

Sujet 1 : Equation de Sturm-Liouville

MMADI YOUSOUF Baraka

October 21, 2023

1 Introduction

On étudie les équations aux dérivées partielles parcequ'elles régissent un grand nombre des phénomènes physiques qui nous entourent. Pour résoudre les equations différentielles en particulier les équations aux dérivées partielles, on utilise différentes méthodes: la méthode de volumes finis, la méthode de différences finies, la méthode d'éléments finis.

Dans cette présentation, nous allons nous intéresser à la méthode des éléments finis. Dans un 1er temps, nous nous assurerons de l'existence et de l'unicité de la solution du problème étudié. Dans un 2nd temps nous utiliserons la méthode des éléments finis P1 et P2 pour résoudre le problème. Dans un troisième temps nous comparerons ces méthodes.

2 Problème de Cauchy

On considère le problème aux limites (PL) suivant :

$$\begin{cases} -((1+x)u')' + (1 + \cos(\pi x))u = f(x) \text{ dans } \Omega \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Avec $f(x) = -\pi \cos(\pi x) + \sin(\pi x)(\pi^2(1+x) + (1 + \cos(\pi x)))$

Le problème variationnel (PV) associé est :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1 \text{ tel que} \\ a(u, v) = l(v), \forall v \in H_0^1 \end{cases} \quad (2)$$

2.1 Solution exacte

Montrons que :

$$u(x) = \sin(\pi x) \quad (3)$$

est solution exacte du problème aux limites.

En effet, en remplaçant $u(x)$ dans l'edp on a :

$$\begin{aligned} -((1+x)u')' + (1 + \cos(\pi x))u &= -u' - (1+x)u'' + (1 + \cos(\pi x))u \\ \iff \\ -((1+x)u')' + (1 + \cos(\pi x))u &= -\pi \cos(\pi x) + \pi^2(1+x)\sin(\pi x) + (1 + \cos(\pi x))\sin(\pi x) \\ \iff \\ -((1+x)u')' + (1 + \cos(\pi x))u &= -\pi \cos(\pi x) + \sin(\pi x)(\pi^2(1+x) + (1 + \cos(\pi x))) \\ \iff \\ -((1+x)u')' + (1 + \cos(\pi x))u &= f(x) \end{aligned}$$

De plus, $u(x)$ vérifie les conditions de Dirichlet homogène imposées. Donc $u(x)$ est une solution exacte au problème aux limites (PL).

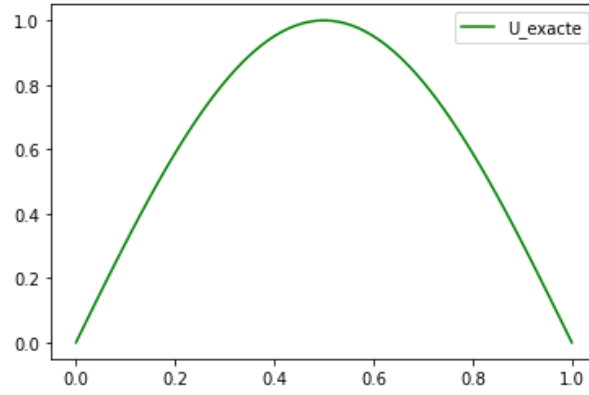


Figure 1: Solution exacte

2.2 Formulation variationnelle

Soit v dans V une fonction avec toutes la régularité nécessaire. V est un espace que l'on déterminera plus tard. On multiplie par v l'edp puis on intègre sur $]0,1[$.

$$\int_0^1 -((1+x)u'(x))' + (1 + \cos(\pi x))u(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

Intégration par partie :

$$\begin{aligned} \int_0^1 -((1+x)u'(x))'v(x)dx + \int_0^1 (1 + \cos(\pi x))u(x)v(x)dx &= \int_0^1 f(x)v(x)dx \\ \Rightarrow -[(1+x)u'(x)v(x)]_0^1 + \int_0^1 (1+x)u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 (1 + \cos(\pi x))u(x)v(x)dx &= \int_0^1 f(x)v(x)dx \end{aligned}$$

Pour donner un sens aux calculs ci-dessus, on impose que $v \in H^1([0,1])$. Pour annuler les termes aux bords, on impose que $v(0)=v(1)=0$. On en déduit alors que $v \in H_0^1([0,1])$.

On pose donc :

- $a(u,v) = \int_0^1 (1+x)u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 (1 + \cos(\pi x))u(x)v(x)dx$.
- $l(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx$.

