# 1. Свойства пространства и времени

Пространство и время сами являются физическими объектами, обозначающими основные формы существования
материи.
**Пространство** выражает порядок сосуществования отдельных объектов (где).
**Время** – порядок смены явлений (когда).
Пространство и время имеют решающее значение для построения физической картины мира. Чтобы изучить их
свойства необходимо наблюдать движение тел в пространстве и во времени.
Сформулируем свойства пространства, которые можно считать основными:

1. Исследуемое нами пространство является однородным. Это означает, что в нем нет точек с разными свойствами. Если произвести параллельный перенос системы отсчета, то рассматриваемые в ней законы физики не будут изменяться.
2. Пространство изотропно. В пространстве нет выделенных направлений. При повороте системы отсчета на произвольный угол законы природы не изменятся.
3. Пространство обладает свойством непрерывности. Между даже самыми близкими точками пространства всегда имеется третья точка.
4. В нашем мире пространство является трехмерным. Положение точки однозначно описывают три действительных числа (координаты).
5. Относительность. Мы всегда определяем тело отсчета
6. Кривизна

К основным свойствам времени относят:
1. Временную однородность. Если рассматривать два события, которые проходят при одинаковых условиях, но в разное время, то они будут происходить одинаково.
2. Непрерывность времени означает то, что если имеются два момента времени, и они очень близки, то всегда между ними можно найти еще момент времени.
3.Неизотропность времени. В настоящее время считают, что время течет в одном направлении от настоящего в будущее

# 2. Системы отсчета. Эталоны длины и времени

Тело (система тел), служащее для определения положения интересующего нас объекта называется **телом отсчета** (точкой отсчета).
Одного Т.О. для описания движения не достаточно. С этим Т.О. связывают систему координат.
Любой раздел механики (явно или неявно) содержит пространственно-временные соотношения – связь
расстояний и промежутков времени.

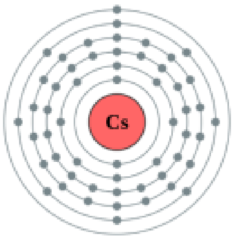
**Координаты** – набор чисел, однозначно характеризующие положение тел в пространстве.
Система координат бывает прямоугольная, сферическая, цилиндрическая и т.д.
Самая распространенная прямоугольная (декартова) система координат.

Итак, С.К., привязанная к Т.О., позволяет определить положение тела в пространстве. Но тело движется не только
в пространстве, но и во времени, и для описания движения необходимо отсчитывать время. Поэтому введем и
синхронизируем во всех точках пространства часы.
Совокупность Т.О., связанной с ним С.К. и синхронизированных между собой часов образует **систему отсчета**.

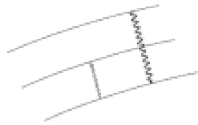
***Единица длины*** – 1 м.

Можно сказать, что 1 м – это путь, проходимый светом за $\frac{1}{299792458}$ с.

***Единица времени*** – 1 с.




1 с – это промежуток времени, равный 9 192 631 770 периодов электромагнитного излучения, соответствующего переходу между уровнями основного состояния атома $Cs^{133}$ в отсутствии внешних силовых полей.



# 3. Кинематика материальной точки в векторной и координатной форме

**Векторный способ.**

Положение м.т. определяется радиус-вектором r– вектор, проведенный из некоторой т. О, выбранной С.О. в т. М.

Радиус-вектор в общем случае меняется в процессе движения и по направлению, и по величине r= f(t).

Геометрическое место концов радиус-вектора называется **траектория**.

Длина траектории – **путь**.

<u>Перемещение</u> (приращение радиус-вектора) $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

Средний вектор скорости – $< \vec{V} > = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$

<u>Мгновенная скорость</u> – $\vec{V} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

Вектор скорости в данный момент времени равен производной от радиус-вектора по времени и направлен по касательной к траектории в данной точке в сторону движения т. М.

Величина вектора скорости – $V = |\vec{V}| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|$

!!! $|d\vec{r}| \neq dr$ модуль вектора элементарного перемещения не равен малому приращению модуля радиус-в

Аналогично $V \neq \frac{dr}{dt}$ Пример – движение по окружности.

<u>Ускорение</u> – определяет скорость изменения вектора скорости. $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$ $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{V}$

**Координатный способ.**

В этом способе с выбранным Т.О. жестко связывают С.К.

Проекции $\vec{r}$ (t) на оси X,Y,Z: $x = x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)$

Зная зависимость этих координат от времени (закон движения) можно найти положение точки в каждый момент времени, ее скорость и ускорение.

