X24 — Проводники в магнитном поле

A1[0.60] Пусть момент времени $t_0 = 0$ груз находится в начале координат, а проекция его скорости на ось x равна v_0. Определите зависимости координаты $x(t)$ и скорости $v_x(t)$ груза от времени t. Ответ выразите через v_0, γ, ω_0 и t.

Запишем уравнение движения груза:

$$m\ddot{x} = -\beta\dot{x} - kx \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\beta}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

С учётом введённых обозначений:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Будем искать решение в комплексной форме:

$$x = Re\left\{Ae^{\lambda t}\right\},$$

где $A \neq 0$ и λ - некоторые комплексные числа. Тогда:

$$A\left(\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2\right) = 0 \Rightarrow \lambda = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}.$$

Решение представляет собой сумму решений, соответствующих разным значениям λ:

$$x(t) = e^{-\gamma t} Re\left\{A_1 e^{i\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}t} + A_2 e^{-i\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}t}\right\} = Ce^{-\gamma t}\sin\left(\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}t + \varphi_0\right),$$

где C и φ_0 - действительные числа. Дифференцируя:

$$v_x(t) = Ce^{-\gamma t}\left(\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}t + \varphi_0\right) - \gamma\sin\left(\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}t + \varphi_0\right)\right).$$

Для момента времени $t = 0$ имеем:

$$\begin{cases} x(0) = C\sin\varphi_0 \\ v_x(0) = C\left(\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\cos\varphi_0 - \gamma\sin\varphi_0\right) \end{cases}$$

С учётом начальных условий:

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ v_x(0) = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_0 = 0 \\ C = \dfrac{v_0}{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}} \end{cases}$$

Окончательно получим:

Ответ:

$$x(t) = \frac{v_0}{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}e^{-\gamma t}\sin\left(\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}t\right).$$

Ответ:

$$v_x(t) = \frac{v_0\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}e^{-\gamma t}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}t + \arcsin\frac{\gamma}{\omega_0}\right).$$

A2[0.40] Получите точное выражение для Q. Ответ выразите через ω_0 и γ.

Перепишем выражение для добротности в следующем виде:

$$Q = \frac{2\pi}{1 - \left(\frac{v_1}{v_0}\right)^2},$$

где v_1 - проекция скорости груза при повторном прохождении начала координат с тем же направлением скорости. Величина скорости v_1 достигается через период T, равный:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}.$$

Тогда:

$$\frac{v_1}{v_0} = e^{-\gamma T} = e^{-2\pi\gamma/\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}},$$

откуда получим:

Ответ:

$$Q = \frac{2\pi}{1 - e^{-4\pi\gamma/\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}}.$$

A3$^{0.20}$ Получите приближённое выражение для добротности Q при слабом затухании ($\gamma \ll \omega_0$). Ответ выразите через m, k и β.

Разложение знаменателя при $\gamma \ll \omega_0$ следующее:

$$1 - e^{-4\pi\gamma/\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}} \approx 1 - e^{-4\pi\gamma/\omega_0} \approx 1 - \left(1 - \frac{4\pi\gamma}{\omega_0}\right) = \frac{4\pi\gamma}{\omega_0},$$

откуда получим приближение для добротности при слабом затухании Q:

$$Q \approx \frac{\omega_0}{2\gamma}.$$

Подставляя ω_0 и γ, получим:

Ответ:

$$Q \approx \frac{\sqrt{mk}}{\beta(H)}.$$

B1$^{0.60}$ Отклонение x груза от положения зависит от времени t следующим образом:

$$x(t) = A\sin(\Omega t + \varphi_0)$$

Найдите A и φ_0. Ответы выразите через A_0, Ω, ω_0 и γ.

