X20 — Магнитная сборка Халбаха

A1$^{0.50}$ Магнитное поле ослабляется с увеличением расстояния, для заданного угла θ найдите зависимость магнитного поля B на расстоянии r от диполя.

Зависимость магнитного поля диполя от $\vec{r}$:
$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}(\frac{3\vec{r}(\vec{m}\cdot\vec{r})}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3}), \vec{m}\cdot\vec{r} = mr\cos\theta \Rightarrow$
$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{m\mu_0}{4\pi r^3}(3\cos\theta\hat{r} - \hat{y})$
Находить модуль этого вектора можно по-разному, например, удобно ввести дополнительный единичный вектор:
$\hat{\theta} = -\sin\theta\cdot\hat{y} + \cos\theta\cdot\hat{x}, \hat{r} = \cos\theta\cdot\hat{y} + \sin\theta\cdot\hat{x}$
Или иначе:
$\hat{y} = \cos\theta\cdot\hat{r} - \sin\theta\cdot\hat{\theta}, \hat{x} = \sin\theta\cdot\hat{r} + \cos\theta\cdot\hat{\theta}$
$3\cos\theta\hat{r} - \hat{y} = 3\cos\theta\hat{r} - (\cos\theta\cdot\hat{r} - \sin\theta\cdot\hat{\theta}) \Rightarrow$
$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}((2\cos\theta)\hat{r} + (\sin\theta)\hat{\theta}) \Rightarrow B = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}\sqrt{(2\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2)}$

B1$^{1.50}$ Выразите магнитное поле $B(y)$ вдоль оси, перпендикулярной магниту, на расстоянии y от центра.

Для нахождения ответа в этом пункте, разобьём магнит на бесконечно узкие кольца и проинтегрируем:
Получаем слеующее выражение:
$\vec{B}(y) = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\int_0^R 2\pi x\cdot dx\cdot\sigma\cdot\frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot(2\cos\theta\cdot\cos\theta\cdot\hat{y} + \sin\theta\cdot\sin\theta\cdot(-\hat{y}))$
Для удобства перейдём к интегрированию по углу:
$R = y\cdot\tan\theta_{max}, x = y\cdot\tan\theta, dx = y\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}, \frac{y}{\cos\theta} = \sqrt{x^2+y^2}$
Тогда
$B = \frac{\mu_0\sigma}{2}\cdot\int_0^{\theta_{max}} y\cdot\tan\theta\cdot y\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}\cdot\frac{\cos^3\theta}{y^3}\cdot\hat{y}\cdot(2\cos^2\theta - \sin^2\theta)$
$= \frac{\mu_0\sigma\cdot\hat{y}}{2y}\cdot\int_0^{\theta_{max}} d\theta\cdot(2\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta)$
$= \frac{\mu_0\sigma\cdot\hat{y}}{2y}\cdot\int_0^{\theta_{max}} d\theta\cdot(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin\theta)$
$= \frac{\mu_0\sigma\cdot\hat{y}}{2y}\cdot[-\cos^3\theta + \cos\theta]|_0^{\theta_{max}} = \frac{\mu_0\sigma\cdot\hat{y}}{2y}\cdot[\cos\theta_{max} - \cos^3\theta_{max}]$
$\cos\theta_{max} = \frac{y}{\sqrt{R^2+y^2}}$
Упрощая, получаем итоговый результат:
$B(y) = \frac{\mu_0\sigma}{2}\cdot\frac{R^2}{(R^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

B2$^{0.50}$ Оцените величину магнитного поля вблизи поверхности магнита. Ответ выразите через величины t, D, ρ, μ_0.

Поскольку выполняется соотношение $t \ll D$, магнит можно считать плоским и пренебрегать его толщиной при нахождении поля у поверхности:
$\sigma = \rho\cdot t, B(y) = \frac{\mu_0\sigma}{2}\cdot\frac{R^2}{(R^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, y = 0 \Rightarrow B_0 = \frac{\mu_0\rho t}{D}$
$\frac{\mu_0\rho t}{D} = 0.13$Тл

B3$^{0.50}$ Получите выражение и численное значение силы взаимодействия F_0 между дверью и прижатым к ней магнитом, также вычислите давление P_0 магнита на дверь.

