

## X24 — Атмосферное электричество

**A1<sup>0.80</sup>** Пусть проводящий шар радиусом  $R$ , несущий заряд  $Q$ , помещён в однородное электростатическое поле напряжённостью  $\vec{E}_0$ . Определите полную напряжённость  $\vec{E}$  электрического поля в точке с радиус-вектором  $\vec{r}$  относительно центра шара, находящейся вне шара. Ответ выразите через  $Q$ ,  $\vec{E}_0$ ,  $R$ ,  $\varepsilon_0$  и  $\vec{r}$ .

**0.20** Указано, что напряжённость электростатического поля вне шара представляет собой суперпозицию однородного поля, поля точечного заряда и поля диполя, расположенного в центре шара.

**0.10** Записано выражение для напряжённости поля диполя с дипольным моментом  $\vec{p}$ :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right).$$

**0.20** Предложен метод определения дипольного момента шара.

**0.20** Определён дипольный момент шара:

$$\vec{p} = 4\pi R^3 \varepsilon_0 \vec{E}_0$$

**0.10** Получен ответ:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \left( 1 - \frac{R^3}{r^3} \right) + \frac{3(\vec{E}_0 \cdot \vec{r})\vec{r}R^3}{r^2} + \frac{Q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}.$$

**A2<sup>0.40</sup>** Пусть  $\theta$  - угол между направлением вектора электростатического поля  $\vec{E}_0$  и радиус-вектором  $\vec{r}$  некоторой точки поверхности шара относительно его центра. Определите проекцию напряжённости электрического поля  $E_n(\theta)$  на направление нормали. Ответ выразите через  $Q$ ,  $E_0$ ,  $R$ ,  $\varepsilon_0$  и  $\theta$ .

**0.40** Получено выражение для  $E_n$ :

$$E_n = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} + 3E_0 \cos \theta$$

**A3<sup>0.20</sup>** При каких значениях заряда  $Q$  шара величина  $E_n$  может обращаться в ноль? Ответ выразите через  $E_0$ ,  $\varepsilon_0$  и  $R$ . Далее во всех пунктах считайте, что заряд шара  $Q$  попадает в найденный вами диапазон.

**0.10** Записано условие равенства нулю компоненты напряжённости  $E_n$ :

$$Q = -12\pi\varepsilon_0 R^2 E_0 \cos \theta.$$

**0.10** Определён искомый диапазон  $Q$ :

$$Q \in [-12\pi R^2 \varepsilon_0 E_0; 12\pi R^2 \varepsilon_0 E_0].$$

**A4<sup>0.50</sup>** Пусть заряд шара равен  $Q$ . При каком значении угла  $\theta_0$  компонента напряжённости  $E_n(\theta_0)$  обращается в ноль? Ответ выразите через  $Q$ ,  $E_0$ ,  $\varepsilon_0$  и  $R$ . Определите также, при каких значениях угла  $\theta$  на поверхность шара попадают отрицательные ионы, а при каких - положительные. Ответы выразите через  $\theta_0$ .

**0.10** Определено значение угла  $\theta_0$ :

$$\theta_0 = \arccos \left( -\frac{Q}{12\pi R^2 \varepsilon_0 E_0} \right).$$

4 ×

**0.10** Определён диапазон углов, соответствующий попаданию ионов (по 0.1 балла за границу): Отрицательные ионы попадают на поверхность шара при  $\theta \in [0, \theta_0]$ ; Положительные ионы попадают на поверхность шара при  $\theta \in [\theta_0, \pi]$ .

**A5<sup>1.00</sup>** Определите полную производную по времени заряда шара  $dQ/dt$ . Ответ выразите через  $Q$ ,  $E_0$ ,  $\varepsilon_0$ ,  $R$ ,  $\sigma_+$ ,  $\sigma_-$  и, если понадобится,  $\theta_0$ .

