X24 — Физика дождевых капель

A1$^{1.00}$ Найдите изменение свободной энергии водяного пара, если из него образовать каплю радиуса r. Выразите ответ через r, σ, φ, R, T, ρ_L, μ.

Записан поверхностный вклад в свободную энергию $\Delta G_{surf} = 4\pi\sigma r^2$.	0.30
Найдено количество вещества в капле $\nu = \frac{4\pi\rho_L r^3}{3\mu}$.	0.20
Объемный вклад в свободную энергию $-\frac{4\pi\rho_L}{3\mu}r^3 RT\ln\varphi$	0.30
Правильные знаки	0.20

A2$^{0.80}$ Найдите критическое значение радиуса капли r_c, при котором ΔG максимально, а также соответствующее значение ΔG_c. Выразите ответ через σ, φ, R, T, ρ_L, μ. Найдите численное значение r_c при $\varphi = 1.01$.

Вычислена производная $\partial\Delta G/\partial r$	0.20
$r_c = \frac{2\sigma\mu}{\rho_L RT\ln\varphi}$.	0.20
$r_c = 1.15\cdot 10^{-7}$м	0.10
$\Delta G_c = \frac{16\pi}{3}\frac{\sigma^3\mu^2}{\rho_L^2 R^2 T^2\ln^2\varphi}$	0.30
Ошибка в безразмерном численном коэффициенте в ΔG_c	-0.10

A3$^{0.70}$ Рассмотрим каплю критического радиуса r_c. Определите время τ, за которое количество молекул в ней увеличится на g. Выразите ответ через r_c, g, p_s, m, k, T, φ. Считайте, что в процессе роста радиус капли не меняется, испарением молекул из капли можно пренебречь. Известно, что на площадь dS поверхности за время dt попадает

$$dN = dt dS\frac{p_v}{\sqrt{2\pi mkT}}$$

молекул. Здесь p_v - давление пара, m - масса молекул, T - температура газа.

$p_v = p_s\varphi$	0.10
Записан полный поток молекул в каплю	0.30
$\tau = \frac{g\sqrt{2\pi mkT}}{4\pi r_c^2 p_s\varphi}$.	0.30
Ошибка в численном коэффициенте	-0.20

A4$^{0.60}$ Найдите количество капель J, которые образуются в единицу времени в единице объема перенасыщенного водяного пара. Выразите ответ через σ, φ, p_s, r_c, T, g.

Использована формула $J = n_c/\tau$	0.10
$J = \frac{4\pi r_c^2}{\sqrt{2\pi mkT}}\frac{p_s^2\varphi^2}{kT}\frac{1}{g}\exp\left(-\frac{16\pi}{3kT}\frac{\sigma^3\mu^2}{\rho_L^2 R^2 T^2\ln^2\varphi}\right) = \frac{4\pi r_c^2}{\sqrt{2\pi mkT}}\frac{p_s^2\varphi^2}{kT}\frac{1}{g}\exp\left(-\frac{4\pi r_c^2\sigma}{3kT}\right)$.	0.40
Концентрация выражена через давление p_s	0.10
Ошибка в численном коэффициенте или в ответе остались не приведенные в условии величины	-0.20

A5$^{0.90}$ Из результатов предыдущего пункта следует, что скорость образования капель очень сильно зависит от коэффициента перенасыщения пара. Определите численно значение коэффициента перенасыщения пара φ, при котором при температуре $T = 283$К в 1см^3 воздуха рождается одна капля в секунду. Считайте, что $g = 100$. Остальные численные данные приведены в начале задачи.

