

## X20 — Магнитная сборка Халбаха

Магнитная сборка Халбаха - особая конфигурация постоянных магнитов, характеризующаяся тем, что магнитное поле с одной из её сторон практически полностью отсутствует благодаря особому расположению элементов сборки. В этой задаче мы исследуем это явление.

### Магнитные диполи

Диполем называется точечный магнитный элемент (например, маленькая петля с током. Ее дипольный момент  $I\vec{S}$ , где  $I$  - это ток, бегущий по петле, а  $\vec{S}$  - ориентированная площадь). Поле, создаваемое магнитным диполем, описывается следующей формулой:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3\vec{r}(\vec{m} \cdot \vec{r})}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right),$$

где  $m$  - дипольный момент,  $\vec{r}$  - радиус-вектор точки в пространстве относительно диполя.  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$ . На рисунке изображены диполь, вектор и угол между ними.

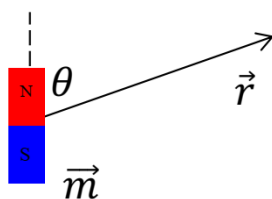


Рис. 1:

**A1<sup>0.50</sup>** Магнитное поле ослабляется с увеличением расстояния, для заданного угла  $\theta$  найдите зависимость магнитного поля  $B$  на расстоянии  $r$  от диполя.

### Магнитная шайба

Рассмотрим лёгкий магнит, представляющий собой плоский цилиндр радиуса  $R$  и толщиной  $h \ll R$  с поверхностной плотностью магнитного момента  $\vec{\sigma}$ . Вектор поверхностной плотности ориентирован вдоль оси диска.

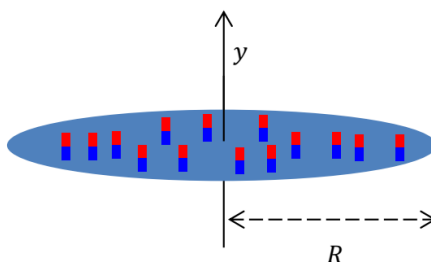


Рис. 2:

**B1<sup>1.50</sup>** Выразите магнитное поле  $B(y)$  вдоль оси, перпендикулярной магниту, на расстоянии  $y$  от центра.

Если приблизить маленький круглый магнит к металлической двери холодильника, магнит притягивается к ней с силой, зависящей от размеров и типа материала магнита, а также толщины двери. В этом пункте считайте толщину двери много большей линейных размеров магнита.

Рассмотрим цилиндрический магнит с объемной плотностью дипольного момента  $\rho = 1.05 \cdot 10^6 \frac{\text{Тл} \cdot \text{м}}{\text{Гн}}$  толщиной  $t = 2\text{мм}$  и диаметром  $D = 20\text{мм}$ .

**В2<sup>0.50</sup>** Оцените величину магнитного поля вблизи поверхности магнита. Ответ выразите через величины  $t, D, \rho, \mu_0$ .

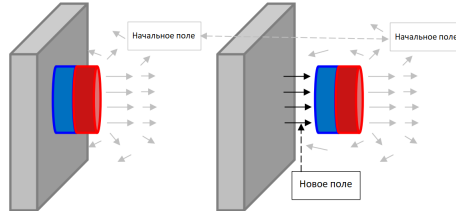


Рис. 3:

Чтобы определить силу взаимодействия магнита и двери холодильника, необходимо воспользоваться законом сохранения энергии. Когда магнит отрывают от двери, между ними возникает поле, приблизительно равное полю с другой стороны магнита. Остальная часть поля (включая и то, что внутри двери) почти не меняется. Выражение для объёмной плотности энергии магнитного поля в воздухе:  $w = \frac{B^2}{2\mu_0}$ .

**В3<sup>0.50</sup>** Получите выражение и численное значение силы взаимодействия  $F_0$  между дверью и прижатым к ней магнитом, также вычислите давление  $P_0$  магнита на дверь.