On a alors le problème variationnelle suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1([0,1]) \text{ tel que} \\ a(u,v) = l(v) \quad \forall v \in H_0^1 \\ u(0) = u(1) = 0 \quad (4) \end{array} \right.$$

2.3 Théorème de Lax-Milgram

Le théorème de Lax-Milgram assure alors l'existence et l'unicité de la solution au problème variationnelle ci-dessus si et seulement si $a(.,.)$ est une application bilinéaire, continue et coercive et si $l(.)$ est une application linéaire et continue.

- Bilinearité de $a(.,.)$:

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \int_0^1 (1+x)u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 (1 + \cos(\pi x))u(x)v(x)dx \\ &= \int_0^1 (1+x)v'(x)u'(x)dx + \int_0^1 (1 + \cos(\pi x))v(x)u(x)dx \\ &= a(v,u) . \end{aligned}$$

$a(u,v)$ est symétrique.

Linéarité à gauche : soient u, v et $w \in H_0^1([0,1])$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a:

$$\begin{aligned} a(\lambda u + v, w) &= \int_0^1 (1+x)(\lambda u(x) + v(x))'(x)w'(x)dx + \int_0^1 (1 + \cos(\pi x))(\lambda u(x) + v(x))w(x)dx \\ &= \lambda \left(\int_0^1 (1+x)u'(x)w'(x)dx + \int_0^1 (1 + \cos(\pi x))u(x)w(x)dx \right) + \left(\int_0^1 (1+x)v'(x)w'(x)dx + \int_0^1 (1 + \right. \end{aligned}$$

$\cos(\pi x))v(x)w(x)dx$)
 $= \lambda a(u, w) + a(v, w)$. D'où la linéarité à gauche. Par symétrie $a(.,.)$ est linéaire à droite et donc bilinéaire.

- Continuité de $a(.,.)$:

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \int_0^1 |1+x| |u'(x)| |v'(x)| dx + \int_0^1 |1+\cos(\pi x)| |u(x)| |v(x)| dx \\ &\leq \sup_{x \in [0,1]} |1+x| \int_0^1 |u'(x)| |v'(x)| dx + \sup_{x \in [0,1]} |1+\cos(\pi x)| \int_0^1 |u(x)| |v(x)| dx \\ &\leq \sup_{x \in [0,1]} (|1+x|, |1+\cos(\pi x)|) (\int_0^1 |u'(x)| |v'(x)| dx + \int_0^1 |u(x)| |v(x)| dx) \\ &\leq 2^* (\int_0^1 |u'(x)| |v'(x)| dx + \int_0^1 |u(x)| |v(x)| dx) \\ &\leq 2^* ((\int_0^1 |u'(x)|^2 dx)^{1/2} (\int_0^1 |v'(x)|^2 dx)^{1/2} + (\int_0^1 |u(x)|^2 dx)^{1/2} (\int_0^1 |v(x)|^2 dx)^{1/2}) \\ &\leq 2^* (\|u'\|_{L^2(\Omega)} \|v'\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}) \\ &\leq 2^* (2^* \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}) \end{aligned}$$

Par équivalence des normes H^1 des normes H_0^1 on a

$$|a(u, v)| \leq 4^* \|u(x)\|_{H_0^1(\Omega)} \|v(x)\|_{H_0^1(\Omega)}$$

- Coercivité de $a(.,.)$:

$$a(u, u) = \int_0^1 (1+x) u'(x)^2 dx + \int_0^1 (1+\cos(\pi x)) u(x)^2 dx$$

$$a(u, u) \geq \min_{x \in [0,1]} \int_0^1 (1+x) u'(x)^2 dx + \min_{x \in [0,1]} \int_0^1 (1+\cos(\pi x)) u(x)^2 dx$$

$$\text{Or } \min_{x \in [0,1]} \int_0^1 (1+x) u'(x)^2 dx \geq \beta \int_0^1 (1+x) u'(x)^2 dx,$$

$$\text{Et } \int_0^1 (1+x) u'(x)^2 dx \geq \alpha \int_0^1 (1+\cos(\pi x)) u(x)^2 dx.$$

$$\text{Donc } a(u, u) \geq \min_{x \in [0,1]} (\alpha, \beta) (\int_0^1 (1+x) u'(x)^2 dx + \int_0^1 (1+\cos(\pi x)) u(x)^2 dx)$$

$x=0$ est un bon candidat et on a: $\alpha = 1$ et $\beta = 2$. Donc $\min_{x \in [0,1]} (\alpha, \beta) = 1$

$$\text{Ainsi } a(u, u) \geq \int_0^1 u'(x)^2 dx + \int_0^1 u(x)^2 dx \iff$$

$$a(u, u) \geq \int_0^1 u'(x)^2 dx + \int_0^1 u(x)^2 dx \iff$$

$$a(u, u) \geq \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \iff$$

$$a(u, u) \geq \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2$$

D'où la Coercivité de $a(.,.)$.

