Y21-T6 — Керлинг

A1$^{0.50}$ Покажите, что суммарная сила, действующая на кольцо, определяется выражением:

$$\vec{F}_{tot} = -\mu mg \cdot f\left(\frac{v(t)}{\omega(t)\, r}\right)\hat{x},$$

где

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{a - \sin\theta}{\sqrt{1 + a^2 - 2a\sin\theta}}d\theta$$

0.10 Кольцо корректно разбито на малые кусочки и используется интегрирование.
0.20 Доказано, что $F_y = 0$
0.20

$$\vec{F}_{tot} = -\mu mg \cdot \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{v - \omega r\sin\theta}{\sqrt{v^2 + (\omega r)^2 - 2v\,\omega r\sin\theta}}d\theta$$

A2$^{0.50}$ Покажите, что суммарный момент, действующий на кольцо, равен:

$$\tau_{tot} = -\mu mgr f\left(\frac{\omega(t) r}{v(t)}\right)$$

0.10 Кольцо корректно разбито на малые кусочки и используется интегрирование.
0.40

$$\vec{\tau} = -\mu mgr\int\limits_0^{2\pi} \frac{\omega r - v\sin\theta}{\sqrt{v^2 + (\omega r)^2 - 2v\omega r\sin\theta}}\frac{d\theta}{2\pi},$$

A3$^{0.10}$ Докажите, что уравнения движения имеют вид:

$$\dot{v} = -\mu g \cdot f\left(\frac{v}{\omega r}\right) \dot{\omega} r = -\mu g \cdot f\left(\frac{\omega r}{v}\right)$$

0.05 Записан второй закон Ньютона
0.05 Записано уравнение моментов для вращательного движения

B1$^{0.50}$ Докажите: a) $f(0) = 0,\ f(1) = \dfrac{2}{\pi},\ f(\infty) = 1$ b) $f(a)$ строго возрастает при $a \geqslant 0$

3 ×
0.10 Взяты соответствующие интегралы $f(0)$, $f(1)$ и $f(\infty)$.
0.20 Корректно доказано возрастание (например, через производную)

B2$^{0.30}$ Рассмотрим поведение параметра $a(t) = \dfrac{v(t)}{\omega(t) r}$. Покажите, что происходит с $a(t)$ (растёт/уменьшается/остаётся неизменным) в каждом из следующих случаев:
a) в некоторый момент $a(t) = 1$
b) в некоторый момент $a(t) < 1$
c) в некоторый момент $a(t) > 1$

0.15 Взята производная $\dot{a}$ или другим способом доказано, что система асимптотически стремится к $a \to 1$

3 ×
0.05 Получены верные ответы

B3[0.60] Нарисуйте качественно на графике, осями которого являются v и ωr, траектории, отображающие разное движение кольца, то есть при заданных v_0 и $\omega_0 r$ нарисуйте, как они будут изменяться с течением времени.
Необходимо нарисовать хотя бы одну траекторию на каждый пункт предыдущего задания. Кроме того, нарисуйте траекторию, проходящую через точку $(v_0, 0)$ и еще одну, начинающуюся в точке $(0, \omega_0 r)$
Подпишите оси графика и укажите направления движения системы для каждой нарисованной траектории

0.20 На графике присутствует прямая $a = 1$
0.20 Траектории асимптотически стремятся к $a = 1$
0.20 Указаны верные направления движения

B4[0.10] Вычислите мгновенную мощность, которая расходуется, когда есть только угловая скорость ω $(v = 0)$, и отдельно, когда присутствует только линейная v $(\omega = 0)$.

2 ×
0.05 Получены верные ответы

$$P_v = -\mu mg\, v P_\omega = -\mu mg\, \omega r$$

B5[0.60] Для заданных v и ω вычислите мгновенную мощность P, которая расходуется на трение в данный момент времени. Дайте ответ в виде интеграла с безразмерной переменной.

0.10 Корректно используется идея разбиения системы на малые кусочки и выполняется интегрирование мощности по ним
0.50 Получен верный ответ

$$P = -\mu mg\, \omega r \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1 + \left(\frac{v}{\omega r}\right)^2 - 2\left(\frac{v}{\omega r}\right)\sin(\theta)}\ \frac{d\theta}{2\pi}$$

B6[1.20] Предположим, что кольцу придали определённую начальную кинетическую энергию E_0. Каково должно быть соотношение $a_0 = \dfrac{v_0}{\omega_0 r}$, при котором кольцо будет двигаться максимальное время?
Подсказка: Постарайтесь дать ответ на предыдущий пункт при помощи только E_0 и a_0 (и других данных из этого пункта), исключив из уравнения v и ω

0.50 Показано, что в точке $a_0 = 1$ достигается экстремум мощности
0.50 Доказано, что минимальная мощность при заданной энергии достигается при

$$P_{min}(E_0) = P(1, E_0)$$

0.20 Указан тот факт, что при $a_0 = 1$ в дальнейшем движении $a = a_0$

B7$^{0.50}$ Каково максимальное время движения при начальной энергии E_0?

0.10 В уравнении для мощности разделены переменные и проведено интегрирование

0.40 Получен верный ответ

$$\tau = \frac{\pi}{2\mu g}\sqrt{\frac{E_0}{m}}$$

C1$^{0.60}$ Напишите заново уравнения движения из пункта A3 таким образом, чтобы они подходили под новое условие.

2 ×
0.30 Получены следующие уравнения движения (или аналогичные):

$$\dot{v} = -\mu g\, f\left(\frac{v}{\omega r}\right)\cos\alpha + g\sin\alpha\cos\varphi \dot{\omega r} = -\mu g\, f\left(\frac{\omega r}{v}\right)\cos\alpha$$

-
0.20 В законе Ньютона забыт $\cos\varphi$

C2$^{2.00}$ При заданных начальных ω_0 и $v_0 = 0$ нарисуйте все возможные семейства траекторий движения кольца в координатах $(v, \omega r)$ (для каждого типа кривых нарисуйте свой график). Укажите следующие составляющие:
a) соответствующие значения параметров;
b) конечные точки (в которые траектории приходят за конечное или бесконечное время) в плоскости $(v, \omega r)$. Здесь достаточно написать для каждой составляющей, что она стремится к нулю/ стремится к бесконечности/ равна или стремится к какой-то положительной величине.
Подпишите оси графика и укажите направления движения системы для каждой нарисованной траектории

0.50 Верно проанализированы $\dot{v}$ и $\dot{\omega r}$ для различных $\tan\alpha$.

3 ×
0.50 Для всех случаев верно указаны конечные точки траекторий и направления движения