## Магнитная сборка Халбаха

Для того чтобы получить выражение магнитного поля в сборке Халбаха, найдем поле длинного ряда магнитов, как показано на рисунке. Линейная плотность дипольного момента ряда  $\rho_L$ , направление - вдоль оси  $y$ .

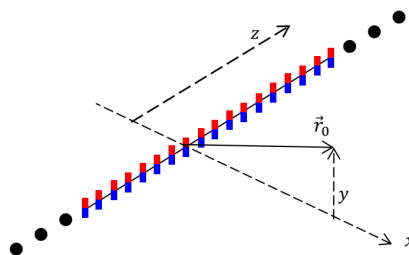


Рис. 4:

**С1<sup>2.00</sup>** Запишите выражение для поля  $\vec{B}(\vec{r}_0, y)$  которое создает ряд магнитов. (Для удобства поле выражается и через  $\vec{r}_0$ , и через  $y$ , хотя технически  $y = (\vec{r}_0)_y$ .)

В плоской магнитной сборке Халбаха направление поляризации маленького элемента площади непрерывно вращается. Его положение меняется в соответствии с формулой:

$$\beta(x, z) = \beta_0 + k \cdot x, k = 2\pi/\lambda, t \ll \lambda$$

Здесь  $\beta$  - это угол между направлением диполя и перпендикуляром к плоскости, этот угол вращается в плоскости  $xy$ . Длина  $\lambda$  - это шаг сборки, а  $t$  - толщина сборки.

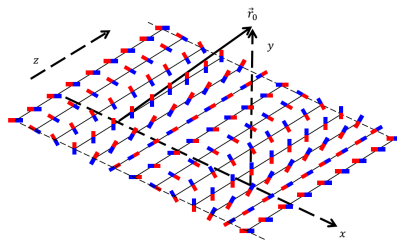


Рис. 5:

**C2<sup>1.00</sup>** Найдите магнитного поля с двух сторон от сборки. Ответ дать в виде некоторого интеграла.

Один из этих интегралов нужен для решения этого пункта:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx \cdot \cos(2x) \cdot \cos(c \cdot \tan x) = \frac{c \cdot \pi}{e^c} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx \cdot \sin(2x) \cdot \sin(c \cdot \tan x)$$

$$\frac{\pi}{e^d} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot \frac{\cos x}{d^2 + x^2}$$

$$\frac{\pi}{a \cdot e^a} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot \frac{2x \cdot \sin(2x)}{(a^2 + x^2)^2}$$

$$\frac{(b+1)\pi}{e^b} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot \frac{2b^3x \cdot \cos(x)}{(b^2 + x^2)^2}$$

**C3<sup>1.00</sup>** Покажите, что с одной стороны идеальной сборки магнитное поле стремится к нулю.

**C4<sup>1.00</sup>** Запишите выражение для поля с другой стороны.

**C5<sup>1.50</sup>** На основании выражения поля найдите среднее давление  $P$  такого магнита на дверь холодильника. Возьмите следующие параметры: толщина  $t = 0.5\text{мм}$ , объемная плотность магнитного диполя  $\rho = 2 \cdot 10^5 \frac{\text{Тл} \cdot \text{м}}{\text{Тл}}$ , шаг сборки  $\lambda = 5\text{мм}$ .

**C6<sup>0.50</sup>** Найдите соотношение между давлением, которое создает магнитная сборка Халбаха и давлением, которое создает обычный магнит из того же материала, с теми же радиусом и толщиной. Здесь тоже следует пренебречь эффектами на периметре кружка и толщиной магнита.

Вы могли подумать, что ни в чем более инновационном, чем магнетики для холодильника, сборка Халбаха не применяется. Однако компания Hendo разработала на ее основе разработала целый ховерборд (тот самый, что был в фильме "Назад в будущее"). Используя кольцевую сборку Халбаха из электромагнитов, Hendo добились подъемной силы достаточной, чтобы заставить человека средней массы подняться над землей! Но только над медью.



Рис. 6: