Y21-T6 — Керлинг

A1$^{0.50}$ Покажите, что суммарная сила, действующая на кольцо, определяется выражением:

$$\vec{F}_{tot} = -\mu mg \cdot f\left(\frac{v(t)}{\omega(t)\, r}\right)\hat{x},$$

где

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{a-\sin\theta}{\sqrt{1+a^2-2a\sin\theta}}d\theta$$

Обозначим скорость кусочка, видимого из центра кольца под углом $d\theta$ как $\vec{u}$. Так как тело движется, а коэффициент трения не зависит от направления движения, то сила трения, действующая на выбранный кусочек, направлена противоположно его скорости. Тогда её можно записать в таком виде:

$$d\vec{F}_{fric} = -\frac{\vec{u}}{u}\mu\, dN = -\frac{(v-\omega r\sin\theta)\hat{x}+(\omega r\cos\theta)\hat{y}}{\sqrt{v^2+(\omega r)^2-2v\omega r\sin\theta}}\mu mg\,\frac{d\theta}{2\pi}$$

Полная сила трения получается при интегрировании выражения вдоль всего кольца, т. е. в диапазоне углов от 0 до 2π.

Несложно заменить, что $F_{tot\, y} = 0$, так как всё выражение меняет знак при замене $\theta \to \pi - \theta$. Физически это соответствует тому, что силы, действующие на кусочки, симметричные относительно оси OX, проходящей через центр кольца, компенсируют y-составляющие друг друга.

Разделив числитель и знаменатель на ωr, приходим к искомому выражению.

A2$^{0.50}$ Покажите, что суммарный момент, действующий на кольцо, равен:

$$\tau_{tot} = -\mu mgrf\left(\frac{\omega(t)r}{v(t)}\right)$$

$$d\vec{\tau} = \left[\vec{r}\times d\vec{F}_{fric}\right] = -\frac{[\vec{r}\times\vec{u}]}{u}\mu g\, dm$$

В векторное произведение входит только компонента $\vec{u}$, перпендикулярная радиусу, т. е. $u_\tau = \omega r - v\sin\theta$. подставляя всё в итоговое выражение, получим:

$$\vec{\tau} = -\mu mgr\int\limits_0^{2\pi}\frac{\omega r - v\sin\theta}{\sqrt{v^2+(\omega r)^2-2v\omega r\sin\theta}}\frac{d\theta}{2\pi},$$

откуда после сокращения на v получится искомая формула.

A3$^{0.10}$ Докажите, что уравнения движения имеют вид:

$$\dot{v} = -\mu g\cdot f\left(\frac{v}{\omega r}\right)\,\dot{\omega}r = -\mu g\cdot f\left(\frac{\omega r}{v}\right)$$

Векторная сумма сил всегда сонаправлена скорости, поэтому $|\dot{\vec{v}}| = |\dot{v}|$, то есть тангенциальное ускорение равно нулю. Тогда уравнения движения примут вид:

$$m\dot{v} = -\mu mgf\left(\frac{v}{\omega r}\right)\,m\dot{\omega}r^2 = -\mu mgrf\left(\frac{\omega r}{v}\right),$$

откуда после сокращения на m и mr соответственно получатся искомые равенства.

B1$^{0.50}$ Докажите: a) $f(0)=0,\ f(1)=\dfrac{2}{\pi},\ f(\infty)=1$ b) $f(a)$ строго возрастает при $a\geqslant 0$

a)

$$f(0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}-\sin\theta d\theta=0 f(1)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1-\sin\theta}{\sqrt{2-2\sin\theta}}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{2}}d\theta==\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right|d\theta=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\mathrm{si}$$

B2$^{0.30}$ Рассмотрим поведение параметра $a(t)=\dfrac{v(t)}{\omega(t)r}$. Покажите, что происходит с $a(t)$ (растёт/уменьшается/остаётся неизменным) в каждом из следующих случаев:
a) в некоторый момент $a(t)=1$
b) в некоторый момент $a(t)<1$
c) в некоторый момент $a(t)>1$

$$\dot a=\frac{d}{dt}\left(\frac{v}{\omega r}\right)=\frac{\dot v\,\omega r-v\,\dot\omega r}{(\omega r)^2}=-\frac{\mu mg}{\omega r}\left(f(a)-af\left(\tfrac{1}{a}\right)\right)$$

