X24 — Нецентральные движения шара

A1[0.40] Выразите компоненту скорости $\vec{u}_A$ точки A через компоненту скорости $\vec{u}_C$ центра шара, его угловую скорость $\vec{\omega}$, а также радиус-вектор $\vec{r}$ в произвольный момент. Получите также производную по времени $\dot{\vec{u}}_A$ вектора $\vec{u}_A$. Ответ выразите через $\dot{\vec{u}}_C$, $\dot{\vec{\omega}}$ и $\vec{r}$.

0.10 Записано выражение для полной скорости точки A:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_C + \left[\vec{\omega} \times \vec{r}\right].$$

0.10 Получен правильный ответ для $\vec{u}_A$:

$$\vec{u}_A = \vec{u}_C + \left[\vec{\omega} \times \vec{r}\right].$$

0.10 Указано или используется, что вектор $\vec{r}$ остаётся постоянным в процессе всего соударения.

0.10 Получен правильный ответ для $\dot{\vec{u}}_C$:

$$\dot{\vec{u}}_A = \dot{\vec{u}}_C + \left[\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\right].$$

A2[0.60] Определите силу трения $\vec{F}_0$, действующую на шар в начальный момент контакта со стеной. Ответ выразите через $\vec{e}_x$, $\vec{e}_z$, α, μ и силу нормальной реакции стены N_0 в начальный момент.

0.10 Правильно применён закон Кулона-Амонтона:

$$\vec{F} = -\mu N \frac{\vec{u}_A}{u_A}.$$

2 × 0.10 Записаны выражения для компонент скорости $u_{Ax(0)}$ и $u_{Az(0)}$ точки A:

$$u_{Ax(0)} = u_{Cx(0)} \qquad u_{Az(0)} = -\omega_{y(0)} r.$$

2 × 0.10 Определены компоненты скорости $u_{Ax(0)}$ и $u_{Az(0)}$ точки A в начальный момент:

$$u_{Ax(0)} = v \sin\alpha \qquad u_{Az(0)} = -v\cos\alpha.$$

0.10 Получено выражение для силы трения $\vec{F}$:

$$\vec{F}_0 = \mu N_0 \left(\vec{e}_z \cos\alpha - \vec{e}_x \sin\alpha\right).$$

A3[1.00] Докажите, что производная по времени $\dot{\vec{u}}_A$ компоненты скорости $\vec{u}_A$ связана с силой трения $\vec{F}$ соотношением:

$$\dot{\vec{u}}_A = \frac{7\vec{F}}{2m}.$$

Данный факт можно использовать далее, даже если вы не смогли его доказать.

0.10 Записана теорема о движении центра масс для шара:

$$m\dot{\vec{u}}_C = \vec{F}.$$

0.20 Указано, что вектор момента импульса шара относительно его центра определяется выражением:

$$\vec{L}_C = I_C \vec{\omega}.$$

Пункт оценивается, даже если $I_C \neq 2mr^2/5$.

0.20 Записано уравнение динамики вращательного движения относительно центра шара:

$$I_C\dot{\vec{\omega}} = \left[\vec{r} \times \vec{F}\right].$$

Пункт оценивается, даже если $I_C \neq 2mr^2/5$.

0.30 Получено выражение для силы трения $\vec{F}$:

$$\vec{F} = \frac{I_C\left[\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\right]}{r^2}.$$

Альтернативно: Выражения для $\dot{\vec{u}}_C$ и $\dot{\vec{\omega}}$ подставлены в уравнение, полученное для $\dot{\vec{u}}_A$:

$$\dot{\vec{u}}_A = \frac{\vec{F}}{m} + \frac{\left[\left[\vec{r} \times \vec{F}\right] \times \vec{r}\right]}{I_C}.$$

Пункт оценивается, даже если $I_C \neq 2mr^2/5$.

0.20 Выражение приведено к правильному виду:

$$\dot{\vec{u}}_A = \frac{\vec{F}}{m}\left(1 + \frac{mr^2}{I_C}\right) = \frac{7\vec{F}}{2m}.$$

A4[0.50] Определите компоненту скорости $\vec{u}_{A\text{к}}$ сразу после соударения, считая, что шар проскальзывает по стенке в течение всего времени соударения. Ответ выразите через v, α, μ, $\vec{e}_x$ и $\vec{e}_z$. При каком максимальном значении коэффициента трения μ_{max} проскальзывание не прекращается в течение всего времени соударения? Ответ выразите через α.

0.10 Сделан вывод, что в процессе соударения направление компоненты скорости $\vec{u}_A$ остаётся постоянным.

