X24 — Проводники в магнитном поле

A1[0.60] Пусть момент времени $t_0 = 0$ груз находится в начале координат, а проекция его скорости на ось x равна v_0. Определите зависимости координаты $x(t)$ и скорости $v_x(t)$ груза от времени t. Ответ выразите через v_0, γ, ω_0 и t.

0.20 Решение для $x(t)$ ищется в следующем виде:

$$x(t) = Ce^{-\gamma t}\sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}t + \varphi_0\right).$$

0.10 Записана система начальных условий:

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ v_x(0) = v_0 \end{cases}$$

0.10 Записана выражения для $x(0)$ и $v_x(0)$:

$$\begin{cases} x(0) = C\sin\varphi_0 \\ v_x(0) = C\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\cos\varphi_0 - \gamma\sin\varphi_0\right) \end{cases}$$

0.10 Получен правильная зависимость $x(t)$:

$$x(t) = \frac{v_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}e^{-\gamma t}\sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}t\right).$$

0.10 Получен правильная зависимость $v_x(t)$:

$$v_x(t) = \frac{v_0\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}e^{-\gamma t}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}t + \arcsin\frac{\gamma}{\omega_0}\right).$$

A2[0.40] Получите точное выражение для Q. Ответ выразите через ω_0 и γ.

0.10 Для добротности записано:

$$Q = \frac{2\pi}{1 - \left(\dfrac{v_1}{v_0}\right)^2}$$

0.10 Определено время T, за которое величина скорости изменяется от значения v_0 до значения v_1:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}.$$

0.10 Записано выражение для v_1/v_0:

$$\frac{v_1}{v_0} = e^{-\gamma T}.$$

0.10 Получено выражение для добротности Q:

$$Q = \frac{2\pi}{1 - e^{-4\pi\gamma/\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}}.$$

A3$^{0.20}$ Получите приближённое выражение для добротности Q при слабом затухании ($\gamma \ll \omega_0$). Ответ выразите через m, k и β.

0.10 Получено приближённое выражение для добротности Q:

$$Q \approx \frac{\omega_0}{2\gamma}.$$

0.10 Добротность Q выражена через требуемое величины:

$$Q \approx \frac{\sqrt{mk}}{\beta}.$$

B1$^{0.60}$ Отклонение x груза от положения зависит от времени t следующим образом:

$$x(t) = A\sin\left(\Omega t + \varphi_0\right)$$

Найдите A и φ_0. Ответы выразите через A_0, Ω, ω_0 и γ.

0.10 Записано уравнение движения груза:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2\Delta x = \omega_0^2 A_0 \sin\Omega t.$$

0.20 Получена комплексная амплитуда $\hat{A}$:

$$\hat{A} = \frac{\omega_0^2 A_0\left(\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right) - 2i\Omega\gamma\right)e^{-i\pi/2}}{\left(\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\Omega^2\right)}.$$

0.10 Получено выражение для A:

$$A = \frac{A_0\omega_0^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}}.$$

0.20 Получено выражение для φ_0:

$$\varphi_0 = \begin{cases} -\arctan\dfrac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \quad \text{при} \quad \Omega < \omega_0 \\ -\dfrac{\pi}{2} \quad \text{при} \quad \Omega = \omega_0 \\ -\pi - \arctan\dfrac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \quad \text{при} \quad \Omega > \omega_0 \end{cases}$$

-0.10 Пункт оценивается, если рассмотрен только случай, соответствующий $\Omega < \omega_0$.

B2$^{0.30}$ Получите точные выражения для резонансной циклической частоты $\Omega_{\text{рез}}$ и соответствующей ей амплитуды колебаний $A_{\text{рез}}$. Ответы выразите через ω_0, γ и A_0. Считайте, что $\gamma\sqrt{2} < \omega_0$.

0.20 Получено выражение для $\Omega_{\text{рез}}$:

$$\Omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}.$$

0.10 Получено выражение для $A_{рез}$:

$$A_{рез} = \frac{A_0\omega_0^2}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}.$$

B3[0.30] Получите приближённые выражения для $\Omega_{рез}$, $A_{рез}$ и $\Delta\omega$ при слабом затухании ($\gamma \ll \omega_0$). Ответы выразите через A_0, ω_0 и γ.

0.05 Получено приближённое выражение для $A_{рез}$:

$$A_{рез} \approx \frac{A_0\omega_0}{2\gamma}.$$

0.05 Получено приближённое выражение для $\Omega_{рез}$:

$$\Omega_{рез} \approx \omega_0.$$

0.10 Подкоренное выражение приведено к виду:

$$\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\Omega^2 \approx 4\omega_0^2\Delta\Omega^2 + 4\gamma^2\omega_0^2.$$

0.10 Получено выражение для ширины резонансной кривой $\Delta\omega$:

$$\Delta\omega = 2\gamma.$$

C1[0.30] Найдите индукцию B_x магнитного поля кольца на его оси в точке с координатой x. Ответ выразите через x, R, I и магнитную постоянную μ_0.