Уравнение движения следующее:

$$m\ddot{x} = k(A_0 \sin\Omega t - x) - \beta\dot{x},$$

откуда:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2\Delta x = \omega_0^2 A_0 \sin\Omega t.$$

Будем искать решение в виде:

$$x = Re\left\{\hat{A}e^{i\Omega t}\right\},$$

где $\hat{A} \neq 0$ - некоторое комплексное число. Тогда:

$$\hat{A}\left((\omega_0^2 - \Omega^2) + 2i\Omega\gamma\right) = \omega_0^2 A_0 e^{-i\pi/2}.$$

Выразим A:

$$\hat{A} = \frac{\omega_0^2 A_0\left((\omega_0^2 - \Omega^2) - 2i\Omega\gamma\right)e^{-i\pi/2}}{\left((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2\right)} = \frac{A_0\omega_0^2 e^{-i(\pi/2-\varphi)}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega_0^2}},$$

где φ - аргумент комплексного числа $z = (\omega_0^2 - \Omega^2) - 2i\Omega\gamma$. Извлекая действительную часть, найдём:

$$\Delta x(t) = \frac{A_0\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}}\sin\left(\Omega t + \varphi\right).$$

Таким образом:

$$A = \frac{A_0\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}} \qquad \varphi_0 = \varphi.$$

При определении φ есть три случая:

$$\varphi = \begin{cases} -\arctan\dfrac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \quad \text{при} \quad \Omega < \omega_0 \\ -\dfrac{\pi}{2} \quad \text{при} \quad \Omega = \omega_0 \\ -\pi - \arctan\dfrac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \quad \text{при} \quad \Omega > \omega_0 \end{cases}$$

Таким образом:

Ответ:

$$A = \frac{A_0\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}}.$$

$$\varphi_0 = \begin{cases} -\arctan\dfrac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \quad \text{при} \quad \Omega < \omega_0 \\ -\dfrac{\pi}{2} \quad \text{при} \quad \Omega = \omega_0 \\ -\pi - \arctan\dfrac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \quad \text{при} \quad \Omega > \omega_0 \end{cases}$$

B2$^{0.30}$ Получите точные выражения для резонансной циклической частоты $\Omega_{рез}$ и соответствующей ей амплитуды колебаний $A_{рез}$. Ответы выразите через ω_0, γ и A_0. Считайте, что $\gamma\sqrt{2} < \omega_0$.

Дифференцируя знаменатель по Ω^2, получим:

$$-2(\omega_0^2 - \Omega^2) + 4\gamma^2 = 0,$$

откуда:

Ответ:

$$\Omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}.$$

Подставляя $\Omega_{рез}$ в выражение для A, находим:

Ответ:

$$A_{\text{рез}} = \frac{A_0\omega_0^2}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}.$$

B3[0.30] Получите приближённые выражения для $\Omega_{\text{рез}}$, $A_{\text{рез}}$ и $\Delta\omega$ при слабом затухании ($\gamma \ll \omega_0$). Ответы выразите через A_0, ω_0 и γ.

Упрощённые выражения для $\Omega_{\text{рез}}$ и $A_{\text{рез}}$ получаются тривиально и принимают следующий вид:

Ответ:

$$\Omega_{\text{рез}} \approx \omega_0 \qquad A_{\text{рез}} \approx \frac{A_0\omega_0}{2\gamma}.$$

Рассмотрим циклическую частоту $\Omega = \Omega_{\text{рез}} + \Delta\Omega$, где $\Delta\Omega \ll \Omega_{\text{рез}}$. Величину $\Omega_{\text{рез}}$ можно считать равной ω_0, поскольку:

$$\Omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \approx \omega_0 - \frac{\gamma^2}{\omega_0}.$$

Отклонение $\Omega_{\text{рез}}$ от ω_0 представляет собой величину второго порядка малости. Тогда для подкоренного выражения получим:

$$\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\Omega^2 \approx \left(\omega_0^2 - (\omega_0+\Delta\Omega)\right)^2 + 4\gamma^2\left(\omega_0+\Delta\Omega\right)^2 \approx 4\omega_0^2\Delta\Omega^2 + 4\gamma^2\omega_0^2.$$