- Linéarité de $l(.)$: soient $u, v \in H_0^1([0, 1])$ et $\lambda \in R$, on a:

$$l(\lambda u + v) = \int_0^1 f(x) (\lambda u(x) + v(x)) dx \iff$$

$$l(\lambda u + v) = \lambda \int_0^1 f(x) u(x) dx + \int_0^1 f(x) v(x) dx \iff$$

$$l(\lambda u + v) = \lambda l(u) + l(v)$$

Donc $l(.)$ linéaire.

Continuité de $l(.)$:

$$|l(v)| \leq \int_0^1 |f(x)| |v(x)| dx \iff$$

$$|l(v)| \leq \int_0^1 |f(x)| |v(x)| dx \iff$$

$$|l(v)| \leq (\int_0^1 |f(x)|^2 dx)^{1/2} (\int_0^1 |v|^2 dx)^{1/2} \iff$$

$$|l(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \iff$$

$$|l(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \iff$$

$$|l(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

Donc $l(.)$ continue.

Bilan: par le théorème de Lax-Milgram, il existe une unique solution à notre problème variationnelle.

3 Méthode des éléments finis P1

La méthode des éléments finis consiste à construire des espaces d'approximation interne V_h des espaces fonctionnels usuels $H^1(\Omega), H_0^1(\Omega), H^2(\Omega), \dots$ dont la définition est basée sur la notion géométrique de maillage (exemple: triangles, tétraèdres, parallélépipèdes...) du domaine Ω .

(a) Système matricielle

On considère la discrétisation de Ω en $N + 1$ intervalles de longueur $h = 1/(N + 1)$:

On considère le problème variationnelle introduit en 2.2. La formulation variationnelle issue de l'utilisation des éléments finis P1, consiste à déterminer $u_h \in V_h$ défini par $v_h \in \{C^0([0, 1]; R) : v|_{[x_i, x_{i+1}]} \in P_1, \forall i \in 0, \dots, n\}$ ou $x_i = i/(n + 1)$ tel que $a(u_h, v_h) = l(v_h) \forall v_h \in V_h$ et $u_h(0) = v_h(0) = 0$

. On note $(\phi_i)_{i=0, \dots, n+1}$ la base de V_h définie par $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$

En utilisant ϕ_i comme fonction test, on obtient, à l'aide de (PV), que $\forall 0 < j < n + 1$

$$\sum_{i=0}^{n+1} (u_h)_i \int_0^1 (1+x) \phi'_i \phi'_j dx + \sum_{i=0}^{n+1} (u_h)_i \int_0^1 (1+\cos(\pi x)) \phi_i \phi_j dx = \int_0^1 f \phi_j dx$$

$\sum_{i=0}^{n+1} (u_h)_i \int_0^1 [(1+x) \phi'_i \phi'_j + (1+\cos(\pi x)) \phi_i \phi_j] dx = \int_0^1 f \phi_j dx$ ou $(u_h)_i$ sont les coordonnées de U_h dans la base $(\phi_i)_{i=0, \dots, n+1}$. Les conditions aux limites (C.L) implique $(u_h)_0 = (u_h)_{n+1} = 0$.

déterminer $U_h = (U_h)_{i=0 \leq i \leq n}$ consiste à résoudre le système linéaire :

$$\begin{aligned} A_h U_h &= F_h \\ (F_h)_i &= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f \phi_i dx \\ (A_h)_{ij} &= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (1+x) \phi'_i \phi'_j dx + \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (1+\cos(\pi x)) \phi_i \phi_j dx \\ U_h(x) &= \sum_{i=1}^n u_h(x_i) \phi_i(x) \text{ notre inconnue} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_i(x) &= \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} \text{ pour } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} \text{ pour } x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} \\ \implies \phi_i(x)' &= \begin{cases} \frac{1}{h} \text{ pour } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ -\frac{1}{h} \text{ pour } x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Pour résoudre le système matricielle ci-dessus, nous utiliserons des méthodes numériques (cf. code en annexe). Cette résolution peu très vite être fastidieuse car les méthodes de quadrature ne se valent pas toutes. Il faut aussi faire très attention à bien signifier les contraintes imposées aux bords... Pour apprécier la bonne convergence de la méthodes choisi, il est nécessaire d'étudier les erreurs commises (exemple : erreur en norme L2).