0.10 Записано выражение для компоненты скорости u_A при условии постоянного проскальзывания:

$$u_A = u_{A(0)} - \frac{7\mu}{2}\int_0^t N dt.$$

0.10 Определено значение импульса силы реакции N:

$$\int_0^t N dt = 2mv\cos\alpha.$$

0.10 Получено выражение для конечной скорости точки A при условии постоянного проскальзывания:

$$u_A = u_{A(0)} - 7\mu v\cos\alpha.$$

0.10 Получено выражение для μ_{max}:

$$\mu_{max} = \frac{1}{7\cos\alpha}.$$

Пункт оценивается только при наличии полного балла за пункт A2.

A5[0.60] При $\mu < \mu_{max}$ определите скорость центра шара $\vec{v}_{C\text{к}}$, а также под каким углом β к горизонту она направлена сразу после соударения. Ответы выразите через v, α, μ, $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ и $\vec{e}_z$.

0.20 Записано выражение для угла β:

$$\beta = \operatorname{arctg} \frac{v_{Cz}}{\sqrt{v_{Cx}^2 + v_{Cy}^2}}.$$

0.20 Записано выражение для конечной компоненты скорости $\vec{u}_C$:

$$\vec{u}_C = v \sin\alpha \vec{e}_x + \frac{2(\vec{u}_A - \vec{u}_A(0))}{7}$$

0.10 Получено выражение для конечной компоненты скорости центра шара $\vec{u}_C$:

$$\vec{u}_C = v \sin\alpha(1 - 2\mu\cos\alpha)\vec{e}_x + v\cos\alpha\vec{e}_y + 2\mu v\cos^2\alpha\vec{e}_z.$$

0.10 Получен правильный ответ для β:

$$\beta = \operatorname{arctg} \frac{2\mu\cos^2\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha(1 - 2\mu\cos\alpha)^2}}.$$

A6$^{0.40}$ При $\mu<\mu_{max}$ определите координаты x_C, y_C центра шара в момент его падения на стол. Ответы выразите через v, g, μ и α.

2 × 0.10 Записаны выражения для координат точки падения шара (по 0.1 балла за каждое):

$$x_C = \frac{2v_{Cx}v_{Cz}}{g} \qquad y_C = \frac{2v_{Cy}v_{Cz}}{g}.$$

0.10 Определена координата x_C точки падения шара:

$$x_C = \frac{4\mu v^2\cos^2\alpha\sin\alpha(1 - 2\mu\cos\alpha)}{g}.$$

0.10 Определена координата y_C точки падения шара:

$$y_C = \frac{4\mu v^2\cos^3\alpha}{g}.$$

A7$^{1.00}$ При произвольных значениях μ определите количество теплоты Q, выделившееся в процессе соударения шара со стенкой. Ответ выразите через m, v, μ и α. </p><p>*Примечание:* явное вычисление работы силы трения существенно упростит решение задачи.

0.10 Записано выражение для мощности силы трения:

$$P_{\text{тр}} = \vec{F} \cdot \vec{u}_A.$$

0.10 Получено выражение для количества выделившейся теплоты:

$$Q = -\int_0^t P_{\text{тр}} dt.$$

0.20 Записано выражение для элементарного импульса силы трения:

$$\vec{F}dt = \frac{2md\vec{u}_A}{7}.$$

0.20 Выражение для количества выделившейся теплоты Q приведено к виду:

$$Q = \int\limits_{\vec{u}_A}^{\vec{u}_A(0)} \frac{2m\vec{u}_A \cdot d\vec{u}_A}{7}.$$

0.20 Получено выражение для количества выделившейся теплоты Q:

$$Q = \frac{m(u_A^2(0) - u_A^2)}{7}.$$

2 × 0.10 Получен ответ для количества выделившейся теплоты Q (по 0.1 балла за каждый случай):

$$Q = \begin{cases} mv^2(2\mu\cos\alpha - 7\mu^2\cos^2\alpha) \quad \text{при} \quad \mu \le \dfrac{1}{7\cos\alpha} \\ \dfrac{mv^2}{7} \quad \text{при} \quad \mu \ge \dfrac{1}{7\cos\alpha} \end{cases}$$

B1$^{0.20}$ Определите компоненты вектора скорости центра шара v_φ и v_z в цилиндрической системе координат. Ответы выразите через r, $\dot{\varphi}$ и $\dot{z}$.