0.10 Записан закон Био-Савара-Лапласа:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\left[\vec{r}\times d\vec{r}\right]}{r^3},$$

где $\vec{r}$ - радиус-вектор элемента кольца относительно точки с координатой x.

0.20 Получено выражение для B_x:

$$B_x = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}}.$$

C2[1.00] Определите магнитный момент $\vec{m}$ диска. Ответ выразите через $\vec{e}_x$, r_0, h, ρ и $\dot{B}$.

0.10 Записан закон электромагнитной индукции Фарадея:

$$\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} = -\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}.$$

0.30 Определена величина вихревого электрического поля $E(r)$ в направлении против часовой стрелки:

$$E = -\frac{r\dot{B}}{2}.$$

Пункт оценивается, даже если знак неверный.

0.10 Записан закон Ома в дифференциальной форме:

$$\vec{j} = \frac{\vec{E}}{\rho}.$$

0.10 Для элементарного магнитного момента записано:

$$d\vec{m} = \vec{S} dI.$$

0.20 Для магнитного момента диска, обусловленного течением тока в кольце с внутренним и внешним радиусом r и $r + dr$ соответственно записано:

$$dm_x = -\frac{\pi \dot{B} h}{2\rho} r^3 dr,$$

Пункт оценивается, даже если знак неверный.

2 × 0.10 Получен правильный ответ (по 0.1 балла за величину и знак, полученный без чётного числа ошибок):

$$\vec{m} = -\vec{e}_x \cdot \frac{\pi h r_0^4 \dot{B}}{8\rho}.$$

C3$^{0.50}$ Определите магнитный момент $\vec{m}$ шара. Ответ выразите через $\vec{e}_x$, R_0, ρ и $\dot{B}$.

0.20 После перехода к сферическим координатам для магнитного момента шара получено:

$$m_x = -\frac{\pi R_0^5 \dot{B}}{8\rho} \int_0^{\pi} \sin^5 \theta d\theta.$$

0.20 Вычислен интеграл от $\sin^5 \theta$:

$$\int_0^{\pi} \sin^5 \theta d\theta = \frac{16}{15}.$$

0.10 Получен правильный ответ:

$$\vec{m} = -\vec{e}_x \cdot \frac{2\pi R_0^5 \dot{B}}{15\rho}.$$

C4$^{0.40}$ Получите производную по времени индукции магнитного поля кольца в центре шара dB_x/dt, эквивалентную величине $\dot{B}$. Ответ выразите через v, I, R, x и магнитную постоянную μ_0.

0.20 Величина dB_x/dt представлена в виде производной сложной функции и получено:

$$\frac{dB_x}{dt} = v \frac{dB_x}{dx}.$$

2 × 0.10 Определена производная dB_x/dx и получен правильный ответ (по 0.1 балла за величину и знак, полученный без чётного числа ошибок):

$$\dot{B} = -\frac{3\mu_0 I R^2 x v}{2(R^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

C5$^{0.50}$ Найдите коэффициент пропорциональности $\beta(x)$. Ответ выразите через I, R, x, R_0, ρ и магнитную постоянную μ_0.

0.30 Для силы, действующей на шар, записано:

$$\vec{F} = \vec{e}_x \cdot m_x \frac{dB_x}{dx}.$$

0.10 Для магнитного момента шара записано:

$$m_x = -\frac{2\pi R_0^5 \nu}{15\rho} \cdot \frac{dB_x}{dx},$$

0.10 Получена правильная зависимость $\beta(x)$:

$$\beta(x) = \frac{3\pi\mu_0^2 I^2 R^4 R_0^5 x^2}{10\rho(R^2+x^2)^5}.$$

C6$^{0.80}$ Определите удельное сопротивление ρ шара, используемого в первом эксперименте. Ответ выразите через m, k, R_0, R, H, I и магнитную постоянную μ_0.

0.30 Для отношения амплитуд A_{i+N}/A_i, где N - число прошедших колебаний, записано:

$$\frac{A_{i+N}}{A_i} = e^{-2\pi\gamma/\omega}.$$

0.30 Получено отношение γ/ω_0:

$$\frac{\gamma}{\omega_0} \approx 0.03.$$

2 × 0.10 Получено правильный ответ для ρ (по 0.1 балла за попадание в узкие и широкие ворота):

$$\rho = (15.7 \pm 0.5) \cdot \frac{\mu_0^2 I^2 R_0^5 R^4 H^2}{\sqrt{mk}(R^2+H^2)^5}$$

$$\rho = (15.7 \pm 0.7) \cdot \frac{\mu_0^2 I^2 R_0^5 R^4 H^2}{\sqrt{mk}(R^2+H^2)^5}$$

C7$^{0.70}$ Определите удельное сопротивление ρ шара, используемого во втором эксперименте. Ответ выразите через m, k, R_0, R, H, I и магнитную постоянную μ_0.