Величина $\Delta\Omega$ такова, что подкоренное выражение вдвое больше соответствующего резонансу. Отсюда:

$$4\Delta\Omega^2\omega_0^2 + 4\gamma^2\omega_0^2 = 8\gamma^2\omega_0^2 \Rightarrow \Delta\Omega_{1,2} = \pm\gamma.$$

Поскольку $\Delta\omega = \Delta\Omega_1 - \Delta\Omega_2$, получим:

Ответ:

$$\Delta\omega = 2\gamma.$$

C1[0.30] Найдите индукцию B_x магнитного поля кольца на его оси в точке с координатой x. Ответ выразите через x, R, I и магнитную постоянную μ_0.

Из закона Био-Савара-Лапласа:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\left[\vec{r}\times d\vec{r}\right]}{r^3},$$

где $\vec{r}$ - радиус-вектор элемента кольца относительно точки с координатой x. Для каждой точки кольца:

$$r = \sqrt{R^2+x^2}.$$

Интеграл по контуру от векторного произведения получим из его геометрического смысла:

$$\oint_L \left[\vec{r}\times d\vec{r}\right] = 2\vec{S} = 2\pi R^2\vec{e}_x,$$

откуда:

Ответ:

$$B_x(x) = \frac{\mu_0 I R^2}{2\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}.$$

C2[1.00] Определите магнитный момент $\vec{m}$ диска. Ответ выразите через $\vec{e}_x$, r_0, h, ρ и $\dot{B}$.

Из закона электромагнитной индукции Фарадея получим:

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\pi r^2 \dot{B} = 2\pi r E_{\text{вихр}},$$

откуда:

$$E_{\text{вихр}} = -\frac{\dot{B}r}{2}.$$

Из закона Ома в дифференциальной форме:

$$\vec{j} = \frac{\vec{E}}{\rho},$$

откуда:

$$j(r) = -\frac{\dot{B}r}{2\rho}.$$

Момент кольцевого тока высотой h и толщиной dr равен:

$$dm_x = \pi r^2 dI = \pi r^2 jhdr = -\frac{\pi \dot{B} h}{2\rho} r^3 dr,$$

откуда:

$$m_x = -\frac{\pi \dot{B} h}{2\rho} \int\limits_0^{r_0} r^3 dr.$$

Интегрируя, находим:

Ответ:

$$\vec{m} = -\vec{e}_x \cdot \frac{\pi r_0^4 h \dot{B}}{8\rho}.$$

C3$^{0.50}$ Определите магнитный момент $\vec{m}$ шара. Ответ выразите через $\vec{e}_x$, R_0, ρ и $\dot{B}$.

Воспользуемся сферическими координатами (т.е будем отсчитывать угол θ от положительного направления оси x). Тогда для r_0 и h имеем:

$$r_0 = R_0 \sin\theta \qquad h = d(R_0(1-\cos\theta)) = R_0 \sin\theta d\theta.$$

Тогда для элемента магнитного момента шара имеем:

$$dm_x = -\frac{\pi R_0^5 \dot{B}}{8\rho} \sin^5\theta d\theta,$$

откуда:

$$m_x = -\frac{\pi R_0^5 \dot{B}}{8\rho} \int\limits_0^{\pi} \sin^5\theta d\theta.$$

Проинтегрируем полученное выражение с помощью подстановки $x = \cos\theta$:

$$\int\limits_0^{\pi} \sin^5\theta d\theta = \int\limits_{-1}^{1} (1-x^2)^2 dx = \int\limits_{-1}^{1} (1-2x^2+x^4) dx = \left(x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{16}{15},$$

откуда:

Ответ:

$$\vec{m} = -\vec{e}_x \cdot \frac{2\pi R_0^5 \dot{B}}{15\rho}.$$

C4$^{0.40}$ Получите производную по времени индукции магнитного поля кольца в центре шара dB_x/dt, эквивалентную величине $\dot{B}$. Ответ выразите через v, I, R, x и магнитную постоянную μ_0.