La matrice A_h est définie positive car la forme bilinéaire $a(.,.)$ est coercive. Soit $x \in R^N$ non nul ($x = (x_1, \dots, x_N)^T$ avec les x_i non tous nuls). On a :

$$x^T \left(\int_0^1 (1+x) \phi'_i \phi'_j dx \right) x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \int_0^1 (1+x) \phi'_i \phi'_j dx = \int_0^1 (1+x) \left(\sum_{i=1}^n x_i \phi'_i \right) \left(\sum_{j=1}^n x_j \phi'_j \right) dx$$

$$\text{Posons } X_h = \sum_{i=1}^n x_i \phi_i, \text{ on a alors } X'_h = \sum_{i=1}^n x_i \phi'_i \text{ et donc:}$$

$$x^T \left(\int_0^1 (1+x) \phi'_i \phi'_j dx \right) x = \int_0^1 (1+x) X_h'^2 dx$$

L'égalité ci-dessus est clairement supérieur ou égale à 0 car les x_i ne sont pas tous nuls et les dérivées des ϕ_i peuvent éventuellement être nulles pour certains $i \in [1, N]$.

De la même façon on a :

$$x^T \left(\int_0^1 (1+\cos(\pi x)) \phi_i \phi_j dx \right) x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \int_0^1 (1+\cos(\pi x)) \phi_i \phi_j dx = \int_0^1 (1+\cos(\pi x)) \left(\sum_{i=1}^n x_i \phi_i \right) \left(\sum_{j=1}^n x_j \phi_j \right) dx$$

$$\text{i.e. } x^T \left(\int_0^1 (1+\cos(\pi x)) \phi_i \phi_j dx \right) x = \int_0^1 (1+\cos(\pi x)) X_h^2 dx$$

Qui est toujours positive car les x_i ne sont pas tous nuls et les ϕ_i ne sont pas uniformément nuls.

Conclusion: $x^T(\int_0^1(1+x)\phi'_i\phi'_jdx)x + x^T(\int_0^1(1+\cos(\pi x)\phi_i\phi_jdx)x = x^T A_h x > 0$
i.e. A_h définie positive.

Prenons par exemple cinq points espacé de façon non-uniforme, on obtient la matrice suivante en utilisant la méthode des points milieux(cf. code en annexe):

```
la matrice A =
[[ 7.66898902 -3.69217967  0.          0.          0.         ]
 [-3.69217967  7.98616716 -2.48641503  0.          0.         ]
 [ 0.          -2.48641503  9.82742069 -2.9070418  0.         ]
 [ 0.          0.          -2.9070418  11.4417744 -3.23447217]
 [ 0.          0.          0.          -3.23447217  5.8140836  ]]
la taille de la matrice est 5
Erreur en norme 2 : 1.1899797105499428
```

Figure 2: Nx=5

Les courbes ci-dessous illustre parfaitement la complexité de certaines méthodes. Ici, on voit que la méthode des points milieux approxime mieux la solution au problème variationnelle avec une erreur en norme L2 égale à 7. Pour le même nombre Nx de point de discrétisation la solution obtenue par la méthode des trapèzes explose avec une erreur de 1e.25.