**0.20** Записано выражение для компоненты  $dQ_-/dt$ , обусловленной попаданием отрицательных ионов:

$$\frac{dQ_-}{dt} = -\sigma_- \int_0^{\theta_0} \left( \frac{Q}{2\varepsilon_0} + 6\pi R^2 E_0 \cos \theta \right) \sin \theta d\theta.$$

**0.20** Вычислен интеграл для  $dQ_-/dt$ :

$$\frac{dQ_-}{dt} = -\sigma_- \left( \frac{Q(1 - \cos \theta_0)}{2\varepsilon_0} + 3\pi R^2 E_0 \sin^2 \theta_0 \right).$$

**0.20** Записано выражение для компоненты  $dQ_+/dt$ , обусловленной попаданием положительных ионов:

$$\frac{dQ_+}{dt} = -\sigma_+ \int_{\theta_0}^{\pi} \left( \frac{Q}{2\varepsilon_0} + 6\pi R^2 E_0 \cos \theta \right) \sin \theta d\theta,$$

**0.20** Вычислен интеграл для  $dQ_+/dt$ :

$$\frac{dQ_+}{dt} = -\sigma_+ \left( \frac{Q(1 + \cos \theta_0)}{2\varepsilon_0} - 3\pi R^2 E_0 \sin^2 \theta_0 \right).$$

**0.20** Получен ответ для  $dQ/dt$ :

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q(\sigma_+ + \sigma_-)}{2\varepsilon_0} + (\sigma_+ - \sigma_-) \left( 3\pi R^2 E_0 \sin^2 \theta_0 - \frac{Q \cos \theta_0}{2\varepsilon_0} \right).$$

**A6<sup>0.80</sup>** Определите стационарный заряд шара  $Q_0$ , при котором он остаётся постоянным во времени. Ответ выразите через  $E_0$ ,  $\varepsilon_0$ ,  $R$ ,  $\sigma_+$  и  $\sigma_-$ .

**0.40** Подставлено значение  $\theta_0$  и получено квадратное уравнение относительно  $Q_0$ :

$$Q_0^2 - Q_0 \frac{24\pi R^2 \varepsilon_0 E_0 (\sigma_+ + \sigma_-)}{(\sigma_+ - \sigma_-)} + 144\pi^2 R^4 \varepsilon_0^2 E_0^2 = 0.$$

**0.20** Правильно решено квадратное уравнение:

$$Q_0 = 12\pi R^2 \varepsilon_0 E_0 \left( \frac{\sqrt{\sigma_+} + \sqrt{\sigma_-}}{\sqrt{\sigma_+} - \sqrt{\sigma_-}} \right)^{\pm 1}.$$

**0.20** Выбран нужный корень и получен ответ для  $Q_0$ :

$$Q_0 = 12\pi R^2 \varepsilon_0 E_0 \left( \frac{\sqrt{\sigma_+} - \sqrt{\sigma_-}}{\sqrt{\sigma_+} + \sqrt{\sigma_-}} \right).$$

**A7<sup>0.60</sup>** При малых значениях  $\Delta Q$  зависимость  $\dot{Q}(\Delta Q)$  можно представить в виде:

$$\dot{Q} \approx A \Delta Q.$$

Выразите  $A$  через  $\sigma_+$ ,  $\sigma_-$  и  $\varepsilon_0$ . Является ли найденное значение заряда  $Q_0$  устойчивым? Ответ обоснуйте.

**0.30** Для зависимости  $\dot{Q}(Q)$  в виде:

$$\dot{Q} = aQ^2 - bQ + c$$

записано приближение:

$$\dot{Q} = -(b - 2aQ_0)\Delta Q$$

**0.20** Определено значение  $A$ :

$$A = -\frac{\sqrt{\sigma_+\sigma_-}}{\varepsilon_0}.$$

**0.10** Для своего знака  $A$  сделан вывод об устойчивости значения заряда  $Q_0$ .

**A8<sup>0.30</sup>** Получите зависимость отклонения заряда шара  $\Delta Q$  от времени  $t$ . Ответ выразите через  $\Delta Q_0$ ,  $\varepsilon_0$ ,  $\sigma_+$ ,  $\sigma_-$  и  $t$ . Покажите также, что вид временной зависимости определяется только произведением  $\sigma_+\sigma_-$ .