B3) По условию, объемная плотность энергии магнитного поля составляет:
$\frac{E}{V} = \frac{1}{2\mu_0}\cdot B^2$
При отрыве магнита от двери на небольшое расстояние y:
$\Delta E = \pi(D/2)^2\cdot y\cdot\frac{1}{2\mu_0}\cdot B_0^2$

$F = \frac{\Delta E}{y} = \pi (D/2)^2 \cdot \frac{1}{2\mu_0} \cdot B_0^2 = 2.2H$

Зная силу и площадь соприкосновения, легко выразить давление:

$P = \frac{F}{S} = \frac{B_0^2}{2\mu_0} = 6.9 \cdot 10^3$Па

C1^2.00 Запишите выражение для поля $\vec{B}(\vec{r_0}, y)$ которое создает ряд магнитов. (Для удобства поле выражается и через $\vec{r_0}$, и через y, хотя технически $y = (\vec{r_0})_y$.)

По схеме ниже:

$r_0 = \frac{y}{\cos\alpha}, x = y\tan\alpha, \vec{r_0} = y\hat{y} + x\hat{x} \Rightarrow r_0 = \hat{y}\cdot\cos\alpha + \hat{x}\cdot\sin\alpha$

$\frac{r_0}{r} = \cos\theta, z = r_0\tan\theta \Rightarrow dz = \frac{r_0 d\theta}{cos^2\theta}$

$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + (-z)\hat{z}$

$\vec{B}(\vec{r_0}, y) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dz \cdot \rho_L \cdot [\frac{3}{r^4}(\frac{y\cdot\cos\theta}{r_0}) \cdot (\vec{r_0} - z\hat{z}) - \frac{\hat{y}}{r^3}] =$

$\frac{\mu_0\cdot\rho_L}{4\pi} \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \cdot \frac{r_0}{\cos^2\theta} \cdot [\frac{3y}{r_0^5} \cdot \cos^5\theta \cdot \vec{r_0} - \frac{\hat{y}}{r_0^3} \cdot \cos^3\theta] =$

$\frac{\mu_0\cdot\rho_L}{4\pi r_0^2} \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \cdot [\frac{3y\cdot\vec{r_0}}{r_0^2} \cdot \cos^3\theta - \hat{y}\cdot\cos\theta] =$

$\frac{\mu_0\cdot\rho_L}{4\pi r_0^2} \cdot [\frac{3y\cdot\vec{r_0}}{r_0^2} \cdot (\sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta) - \hat{y}\cdot\sin\theta]|_{-\pi/2}^{\pi/2} =$

$\frac{\mu_0\cdot\rho_L}{4\pi r_0^2} \cdot [\frac{4y\cdot\vec{r_0}}{r_0^2} - 2\hat{y}]$

C2^1.00 Найдите магнитного поля с двух сторон от сборки. Ответ дать в виде некоторого интеграла.

По схеме ниже:

$r_0 = \frac{y_0}{\cos\alpha} = \frac{y}{\cos(\beta+\alpha)} \Rightarrow y = y_0 \cdot \frac{\cos(\beta+\alpha)}{\cos\alpha}$

$\hat{y} = \cos\beta\cdot\hat{y_0} + \sin\beta\cdot\hat{x}, \hat{r_0} = \cos\alpha\cdot\hat{y_0} - \sin\alpha\cdot\hat{x}$

$\vec{B} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot \frac{\mu_0\sigma}{4\pi y_0^2} \cdot \cos^2\alpha \cdot [4\cos(\beta+\alpha)[\cos\alpha\cdot\hat{y_0} - \sin\alpha\cdot\hat{x}] - 2[\cos\beta\cdot\hat{y_0} + \sin\beta\cdot\hat{x}]]$

Путём несложных математических преобразований получаем:

$\frac{\mu_0\sigma}{2\pi y_0} \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\alpha \cdot [\hat{y_0}\cdot\cos(\beta+2\alpha) - \hat{x}\cdot\sin(\beta+2\alpha)]$

Подставим зависимость для β:

$\beta = \beta_0 + kx_0 + ky_0\cdot\tan\alpha$

Получаем:

$\frac{\mu_0\sigma}{2\pi y_0} \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\alpha \cdot [\hat{y_0}\cdot\cos(\beta_0 + kx_0 + ky_0\cdot\tan\alpha + 2\alpha) - \hat{x}\cdot\sin(\beta_0 + kx_0 + ky_0\cdot\tan\alpha + 2\alpha)]$

C3^1.00 Покажите, что с одной стороны идеальной сборки магнитное поле стремится к нулю.

