



NOM : MMADI YOUSOUF

Prénom : Baraka

Etudiante en L3 Mathématiques générales

Parcours Mathématiques Appliquées

Rapport de stage

Année : 2021



Plan

| | |
|---|----|
| Plan..... | 2 |
| Remerciements..... | 3 |
| Objectifs | 3 |
| Quelques généralités | 4 |
| Prérequis..... | 4 |
| Pollution des eaux par le nitrate en France..... | 4 |
| Impacts..... | 5 |
| Modélisation de l'écoulement de polluant agricole en sous-sol | 6 |
| Etude de pour 10000 parcelles agricoles sur Mayotte..... | 10 |
| Conclusion | 13 |
| Bibliographie..... | 14 |

Remerciements

Je tiens à remercier mes professeurs qui sans eux ce sujet ne se saurais présentés à moi. Je les remercie d'avoir été à l'écoute de nos questionnements durant tout ce travail. Je retiens par-là :

- Mme Eloïse COMTE chargée de recherche INRAE de Clermont-Ferrand qui m'a suivie durant toute cette période et conseillée.
- Mme Chiraz TRABELSI, Enseignante mathématiques à l'université de Mayotte, pour sa disponibilité, ses conseils et sa relecture.
- Mr Solym MANOU-ABI, maître de Conférences au Centre Universitaire de Mayotte, membre de l'Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck (IMAG).
- Mon entourage, pour leurs soutiens pendant cette période.

Objectifs

Le but de ce projet est de s'initier à la problématique de pollution d'eau via des approches scientifiques incluant une connaissance des objets mathématiques pouvant servir à la compréhension.

Une première partie théorique dirigée par Madame Eloïse COMTE INRAE de Clermont-Ferrand et d'une deuxième partie pratique encadrée par Monsieur Solym MANOU ABI Maître Conférences en Mathématiques appliquées au CUFR Mayotte et membre de l'IMAG Montpellier.

La restitution de mon travail se déroulera en trois étapes : une première partie sur les généralités et quelques notions fondamentales à savoir pour la compréhension du sujet, une seconde partie sur laquelle quelques procédés mathématiques sont étudiés pour pouvoir apporter différentes explications. Par exemples les analyses en composantes principales ou encore des résolutions d'équations différentielles, et finir en mettant en évidence l'utilité des outils mathématiques sur ce sujet et suggérer d'éventuelles solutions pour prévenir la pollution à long terme. Il ne s'agira pas d'aller développer des méthodes mais de comprendre l'existence d'objets mathématiques pouvant aider à l'illustration.

Quelques généralités

Prérequis

Avant de rentrer dans le vif du sujet voici quelques notions importantes à savoir. Ces notions servent à comprendre les explications qui seront données par la suite et qui servent aussi à la compréhension du sujet.

Termes clés :

- **Fluide compressible** : Un fluide dont on ne peut changer son volume. C'est-à-dire qu'on ne peut pas le comprimer dans un espace plus restreint. Les liquides sont des fluides incompressibles (eaux, huiles, etc.) contrairement aux gaz.
- **Porosité** : La porosité φ est l'ensemble des vides (pores) d'un matériau solide, ces vides sont remplis par des fluides (compressible ou non). C'est une grandeur physique comprise entre 0 et 1 qui conditionne les capacités d'écoulements et de rétention d'un substrat. $\varphi = \frac{V_{pores}}{V_{total}}$.
- **Fluide miscible** : La capacité d'une substance de se dissoudre dans une autre substance. On peut définir les liquides qui peuvent se mélanger pour former une solution homogène (exemple : le nitrate avec l'eau).
- **Viscosité** : L'ensemble des phénomènes de résistance au mouvement d'un fluide pour un écoulement. La viscosité diminue la liberté d'écoulement du fluide.
- **Conservation de la masse** : Loi fondamentale, de la chimie et de la physique qui indique qu'au cours de toute expérience, y compris si elle implique une transformation chimique, la masse se conserve.
- **Loi de Darcy** : Loi physique qui exprime le débit d'un fluide incompressible filtrant au travers d'un milieu poreux.

Pollution des eaux par le nitrate en France¹

Le sous-sol est constitué de différents types de matière (basalte, granites, sable, calcaire, etc.). Durant les périodes des pluies ou lorsqu'on pratique une activité agricole, l'eau déversée sur le sol va s'infiltrer dans les sous-sols, à des vitesses

¹ Commissariat Général Au Développement, n°116, Mai 2013, « les teneurs en nitrates augmentent dans les nappes phréatiques jusqu'en 2004 puis se stabilisent », www.statistique.developpement-durable.gouv.fr .

variantes jusqu'à atteindre les eaux sous-terraines stockées dans les nappes phréatiques². Ces dernières sont plus vulnérables à la pollution car elles sont alimentées directement par les eaux de pluie.