**0.20** Для своего значения  $A$  получено:

$$\Delta Q(t) = \Delta Q_0 e^{At}$$

**0.10** Получено выражение для  $\Delta Q(t)$  в следующем виде:

$$\Delta Q(t) = \Delta Q_0 \exp\left(-\frac{\sqrt{\sigma_+\sigma_-}t}{\varepsilon_0}\right).$$

**B1<sup>0.50</sup>** Определите вектор  $\vec{E}$  напряжённости электростатического поля в области пересечения изолированных эллипсоидов. Ответ выразите через  $\rho$ ,  $\vec{l}$ ,  $\varepsilon_0$  и  $A$ .

**0.20** Показано, что компоненты напряжённости  $E_x$  и  $E_y$  в области пересечения равны нулю.

**0.30** Получено выражение для  $\vec{E}$ :

$$\vec{E} = -\frac{\rho A \vec{l}}{\varepsilon_0}.$$

-

**0.10** Пункт оценивается при неправильном знаке в выражении для  $\vec{E}$ .

**B2<sup>0.30</sup>** Рассмотрим изолированный равномерно поляризованный вдоль оси  $z$  эллипсоид. Пусть напряжённость электростатического поля внутри эллипсоида равняется  $\vec{E}$ . Определите вектор поляризации эллипсоида  $\vec{P}$ . Ответ выразите через  $\vec{E}$ ,  $\varepsilon_0$  и  $A$ .

**0.10** Записана связь величины  $\rho \vec{l}$  с вектором поляризации  $\vec{P}$ :

$$\vec{P} = \rho \vec{l}.$$

**0.10** Выражение для  $\vec{E}$  записано в виде:

$$\vec{E} = -\frac{A \vec{P}}{\varepsilon_0}.$$

**0.10** Получен ответ для  $\vec{P}$ :

$$\vec{P} = -\frac{\varepsilon_0 \vec{E}}{A}.$$

**В3<sup>0.30</sup>** Определите вектор поляризации  $\vec{P}$  эллипсоида. Ответ выразите через  $\vec{E}_0$ ,  $\varepsilon_0$  и  $A$ . Определите также максимальную величину поверхностной плотности заряда  $\sigma_{max}$  на поверхности эллипсоида. Ответ выразите через  $P$ .

**0.10** Получен ответ для  $\vec{P}$ :

$$\vec{P} = \frac{\varepsilon_0 \vec{E}_0}{A}.$$

**0.20** Получен ответ для  $\sigma_{max}$ :

$$\sigma_{max} = P.$$

**В4<sup>0.40</sup>** Выразите полную компоненту напряжённости электростатического поля  $E_n$  на поверхности проводника через поверхностную плотность заряда  $\sigma$  и  $\varepsilon_0$ . Определите максимальную величину напряжённости  $E_{max}$  электростатического поля на поверхности эллипсоида. Ответ выразите через  $E_0$  и  $A$ .

**0.20** Из теоремы Гаусса получено:

$$E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

**0.10** Указано, что величина  $E_n$  максимальна при максимальном значении  $\sigma$ .

**0.10** Получен ответ для  $E_{max}$ :

$$E_{max} = \frac{E_0}{A}.$$

**В5<sup>0.40</sup>** В листах ответов приведён рисунок, на котором над бесконечной проводящей плоскостью расположен точечный диполь, дипольный момент которого направлен перпендикулярно плоскости. В листах ответов приведите электростатическое изображение диполя в проводящей плоскости. Используя полученный результат, приведите в листах ответов электростатическое изображение половины равномерно поляризованного эллипсоида вращения, контактирующего с проводящей плоскостью экваториальным сечением.

**0.10** Указано, что изображение точечного диполя с дипольным моментом  $\vec{p}$  представляет собой диполь с тем же дипольным моментом  $\vec{p}$  и расположено на том же расстоянии от плоскости.

**0.10** В листах ответов приведено электростатическое изображение точечного диполя.

**0.10** Указано, что электростатическое изображение половины равномерно поляризованного эллипсоида дополняет его до целого.