Анализируя данное выражение, получаем:

$$f(a)-af\left(\tfrac{1}{a}\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{a-\sin\theta-a(1-a\sin\theta)}{\sqrt{1+a^2-2a\sin\theta}}d\theta==\frac{a^2-1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin\theta}{\sqrt{1+a^2-2a\sin\theta}}d\theta$$

В области отрицательных значений подынтегральной функции знаменатель больше, чем в области положительных, поэтому интеграл всегда положителен. Таким образом:

$$sign(\dot a)=sign(1-a);\dot a=0\Rightarrow a=1.$$

Заметим, что ответ можно было бы получить и из более простых логических соображений

Ответ: a) $a=1\quad\Rightarrow\quad a$ – постоянна; b) $a<1\quad\Rightarrow\quad a$ – возрастает; c) $a>1\quad\Rightarrow\quad a$ – убывает.

B3$^{0.60}$ Нарисуйте качественно на графике, осями которого являются v и ωr, траектории, отображающие разное движение кольца, то есть при заданных v_0 и $\omega_0 r$ нарисуйте, как они будут изменяться с течением времени.
Необходимо нарисовать хотя бы одну траекторию на каждый пункт предыдущего задания. Кроме того, нарисуйте траекторию, проходящую через точку $(v_0,0)$ и еще одну, начинающуюся в точке $(0,\omega_0 r)$
Подпишите оси графика и укажите направления движения системы для каждой нарисованной траектории

Как можно было заметить из предыдущего пункта, все траектории асимптотически стремятся к единице. При этом, $\dot v<0$ и $\dot\omega r<0$. Приведём искомый график:

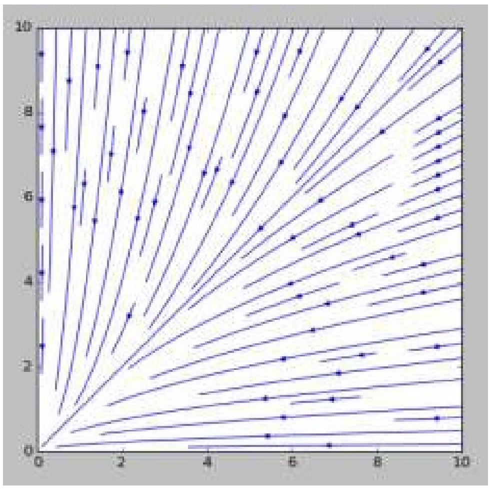

Рис. 1: Семейство траекторий движения системы в плоскости $(v, \omega r)$

Ответ: <div class="kt-section$_{info"style="text-align:center;}$»Семействотраекторийдвижениясистемывплоскости(v, ωr) </div>

B4$^{0.10}$ Вычислите мгновенную мощность, которая расходуется, когда есть только угловая скорость ω $(v = 0)$, и отдельно, когда присутствует только линейная v $(\omega = 0)$.

В случае отсутствия вращательного движения сила трения, действующая на каждый кусочек, направлена против оси X. Тогда:

$$P_v = -F_{tot} v = -\mu m g\, v$$

В случае отсутствия поступательного движения

$$P_\omega = -\tau_{tot}\omega = -\mu m g\, \omega r$$

Более строгие рассуждения будут приведены в пункте B5.

