X24 — Нецентральные движения шара

В обычной жизни вы наверняка сталкивались с такими физическими ситуациями, как соударение катящегося шара с вертикальной стенкой, а также падение шара с края горизонтального стола. Также вами наверняка решались задачи, связанные с этими ситуациями, однако вы ограничивались случаями, когда шар катится в направлении, перпендикулярном плоскости стены либо краю стола. В рамках данной задачи вам предлагается получить обобщение результатов на случай, когда скорость центра шара направлена не перпендикулярно плоскости стены либо краю стола.

Во всех пунктах задачи считайте известным следующее:

Часть A. Соударение шара с вертикальной стеной (4.5 балла).

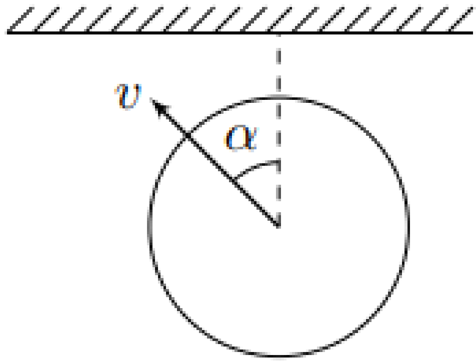

Рис. 1:

Данная часть задачи посвящена изучению столкновения шара с вертикальной стенкой. Шар катится по горизонтальному столу без проскальзывания, а его центр при этом движется со скоростью v в направлении, образующем угол α с нормалью к стенке. Шар не вращается вокруг вертикальной оси z. В некоторый момент шар упруго сталкивается со стенкой. Коэффициент трения между шаром и стенкой равен μ.

Введём прямоугольную систему координат xyz с началом в центре шара в момент соударения так, как показано на рисунке.

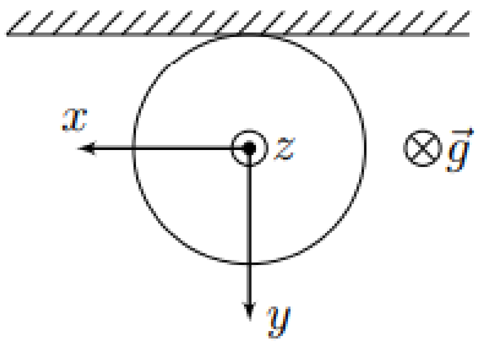

Рис. 2:

Будем использовать следующие обозначения:

A1$^{0.40}$ Выразите компоненту скорости $\vec{u}_A$ точки A через компоненту скорости $\vec{u}_C$ центра шара, его угловую скорость $\vec{\omega}$, а также радиус-вектор $\vec{r}$ в произвольный момент. Получите также производную по времени $\dot{\vec{u}}_A$ вектора $\vec{u}_A$. Ответ выразите через $\dot{\vec{u}}_C$, $\dot{\vec{\omega}}$ и $\vec{r}$.

A2[0.60] Определите силу трения $\vec{F}_0$, действующую на шар в начальный момент контакта со стеной. Ответ выразите через $\vec{e}_x$, $\vec{e}_z$, α, μ и силу нормальной реакции стены N_0 в начальный момент.

A3[1.00] Докажите, что производная по времени $\dot{\vec{u}}_A$ компоненты скорости $\vec{u}_A$ связана с силой трения $\vec{F}$ соотношением:

$$\dot{\vec{u}}_A = \frac{7\vec{F}}{2m}.$$

Данный факт можно использовать далее, даже если вы не смогли его доказать.

A4[0.50] Определите компоненту скорости $\vec{u}_{A\text{к}}$ сразу после соударения, считая, что шар проскальзывает по стенке в течение всего времени соударения. Ответ выразите через v, α, μ, $\vec{e}_x$ и $\vec{e}_z$. При каком максимальном значении коэффициента трения μ_{max} проскальзывание не прекращается в течение всего времени соударения? Ответ выразите через α.