Зная $x(t)$ можно найти $V_x = \dfrac{dx}{dt};\quad a_x = \dfrac{dV_x}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$

Аналогично для проекций на оси Y и Z

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k};$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{V_x{}^2 + V_y{}^2 + V_z{}^2} \quad \vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2} \quad \vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

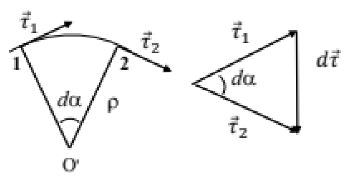
Направление вектора скорости можно задать направляющими косинусами $\cos\alpha = \dfrac{V_x}{V} \quad \cos\beta = \dfrac{V_y}{V} \quad \cos\gamma = \dfrac{V_z}{V}$

где α, β, γ - углы между вектором скорости и осями X,Y,Z.

# 4. Кинематика материальной точки в естественной форме

Удобен, когда траектория движения м.т. известна заранее. Наиболее распространенная траектория – окружность. Положение м.т. определяется дуговой координатой *S* - расстояние от т.о. вдоль траектории. При этом надо выбрать положительное направление отсчета дуговой координаты.

Движение м.т. определено, если известна ее траектория, начало отсчета, положительное направление отсчета *S* и закон движения *S*(t) .




Определим приращение $\vec{\tau}$. При стремлении т.2 → т.1, т.е. $d\ell\to0$, $dt\to0$, отрезок траектории стремится к дуге окружности с центром в некоторой т.O'. Эта точка – центр кривизны траектории, радиус дуги ρ – радиус кривизны траектории в данной точке.

Из рисунка видно, что $d\alpha = \dfrac{|d\ell|}{\rho} = \dfrac{|d\vec{\tau}|}{|\vec{\tau}|}$ , но $|\vec{\tau}| = 1$ и $\Rightarrow \left|\dfrac{d\vec{\tau}}{d\ell}\right| = \dfrac{1}{\rho}$

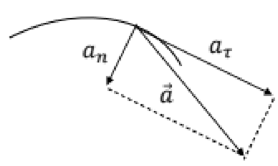
В силу малости $d\alpha$ $\quad d\vec{\tau} \perp \vec{\tau}$

Введем единичный вектор $\vec{n} \perp \vec{\tau}$, тогда $\dfrac{d\vec{\tau}}{d\ell} = \dfrac{1}{\rho}\vec{n}$ и учитывая, что $V_\tau^2 = V^2$ получим:

$$\vec{a} = \frac{dV_\tau}{dt}\vec{\tau} + \frac{V^2}{\rho}\vec{n}$$

$$a_\tau = \frac{dV\tau}{dt}; \quad a_n = \frac{V^2}{\rho}$$

– проекции полного ускорения на оси.




$$|\vec{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dV_\tau}{dt}\right)^2 + \left(\frac{V^2}{\rho}\right)^2}$$

Тангенциальное ускорение определяет изменение скорости по величине, нормальное (центростремительное) – по направлению.

Радиус кривизны траектории окружности равен радиусу этой окружности, а для прямой – бесконечности.

## 5. Кинематика твердого тела: поступательное и плоское движение. Число степеней свободы системы.

| | |
|---|---|
| – Поступательное<br>– Вращательное вокруг неподвижной оси | основные |
| – Плоское<br>– Движение вокруг неподвижной точки<br>– Сложное | составные<br>можно свести к одному или совокупности основных |

**Поступательное** – движение, при котором любая прямая связанная с телом, все время остается параллельной своему первоначальному положению. При таком движении все точки за равные промежутки времени совершают равные перемещения (по величине и направления). И их скорости, и их ускорения одинаковы. *В самом общем случае поступательно движущееся тело обладает тремя степенями свободы.*

**Плоским** называется такое движение, при котором каждая точка твердого тела движется в плоскости, параллельной некоторой неподвижной плоскости П (в данной С.О.). При этом плоская фигура S, образованная сечением тела этой неподвижной плоскостью П все время остается в этой плоскости. Траектории точек тела при плоском движении являются плоскими кривыми.

Плоское движение тв.т. можно представить, как совокупность двух основных движений:

− поступательного вместе с произвольной т.О' тела;

− вращательного вокруг оси, проходящей через т.О'

$$\omega = |d\varphi/dt|; \quad \varepsilon = |d\omega/dt| = |d^2\varphi/dt^2|.$$

Очевидно, что при таком движении тела все его точки, лежащие на перпендикуляре Аа к плоскости фигуры, движутся совершенно одинаково, так же как и точка А этой фигуры. Все точки, расположенные на перпендикуляре Вв к плоскости фигуры , движутся так же, как и точка В этой фигуры, и т. д

Положение неизменяемой плоской фигуры S в ее плоскости вполне определяется положением двух произвольных ее точек А и В.

