注意 0

集合与数学符号的回顾

集合是一个定义良好的对象集合。这些对象被称为集合的元素或成员，它们可以是任何东西，包括数字、字母、人、城市，甚至是其他集合。按照惯例，集合通常用大写字母表示，可以通过列出其元素并用花括号括起来来描述或定义。例如，我们可以描述集合 A 是包含前五个质数的集合，或者我们可以明确写出：A = {2, 3, 5, 7, 11}。如果 x 是集合 A 的元素，则我们写作 x ∈ A。同样，如果 y 不是集合 A 的元素，则我们写作 y /∈ A。如果集合 A 和 B 具有相同的元素，则称它们相等，写作 A = B。元素的顺序和重复性不重要，所以 {red, white, blue} = {blue, white, red} = {red, white, white, blue}。有时，可以使用不同的符号来定义更复杂的集合。例如，所有有理数的集合，用 Q 表示，可以写成：{ | a, b 是整数，b̸ = 0}。用英语来说，这可以读作“所有分子是整数且分母是非零整数的分数的集合。”

集合的基数

我们也可以讨论集合的大小，即其基数。如果 A = {1, 2, 3, 4}，那么集合 A 的基数，记作 |A|，为 4。集合的基数可能为 0。存在一个唯一的这样的集合，称为空集，记作符号 /0。一个集合也可以有无限多个元素，例如所有整数、素数或奇数的集合。

子集与真子集

如果集合 A 的每个元素也都在集合 B 中，那么我们说 A 是 B 的子集，记作 A ⊆ B。等价地，我们也可以写作 B ⊇ A，或者 B 是 A 的超集。真子集是指严格包含在 B 中的集合 A，记作 A ⊂ B，意味着 A 至少排除了 B 中的一个元素。例如，考虑集合 B = {1, 2, 3, 4, 5}。那么 {1, 2, 3} 既是 B 的子集也是真子集，而 {1, 2, 3, 4, 5} 是 B 的子集但不是真子集。以下是一些关于子集的基本性质：

- 空集，记作 {} 或 /0，是任何非空集合 A 的真子集：{} ⊂ A。

① 空集是每个集合 B 的子集：{} ⊆ B。

② 每个集合 A 都是自身的子集：A ⊆ A。

交集与并集

集合 A 与集合 B 的交集，记作 A ∩ B，是包含所有同时属于 A 和 B 的元素的集合。如果 A ∩ B = ∅，则称两个集合互斥。集合 A 与集合 B 的并集，记作 A ∪ B，是包含所有属于 A 或 B 或同时属于 A 和 B 的元素的集合。例如，如果 A 是所有正偶数的集合，B 是所有正奇数的集合，那么 A ∩ B = ∅，A ∪ B = Z，即所有正整数的集合。以下是交集和并集的一些性质：

- A ∪ B = B ∪ A
- A ∪ /0 = A

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cap /0 = /0$

补集

如果 A 和 B 是两个集合，那么 A 在 B 中的相对补集，或 B 与 A 的差集，记作 $B - A$ 或 $B \setminus A$，是 B 中但不在 A 中的元素集合：$B \setminus A = \{x \in B \mid x /\in A\}$。例如，如果 $B = \{1, 2, 3\}$且 $A = \{3, 4, 5\}$，那么 $B \setminus A = \{1, 2\}$。再例如，如果 R 是实数集，Q 是有理数集，那么 $R \setminus Q$ 是无理数集。以下是补集的一些重要性质：

- $A \setminus A = /0$
- $A / 0 = A$
- $\emptyset / A = / 0$

重要的集合

在数学中，一些集合被使用得如此频繁，以至于它们被特殊符号表示。这些包括：

- N 表示所有自然数的集合：$\{0, 1, 2, 3, ...\}$。
- Z 表示所有整数的集合：$\{... , -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$。
- Q 表示所有有理数的集合：$\{ \mid a, b \in Z, b\not= 0\}$。
- R 表示所有实数的集合。
- C 表示所有复数的集合。

乘积与幂集

两个集合 A 和 B 的笛卡尔积（也称为叉积），记作 $A \times B$，是由所有第一元素属于 A 且第二元素属于 B 的有序对组成的集合。在集合表示法中，$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$。例如，如果 $A = \{1, 2, 3\}$ 且 $B = \{u, v\}$，那么 $A \times B = \{(1, u), (1, v), (2, u), (2, v), (3, u), (3, v)\}$。并且 $N \times N = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1), (2, 0), ...\}$ 是所有自然数对的集合。给定一个集合 S，S 的幂集，记作 P(S)，是由 S 的所有子集组成的集合：$\{T \mid T \subseteq S\}$。例如，如果 $S = \{1, 2, 3\}$，那么 S 的幂集是：$P(S) = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$。注意，如果 $|S| = k$，那么 $|P(S)| = 2$。[为什么？]

数学符号

累加和与乘积

存在一种紧凑的表示法来书写大量项的和或积。例如，要写出 $1 + 2 + \cdots + n$，而不必说“省略号”，我们可以写 $\sum i$。更一般地，我们可以将 $f (m) + f (m + 1) + \cdots + f (n)$ 的和写成 $\sum f (i)$。因此，例如，$\sum i= 5+ 6+ \cdots + n$。
类似地，要写出 $f (m) f (m + 1) \cdots f (n)$ 的积，我们使用 $\prod f (i)$ 的表示法。例如，$\prod i = 1 \cdot 2 \cdots n$ 是前 n 个正整数的乘积。

全称和存在量词

考虑以下陈述：对于所有自然数 n，n + n + 41 是质数。在这里，n 被量化为自然数集 N 的任意元素。用符号表示，我们写作 $(\forall n \in N)(n + n + 41$ 是质数)。在这里我们使用了全称量词 ∀（“对于所有”）。这个陈述是真的吗？如果你尝试用小的 n 值代入，你会注意到 n + n + 41 对于这些值确实是质数。但如果你更深入地思考，你可以找到更大的 n 值，对于这些值它不是质数。你能找到一个吗？因此，陈述 $(\forall n \in N)(n + n + 41$ 是质数) 是假的。

存在量词 ∃（“存在”）在以下陈述中使用：$(\exists x \in Z)$（$x < 2$ 且 $x = 4$）。这个陈述说存在一个整数 x，它小于 2，但它的平方等于 4。这是一个真命题（取 $x = -2$）。

我们也可以使用两种量词来写陈述：

1. $(\forall x \in Z)(\exists y \in Z)(y > x)$
2. $(\exists y \in Z)(\forall x \in Z)(y > x)$

第一个陈述说，给定一个整数，我们可以找到一个更大的整数。第二个陈述说的是完全不同的事情：存在一个最大的整数！第一个陈述是真的，第二个陈述是假的。