A5[0.60] При $\mu < \mu_{max}$ определите скорость центра шара $\vec{v}_{C\text{к}}$, а также под каким углом β к горизонту она направлена сразу после соударения. Ответы выразите через v, α, μ, $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ и $\vec{e}_z$.

A6[0.40] При $\mu < \mu_{max}$ определите координаты x_C, y_C центра шара в момент его падения на стол. Ответы выразите через v, g, μ и α.

A7[1.00] При произвольных значениях μ определите количество теплоты Q, выделившееся в процессе соударения шара со стенкой. Ответ выразите через m, v, μ и α.

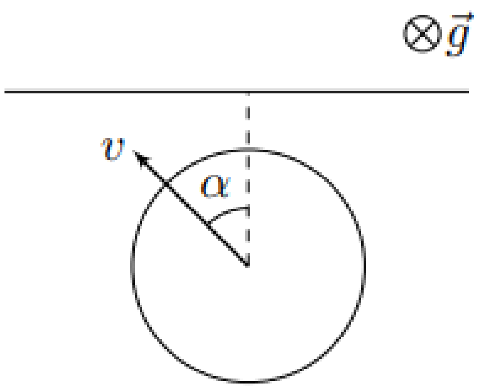

Рис. 3:

Далее в рамках данной задачи вам предлагается изучить динамику падения однородного шара с прямолинейного края горизонтального стола. Перед тем, как попасть на край, центр шара двигался по столу со скоростью v под углом α к перпендикуляру, проведённому к краю стола в его плоскости. До попадания на край стола шар не вращался вокруг вертикальной оси. При дальнейшем решении задачи считайте, что шар никогда не проскальзывает по столу.

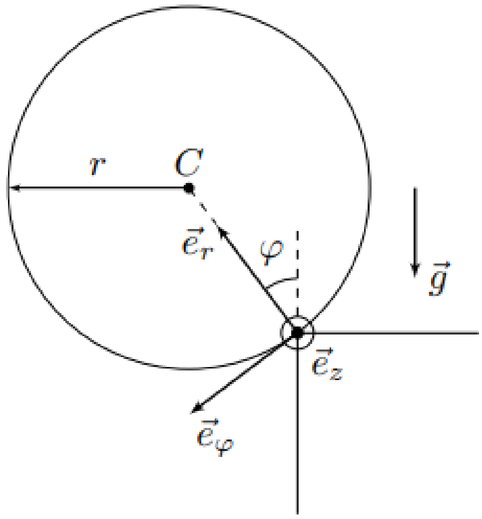

Рис. 4:

Решение задачи наиболее удобно провести в цилиндрической системе координат (r,φ,z). Ось z совпадает с краем стола. На рисунке приведены единичные орты $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\varphi$ и $\vec{e}_z$ цилиндрической системы координат. Радиус r шара является расстоянием от его центра до оси z, а угол φ является углом поворота линии, соединяющей центр шара с точкой его контакта со столом и отсчитывается от положения, в котором эта линия вертикальна.

Произвольный вектор в цилиндрической системе координат можно представить в следующей форме:

$$\vec{A} = A_r\vec{e}_r + A_\varphi\vec{e}_\varphi + A_z\vec{e}_z.$$

При дифференцировании вектора, заданного компонентами в цилиндрической системе координат, необходимо учитывать, что единичные орты цилиндрической системы координат являются переменными. Для их производных по времени можно записать:

$$\frac{d\vec{e}_i}{dt} = \left[\vec{\Omega} \times \vec{e}_i\right],$$

где $\vec{\Omega} = \dot{\varphi}\vec{e}_z$ - угловая скорость вращения цилиндрической системы координат.

Таким образом, проекции производной по времени вектора $\vec{A}$ записываются следующим образом:

$$\left(\dot{\vec{A}}\right)_r = \dot{A}_r - \dot{\varphi}A_\varphi \qquad \left(\dot{\vec{A}}\right)_\varphi = \dot{A}_\varphi + \dot{\varphi}A_r \qquad \left(\dot{\vec{A}}\right)_z = \dot{A}_z$$

Данные соотношения могут оказаться полезными в процессе дальнейшего решения задачи.