При движении шара индукция магнитного поля $B_x(x) = B_x(x(t))$, т.е является сложной функцией времени, поэтому имеем:

$$\dot{B_x} = \frac{dB_x}{dt} = \frac{dB_x}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dB_x}{dx}$$

Найдём производную dB_x/dx:

$$\frac{dB_x}{dx} = -\frac{3\mu_0 IR^2 x}{2(R^2+x^2)^{\frac{5}{2}}},$$

откуда:

Ответ:

$$\dot{B} = -\frac{3\mu_0 IR^2 xv}{2(R^2+x^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

C5$^{0.50}$ Найдите коэффициент пропорциональности $\beta(x)$. Ответ выразите через I, R, x, R_0, ρ и магнитную постоянную μ_0.

Поскольку шар движется вдоль оси x:

$$\vec{F} = m_x \cdot \frac{\partial\vec{B}}{\partial x} = \vec{e}_x \cdot m_x\frac{dB_x}{dx}.$$

Для магнитного момента m_x имеем:

$$m_x = -\frac{2\pi R_0^5 v}{15\rho}\cdot\frac{dB_x}{dx},$$

откуда:

$$F_x = -\frac{2\pi R_0^5}{15\rho}\left(\frac{dB_x}{dx}\right)^2 v.$$

Подставляя dB_x/dx, находим:

Ответ:

$$\beta(x) = \frac{3\pi\mu_0^2 I^2 R^4 R_0^5 x^2}{10\rho(R^2+x^2)^5}.$$

C6$^{0.80}$ Определите удельное сопротивление ρ шара, используемого в первом эксперименте. Ответ выразите через m, k, R_0, R, H, I и магнитную постоянную μ_0.

Первый пик достигается при значении $\Delta x \approx 47$у.е, а 12-ый - при $\Delta x \approx 6$у.е. Отсюда:

$$\frac{\gamma}{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}} \approx \frac{\ln\left(\frac{47}{6}\right)}{11\cdot 2\pi} \approx 0{,}0297 \Rightarrow \frac{\gamma}{\omega_0} \approx 0.03 \ll 1.$$

При этом имеем:

$$\frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{\sqrt{mk}}{\beta(H)},$$

откуда:

$$\beta(H) \approx \frac{2\gamma\sqrt{mk}}{\omega_0},$$

и окончательно

Ответ:

$$\rho = 15.7 \cdot \frac{\mu_0^2 I^2 R_0^5 R^4 H^2}{\sqrt{mk}(R^2 + H^2)^5}$$

C7[0.70] Определите удельное сопротивление ρ шара, используемого во втором эксперименте. Ответ выразите через m, k, R_0, R, H, I и магнитную постоянную μ_0.

Из выражения для резонансной амплитуды найдём:

$$Q = \frac{A_{\text{рез}}}{A_0} = \frac{\sqrt{mk}}{\beta(H)} \approx 25$$

откуда окончательно:

Ответ:

$$\rho = 23.6 \frac{\mu_0^2 I^2 R_0^5 R^4 H^2}{\sqrt{mk}(R^2 + H^2)^5}$$

D1[0.60] Определите индукцию B_z магнитного поля соленоида, а также её производную dB_z/dz в точке с координатой z. Ответ выразите через μ_0, n, I, R и z.

Из теоремы о телесном угле для магнитного поля имеем:

$$B_z = \frac{\mu_0 i \Omega_{\text{бок}}}{4\pi},$$

где $i = In$ - линейная плотность токов соленоида, а $\Omega_{\text{бок}}$ - телесный угол, под которым видна его боковая поверхность. Телесный угол, под которым видна боковая поверхность соленоида, равен телесному углу, под которым видно его основание из точки с координатой z, поэтому имеем:

$$\Omega_{\text{бок}} = 2\pi(1 - \cos\alpha) = 2\pi\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right).$$

Таким образом:

Ответ:

$$B_z = \frac{\mu_0 n I}{2}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right).$$

Дифференцируя, находим:

Ответ:

$$\frac{dB_z}{dz} = -\frac{\mu_0 n I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

D2[1.00] Определите линейную плотность тока i на поверхности цилиндра в точке с координатой z. Ответ выразите через μ_0, x и $dB_z(z)/dz$.