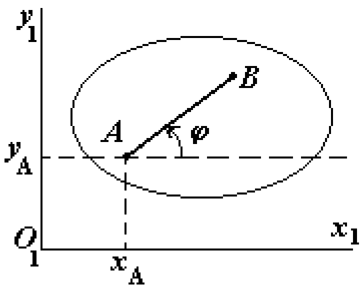
<u>Для задания положения плоской фигуры на плоскости относительно системы координат , лежащей в плоскости фигуры, достаточно задать на этой плоскости положение отрезка АВ, скрепленного с фигурой.</u>

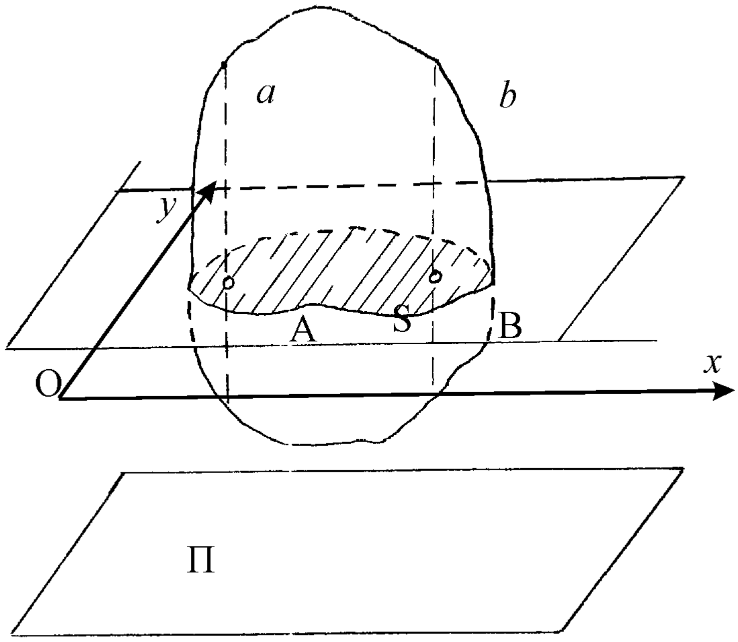
<u>Положение отрезка АВ, относительно системы координат определяется заданием координат какой-нибудь точки этого отрезка и его направления. Например, координаты точки А (Xa, Ya) и направление Фи, заданное углом .</u>

<u>Уравнения движения плоской фигуры относительно системы координат O1X1Y1 имеют вид: Xa=Xa(t)</u>

Ya=Ya(t) Фи=Фи(t)

Твердое тело при плоском движении имеет три степени свободы




## 6. Вращение вокруг неподвижной оси. Связь линейных и угловых величин.

При **вращательном движении** абсолютно твёрдого тела все его точки описывают окружности, расположенные в параллельных плоскостях(НЕ ЛЕКЦИИ)

**Аксиальный вектор** – вектор, модуль которого равен углу поворота, а направление определятся правилом правого винта

Элементарное перемещение (линейное) $|d\vec{r}| = r\sin\theta d\varphi$

$d\vec{r} = [d\vec{\varphi}\,\vec{r}]$ – векторное произведение. ТОЛЬКО ПРИ $d\varphi$ ->0+

*Угловая скорость* $\vec{\omega} = \dfrac{d\vec{\varphi}}{dt}$ – тоже аксиальный вектор

*Угловое ускорение* $\vec{\beta} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$ $\vec{\beta} \uparrow\uparrow d\vec{\omega}$, а не $\vec{\omega}$. – тоже аксиальный вектор

Единицы измерения в СИ – [рад], [рад/с], [рад/с$^2$].

Как и для полярных векторов аксиальные векторы можно спроецировать на некоторую ось (традиционно ее называют осью $z$), ее положительное направление связано с направлением вращения правилом *правого винта*.

Тогда
$$\omega_z = \frac{d\varphi}{dt}$$
$$\beta_z = \frac{d\omega_z}{dt}$$
– алгебраические величины.

*Связь между линейными и угловыми величинами*

Найдем вектор скорости $\vec{V}$ произвольной т.М тв.т., вращающегося вокруг неподвижной оси $OO'$ с угловой скоростью $\vec{\omega}$. $d\vec{r} = [d\vec{\varphi}\,\vec{r}]$.

