончательно:

$$L_{max} = \frac{v_{\text{отн}}^3}{gv_1} = \frac{\left(v_1^2 + v_2^2\right)^{\frac{3}{2}}}{gv_1}$$

Второе решение

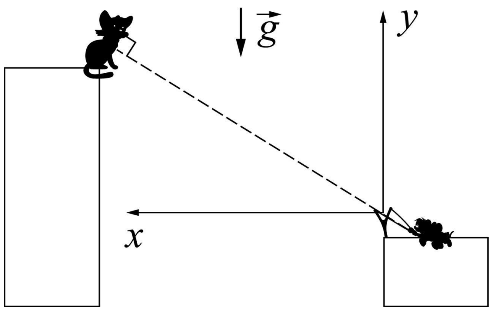

Рис. 3:

Введём систему координат, как показано на рисунке. Пусть угол, под которым брошен камень к горизонту, равен α. Получим зависимости координат, проекций скоростей и расстояния между камнем и Леопольдом от времени.

$$x_{\text{к}} = v_1 t \cos\alpha; \, y_{\text{к}} = v_1 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$$

$$v_{y\text{к}} = v_1 \sin\alpha - gt; \, v_{x\text{к}} = v_1 \cos\alpha$$

$$x_{\text{л}} = L\cos\alpha - v_2 t \sin\alpha; \, y_{\text{л}} = L\sin\alpha + v_2 t\cos\alpha - \frac{gt^2}{2}$$

$$v_{y\text{л}} = v_1 \cos\alpha - gt; \, v_{x\text{л}} = -v_1 \sin\alpha$$

Расстояние между Леопольдом и камнем назовём l.

$$l^2 = (x_{\text{к}} - x_{\text{л}})^2 + (y_{\text{к}} - y_{\text{л}})^2$$

$$l^2 = (L\cos\alpha - (v_1\cos\alpha + v_2\sin\alpha)t)^2 + (L\sin\alpha - (v_1\sin\alpha - v_2\cos\alpha)t)^2$$

$$l^2 = L^2 - 2v_1 L t + (v_1^2 + v_2^2)t^2$$

Минимальное значение l достигается в вершине параболы в момент времени

$$\tau = Lv_1/(v_1^2 + v_2^2)$$

Для нахождения максимально возможного значения L необходимо найти максимально возможное значение τ. Пусть в момент времени τ скорость камня направлена под углом β к горизонту. Поскольку в данный момент времени скорости Леопольда и камня перпендикулярны, скорость Леопольда направлена под углом $90 - \beta$ к горизонту. Значит, для этого момента времени можно записать

$$v_{y\text{к}}/v_{x\text{к}} = -v_{x\text{л}}/v_{y\text{л}}$$

$$(v_1\sin\alpha - g\tau)(v_2\cos\alpha - g\tau) - v_1 v_2 \sin\alpha\cos\alpha = 0$$

Из последнего соотношения находим τ

$$\tau = \frac{v_1 \sin\alpha + v_2 \cos\alpha}{g}$$

Комбинируя два способа получения τ, получим зависимость расстояния от угла броска камня

$$L = \frac{(v_1^2 + v_2^2)(v_1 \sin\alpha + v_2 \cos\alpha)}{g v_1}$$

Для нахождения максимума L необходимо найти максимум величины $v' = (v_1 \sin\alpha + v_2 \cos\alpha)$

$$(v' - v_1 \sin\alpha)^2 = v_2^2(1 - \sin^2\alpha)$$

$$(v_1^2 + v_2^2)\sin^2\alpha - 2v' v_1 \sin\alpha + v^{2'} - v_2^2 = 0$$

Найдём дискриминант квадратного уравнения относительно $\sin\alpha$

$$D = 4v^{2'} v_1^2 - 4(v_1^2 + v_2^2)(v^{2'} - v_2^2)$$

$$D = 4v_2^2(v_1^2 + v_2^2) - v^{2'})$$

Максимальное значение v' достигается при нулевом дискриминанте и равно

$$v' = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

Таким образом

Ответ:

$$L_{max} = \frac{(v_1^2 + v_2^2)^{\frac{3}{2}}}{g v_1}$$

A2[5.00] Найдите значения скоростей v_1 и v_2. Ускорение свободного падения $g = 9,8$м/с^2.