En effet les eaux de pluie ont un apport en nitrate conséquent. Lorsqu'on le déverse directement dans ces réservoirs, la pollution de l'eau augmente. Les activités humaines, par exemple l'agriculture et les routes, rejettent dans l'air des composés azotés. Au cours du transport de ces composés dans l'air, elles sont transformées en nitrates (NO_3^-).

En métropole, les surplus d'azotes sont issus des pluies mais aussi des vents sont estimés en 2010, à 581000 tonnes, soit 11kg/ha/an ce qui correspond à 10% des engrais épandus.

Une nappe phréatique est considérée comme impropre si la teneur en nitrate est supérieure à 50mg/l. En France, 41% des captages d'eaux potable abandonnés le sont pour des questions de qualité, les nitrates sont une première cause devant la bactériologie et les pesticides.

Impactes³

Les effets majeurs des nitrates sur les eaux de surfaces est de les conduire à l'eutrophisation. Lorsque les eaux sont trop chargées en nitrates et en phosphate, ces deux composants permettent la croissance des algues. Une présence excessive conduit à l'anoxie (abs d'oxygène dans l'eau) et donc à la morts des êtres vivants qui s'y trouvent. Ce phénomène se produit en général dans les endroits où le transit de l'eau est fortement ralenti et où la décomposition l'emporte sur la production algale. Le phénomène d'eutrophisation fluviale se produit principalement au printemps et en été, quand l'ensoleillement est fort, permettant la photosynthèse par les algues, et la température élevée.

« Produits naturellement dans le sol superficiel, ou apportés sous forme d'engrais, les nitrates en excès vont être entraînés vers la profondeur par l'eau de pluie qui s'infiltre dans les sols. » la migration vers les profondeurs est lente, de l'ordre de 1 à 2 m/an.

Le nitrate peut être éliminé naturellement:

- éliminations par la pyrite dont est constitué les nappes, ainsi plus les forages sont profonds meilleur est la qualité de l'eau. Mais plus on descend en fondueur moins on d'eau.

² Nappe directement alimentée par les eaux de pluie (nappes libre).

³ Mr Gérard MIQUEL, Rapport d'office parlementaire, 18 Mars 2003, « la qualité de l'eau et de l'assainissement en France »

- Lorsque la nappe est isolée de l'atmosphère par une couche d'argile isolante. Cependant il est très rare que cela se produise.

Finalement en générale il n'y a pas vraiment de disparition de nitrate dans les nappes.

Modélisation de l'écoulement de polluant agricole en sous-sol

Beaucoup d'équations différentielles servent à modéliser l'écoulement des fluides, notamment des polluants agricoles dans les sous-sols. « Dans la dynamique des fluides, les équations de Navier-Stokes décrivent le mouvement tridimensionnel des substances liquides visqueuses. Lorsqu'il n'y a pas de gradient de température fort dans le fluide, ces équations fournissent une très bonne approximation de la réalité »⁴.

« Les équations Navier-Stokes sont des équations aux dérivées partielles d'ordre deux. Leurs solutions ont été trouvées à une variété de problèmes de flux visqueux intéressants. ». Dans notre cas ici le concept reste le même.

On considère un champ sur lequel un agriculteur épand une quantité p de polluants. On se propose d'étudier l'évolution de la concentration C du polluant en sous-sols. Pour cela on s'intéresse à l'équation suivante :

$$(1) \quad R\psi\partial_t + \underbrace{v \cdot \nabla c}_{\text{convection}} - \underbrace{(\psi \nabla^2 c)}_{\text{diffusion}} = \underbrace{-r(c)}_{\text{termereaction}} + \underbrace{p}_{\text{apportagricol}} + \underbrace{\gamma}_{\text{apportnaturel}}$$

Pour simplifier on pose $r(c)=r^*c$, on obtient l'équation différentielle ordinaire d'ordre 2 suivante :

$$(2) \quad -\psi S c'' + v c' + r(c) - p - \gamma = 0$$

Que l'on va résoudre numériquement, avec la « méthode d'Euler pour une équation du deuxième ordre »⁵.

En pratique on sait résoudre numériquement une équation d'ordre 1 (E1) grâce à la méthode d'Euler. Maintenant pour résoudre une équation différentielle ordinaire d'ordre 2 (E2), il faut se ramener à un système de deux équations de type (E1).