0.10 Получен ответ для v_φ:

$$v_\varphi = r\dot{\varphi}.$$

0.10 Получен ответ для v_z:

$$v_z = \dot{z}.$$

B2$^{0.30}$ Определите компоненты вектора ускорения центра шара a_r, a_φ и a_z в цилиндрической системе координат. Ответы выразите через r, v_φ, $\dot{v}_\varphi$ и $\dot{v}_z$.

0.10 Получен ответ для a_φ:

$$a_\varphi = \dot{v}_\varphi.$$

0.10 Получен ответ для a_z:

$$a_z = \dot{v}_z.$$

0.10 Получен ответ для a_r:

$$a_r = -\frac{v_\varphi^2}{r}.$$

B3$^{0.40}$ Из условия отсутствия проскальзывания определите компоненты угловой скорости шара ω_φ и ω_z в цилиндрической системе координат. Ответы выразите через r, v_φ и v_z.

0.20 Получен ответ для ω_z:

$$\omega_z = \frac{v_\varphi}{r}.$$

0.20 Получен ответ для ω_φ:

$$\omega_\varphi = -\frac{v_z}{r}.$$

C1$^{0.80}$ Определите компоненту силу трения $F_\varphi(\varphi)$, действующую на шар, а также компоненту ускорения $a_\varphi(\varphi)$ его центра. Ответы выразите через массу шара m, g и φ.

Применимость уравнения моментов относительно оси, проходящей вдоль края стола, треб дополнительного обоснования. Если обоснование отсутствует, все ответы данного пункта, полученные с помощью данного уравнения, оцениваются в 0 баллов

0.10 Записана теорема о движении центра масс в проекции на ось φ:

$$ma_\varphi = mg\sin\varphi + F_\varphi.$$

0.30 Записано уравнение динамики вращательного движения шара относительно оси z:

$$I\dot{\omega}_z = -F_\varphi r.$$

0.20 Для силы трения F_φ получено:

$$F_\varphi = -\frac{2mg\sin\varphi}{7}.$$

0.20 Для компоненты ускорения a_φ центра шара получено:

$$a_\varphi = \frac{5g\sin\varphi}{7}.$$

C2$^{0.50}$ Получите зависимость $v_\varphi(\varphi)$. Ответ выразите через v, g, r, α и φ.

0.30 Получено выражение:

$$a_\varphi v_\varphi = \frac{5gr\sin\varphi\dot{\varphi}}{7}.$$

0.20 Получена зависимость $v_\varphi(\varphi)$:

$$v_\varphi = \sqrt{v^2\cos^2\alpha + \frac{10gr(1-\cos\varphi)}{7}}.$$

C3$^{0.20}$ При каком условии шар не отрывается от стола в момент, когда нижняя точка шара достигает его края? Запишите это условие через v, g, r и α. Во всех дальнейших пунктах считайте, что это условие выполняется.

0.10 Записано выражение для силы нормальной реакции в начальный момент:

$$N = mg - \frac{mv^2\cos^2\alpha}{r}.$$

0.10 Получено ограничение для v:

$$v\cos\alpha \leq \sqrt{gr}.$$

C4$^{0.50}$ Определите угол φ_1 в момент отрыва шара от стола. Ответ выразите через v, g, r и α.

0.30 Определена сила реакции N в произвольный момент:

$$N = mg\cos\varphi - \frac{mv_\varphi^2}{r}.$$

0.20 Получен ответ для φ_1:

$$\varphi_1 = \arccos\left(\frac{10}{17} + \frac{7v^2\cos^2\alpha}{17gr}\right).$$

D1$^{0.50}$ Выразите кинетическую энергию шара E_k через m, v_φ, v_z, ω_r и r.

0.20 Записана теорема Кёнига:

$$E_k = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}.$$

0.30 Получен ответ для E_k:

$$E_k = \frac{7m(v_\varphi^2 + v_z^2)}{10} + \frac{m\omega_r^2 r^2}{5}.$$

D2$^{0.60}$ Запишите для шара закон сохранения механической энергии. Комбинируя его с результатом пункта C2, покажите, что величины ω_r и v_z связаны соотношением:

$$1 = \frac{\omega_r^2}{A^2} + \frac{v_z^2}{B^2},$$

где $A,B > 0$ - постоянные коэффициенты. Определите A и B. Ответы выразите через v, r и α.