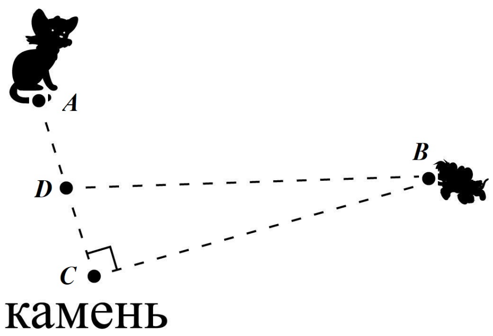

Рис. 4:

Заметим, что вектор средней скорости камня в момент фотографии равен $\frac{\vec{v_{отн}}}{2}$, в вектор средней скорости Леопольда $-\frac{\vec{v_{отн}}}{2}$. Это значит, что перемещения камня и Леопольда равны по модулю и противоположны по направлению. Пусть D - середина отрезка AC. Тогда из условия равенства перемещений по модулю следует, что $BD = \frac{L}{2}$, а также, что треугольник DCB - прямоугольный, причём $\frac{v_2}{v_1} = \frac{CD}{BC}$. Измеряя BC, BD и CD, получим

$$v_2 = \frac{CD}{BC} v_1$$

$$BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = \frac{(v_1^2 + v_2^2)^{\frac{3}{2}}}{2 g v_1} = \frac{(BC^2 + CD^2)^{\frac{3}{2}}}{BC^3} \frac{v_1^2}{2g}$$

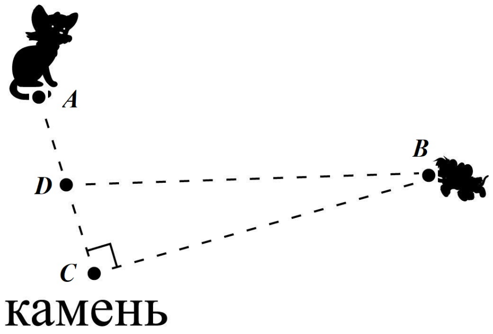

Рис. 5:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gBC}{BC^2 + CD^2}}BC = 10{,}8\text{м/с}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2gBC}{BC^2 + CD^2}}CD = 2{,}7\text{м/с}$$

Ответ:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gBC}{BC^2 + CD^2}}BC = 10{,}8\text{м/с}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2gBC}{BC^2 + CD^2}}CD = 2{,}7\text{м/с}$$

Второе решение

Выражение для $\sin\alpha$ из решения предыдущего пункта

$$\sin\alpha = \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

Найдём координаты камня и расстояние между ним и Леопольдом в момент времени τ

$$x_\text{к} = v_1\tau\cos\alpha = \frac{v_1 v_2}{g}$$

$$y_\text{к} = v_1\tau\sin\alpha - \frac{g\tau^2}{2} = \frac{v_1^2}{g} - \frac{v_1^2 + v_2^2}{2g} = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g}$$

$$l = \frac{(v_1^2 + v_2^2)v_2}{gv_1}$$

Таким образом, перемещение камня

$$S_\text{к} = \frac{v_1^2 + v_2^2}{2g}$$

Измеряя перемещение камня, а также расстояние между ним и Леопольдом, мы получим систему из двух уравнений с двумя неизвестными. Выразим начальные скорости через l и S_k

$$\frac{S_k}{l} = \frac{v_1}{2v_2}$$

$$v_2 = \frac{l}{2S_k}v_1$$

$$S_k = \frac{1 + \frac{l^2}{4S_k^2}}{2g}v_1^2$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{8gS_k}{l^2 + 4S_k^2}}S_k = 10{,}8\text{м/с}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2gS_k}{l^2 + 4S_k^2}}l = 2{,}7\text{м/с}$$