0.40 **M1** Записано соотношение:

$$A_{\text{рез}} = \frac{A_0\omega_0}{2\gamma}.$$

0.10 **M1** Определено соотношение между ω_0 и γ:

$$\frac{\omega_0}{\gamma} = 50.$$

0.20 **M1** Получен правильный ответ для ρ:

$$\rho = 23.6\frac{\mu_0^2 I^2 R_0^5 R^4 H^2}{\sqrt{mk}(R^2+H^2)^5}$$

0.10 **M2** Записано выражение для ширины резонансной кривой:

$$\Delta\omega = 2\gamma.$$

2 × 0.05 **M2** Получено соотношение между ω_0 и γ по 0.1 балла за попадание в узкие и широкие ворота)::

$$\frac{\omega_0}{2\gamma} \approx 27.5 \pm 2.5$$

$$\frac{\omega_0}{2\gamma} = 30 \pm 5$$

0.10 **M2** Получен правильный ответ для ρ:

$$\rho = (28.5 \pm 4.5)\frac{\mu_0^2 I^2 R_0^5 R^4 H^2}{\sqrt{mk}(R^2 + H^2)^5}$$

D1[0.60] Определите индукцию B_z магнитного поля соленоида, а также её производную dB_z/dz в точке с координатой z. Ответ выразите через μ_0, n, I, R и z.

0.20 Использована теорема о телесном угле для магнитного поля:

$$B_z = \frac{\mu_0 i \Omega_{бок}}{4\pi}.$$

0.20 Определён телесный угол $\Omega_{бок}$:

$$\Omega_{бок} = 2\pi\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right).$$

0.10 Получена правильная зависимость $B_z(z)$:

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 n I}{2}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right).$$

0.10 Получена правильная зависимость $dB_z(z)/dz$:

$$\frac{dB_z(z)}{dz} = -\frac{\mu_0 n I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

D2[1.00] Определите линейную плотность тока i на поверхности цилиндра в точке с координатой z. Ответ выразите через μ_0, x и $dB_z(z)/dz$.

0.20 Записаны выражения для индукции магнитного поля внутри и снаружи стержня

$$B_{z(in)} = B_z(z - x) \qquad B_{z(out)} = B(z).$$

0.50 Предложен метод, позволяющий определить линейную плотность тока i, например, теорема о циркуляции.

0.10 Записана теорема о циркуляции:

$$(B_{z(in)} - B_{z(out)}) = \mu_0 i x.$$

2 × 0.10 Получено выражение для i (по 0.1 балла за величину и знак, полученный без чётного числа ошибок):

$$i(z) = -\frac{x}{\mu_0}\frac{dB_z}{dz}.$$

D3[1.50] Определите силу F_x, действующую на цилиндр со стороны магнитного поля соленоида. Ответ выразите через μ_0, r, R, n, I и x.

0.10 Для магнитного момента элемента цилиндра высотой dz записано:

$$dm_z = i(z)\pi r^2 dz.$$

0.20 Записано выражение для силы dF_z, действующей на рассмотренный магнитный момент:

$$dF_x = dm_z \frac{dB_z}{dz}.$$

0.40 Получено выражение для F_x:

$$F_x \approx -\frac{\mu_0 \pi r^2 n^2 I^2 R^4 x}{4} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(R^2+z^2)^3}.$$

0.20 Интеграл преобразован следующим образом:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(R^2+z^2)^3} = \frac{1}{R^5} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \varphi d\varphi$$

0.40 Для интеграла от $\cos^4 \varphi$ получено:

$$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \varphi d\varphi = \frac{3\pi}{8}.$$

2 × 0.10 Получен правильный ответ (по 0.1 балла за величину и знак, полученный без чётного числа ошибок):

$$F_x = -\frac{3\pi^2 \mu_0 \pi r^2 n^2 I^2}{32R} x.$$

D4[0.30] Получите зависимость перемещения стержня x от времени t. Ответ выразите через μ_0, r, R, n, I и m.

0.10 Определена циклическая частота гармонических колебаний ω_0:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3\mu_0 \pi^2 r^2 n^2 I^2}{32mR}}.$$

0.10 Получена зависимость $x(t)$:

$$x(t) = \frac{v_0 \sin \omega_0 t}{\omega_0}.$$

0.10 Получена правильная зависимость $x(t)$:

$$x(t) = v_0 \sqrt{\frac{32mR}{3\mu_0 \pi^2 r^2 n^2 I^2}} \sin \sqrt{\frac{3\mu_0 \pi^2 r^2 n^2 I^2}{32mR}} t.$$