Posons :

$$\begin{cases} C_1(x) = C(x) \\ C_2(x) = C_1'(x) \end{cases}$$

⁴ [What is Navier-Stokes Equation - Definition \(thermal-engineering.org\)](http://thermal-engineering.org/What-is-Navier-Stokes-Equation-Definition)

⁵ Scilab 7. Résolution numérique des équations différentielles de Valence ; Fabrice Sincère ; Version 0.1.2web

Ensuite récrire l'équation de façon à avoir deux équations de type (E1) :

$$\begin{cases} C_1'(x) = C_2(x) \\ \psi * S * C_2'(x) = v * C_2(x) + \alpha * C_1(x) - p - \gamma \end{cases}$$

On définit maintenant deux suites $U1_n$ et $U2_n$ respectivement écrites en fonction de C_1 et C_2 .

On pose $t_n = n * h$ avec $n \in \mathbb{N}$ et h le pas de calcul.

$$U1'_n = C_1'(t_n) \quad \text{Et} \quad U2'_n = C_2'(t_n)$$

Par récurrence on a les relations suivantes :

$$U1_{n+1} = U1_n + h * U1'_n \quad \text{Avec} \quad U1'_n = U2_n$$

$$\text{Et} \quad U2_{n+1} = U2_n + h * U2'_n \quad \text{avec} \quad U2'_n = \frac{1}{\psi * S} (v U2_n + \alpha * U1_n - p - \gamma)$$

Condition initiale :

$$U1_0 = C_1(0) = 0$$

$$U2_0 = C_2(0) = C_1(0) = 0$$

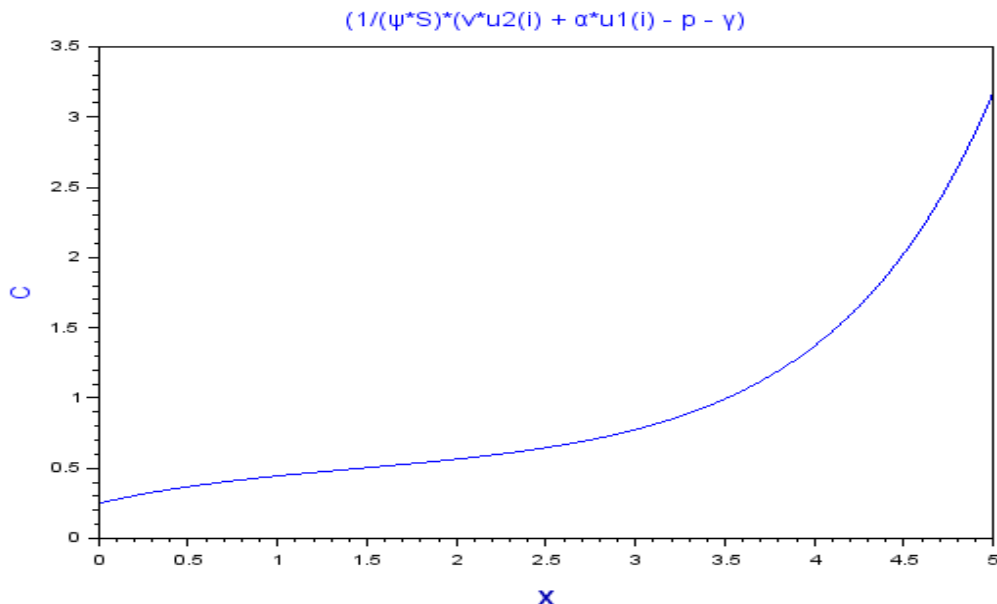
Avec des valeurs bien choisies, on obtient le programme Scilab qui suit :

```

1 //variables globales
2 n=1000 //nombre de pas (n+1 points)
3 y1=0.25 //c'(0)
4 y2=0.3 //c'(L)
5 xmax=5 //Domaines d'étude
6
7 funcprot(0)
1 function [x, u1, u2] = euler2(xmax, n, y1, y2)
2     h=xmax/n //pas
3     //initialisation des vecteurs x, u1 et u2
4     x(1)=0 //on commence à x=0
5     //conditions initiales
6     u1(1)=y1 //c(0)
7     u2(1)=y2 //c'(L)
8     psi=1
9     S=0.4 //E [10^-6; 10^-1], m2 par unit'e de temps
10    v=0.005 //E [10^-2; 20] m'etres par unit'e de temps
11    alpha=0.5
12    p=0.2 //apport d'engrais de l'agriculteur
13    gama=0.05 //E [0; 15], concentration par unit'e de temps
14    for i=1:n
15        x(i+1)=i*h
16        ulprime(i)=u2(i)
17        u1(i+1)=u1(i)+h*ulprime(i)
18        u2prime(i)=(1/(psi*S))*(v*u2(i)+alpha*u1(i)-p-gama)
19        u2(i+1)=u2(i)+h*u2prime(i)
20    end
21 endfunction
29 [x, u1, u2] = euler2(xmax, n, y1, y2)
30 //courbe méthode d'Euler
31 clf()
32 plot(x, u1)
33 //plot(x, u2, 'r') //dérivée
34 xlabel("x")
35 ylabel("C")
36 title("1/(psi*S)*(v*u2(i) + alpha*u1(i) - p - gamma)")

