X24 — Физика дождевых капель

A1$^{1.00}$ Найдите изменение свободной энергии водяного пара, если из него образовать каплю радиуса r. Выразите ответ через r, σ, φ, R, T, ρ_L, μ.

За счет энергии поверхностного натяжения свободная энергия увеличится на

$$\Delta G_{surf} = \sigma A = 4\pi\sigma r^2.$$

С другой стороны, при переходе пара в жидкое состояние его свободная энергия уменьшается на

$$\Delta G_v = \nu RT\ln\varphi,$$

где количество вещества в капле

$$\nu = \frac{4\pi\rho_L r^3}{3\mu}.$$

Здесь мы использовали формулу для изменения свободной энергии пара и тот факт, что для насыщенного пара свободная энергия равна свободной энергии жидкости.

Ответ:

$$\Delta G = 4\pi\sigma r^2 - \frac{4\pi\rho_L}{3\mu}r^3 RT\ln\varphi$$

A2$^{0.80}$ Найдите критическое значение радиуса капли r_c, при котором ΔG максимально, а также соответствующее значение ΔG_c. Выразите ответ через σ, φ, R, T, ρ_L, μ. Найдите численное значение r_c при $\varphi = 1.01$.

Для нахождения максимума найдем производную

$$\frac{\partial\Delta G}{\partial r} = 8\pi\sigma r - \frac{4\pi\rho_L}{\mu}r^2 RT\ln\varphi = 0.$$

Отсюда

$$r_c = \frac{2\sigma\mu}{\rho_L RT\ln\varphi}.$$

Подставляя в формулу для ΔG, получим

$$\Delta G_c = \frac{16\pi}{3}\frac{\sigma^3\mu^2}{\rho_L^2 R^2T^2\ln^2\varphi} = \frac{4\pi r_c^2\sigma}{3}.$$

Ответ:

$$r_c = \frac{2\sigma\mu}{\rho_L RT\ln\varphi} = 1.15\cdot 10^{-7}\text{м}, \quad \Delta G_c = \frac{16\pi}{3}\frac{\sigma^3\mu^2}{\rho_L^2 R^2T^2\ln^2\varphi}.$$

A3$^{0.70}$ Рассмотрим каплю критического радиуса r_c. Определите время τ, за которое количество молекул в ней увеличится на g. Выразите ответ через r_c, g, p_s, m, k, T, φ. Считайте, что в процессе роста радиус капли не меняется, испарением молекул из капли можно пренебречь. Известно, что на площадь dS поверхности за время dt попадает

$$dN = dtdS\frac{p_v}{\sqrt{2\pi mkT}}$$

молекул. Здесь p_v - давление пара, m - масса молекул, T - температура газа.

На всю площадь поверхности капли за время dt попадает

$$dN = 4\pi r_c^2 \frac{p_v}{\sqrt{2\pi mkT}} = 4\pi r_c^2 \frac{p_s\varphi}{\sqrt{2\pi mkT}}$$

молекул. Здесь использовано соотношение $p_v = p_s\varphi$. Поскольку изменением радиуса можно пренебречь, коэффициент пропорциональности постоянен, а значит искомое время

$$\tau = g\left(4\pi r_c^2 \frac{p_s\varphi}{\sqrt{2\pi mkT}}\right)^{-1}.$$

Ответ:

$$\tau = \frac{g\sqrt{2\pi mkT}}{4\pi r_c^2 p_s\varphi}.$$

A4$^{0.60}$ Найдите количество капель J, которые образуются в единицу времени в единице объема перенасыщенного водяного пара. Выразите ответ через σ, φ, p_s, r_c, T, g.

По условию за время τ все зародыши в объеме превращаются в капли, поэтому

$$J = \frac{n_c}{\tau} = \frac{4\pi r_c^2 p_s\varphi}{g\sqrt{2\pi mkT}} n \exp\left(-\frac{16\pi}{3kT}\frac{\sigma^3\mu^2}{\rho_L^2 R^2 T^2 \ln^2\varphi}\right).$$