Поделим правую и левую часть этой формулы на соответствующий промежуток времени $dt$:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\varphi}}{dt}\vec{r}\right]$$

$$\vec{V} = [\vec{\omega}\,\vec{r}] \quad (*)$$

По правилу векторного произведения $|\vec{V}| = \omega r \sin\theta$

т.е. $V = \omega\rho$, где $\rho$ – радиус окружности, по которой движется м.т.

Продифференцируем (*) по времени : $\frac{d\vec{V}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}\vec{r}\right] + \left[\vec{\omega}\,\frac{d\vec{r}}{dt}\right]$

$$\vec{a} = [\vec{\beta}\,\vec{r}] + [\vec{\omega}\,\vec{V}]=[\vec{\beta}\,\vec{r}] + [\vec{\omega}\,[\vec{\omega}\,\vec{r}]]$$

Т.к. ось вращения неподвижна $\vec{\beta}\,||\,\vec{\omega}$, то вектор, равный $[\vec{\beta}\,\vec{r}]\,||\,\vec{a}_\tau$ – направлен по касательной к траектории.

$$|[\vec{\beta}\,\vec{r}]| = \beta r \sin\theta \qquad a_\tau = \beta\rho$$

Вектор равный $[\vec{\omega}\,[\vec{\omega}\,\vec{r}]]\,||\,\vec{a}_n$ $\vec{n}$ – направлен к оси вращения.

$$|[\vec{\omega}\,[\vec{\omega}\,\vec{r}]]| = \omega(\omega r \sin\theta) = \omega^2\rho$$

$$a_n = \omega^2\rho$$

Модуль полного ускорения $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\beta^2\rho^2 + \omega^4\rho^2} = \rho\sqrt{\beta^2 + \omega^4}$

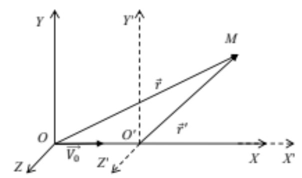
## 7. Преобразования Галилея. Инерциальные системы отсчета. «Состояние» в механике.

**Принцип инерции** - можно предположить, что существуют такие СО, в которых возникновение ускорения тела целиком обусловлено взаимодействием с другими телами. Тело не подверженное действию других тел или их действие скомпенсировано движется в этой системе отсчета равномерно и прямолинейно (по инерции).

Важной особенностью ИСО является то, что по отношению к ним пространство и время обладают
определенными свойствами симметрии.
Пространство однородно и изотропнто, время однородно.
**Однородность пространства** – свойства пространства одинаковы в различных точках. Т.е. нет
выделенных точек, все точки одинаковы.

**Изотропность пространства** – свойства пространства в каждой точке одинаковы во всех
направлениях. Нет выделенного направления. При повороте ничего не изменится.
**Однородность времени** – протекание физических явлений (в одних и тех же условиях) в разное
время их наблюдения одинаково. Разные моменты времени эквивалентны по своим физическим
свойствам.

Эквивалентность различных систем отсчета с точки зрения ньютоновской механики можно проиллюстрировать на основании *преобразования Галилея*.




Пусть ИСО K′ движется со скоростью $\vec{V}_0$ относительно другой ИСО *K*.
Выберем С.К. $x'$, $y'$, $z'$ *K′*-системы параллельно соответствующим осям *K*-системы.
Пусть оси $x$ и $x'$ совпадают между собой и направлены вдоль $\vec{V}_0$.
Взяв за начало отсчета времени момент, когда $O$ и $O'$ совпадают напишем соотношения между $\vec{r}$ и $\vec{r}'$.

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}_0 t\,; \qquad t' = t.$$

Длина отрезков и ход времени одинаков в обоих СО.
В координатах: $x' = x - V_0 t;\ y' = y;\ z' = z.$

Взяв первую производную, получим *закон сложения скоростей* в классической механике:
$\vec{V}' = \vec{V} - \vec{V}_0$, продифференцировав еще раз, получим: $\vec{a}' = \vec{a}$.
Это и есть преобразования Галилея.

**Состояни**е в механике – это совокупность параметров системы, позволяющих
однозначно определить движение системы в различные моменты времени.
Ньютон: состояние МТ полностью определяется радиус-вектором и скоростью точки в заданный момент времени.
Состояние системы N МТ задаётся 2N числом векторных параметров (реально 6N, т.к. информация о векторах хранится в виде их проекций).