**0.10** В листах ответов приведено электростатическое изображение половины равномерно поляризованного эллипсоида.

**В6<sup>0.50</sup>** Покажите, что выражение для максимальной напряжённости электростатического поля  $E_{max}$  совпадает с выражением, найденным в пункте В4, и найдите его численное значение. Достаточно ли величины напряжённости электростатического поля  $E_0$  для пробоя воздуха в какой-либо точке пространства, если он происходит при напряжённости, равной  $E_{пр} = 30 \text{ кВ/см}$ ?

**0.30** Обосновано, что если половина эллипсоида поляризована равномерно, на плоской поверхности выполняются граничные условия.

**0.10** Рассчитана величина  $E_{max}$ :

$$E_{max} \approx 7.4 \cdot 10^{12} \text{ В/м}.$$

**0.10** Сделан вывод, что величины  $E_0$  достаточно для пробы воздуха.

**C1<sup>0.30</sup>** Принимая потенциал шара равным потенциалу на поверхности Земли, т.е. нулю, определите величину заряда  $q_0$  шара. Ответ выразите через  $\varepsilon_0$ ,  $E_0$ ,  $R_0$  и  $h$ . Влиянием электростатического поля шара на электростатическое поле Земли можно пренебречь. Влиянием электростатического поля зарядов, расположенных на проводе, можно пренебречь во всём пространстве.

**0.20** Записано условие равенства потенциала шара нулю:

$$E_0 h + \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 R_0} = 0.$$

**0.10** Получен ответ для  $q_0$ :

$$q_0 = -4\pi\varepsilon_0 R_0 h E_0.$$

**C2<sup>0.40</sup>** Определите величину силы тока  $I$ , перетекающего из атмосферы в шар, если проводимость воздуха во всей атмосфере можно принять равной  $\sigma_0$ . Ответ выразите через  $E_0$ ,  $R_0$ ,  $h$ ,  $\varepsilon_0$  и  $\sigma_0$ .

**0.20** Записано выражение для силы тока  $I$ :

$$I = -4\pi R_0^2 \sigma_0 E.$$

**0.10** Получено выражение для  $E$ :

$$E = -\frac{E_0 h}{R_0}.$$

**0.10** Получен ответ для силы тока  $I$ :

$$I = 4\pi R_0 h \sigma_0 E_0.$$

**C3<sup>0.30</sup>** Запишите выражение для условия равенства нулю потенциала шара. В уравнение могут войти  $E_0$ ,  $h$ ,  $q_0$ ,  $q$ ,  $R_0$  и  $R$ .

**0.20** Потенциал электростатического поля сферических поверхностей в центре шара составляет:

$$\varphi_q + \varphi_{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{q_0}{R_0} + \frac{q}{R} \right).$$

**0.10** Получено правильное уравнение:

$$E_0 h + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{q_0}{R_0} + \frac{q}{R} \right) = 0.$$

**C4<sup>0.30</sup>** Из условия равенства силы текущего тока  $I$ , пересекающей сферическую поверхность внутри и вне ионизированного слоя, получите уравнение, связывающее заряды  $q_0$  и  $q$ . В уравнение также могут войти проводимости  $\sigma_0$  и  $\sigma$ .

**0.10** Записано выражение для  $I_{in}$ :

$$I_{in} = -\frac{q_0 \sigma}{\varepsilon_0}.$$

**0.10** Записано выражение для  $I_{out}$ :

$$I_{out} = -\frac{(q_0 + q)\sigma_0}{\varepsilon_0}.$$

**0.10** Получено правильное уравнение:

$$(q_0 + q)\sigma_0 = q_0\sigma.$$

**C5<sup>0.20</sup>** Определите величину силы тока  $I$ , перетекающего из атмосферы в шар в этом случае. Ответ выразите через  $E_0$ ,  $R_0$ ,  $R$ ,  $h$ ,  $\varepsilon_0$ ,  $\sigma_0$  и  $\sigma$ .