Выразим концентрацию пара через давление:

$$n = \frac{p_v}{kT} = \frac{p_s\varphi}{kT},$$

получим

Ответ:

$$J = \frac{4\pi r_c^2}{\sqrt{2\pi mkT}}\frac{p_s^2\varphi^2}{kT}\frac{1}{g}\exp\left(-\frac{16\pi}{3kT}\frac{\sigma^3\mu^2}{\rho_L^2 R^2 T^2 \ln^2\varphi}\right) = \frac{4\pi r_c^2}{\sqrt{2\pi mkT}}\frac{p_s^2\varphi^2}{kT}\frac{1}{g}\exp\left(-\frac{4\pi r_c^2\sigma}{3kT}\right).$$

A5$^{0.90}$ Из результатов предыдущего пункта следует, что скорость образования капель очень сильно зависит от коэффициента перенасыщения пара. Определите численно значение коэффициента перенасыщения пара φ, при котором при температуре $T = 283$К в 1см^3 воздуха рождается одна капля в секунду. Считайте, что $g = 100$. Остальные численные данные приведены в начале задачи.

Подставим в результат предыдущего пункта выражение для r_c:

$$J = \frac{4\pi p_s^2}{\sqrt{2\pi mkT}}\frac{4\sigma^2\mu^2}{gkT\rho_L^2 R^2 T^2}\frac{\varphi^2}{\ln^2\varphi}\exp\left(-\frac{16\pi}{3kT}\frac{\sigma^3\mu^2}{\rho_L^2 R^2 T^2 \ln^2\varphi}\right) = J_0\frac{\varphi^2}{\ln^2\varphi}\exp\left(-\frac{A}{\ln^2\varphi}\right),$$

где

$$J_0 = \frac{16\pi p_s^2}{\sqrt{2\pi mkT}}\frac{\sigma^2\mu^2}{gkT\rho_L^2 R^2 T^2} = 2.37\cdot 10^{30}\text{м}^{-3}\cdot\text{с}^{-1},$$

$$A = \frac{16\pi}{3kT}\frac{\sigma^3\mu^2}{\rho_L^2 R^2 T^2} = 106.$$

Нам нужно получить значение $J = 10^6\text{м}^{-3}\cdot\text{с}^{-1}$. Численно находим $\varphi \approx 3.86$. Приведем также таблицу значений J при близких значениях φ, видим что рост происходить очень быстро.

Ответ:

$$\varphi = 3.86$$

φ	J, м$^{-3}\cdot$с$^{-1}$
3.5	$8.4\cdot10^{1}$
3.6	$1.61\cdot10^{2}$
3.7	$2.34\cdot10^{4}$
3.8	$2.79\cdot10^{5}$
3.9	$2.68\cdot10^{6}$

B1$^{0.80}$ Для насыщенного пара, находящегося в равновесии с жидкостью, выразите производную давления по температуре dp_s/dT через p_s, L, R, T, μ. Используя полученный результат, найдите относительное изменение плотности насыщенного водяного пара $\Delta\rho_s/\rho_s$ при малом изменении температуры ΔT. Выразите ответ через ΔT, T, L, μ, R. Вы можете использовать связь малых изменений давления, плотности и температуры идеального газа

$$\frac{\Delta p_s}{p_s}=\frac{\Delta\rho_s}{\rho_s}+\frac{\Delta T}{T}.$$

Зависимость давления насыщенного пара от температуры определяется уравнением Клапейрона-Клаузиуса (считаем, что объем пара много больше соответствующего объема воды при той же температуры):

$$\frac{dp_s}{dT}=\frac{L\mu p}{RT^2}.$$

Используя соотношение из условия, найдем

$$\frac{\Delta\rho_s}{\rho_s}=\frac{\Delta p_s}{p_s}-\frac{\Delta T}{T}=\frac{\lambda\mu p}{RT^2}\Delta T-\frac{\Delta T}{T}=\frac{\Delta T}{T}\left(\frac{\mu L}{RT}-1\right).$$

Ответ:

$$\frac{\Delta\rho_s}{\rho_s}=\frac{\Delta T}{T}\left(\frac{\mu L}{RT}-1\right).$$

B2$^{0.20}$ Выразите dQ/dt через dM/dt и L.

Поскольку тепло выделяется только за счет конденсации воды $dQ=LdM$

Ответ:

$$\frac{dQ}{dt}=L\frac{dM}{dt}$$

B3$^{0.30}$ Используя результат предыдущего пункта и уравнение теплопроводности, выразите разность температур капли и атмосферы, T_r-T, через dM/dt, а также r, L, K.