## 8. Масса и импульс. Замкнутые системы.

**Инертность** – это свойство тел сопротивляться любым попыткам изменить их скорость.
**Масса** – мера инертности тел. (инертная масса)
**Замкнутая (изолированная) система** – это система тел, удаленная от любых других тел так, что эти тела не оказывают никакого влияния на тела системы. Тела в замкнутой системе взаимодействуют только друг с другом.
В настоящий момент эталон массы определяется через постоянную Планка.
**Свойства массы:**
1) аддитивность – масса системы равна сумме масс ее частей: $m_{системы} = m_1 + \cdots + m_N$;
2) в классической нерелятивистской механике m = const
Пусть $m\vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{p}$ – импульс тела (точки).

$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1{}' + \vec{p}_2{}'$

$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = const$ – закон сохранения импульса.
В изолированной системе двух материальных точек импульс сохраняется.
Свойства импульса:
1) импульс – векторная величина. Импульс МТ равен $\vec{p} = m\vec{v}$;
2) аддитивность – импульс системы равен сумме импульсов ее частей:
$\vec{p}$системы $= \vec{p}_1 + \cdots + \vec{p}_N$;
3) импульс – сохраняющаяся величина.

# 9. Сила. Законы Ньютона

I закон Ньютона утверждает существование ИСО: «ИСО существуют». В ИСО всякое ускорение тела вызывается действием на него других тел. Влияние другого тела (тел), вызывающее ускорение, называется силой. **Сила** – количественная мера интенсивности взаимодействия. Одной из важнейших характеристик силы является ее материальное происхождение. Если действует сила – есть источник в виде конкретного тела. Силы можно условно разделить на:

- возникающие при непосредственном контакте (трение, давление);
- возникающие через посредство полей, создаваемых взаимодействующими телами
(гравитационные, электромагнитные).

II закон Ньютона F
F= ma

Это уравнение называется уравнением движения м.т.
Это уравнение можно получить только после установления закона силы – зависимость силы от величин ее определяющих. Установление вида этой зависимости – одна из
основных задач механики. Строго говоря, на тело действует только одна сила, равная суммарному результату действия отдельных тел.
Если тела, являющиеся источником сил, не действуют друг на друга и поэтому не меняют своего состояния от присутствия других тел: F= σ Fi – принцип суперпозиции.
Действие тел друг на друга имеет характер взаимодействия. Общее свойство всех сил взаимодействия определяет *III закон Ньютона*:
Силы, с которыми две м.т. действуют друг на друга, всегда равны по модулю и направлены в противоположные стороны *вдоль прямой, соединяющие эти точки*.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

Силы взаимодействия всегда появляются парами. Это силы одинаковой природы и приложены к *разным* м.т.

III закон Ньютона предполагает, что обе силы равны друг другу по модулю в любой момент времени независимо от движения м.т. Это утверждение соответствует предположению Ньютона о мгновенном распространении взаимодействия – принцип дальнодействия ньютоновской механики.

В соответствии с принципом относительности Галилея законы механики одинаковы во всех ИСО.
($\vec{a} = \vec{a}'$  $m = m'$ (не зависимо то $V$) $\vec{F} = f(r_{отн}, V_{отн}) = \vec{F}'$).

# 10. Фундаментальные взаимодействия. Закон всемирного тяготения. Электромагнитные силы.

***Фундаментальные взаимодействия*** – это виды взаимодействия элементарных частиц и состоящих из них тел.

Фундаментальные взаимодействия:

1. Гравитационное (самое слабое)
2. Слабое
3. Электромагнитное
4. Сильное (самое мощное)

Слабое и сильное взаимодействия отвечают за ядерные реакции и имеют крайне маленький радиус действия.

Фундаментальные

– *гравитационного притяжения.* $\vec{F} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_r$

Массы $m_1$, $m_2$ – массы гравитационные (в отличие от инертной во II законе Ньютона).
Опыт показывает, что обе массы строго пропорциональны и можно выбрать один и тот же эталон для измерения обоих масс (платино–иридивая гиря).
Этот фундаментальный закон природы называется *принцип эквивалентности масс* (экспериментально установлен с точностью $10^{-12}$ в 1971).
$\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11}$ Н·м/кг$^2$ – гравитационная постоянная

– *кулоновская* (сила электромагнитного взаимодействия) $\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e}_r$

Может быть и силой притяжения и отталкивания, $k$ – коэффициент пропорциональности (в СИ $9 \cdot 10^9$ Ф/м).
Кулоновская сила – сила взаимодействия неподвижных зарядов. Если заряды движутся относительно друг друга, то на заряды действует и магнитная составляющая, на она на десять порядков меньше.

# 11. «Нефундаментальные» силы: упругие и контактные силы

→ упругие силы (сила упругости $F_{упр}$).

→ контактные силы (сила реакции опоры, диссипативные силы).