0.10 Записан закон сохранения механической энергии:

$$E_k = E_{k(0)} + mgr(1 - \cos\varphi).$$

0.10 Правильное выражение для начальной кинетической энергии шара:

$$E_{k(0)} = \frac{7mv^2}{10}.$$

0.20 Получено соотношение, эквивалентное написанному ниже:

$$v^2 \sin^2\alpha = v_z^2 + \frac{2\omega_r^2 r^2}{7}.$$

2 × 0.10 Получены ответы для A и B (по 0.1 балла за каждый):

$$A = \sqrt{\frac{7}{2}}\frac{v\sin\alpha}{r} \qquad B = v\sin\alpha$$

D3$^{0.50}$ Вектор углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ шара может быть представлен в виде:

$$\vec{\varepsilon} = \varepsilon_r\vec{e}_r + \varepsilon_\varphi\vec{e}_\varphi + \varepsilon_z\vec{e}_z.$$

Используя уравнение динамики вращательного движения относительно центра шара, покажите, что $\varepsilon_r = 0$. Используя полученное равенство, выразите $\dot{\omega}_r$ через $\dot{\varphi}$, v_z и r.

0.20 Записано уравнение динамики вращательного движения относительно центра шара:

$$I\vec{\varepsilon} = \left[\vec{r} \times \vec{F}\right].$$

0.10 Указано, что $\varepsilon_r = 0$, поскольку $\vec{\varepsilon} \perp \vec{r}$.

0.10 Использовано выражение для компоненты производной $\left(\dot{\vec{\omega}}\right)_r$ в цилиндрической системе координат и получено:

$$\left(\dot{\vec{\omega}}\right)_r = \dot{\omega}_r - \dot{\varphi}\omega_\varphi.$$

0.10 Выражение приведено к нужному виду:

$$\dot{\omega}_r = -\frac{\dot{\varphi} v_z}{r}.$$

D4[1.20] Комбинируя результаты пунктов D2 и D3, получите зависимости $\omega_r(\varphi)$ и $v_z(\varphi)$. Ответы выразите через v, α, r и φ.

0.20 Комбинация пунктов D2 и D3 приведена к виду:

$$1 = \frac{\omega_r^2}{A^2} + \frac{r^2\dot{\omega}_r^2}{B^2\dot{\varphi}^2}.$$

0.20 Проведено разделение переменных:

$$d\varphi = -\frac{r}{B}\frac{d\omega_r}{\sqrt{1 - \frac{\omega_r^2}{A^2}}}.$$

Балл ставится даже при неправильном знаке.

0.40 Правильно проведено интегрирование и получено:

$$\omega_r(\varphi) = -A\sin\left(\frac{B\varphi}{Ar}\right)$$

2 × 0.10 Получен ответ для $\omega_r(\varphi)$ (по 0.1 балла за знак и верные коэффициенты):

$$\omega_r = -\sqrt{\frac{7}{2}}\frac{v\sin\alpha}{r}\sin\left(\sqrt{\frac{2}{7}}\varphi\right).$$

0.20 Получен ответ для $v_z(\varphi)$:

$$v_z(\varphi) = v\sin\alpha\cos\left(\sqrt{\frac{2}{7}}\varphi\right).$$

D5[0.80] Рассмотрим предельный переход, когда угол $\alpha \to \pi/2$, т.е движение шара до контакта с краем стола происходит практически параллельно ему. Определите проекцию скорости v_z центра шара, а также проекцию его угловой скорости ω_y на ось y, направленную вертикально вниз, в момент отрыва шара от стола. Ответы выразите через v и r. Все численные коэффициенты в ответе должны быть аналитическими, а не приближёнными!

0.10 Определено значение угла φ_1 для указанных начальных условий:

$$\varphi_1 = \arccos\left(\frac{10}{17}\right).$$

0.10 Получен ответ для $v_z(\varphi_1)$:

$$v_z = v\cos\left(\sqrt{\frac{2}{7}}\arccos\left(\frac{10}{17}\right)\right).$$

0.20 Для проекции угловой скорости ω_y записано:

$$\omega_y = -\omega_r \cos\varphi_1 + \omega_\varphi \sin\varphi_1.$$

0.20 После подстановки ω_r и ω_φ получено:

$$\omega_y = \frac{v_0}{r}\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\cos\varphi_1 \sin\left(\sqrt{\frac{2}{7}}\varphi_1\right) - \sin\varphi_1 \cos\left(\sqrt{\frac{2}{7}}\varphi_1\right)\right).$$

0.20 Получен ответ для ω_y:

$$\omega_y = \frac{v_0}{r}\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\frac{10}{17}\sin\left(\sqrt{\frac{2}{7}}\arccos\left(\frac{10}{17}\right)\right) - \frac{\sqrt{189}}{17}\cos\left(\sqrt{\frac{2}{7}}\arccos\left(\frac{10}{17}\right)\right)\right).$$