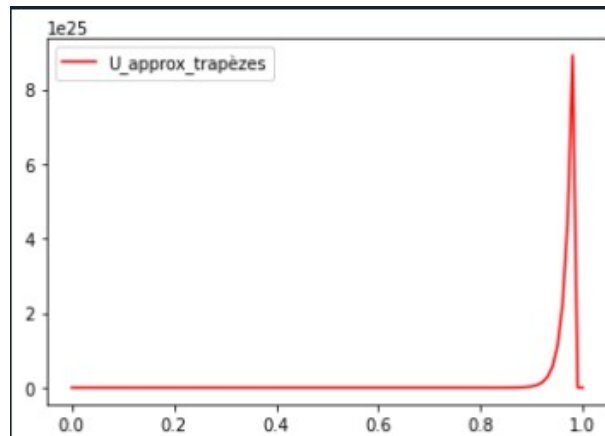


Figure 3: Par la méthode de trapèzes, Nx=100

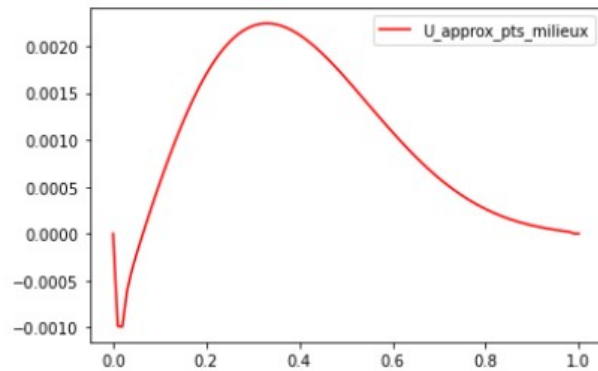


Figure 4: Par la méthode de points milieux, Nx=100

visualisons la solution approchée obtenue par Freefem++ un logiciel Open Source permettant de résoudre numériquement des équations différentielles par éléments finis. Il possède son propre langage

de script, inspiré du C++, pour décrire le type de problème différentiel, les équations aux dérivées partielles et les conditions initiales et aux limites.

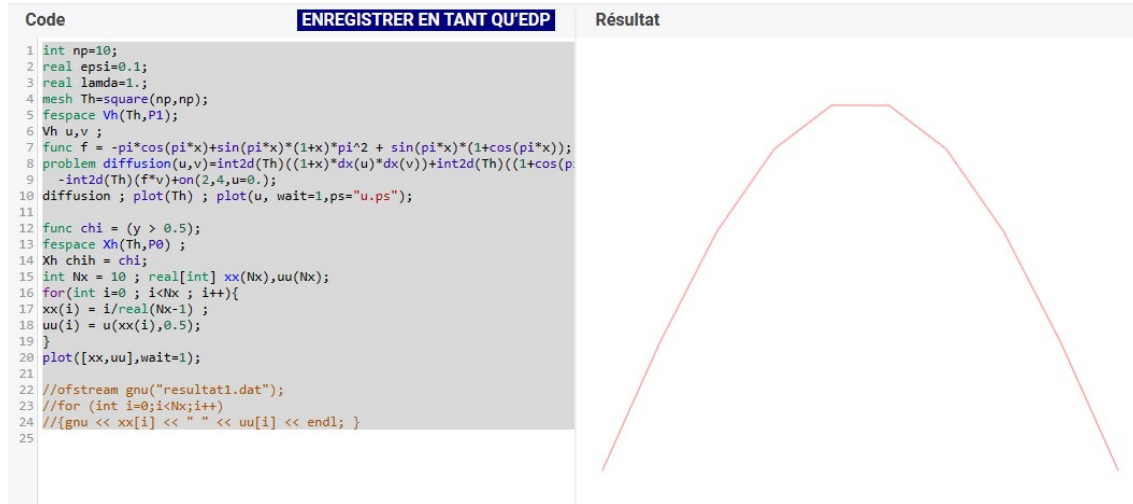


Figure 5: éléments finis P1, solution approché

Conforme à la solution exacte.