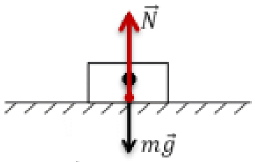
***Упругие силы*** – силы, возникающие в теле в результате его деформации и стремящиеся вернуть его в исходное (начальное) состояние.

При малых деформациях упругие силы подчиняются закону Гука: сила сопротивления деформированию твёрдых тел пропорциональна величине деформации $\boxed{\vec{F}_{упр} = -k\Delta\vec{r},}$ где $\Delta\vec{r}$ – малое перемещение из положения равновесия, $k$ – коэффициент упругости.

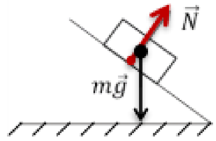
При увеличении величины деформации закон Гука перестаёт действовать, сила упругости начинает сложным образом зависеть от величины растяжения или сжатия.

Контактными называются силы, возникающие при соприкосновении тел и действующие со стороны одного тела на другое. При этом, конечно, возникают деформации, но они обычно невелики, и тела рассматриваются как абсолютно твердые.

<u>Сила реакции опоры **N**</u>:




$|\vec N| = |m\vec g|$




$|\vec N| \neq |m\vec g|$

<u>Диссипативные силы (силы трения, сопротивления)</u> в отличие от вышеперечисленных сил определяются не только взаимным расположением тел, но и относительной скоростью их движения.

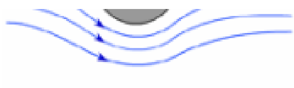
Закон Кулона для трения скольжения: $\boxed{\vec F_{\text{тр.ск.}} = -\mu N \frac{\vec v}{v}, \qquad F_{\text{тр.ск.}} = \mu N.}$

На тело, движущееся в жидкости или газе, действует сила сопротивления $F_{\text{сопр}}$ окружающей тело среды. Как и сила трения, сила сопротивления направлена противоположно скорости движения тела $\vec F_{\text{сопр}} \uparrow\downarrow \vec v$. Величина силы сопротивления зависит от характера обтекания тела окружающей средой.

→ При небольших скоростях движения $(v < v_{\text{звука в среде}})$ обтекание тела носит ламинарный характер.

Закон Стокса: $\boxed{\vec F_{\text{сопр}} = -\alpha \vec v = -\alpha v \frac{\vec v}{|\vec v|},}$

α – коэффициент пропорциональности, зависящий от размера тела



тела и вязких свойств среды.

→ При больших скоростях течение среды приобретает турбулентный характер.

Закон Ньютона: $\boxed{\vec F_{\text{сопр}} = -\beta v \vec v = -\beta v^2 \frac{\vec v}{|\vec v|},}$

β – коэффициент пропорциональности, зависит от размеров и формы тела,

## 12. Кинетическая энергия. Работа и мощность.

Пусть частица массы $m$ движется под действием каких–то (любых) сил, равнодействующая сила – $\vec{F}$. Найдем работу этих сил на элементарном перемещении $d\vec{r}$.

$$\delta A = \vec{F}d\vec{r}. \qquad \left.\begin{aligned}\vec{F} &= m\frac{d\vec{V}}{dt}\\ d\vec{r} &= \vec{V}dt\end{aligned}\right\} \Rightarrow \delta A = m\vec{V}d\vec{V} = mVdV = d\left(m\frac{V^2}{2}\right)$$

Работа результирующей силы идет на приращение некоторой функции, зависящей только от скорости част

Эту величину называют *кинетической энергией* частицы. $E_k = m\dfrac{V^2}{2}$

Приращение кинетической энергии на некотором элементарном перемещении $d\vec{r}$ равно $dE_k = \delta A$.

На конечном перемещении из т.1 в т.2. $E_{k2} - E_{k1} = A_{12}$

Теорема о кинетической энергии:
Приращение кинетической энергии частицы на некотором перемещении равно алгебраической сумме р
всех сил, действующих на частицу на этом перемещении.

Эта теорема справедлива независимо от того какие силы действуют на частицу.

Эту величину называют элементарной работой.

$$\delta A = \vec{F}d\vec{r} = Fdr\cos\alpha = F_s dS$$

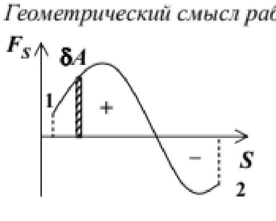
где α – угол между векторами $\vec{F}$ и $d\vec{r}$;
$dS = |d\vec{r}|$ – элементарный путь;
$F_S$ – проекция силы на направление перемещения.