Часть B. Уравнения кинематических связей (0.9 балла).

Данная часть посвящена получению основных кинематических уравнений, описывающих движение шара.

B1$^{0.20}$ Определите компоненты вектора скорости центра шара v_φ и v_z в цилиндрической системе координат. Ответы выразите через r, $\dot{\varphi}$ и $\dot{z}$.

B2$^{0.30}$ Определите компоненты вектора ускорения центра шара a_r, a_φ и a_z в цилиндрической системе координат. Ответы выразите через r, v_φ, $\dot{v}_\varphi$ и $\dot{v}_z$.

B3$^{0.40}$ Из условия отсутствия проскальзывания определите компоненты угловой скорости шара ω_φ и ω_z в цилиндрической системе координат. Ответы выразите через r, v_φ и v_z.

Часть C. Движение в плоскости, перпендикулярной краю стола (2.0 балла).

В плоскости, перпендикулярной краю стола, шар движется по окружности, что очень упрощает анализ данной части его движения.

C1$^{0.80}$ Определите компоненту силу трения $F_\varphi(\varphi)$, действующую на шар, а также компоненту ускорения $a_\varphi(\varphi)$ его центра. Ответы выразите через массу шара m, g и φ.

C2$^{0.50}$ Получите зависимость $v_\varphi(\varphi)$. Ответ выразите через v, g, r, α и φ.

C3$^{0.20}$ При каком условии шар не отрывается от стола в момент, когда нижняя точка шара достигает его края? Запишите это условие через v, g, r и α. Во всех дальнейших пунктах считайте, что это условие выполняется.

C4$^{0.50}$ Определите угол φ_1 в момент отрыва шара от стола. Ответ выразите через v, g, r и α.

Часть D. Движение шара вдоль оси z (3.6 балла)

В данной части задачи вам предлагается проанализировать зависимости от угла φ компоненты скорости центра шара v_z, а также его угловой скорость верчения ω_r.

D1$^{0.50}$ Выразите кинетическую энергию шара E_k через m, v_φ, v_z, ω_r и r.

D2$^{0.60}$ Запишите для шара закон сохранения механической энергии. Комбинируя его с результатом пункта C2, покажите, что величины ω_r и v_z связаны соотношением:

$$1 = \frac{\omega_r^2}{A^2} + \frac{v_z^2}{B^2},$$

где $A,B > 0$ - постоянные коэффициенты. Определите A и B. Ответы выразите через v, r и α.

Решение данной задачи осложняется тем, что компонента угловой скорости ω_r не может быть получена исключительно из уравнения кинематической связи, однако можно получить выражение для её производной по времени $\dot{\omega}_r$.

D3$^{0.50}$ Вектор углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ шара может быть представлен в виде:

$$\vec{\varepsilon} = \varepsilon_r \vec{e}_r + \varepsilon_\varphi \vec{e}_\varphi + \varepsilon_z \vec{e}_z.$$

Используя уравнение динамики вращательного движения относительно центра шара, покажите, что $\varepsilon_r = 0$. Используя полученное равенство, выразите $\dot{\omega}_r$ через $\dot{\varphi}$, v_z и r.

D4$^{1.20}$ Комбинируя результаты пунктов D2 и D3, получите зависимости $\omega_r(\varphi)$ и $v_z(\varphi)$. Ответы выразите через v, α, r и φ.

D5$^{0.80}$ Рассмотрим предельный переход, когда угол $\alpha \to \pi/2$, т.е движение шара до контакта с краем стола происходит практически параллельно ему. Определите проекцию скорости v_z центра шара, а также проекцию его угловой скорости ω_y на ось y, направленную вертикально вниз, в момент отрыва шара от стола. Ответы выразите через v и r. Все численные коэффициенты в ответе должны быть аналитическими, а не приближёнными!