Найдены численные значения коэффициента перед экспонентой (J_0) и постоянной в экспоненте A, или аналогичные им	2×0.20
Численный ответ $\varphi \in [3.8, 3.9]$	0.50

B1$^{0.80}$ Для насыщенного пара, находящегося в равновесии с жидкостью, выразите производную давления по температуре dp_s/dT через p_s, L, R, T, μ. Используя полученный результат, найдите относительное изменение плотности насыщенного водяного пара $\Delta\rho_s/\rho_s$ при малом изменении температуры ΔT. Выразите ответ через ΔT, T, L, μ, R. Вы можете использовать связь малых изменений давления, плотности и температуры идеального газа

$$\frac{\Delta p_s}{p_s} = \frac{\Delta\rho_s}{\rho_s} + \frac{\Delta T}{T}.$$

Использовано или получено уравнение Клапейрона-Клаузиуса в любом виде	0.30
$\frac{dp_s}{dT} = \frac{L\mu p_s}{RT^2}$.	0.20
$\frac{\Delta\rho_s}{\rho_s} = \frac{\Delta T}{T}\left(\frac{\mu L}{RT} - 1\right)$.	0.30

B2$^{0.20}$ Выразите dQ/dt через dM/dt и L.

$\frac{dQ}{dt} = L\frac{dM}{dt}$	0.20

B3$^{0.30}$ Используя результат предыдущего пункта и уравнение теплопроводности, выразите разность температур капли и атмосферы, $T_r - T$, через dM/dt, а также r, L, K.

$T_r - T = \frac{1}{4\pi rK}\frac{dQ}{dt}$	0.10
$T_r - T = \frac{L}{4\pi rK}\frac{dM}{dt}$.	0.20

B4$^{0.30}$ Будем считать, что вблизи поверхности капли плотность водяного пара равна плотности насыщенного пара при температуре капли. Считая разности температур и плотностей малыми и используя результаты $B1$, $B3$ выразите отношение $(\rho_r - \rho_s)/\rho_s$ (ρ_r - давление пара вблизи поверхности капли) через L, r, K, μ, R, T и dM/dt.

$\frac{\rho_r - \rho_s}{\rho_s} = \left(\frac{\mu L}{RT} - 1\right)\frac{L}{4\pi rKT}\frac{dM}{dt}$.	0.30

B5$^{0.30}$ Используя уравнение диффузии, выразите отношение $(\rho_r - \rho_v)/\rho_s$ через dM/dt, r, D, ρ_s.

$\frac{\rho_r - \rho_v}{\rho_s} = -\frac{1}{4\pi r\rho_s D}\frac{dM}{dt}$	0.30
Ошибка в знаке	-0.10

B6$^{0.60}$ Исключив из ответов в двух предыдущих пунктах плотность пара вблизи поверхности капли ρ_r, получите выражение для dM/dt. Выразите ответ через φ, μ, R, T, D, p_s, L, K, r.

Получено корректное соотношение, не содержащее ρ_r	0.30
$\frac{dM}{dt} = \frac{4\pi r(\varphi - 1)}{\left(\frac{\mu L}{RT} - 1\right)\frac{L}{KT} + \frac{RT}{\mu p_s D}}$	0.30
Не подставлено значение ρ_s	-0.10

B7[0.50] Скорость увеличения радиуса капли имеет вид

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\xi}{r^k}.$$

Определите k и ξ, выразите ответ через φ, ρ_L, μ, R, T, D, p_s, L, K.

dr/dt выражено через dM/dt	0.20
$k = 1$	0.10
$\xi = \frac{\varphi-1}{\left(\frac{\mu L}{RT}-1\right)\frac{L}{KT}+\frac{RT}{\mu p_s D}}\frac{1}{\rho_L}.$	0.20

B8[0.50] Найдите зависимость радиуса капли от времени. Начальный радиус капли равен r_0. Выразите ответ через r_0, ξ, t.

Уравнение корректно проинтегрировано	0.20
$r(t) = \sqrt{r_0^2 + 2\xi t}.$	0.30
Ошибка в численном коэффициенте	-0.10

B9[0.50] Пусть начальный радиус капли равен $r_0 = 0.7$мкм. Найдите численное значение времени, за которое она вырастет до размера $r_1 = 10$мкм при коэффициенте перенасыщения $\varphi = 1.1$. Остальные численные значения приведены в начале этой части.

$t = \frac{r_1^2 - r_0^2}{2\xi}$	0.30
$t = 5.50$с.	0.20