```


Dans notre cas ici, notre équation simplifiée (2) modélise l'évolution de la concentration de polluant (en ordonnée) dans l'espace considéré (en abscisse), Cf à la figure ci-dessous.



Interprétation :

On constate que le polluant se déplace et augmente tout au long de notre champ d'étude. Ceci est expliqué par la « loi de conservation de la masse, loi fondamentale de la chimie et de la physique qui indique non seulement qu'au cours de toute expérience, y compris si elle implique une transformation chimique, la masse se conserve, mais aussi que le nombre d'éléments de chaque espèce chimique se conserve »⁶. Cette évolution témoigne aussi du phénomène de diffusion.

Ce processus est plus ou moins accéléré en fonction du type de sols exploité. Par exemple, plus la porosité est importante plus le processus d'infiltration dans le sous-sol est important ; de même que sur la viscosité des polluants étudiés.

NB : cet exemple est purement académique et non réaliste. En effet, le modèle d'équation étudié est un modèle très simplifiée avec des paramètres bien choisis et non des données recueillies.

⁶ fr.wikipedia.org/wiki/Conservation_de_la_masse ; « rien ne se crée, rien ne se perd, tout se transforme »

Etude de pour 10000 parcelles agricoles sur Mayotte

L'analyse des données désigne les analyses statistiques multidimensionnelles. Elle permet de réduire l'espace multidimensionnelle (où l'information n'est pas lisible) en un espace à deux ou trois dimensions (où l'information est lisible), de façon à résumer une grande partie de l'information contenue dans l'espace multidimensionnel d'origine.

Pour cette partie nous allons effectuer une Analyses en Composantes Principales (ACP) sur le logiciel RStudio. En annexe on mettra le script RMarkdown qui nous a permis d'effectuer notre ACP.

Pour notre étude on dispose d'une base de données de 1000 parcelles. On s'intéresse aux variables suivantes :

1. Surface (P_SURF)
2. Produit chimique utilisé (P_CHIM)
3. Produit phytosanitaire utilisé (P_PHYT)
4. Amendements organiques (P_ORGA)
5. Pertes subies (P_PERT)

Conclusion

Pour finir, les Mathématiques Appliquées sont est une branche importantes qui s'intéresse à l'étude de différents domaines. Durant ce travail de recherche, je note l'importance de se documenter à travers le travail déjà entamer d'autres scientifiques pour mieux comprendre l'évolution de ce qui nous entoure. C'est donc avec un esprit d'équipe que j'ai eu à mener cette recherche. Le sujet de la pollution d'eau n'est pas anodin, car je me suis souvent demander comment faire pour préserver cette précieuse ressource. J'ai particulièrement affectionnée les moments d'application, notamment dans la partie de modélisation de l'écoulement de polluant dans le sous-sol. Nous pouvons ainsi retenir que par exemple, pour éviter la pollution en nitrate qu'il va falloir éviter le plus possible de l'utiliser en agriculture ou encore d'en mettre en fonction des besoins du sol avec le concept d'agriculture de précision.

Bibliographie

Fluide incompressible : [Les fluides compressibles et incompressibles | Alloprof](#)

Porosité : [Porosité — Wikipédia \(wikipedia.org\)](#)

Miscibilité : [Miscible - Definition and Examples | Miscible vs Soluble \(toppr.com\)](#)

Viscosité: [Viscosité — Wikipédia \(wikipedia.org\)](#)

Conservation de la masse: [Conservation de la masse — Wikipédia \(wikipedia.org\)](#)

Loi de Darcy: [Loi de Darcy — Wikipédia \(wikipedia.org\)](#) (liens directe avec les fluide compressible et les milieux poreux)

+Débit : [Débit — Wikipédia \(wikipedia.org\)](#)