Ответ:

$$P_v = -\mu m g\, v P_\omega = -\mu m g\, \omega r$$

B5$^{0.60}$ Для заданных v и ω вычислите мгновенную мощность P, которая расходуется на трение в данный момент времени. Дайте ответ в виде интеграла с безразмерной переменной.

$$P = \int \vec{u} \cdot d\vec{F}_{fric} = -\mu m g \int_0^{2\pi} \vec{u} \cdot \frac{\vec{u}}{u} \frac{d\theta}{2\pi} = -\mu m g\, \omega r \int_0^{2\pi} \frac{u}{\omega r} \frac{d\theta}{2\pi}$$

Подставляя выражение для скорости кусочка $\vec{u}$:

Ответ:

$$P = -\mu m g\, \omega r \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \left(\frac{v}{\omega r}\right)^2 - 2\left(\frac{v}{\omega r}\right)\sin(\theta)}\ \frac{d\theta}{2\pi}$$

В6[1.20] Предположим, что кольцу придали определённую начальную кинетическую энергию E_0. Каково должно быть соотношение $a_0 = \frac{v_0}{\omega_0 r}$, при котором кольцо будет двигаться максимальное время?
Подсказка: Постарайтесь дать ответ на предыдущий пункт при помощи только E_0 и a_0 (и других данных из этого пункта), исключив из уравнения v и ω

Воспользуемся подсказкой :)

$$E = \frac{m}{2}\left[v^2 + (\omega r)^2\right] = \frac{m}{2}(\omega r)^2(a^2+1) m\omega r = \sqrt{2mE}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} P(a, E) = -\mu g\sqrt{2mE}\cdot\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{1 - \frac{2a}{1+a^2}\sin(\theta)}\,\frac{d\theta}{2\pi}$$

Анализировать последнее выражение можно несколькими способами. Например, взяв частную производную по a

$$\frac{\partial}{\partial a}\Big(P(a, E)\Big) = \mu g\sqrt{2mE}\;\frac{1-a^2}{1+a^2}\cdot\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin\theta}{\sqrt{1+a^2-2a\sin\theta}}\frac{d\theta}{2\pi}$$

где интеграл в правой части совпадает с интегралом в $B2$ и имеет положительные значения при любых a. Так как при $a < 1$ функция P убывает, а при $a > 1-$ возрастает, то её минимум реализуется в $a_0 = 1$. Из того факта, что мощность P всегда отрицательна и стремится к $P \to 0$ только при $E \to 0$ очевидно, что движение может закончиться только при $E = 0$. Также, следует заметить, что движение с параметром $a = 1$ устойчиво, а значит, при $a_0 = 1$ всё движение будет происходит с минимально возможной мощностью, т. е. пройдет максимально возможное время при заданной начальной энергии $E = E_0$

Ответ:

$$a_0 = 1$$

В7[0.50] Каково максимальное время движения при начальной энергии E_0?

Как мы выяснили в предыдущем пункте, движение, продолжающееся максимальное время происходит при $a = 1$. Тогда время можно найти из уравнения:

$$\dot{E} = P(1, E) = -\mu g\sqrt{2mE}\;\cdot\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{1-\sin(\theta)}\;\frac{d\theta}{2\pi}$$

Интеграл вычисляется аналогично пункту $B1$ с помощью тригонометрической замены, указанной в условии.

$$\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{1-\sin(\theta)}\;\frac{d\theta}{2\pi} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)d\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$$

Разделяя переменные, получим

$$\int\limits_{E_0}^{0}\frac{dE}{\sqrt{E}} = -\mu g\sqrt{m}\cdot\frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\tau}dt$$

Из чего несложно выразить ответ.

Ответ:

$$\tau = \frac{\pi}{2\mu g}\sqrt{\frac{E_0}{m}}$$

C1[0.60] Напишите заново уравнения движения из пункта A3 таким образом, чтобы они подходили под новое условие.

Вывод уравнения для величины силы трения и момента силы трения остаётся тем же, однако, теперь полная реакция опоры равна $N = mg\cos\alpha$. Таким образом, суммарный момент, действующий на кольцо, просто умножится на $\cos\alpha$. С уравнениями для проекций сил, лежащих в плоскости движения немного сложнее: суммарная сила теперь не сонаправлена со скоростью кольца. Обозначив $\cos\varphi = (\widehat{\vec{v},\, \vec{g}_\tau})$, где $\vec{g}_\tau$ – составляющая вектора $\vec{g}$, лежащая вдоль плоскости, получим уравнения:

Ответ:

$$\dot{v} = -\mu g\, f\left(\frac{v}{\omega r}\right)\cos\alpha + g\sin\alpha\cos\varphi \dot{\omega} r = -\mu g\, f\left(\frac{\omega r}{v}\right)\cos\alpha$$

C2[2.00] При заданных начальных ω_0 и $v_0 = 0$ нарисуйте все возможные семейства траекторий движения кольца в координатах $(v, \omega r)$ (для каждого типа кривых нарисуйте свой график). Укажите следующие составляющие:
a) соответствующие значения параметров;
b) конечные точки (в которые траектории приходят за конечное или бесконечное время) в плоскости $(v, \omega r)$. Здесь достаточно написать для каждой составляющей, что она стремится к нулю/ стремится к бесконечности/ равна или стремится к какой-то положительной величине.
Подпишите оси графика и укажите направления движения системы для каждой нарисованной траектории

Так как при начале движения кольцо имеет нулевую скорость $v_0 = 0$, то в предыдущем уравнении на протяжении всего движения $\cos\varphi = 0$. $\dot{\omega} < 0$, т.е. $\omega \to 0$. В зависимости от величины $\tan\alpha$ возможны различные случаи: $v \to 0$, $v \to const$ и $v \to \infty$. Выбор одного из этих случаев определяется знаком $\dot{v}$ при $\dfrac{v}{\omega r} \to \infty$. Искомые траектории приведены на рисунках.

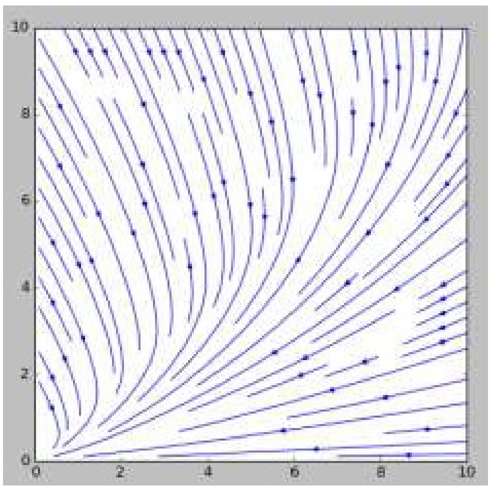

Рис. 2: Траектории при $\mu g t; \tan\alpha$

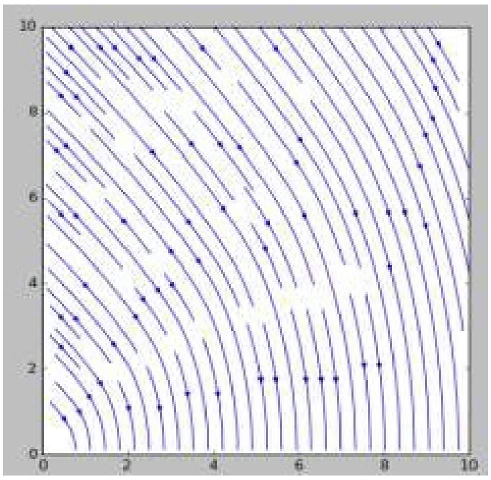

Рис. 3: Траектории при $\tan\alpha = \mu$

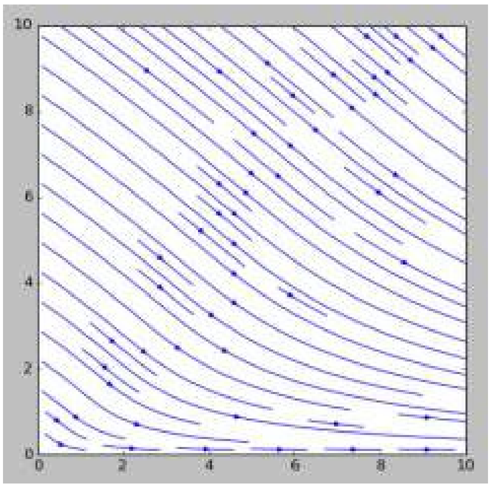

Рис. 4: Траектории при $\tan\alpha gt;\mu$