δ$A$ – величина алгебраическая. Знак ее зависит от угла α (знака проекции $F_S$).
Может быть равна нулю (если $\vec{F} \perp d\vec{r}$).

Работа величина аддитивная. Чтобы найти всю работу на пути из т.1 в т.2 необходимо проинтегрировать по всему перемещению.

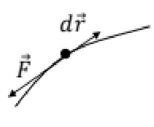
$$A = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r}$$

*Геометрический смысл работы.*




Элементарная работа δ$A$ равна площади заштрихованного прямоугольника, а вся работа на пути из т.1 в т.2 – площади, ограниченной кривой. При этом площадь фигуры над осью $S$ берется со знаком + (она соответствует положительной работе), а площадь фигуры под осью – со знаком минус.

*Работа силы трения скольжения.*




Сила трения всегда направлена в сторону противоположную перемещению. Поэтому угол между векторами $\vec{F}$ и $d\vec{r}$ равен 180°, а $\cos\alpha = -1$.

$$\delta A = \vec{F}d\vec{r} = FdS\cos\alpha = -FdS \qquad A = -\int_1^2 FdS$$

(Если сила трения постоянна на всем перемещении, то $A = -FS$).

Работа силы трения зависит от пути и всегда отрицательная.

*Мощность* – характеристика скорости совершения работы.
Работа, совершаемая силой в единицу времени.

Мгновенная мощность:

$\frac{\delta A}{dt} = \frac{\vec{F} d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{V}$ – скалярное произведение силы на скорость, с которой движется точка приложения силы.

Средняя мощность:

$< P >= \frac{A}{\Delta t}$ – вся работа на все время действия силы.

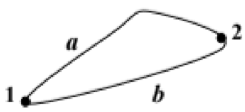
Мощность - величина алгебраическая.
Зная мощность силы, можно найти работу этой силы за промежуток времени *t*: $A = \int_0^t P dt$

## 13. Консервативные и неконсервативные силы. Работа силы трения и гироскопической силы.

Если в каждой точке пространства на помещенную туда частицу действует сила, то говорят, что частица находится в поле сил (поле сил тяжести, поле упругих сил, сил сопротивления).

*Стационарное поле* сил – поле, остающееся постоянным во времени. Поле стационарное в одной СО может оказаться нестационарным в другой. В стационарном поле сила, действующая на частицу, зависит только от ее положения.
(Однородное поле – сила одинакова и по величине, и по направлению во всех точках пространства).

Существуют стационарные силовые поля, в которых работа, совершаемая силами поля над частицей, не зависит от пути, а зависит только от начального и конечного положения частицы.
Такие силы называется *консервативными*.




Еще одна формулировка: силы поля являются консервативными, если в стационарном случае работа на любом замкнутом пути равна нулю.

Разобьем контур на две части: 1 *a* 2 и 2 *b* 1.
$A = A_{1a2} + A_{2b1}$,
но $A_{1a2} = A_{1b2}$ (работа не зависит от пути); $A_{1b2} = -A_{2b1}$
т.е. суммарная работа равна нулю.

Неконсервативные силы: – диссипативные (трения, сопротивления) $A_{замкн} \neq 0$.
– гироскопические (сила Лоренца) работа на любом перемещении равна нулю.

Значит, работа диссипативных сил на любом пути всегда будет отрицательна $A_{дис} = \int \delta A < 0$.

*Диссипативные силы* – силы, работа которых всегда отрицательна.

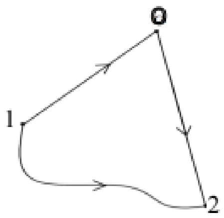
Ещё один вид сил – *гироскопические силы*. Это *силы, зависящие от скорости МТ и действующие всегда перпендикулярно скорости*. Единственным примером гироскопических

Значит, работа гироскопических сил на любом пути всегда будет равна нулю $A_{гир} = \int \delta A = 0$.

## 14. Потенциальная энергия: понятие, примеры расчёта.

Если на систему действуют одни только консервативные силы, то можно для неё ввести понятие потенциальной энергии.

Представим себе пространство, в котором действуют только консервативные силы. Рассмотрим перемещение МТ из точки 1 в точку 2 в этом пространстве. Можно перейти




непосредственно из точки 1 в точку 2, а можно с заходом в точку O. Так как работа не зависит от вида пути

$$A_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_O} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_O}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = A_{1O} + A_{O2} = \text{\{см. §8\}}$$

$$= A_{1O} - A_{2O}$$

Введем обозначение

$$\boxed{\mathrm{E}_{\text{пот}}(\vec{r}) \stackrel{\text{def}}{=} A_{\vec{r}O} = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_O} \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

Тогда $A_{12} = A_{1O} - A_{2O} = \mathrm{E}_{\text{пот}}(\vec{r}_1) - \mathrm{E}_{\text{пот}}(\vec{r}_2) = -\Delta\mathrm{E}_{\text{пот}}$.