Из уравнения теплопроводности

$$T_r-T=\frac{1}{4\pi rK}\frac{dQ}{dt}=\frac{L}{4\pi rK}\frac{dM}{dt}.$$

Ответ:

$$T_r-T=\frac{L}{4\pi rK}\frac{dM}{dt}.$$

B4$^{0.30}$ Будем считать, что вблизи поверхности капли плотность водяного пара равна плотности насыщенного пара при температуре капли. Считая разности температур и плотностей малыми и используя результаты $B1$, $B3$ выразите отношение $(\rho_r - \rho_s)/\rho_s$ (ρ_r - давление пара вблизи поверхности капли) через L, r, K, μ, R, T и dM/dt.

Из результата B1

$$\frac{\rho_r - \rho_s}{\rho_s} = \frac{T_r - T}{T}\left(\frac{\mu L}{RT} - 1\right).$$

Подставляя в него выражение для разности температур, получим

Ответ:

$$\frac{\rho_r - \rho_s}{\rho_s} = \left(\frac{\mu L}{RT} - 1\right)\frac{L}{4\pi r K T}\frac{dM}{dt}.$$

B5$^{0.30}$ Используя уравнение диффузии, выразите отношение $(\rho_r - \rho_v)/\rho_s$ через dM/dt, r, D, ρ_s.

Из уравнения диффузии

$$\rho_v - \rho_r = \frac{1}{4\pi r D}\frac{dM}{dt},$$

Ответ:

$$\frac{\rho_r - \rho_v}{\rho_s} = -\frac{1}{4\pi r \rho_s D}\frac{dM}{dt}$$

B6$^{0.60}$ Исключив из ответов в двух предыдущих пунктах плотность пара вблизи поверхности капли ρ_r, получите выражение для dM/dt. Выразите ответ через φ, μ, R, T, D, p_s, L, K, r.

Вычитая друг из друга выражения из двух последних пунктов, получим

$$\frac{\rho_v - \rho_s}{\rho_s} = \varphi - 1 = \frac{1}{4\pi r}\left(\left(\frac{\mu L}{RT} - 1\right)\frac{L}{KT} + \frac{1}{\rho_s D}\right)\frac{dM}{dt}.$$

Также выразим плотность насыщенного пара через давление:

$$\rho_s = \frac{\mu p_s}{RT},$$

окончательно получим

Ответ:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{4\pi r(\varphi - 1)}{\left(\frac{\mu L}{RT} - 1\right)\frac{L}{KT} + \frac{RT}{\mu p_s D}}$$

B7$^{0.50}$ Скорость увеличения радиуса капли имеет вид

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\xi}{r^k}.$$

Определите k и ξ, выразите ответ через φ, ρ_L, μ, R, T, D, p_s, L, K.

Масса капли связана с радиусом соотношением

$$M = \frac{4\pi}{3}\rho_L r^3,$$

поэтому

$$\frac{dM}{dt} = 4\pi\rho_L r^2\frac{dr}{dt},$$

а значит

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi\rho_L r^2}\frac{dM}{dt} = \frac{1}{r\rho_L}\frac{\varphi - 1}{\left(\frac{\mu L}{RT} - 1\right)\frac{L}{KT} + \frac{RT}{\mu p_s D}}$$

Ответ:

$$k = 1, \quad \xi = \frac{\varphi - 1}{\left(\frac{\mu L}{RT} - 1\right)\frac{L}{KT} + \frac{RT}{\mu p_s D}}\frac{1}{\rho_L}.$$

B8$^{0.50}$ Найдите зависимость радиуса капли от времени. Начальный радиус капли равен r_0. Выразите ответ через r_0, ξ, t.

Проинтегрируем уравнение

$$r\frac{dr}{dt} = \xi,$$

получим

$$\frac{r^2}{2} - \frac{r_0^2}{2} = \xi t,$$

Ответ:

$$r(t) = \sqrt{r_0^2 + 2\xi t}.$$

B9$^{0.50}$ Пусть начальный радиус капли равен $r_0 = 0.7$мкм. Найдите численное значение времени, за которое она вырастет до размера $r_1 = 10$мкм при коэффициенте перенасыщения $\varphi = 1.1$. Остальные численные значения приведены в начале этой части.

Для параметров из условия

$$\xi = 9.04 \cdot 10^{-12}\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1},$$

тогда время

Ответ:

$$t = \frac{r_1^2 - r_0^2}{2\xi} = 5.50\text{с}.$$