4 Méthode des éléments finis P2

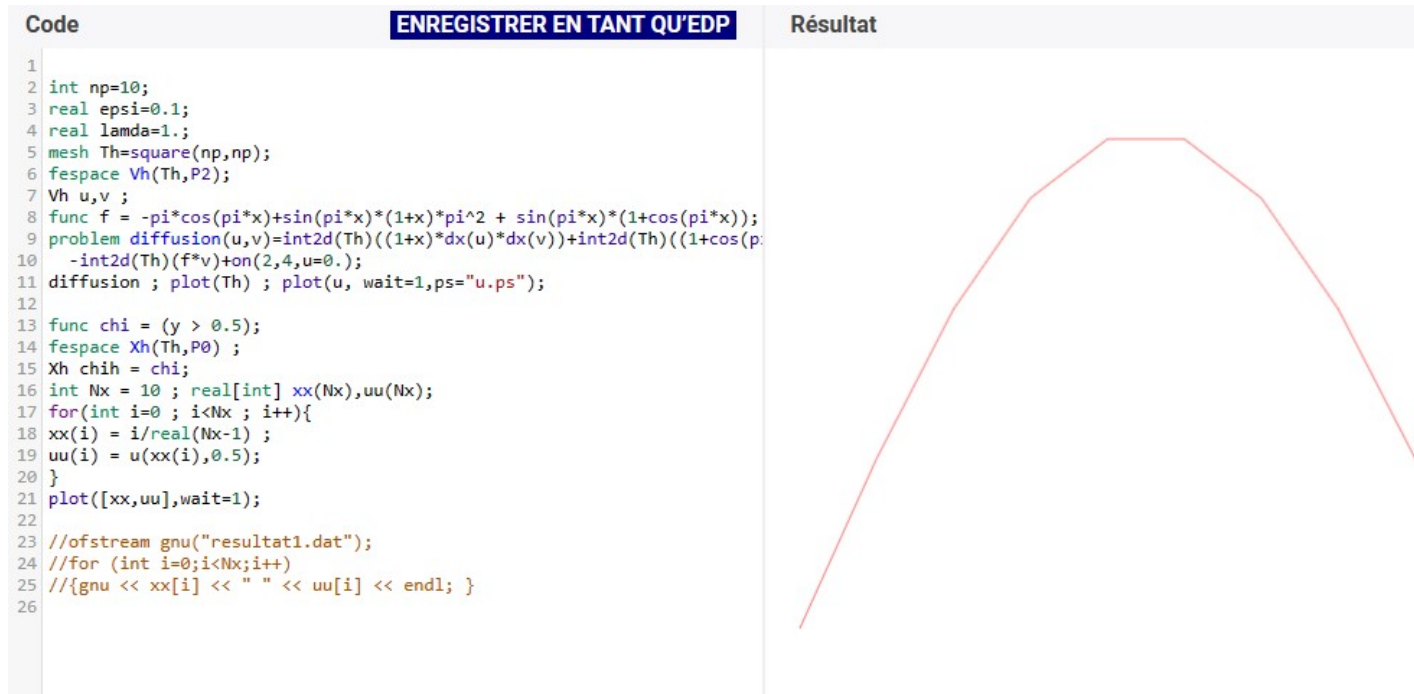


Figure 6: éléments finis P2, solution approché

Cette approximation est conforme à la solution exacte comme en témoigne les erreurs en norme L2 et H1(voir figure 7). Dans cette section on utilise toujours FreeFem++

En effet, les éléments finis P2 font référence à une méthode d'approximation numérique utilisée dans l'analyse par éléments finis. La méthode des éléments finis est une technique largement utilisée pour

résoudre des problèmes complexes de manière numérique, notamment dans le domaine de l'ingénierie et de la physique.

Dans la méthode des éléments finis, un domaine continu est discrétisé en éléments finis, tels que des triangles ou des quadrilatères pour les problèmes bidimensionnels, ou des tétraèdres ou des hexaèdres pour les problèmes tridimensionnels. Chaque élément fini est défini par un ensemble de nœuds ou de points dans l'espace.

Dans le cas des éléments finis P2, le "P" signifie "polynomial" et le "2" indique le degré du polynôme utilisé pour approximer les solutions à l'intérieur de chaque élément fini. En d'autres termes, les éléments finis P2 utilisent des polynômes quadratiques pour décrire les variations des champs physiques (par exemple, le déplacement ou la température) à l'intérieur de chaque élément fini.

Par rapport aux éléments finis P1, qui utilisent des polynômes linéaires pour l'approximation, les éléments finis P2 permettent une meilleure précision de la solution en représentant des variations plus complexes. Cela peut être particulièrement utile pour la modélisation de problèmes avec des gradients élevés ou des variations brusques des champs physiques.

En résumé, les éléments finis P2 sont une méthode d'approximation numérique utilisant des polynômes quadratiques pour résoudre des problèmes par la méthode des éléments finis, offrant une meilleure précision par rapport aux éléments finis P1.

5 Références

- *La Méthode des Éléments Finis Appliquée "les doigts dans le nez"*, Youtube
- *Python pour les maths, Résolution d'équations différentielles avec scipy*
- Grégoire Allaire, *Analyse numérique et optimisation*

```

-- Square mesh : nb vertices = 8201 ,
, nb boundary edges 360
-- Solve :
min 1.74261e-32 max 1.00092
errL2 = 0.000122237 errH1 = 2.33118
convergence rate L2 = 1.88354
convergence rate H10 = -0.00328649
convergence rate L2 = 1.07297
convergence rate H10 = -0.000606392
convergence rate L2 = 0.745334
convergence rate H10 = -0.000212077
convergence rate L2 = 0.568283
convergence rate H10 = -9.81337e-05
convergence rate L2 = 0.457781
convergence rate H10 = -5.32998e-05
convergence rate L2 = 0.382465
convergence rate H10 = -3.21355e-05
convergence rate L2 = 0.327963
convergence rate H10 = -2.08562e-05
convergence rate L2 = 0.306744

```

Figure 7: convergence