**0.10** Получено выражение для  $q_0$ :

$$q_0 = -\frac{4\pi\varepsilon_0 R_0 h E_0}{1 + \frac{R_0}{R} \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} - 1 \right)}.$$

**0.10** Получено выражение для  $I$ :

$$I = \frac{4\pi R_0 h \sigma E_0}{1 + \frac{R_0}{R} \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} - 1 \right)}.$$

**C6<sup>0.10</sup>** Покажите, что при  $R \approx R_0$  приближённое выражение для силы тока  $I$  переходит в выражение, соответствующее отсутствию ионизированного слоя.

**0.10** Выражение для  $I$  приведено к виду:

$$I \approx 4\pi R h \sigma_0 E_0.$$

**D1<sup>0.20</sup>** Определите величину дрейфовой скорости  $u$  движения электронов. Ответ выразите через  $e$ ,  $E$ ,  $\lambda$ ,  $m$  и  $\bar{v}_T$ .

**0.10** Записано выражение для  $a$ :

$$a = \frac{eE}{m}.$$

**0.10** Получено выражение для  $u$ :

$$u = \frac{eE\lambda}{2m\bar{v}_T}.$$

**D2<sup>0.40</sup>** Из баланса энергии определите среднюю величину  $\overline{\Delta W}$  потери кинетической энергии электрона при столкновении с молекулами воздуха. Ответ выразите через  $e$ ,  $E$ ,  $\lambda$ ,  $m$  и  $\bar{W}$ .

**0.20** Записано выражение для средней мощности электростатического поля по перемещению одного электрона:

$$\bar{P} = eEu$$

**0.10** Записано выражение для  $\Delta W$ :

$$\Delta W = eEu\tau.$$

**0.10** Получен ответ для  $\overline{\Delta W}$ :

$$\overline{\Delta W} = \frac{(eE\lambda)^2}{4W}.$$

К данному пункту применяется РЕР от пункта D1.

**D3<sup>1.00</sup>** Получите точное выражение для величины  $\overline{\Delta W}/\overline{W}$ . Ответ выразите через  $m$  и  $M$ . Упростите ваш ответ с учётом  $m \ll M$ . Если вы не смогли решить этот пункт - в дальнейшем считайте, что  $\overline{\Delta W}/\overline{W} = m/M$ .

**0.20** Определена скорость молекулы воздуха в системе отсчёта центра масс:

$$v' = v_C = \frac{mv}{m + M}.$$

**0.30** Определена скорость молекулы воздуха в лабораторной системе отсчёта:

$$v_M = 2v_C \cos(\varphi/2).$$

**0.20** Записано выражение для  $\overline{\Delta W}$ :

$$\Delta W = \frac{Mm^2v^2}{4\pi(m + M)^2} \int_0^\pi (1 + \cos \varphi) \cdot 2\pi \sin \varphi d\varphi.$$

**0.10** Вычислен интеграл для  $\overline{\Delta W}$ :

$$\overline{\Delta W} = \frac{Mm^2v^2}{(m + M)^2}.$$

**0.10** Получено выражение для  $\overline{\Delta W}/\overline{W}$ :

$$\frac{\overline{\Delta W}}{\overline{W}} = \frac{2Mm}{(M + m)^2}.$$

**0.10** Правильное приближение для  $\overline{\Delta W}/\overline{W}$ :

$$\frac{\overline{\Delta W}}{\overline{W}} \approx \frac{2m}{M}.$$

**D4<sup>0.80</sup>** Определите стационарное значение кинетической энергии теплового движения электронов  $\overline{W}$  и скорости образования искрового канала  $u$ . Ответы выразите через  $m$ ,  $M$ ,  $e$ ,  $E$  и  $\lambda$ . Рассчитайте полученные значения.

**2 ×**

**0.20** Получен ответ для  $\overline{W}$  (по 0.2 балла за формулу и численное значение):

$$\overline{W} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{M}{2m}} eE\lambda \approx 4.2 \cdot 10^{-17} \text{ Дж}.$$

К данному пункту применяется РЕР от пунктов D1 – D3.

**2 ×**

**0.20** Получен ответ для  $u$  (по 0.2 балла за формулу и численное значение):

$$u = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{eE\lambda\sqrt{2}}{\sqrt{Mm}}} \approx 27.6 \text{ км/с}.$$

К данному пункту применяется РЕР от пунктов D1 – D3.