Посмотрим внимательно на полученное выражение:

$\cos(\beta_0 + kx_0 + ky_0\cdot\tan\alpha + 2\alpha)$

$= \cos(ky_0\cdot\tan\alpha + 2\alpha) - \sin(\beta_0 + kx_0)\sin(ky_0\cdot\tan\alpha + 2\alpha)$

$\cos(ky_0\cdot\tan\alpha + 2\alpha) = \cos(ky_0\cdot\tan\alpha)\cos(2\alpha) - \sin(ky_0\cdot\tan\alpha)\sin(2\alpha)$

По условию,

$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx\cdot\cos(2x)\cos(c\cdot\tan x) = \frac{c\cdot\pi}{e^c} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx\cdot\sin(2x)\cdot\sin(c\cdot\tan x)$

Несложно заметить, что это и есть наш интеграл, если взять в качестве c величину ky_0.

C4^1.00 Запишите выражение для поля с другой стороны.

При переходе к другой стороне сборки, некоторые знаки в уравнении меняются на противоположные:
$\vec{B} = -\frac{\mu_0\sigma}{2\pi y_0} \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\alpha \cdot [\hat{y_0}\cdot[\cos(\beta_0+kx_0)\cdot\cos(-ky_0\cdot\tan\alpha+2\alpha) - \sin"..."sin"..."] - \hat{x}\cdot[\sin(\beta_0+kx_0)\cos(-ky_0\cdot\tan\alpha + 2\alpha) + \cos"..."sin"..."]]$

Интегралы от нечётных функций будут зануляться из-за соображений симметрии, чётные функции остаются.
$\vec{B} = -\frac{\mu_0\sigma}{2\pi y_0} \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\alpha \cdot [\hat{y_0}\cdot[\cos(\beta_0 + kx_0 - ky_0\cdot\tan\alpha + 2\alpha)] - \hat{x}\cdot[\sin(\beta_0 + kx_0)\cos(-ky_0\cdot\tan\alpha + 2\alpha) + \cos"..."\sin"..."]]$

$= -\frac{\mu_0\sigma}{2\pi y_0} \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\alpha \cdot [\hat{y_0} \cdot \cos(\beta_0 + kx_0) \cdot (cos(2\alpha)\cos(ky_0 \cdot \tan\alpha) + \sin\text{"..."}\sin\text{"..."})] - \hat{x} \cdot [\sin(\beta_0 + kx_0) \cdot \text{"..."}]]$
$= -\frac{\mu_0\sigma}{2\pi y_0} \cdot [\hat{y_0} \cdot \cos(\beta_0 + kx_0) - \hat{x} \cdot \sin(\beta_0 + kx_0)] \cdot 2 \cdot \frac{ky_0\pi}{e^{ky_0}}$
$= -\mu_0\sigma k \cdot e^{-ky_0} \cdot [\hat{y_0} \cdot \cos(\beta_0 + kx_0) - \hat{x} \cdot \sin(\beta_0 + kx_0)]$

C5$^{1.50}$ На основании выражения поля найдите среднее давление P такого магнита на дверь холодильника. Возьмите следующие параметры: толщина $t = 0.5$мм, объемная плотность магнитного диполя $\rho = 2 \cdot 10^5 \frac{\text{Тл}\cdot\text{м}}{\text{Гн}}$, шаг сборки $\lambda = 5$мм.

Сила и давление находятся так же, как и в пункте B3:
$y_0 \to 0 \Rightarrow \vec{B} = -\mu_0\sigma k \cdot [\hat{y_0} \cdot \cos(\beta_0 + kx_0) - \hat{x} \cdot \sin(\beta_0 + kx_0)] \Rightarrow$
$B^2 = (\mu_0\sigma k)^2, P = \frac{1}{2\mu_0} \cdot B^2, \sigma = \rho t \Rightarrow$
$B = (1.257 \cdot 10^{-6}\text{Гн/м}) \cdot (2 \cdot 10^5\text{Тл} \cdot \text{м/Гн}) \cdot (5 \cdot 10^{-4}\text{м}) \cdot \frac{2 \cdot 3.14}{5 \cdot 10^{-3}\ \text{м}} = 0.16\ \text{Тл}$
$P = \frac{1}{2\mu_0} \cdot B^2 = \frac{1}{2 \cdot 1.257 \cdot 10^{-6}\ \text{Гн/м}} \cdot (0.16\ \text{Тл}^2) = 10\ \text{кПа}$

C6$^{0.50}$ Найдите соотношение между давлением, которое создает магнитная сборка Халбаха и давлением, которое создает обычный магнит из того же материала, с теми же радиусом и толщиной. Здесь тоже следует пренебречь эффектами на периметре кружка и и толщиной магнита.

По формулам, полученным ранее:
$\eta = \frac{P}{P_0} = (\frac{B}{B_0})^2(\frac{\mu_0\rho t k}{\mu_0\rho t/2R})^2 = (\frac{4\pi R}{\lambda})^2$