Поскольку снаружи цилиндра индукцию магнитного поля можно считать равной индукции магнитного поля соленоида, имеем:

$$B_{z(in)} = B_z(z - x) \qquad B_{z(out)} = B(z).$$

Из теоремы о циркуляции для индукции магнитного поля получим:

$$(B_{z(in)} - B_{z(out)}) \approx -x\frac{dB_z}{dz} = \mu_0 ix,$$

откуда:

Ответ:

$$i(z) = -\frac{x}{\mu_0}\frac{dB_z}{dz}.$$

D3[1.50] Определите силу F_x, действующую на цилиндр со стороны магнитного поля соленоида. Ответ выразите через μ_0, r, R, n, I и x.

Магнитный момент бесконечно малого участка цилиндра составляет:

$$dm_z = i(z)\pi r^2 dz.$$

Для действующей на него силы dF_x имеем:

$$dF_x = dm_z\frac{dB_z}{dz}.$$

Подставляя выражение для i, получим:

$$dF_x = -\frac{\pi r^2 x}{\mu_0}\left(\frac{dB_z}{dz}\right)^2 dz.$$

Воспользуемся выражением для dB_z/dz:

$$dF_x = -\frac{\mu_0\pi r^2 n^2 I^2 x R^4 dz}{4(R^2+z^2)^3},$$

откуда с учётом большого удаление концов цилиндра от оснований соленоида:

$$F_x \approx -\frac{\mu_0\pi r^2 n^2 I^2 R^4 x}{4}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{(R^2+z^2)^3}.$$

Воспользуемся заменой переменной $z = R\operatorname{tg}\varphi$ и получим:

$$F_x = \frac{\mu_0\pi r^2 n^2 I^2 R^4 x}{4}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{(R^2+z^2)^3} = \frac{\mu_0\pi r^2 n^2 I^2 x}{4R}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4\varphi d\varphi.$$

Вычислим последний интеграл:

$$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4\varphi d\varphi = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{1}{4}+\frac{\cos 2\varphi}{2}+\frac{\cos^2 2\varphi}{4}\right)d\varphi =$$

$$= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{1}{4}+\frac{\cos 2\varphi}{2}+\frac{1}{4}\left(\frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right)\right)d\varphi = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{3}{8}+\frac{\cos 2\varphi}{2}+\frac{\cos 4\varphi}{8}\right)d\varphi =$$

$$= \left(\frac{3\varphi}{8}+\frac{\sin 2\varphi}{4}+\frac{\sin 4\varphi}{32}\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{3\pi}{8}.$$

Таким образом:

Ответ:

$$F_x = -\frac{3\pi^2\mu_0\pi r^2 n^2 I^2}{32R}x.$$

D4[0.30] Получите зависимость перемещения стержня x от времени t. Ответ выразите через μ_0, r, R, n, I и m.

Запишем уравнение движения цилиндра:

$$m\ddot{x} = -\frac{3\mu_0\pi^2 r^2 n^2 I^2}{32R}x \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{3\mu_0\pi^2 r^2 n^2 I^2}{32mR} \Rightarrow x(t) = A\sin\omega_0 t + B\cos\omega_0 t.$$

Определим константы A и B из начальных условий:

$$\begin{cases} x(0) = B = 0 \\ v_x(0) = \omega_0 A = v_0 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{v_0}{\omega_0}$$

Таким образом:

Ответ:

$$x(t) = v_0\sqrt{\frac{32mR}{3\mu_0\pi^2 r^2 n^2 I^2}}\sin\sqrt{\frac{3\mu_0\pi^2 r^2 n^2 I^2}{32mR}}t.$$