Y21-T6 — Керлинг

Тонкое кольцо массой m и радиусом r находится на столе с коэффициентом трения μ и гравитационным ускорением g. Кольцу сообщили линейную скорость v (в направлении x) и угловую скорость ω (против часовой стрелки). Кольцо движется по прямой, вращаясь вокруг собственной оси, и, в конце концов, останавливается. В дальнейшем мы попытаемся найти величины $v(t)$, $\omega(t)$ и некоторую симметрию между ними. Во всех последующих пунктах предполагается, что действие реакции опоры на кольцо распределено равномерно.

Вам может понадобиться следующая формула:

$$\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{2}} = \left|\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right|$$

Уравнения движения

A1$^{0.50}$ Покажите, что суммарная сила, действующая на кольцо, определяется выражением:

$$\vec{F}_{tot} = -\mu mg \cdot f\left(\frac{v(t)}{\omega(t)\ r}\right)\hat{x},$$

где

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{a-\sin\theta}{\sqrt{1+a^2-2a\sin\theta}}d\theta$$

A2$^{0.50}$ Покажите, что суммарный момент, действующий на кольцо, равен:

$$\tau_{tot} = -\mu mgrf\left(\frac{\omega(t)r}{v(t)}\right)$$

A3$^{0.10}$ Докажите, что уравнения движения имеют вид:

$$\dot{v} = -\mu g \cdot f\left(\frac{v}{\omega r}\right)\ \dot{\omega}r = -\mu g \cdot f\left(\frac{\omega r}{v}\right)$$

Первичное исследование

Мы получили систему дифференциальных уравнений, связывающие $v(t)$ и $\omega(t)$. В этой части хотим найти интересные физические аспекты этой ситуации, для чего надо произвести нестандартные математические вычисления. Начнём с рассмотрения свойств функции $f(a)$:

B1$^{0.50}$ Докажите: a) $f(0)=0$, $f(1)=\dfrac{2}{\pi}$, $f(\infty)=1$ b) $f(a)$ строго возрастает при $a \geqslant 0$

B2$^{0.30}$ Рассмотрим поведение параметра $a(t) = \dfrac{v(t)}{\omega(t)r}$. Покажите, что происходит с $a(t)$ (растёт/уменьшается/остаётся неизменным) в каждом из следующих случаев:
a) в некоторый момент $a(t) = 1$
b) в некоторый момент $a(t) < 1$
c) в некоторый момент $a(t) > 1$

B3$^{0.60}$ Нарисуйте качественно на графике, осями которого являются v и ωr, траектории, отображающие разное движение кольца, то есть при заданных v_0 и $\omega_0 r$ нарисуйте, как они будут изменяться с течением времени.
Необходимо нарисовать хотя бы одну траекторию на каждый пункт предыдущего задания. Кроме того, нарисуйте траекторию, проходящую через точку $(v_0, 0)$ и еще одну, начинающуюся в точке $(0, \omega_0 r)$
Подпишите оси графика и укажите направления движения системы для каждой нарисованной траектории

Рассмотрим мощность, которая расходуется во время движения кольца.

B4$^{0.10}$ Вычислите мгновенную мощность, которая расходуется, когда есть только угловая скорость ω $(v = 0)$, и отдельно, когда присутствует только линейная v $(\omega = 0)$.

B5$^{0.60}$ Для заданных v и ω вычислите мгновенную мощность P, которая расходуется на трение в данный момент времени. Дайте ответ в виде интеграла с безразмерной переменной.

B6$^{1.20}$ Предположим, что кольцу придали определённую начальную кинетическую энергию E_0. Каково должно быть соотношение $a_0 = \dfrac{v_0}{\omega_0 r}$, при котором кольцо будет двигаться максимальное время?
Подсказка: Постарайтесь дать ответ на предыдущий пункт при помощи только E_0 и a_0 (и других данных из этого пункта), исключив из уравнения v и ω

B7$^{0.50}$ Каково максимальное время движения при начальной энергии E_0?

Неоднородная система

Система уравнений, которую мы получили в начале задачи называется однородной потому, что система, начинающая движение из точки $(0, 0)$ останется в состоянии покоя, то есть в уравнениях нет члена quot;токаquot;, создающего движение. Введем такой член в одно из уравнений рассмотрев похожую физическую задачу:

То же самое кольцо положим теперь на наклонную плоскость с углом α с тем же коэффициентом трения μ.

C1$^{0.60}$ Напишите заново уравнения движения из пункта А3 таким образом, чтобы они подходили под новое условие.

C2$^{2.00}$ При заданных начальных ω_0 и $v_0 = 0$ нарисуйте все возможные семейства траекторий движения кольца в координатах $(v, \omega r)$ (для каждого типа кривых нарисуйте свой график). Укажите следующие составляющие:
a) соответствующие значения параметров;
b) конечные точки (в которые траектории приходят за конечное или бесконечное время) в плоскости $(v, \omega r)$. Здесь достаточно написать для каждой составляющей, что она стремится к нулю/ стремится к бесконечности/ равна или стремится к какой-то положительной величине.
Подпишите оси графика и укажите направления движения системы для каждой нарисованной траектории