*Работа консервативной силы равна убыли потенциальной энергии точки.*

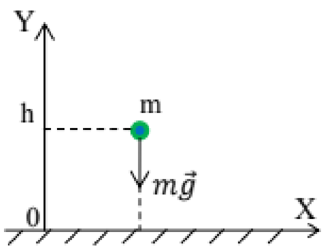
Перенос начала отсчета не влияет на разность потенциальных энергий, а следовательно, изменение потенциальной энергии ΔЕпот не зависит от выбора начала отсчета – точки O.

Окончательно, имеем

$$\boxed{A^{\text{кон}}{}_{12} = -\Delta\mathrm{E}_{\text{пот}}} \qquad \boxed{\delta A^{\text{кон}} = -d\mathrm{E}_{\text{пот}}} \text{ (диф. ф – ма)}$$

ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА:

- Потенциальная энергия в однородном поле тяжести




Тело движется под действием силы тяжести.

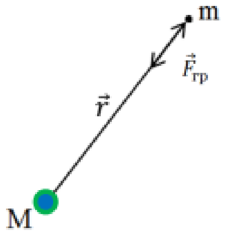
Начало отсчета O выбираем на поверхности: $\vec{r}_O = 0$ $(y = 0)$,

$$\mathrm{E}_{\text{пот}}(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{0} m\vec{g} \cdot d\vec{r} =$$

$$\mathrm{E}_{\text{пот}}(h) = mgh$$

$$\Delta\mathrm{E}_{\text{пот}} = mg(h_2 - h_1) = mg\Delta h$$

- Потенциальная энергия в гравитационном поле




$$\vec{F}_{\text{гр}} = -G\frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

Гравитационное взаимодействие между телами отсутствует, когда они находятся на бесконечно большом расстоянии друг от друга, т.е.

$r_0 = \infty$ , поэтому естественно считать, что $\text{E}_{\text{пот}}(\infty) = 0$

: $\text{E}_{\text{пот}}(r) = \int_r^{\infty} \vec{F}_{\text{гр}} \cdot d\vec{r}$ $\qquad$ $\text{E}_{\text{пот}}(r) = -G\frac{Mm}{r}$

- Потенциальная энергия в поле упругой силы

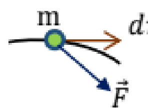
$E_{\text{пот}}(x) = \int_{\vec{r}}^{0} \vec{F}_{\text{упр}} \cdot d\vec{r}$ $\qquad$ $\text{E}_{\text{пот}}(x) = k\frac{x^2}{2}$

## 15. Закон сохранения энергии (для материальной точки).

**Законы сохранения** – фундаментальные физические законы, согласно которым при определённых условиях некоторые физические величины, характеризующие замкнутую физическую систему, не изменяются с течением времени. Являются наиболее общими законами в любой физической теории.

Рассмотрим МТ, движущуюся в стационарном поле консервативных сил.

*Стационарное силовое поле* – силовое поле, в котором величина и направление силы, зависят только от точки пространства $\vec{r}$ и не зависят от времени.




$d\vec{r}$ Силы поля на этом перемещении совершают работу $\delta \text{A} = dE_{\text{кин}}$ {см. §7}

Т.к. силы консервативны, то работа, совершаемая силами, приводит к убыли потенциальной энергии МТ $\delta \text{A} = -dE_{\text{пот}}$ {см. §9}

$$dE_{\text{мех}} = 0 \implies E_{\text{мех}} = const$$

Если МТ проходит путь конечной длины из положения 1 в положение 2 всё в том же поле, 1

$$E_{кин1} + E_{пот1} = E_{кин2} + E_{пот2}$$

$$\boxed{E_{мех1} = E_{мех2}} \qquad \boxed{E_{мех} = const} \qquad \textbf{ЗСЭ}$$

*В стационарном поле консервативных сил механическая энергия МТ остаётся неизменной* – закон сохранения энергии.

## 16. Закон сохранения энергии (для системы материальных точек).

Перейдём теперь к системе, состоящей из $N$ МТ. Пусть силы, действующие на нашу систему извне, – только консервативные, иначе говоря, система находится в стационарном поле внешних консервативных сил.

Сначала рассмотрим взаимодействие между парой точек системы ($i$ и $j$, к примеру): $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ (по III з. Ньютона).

Работа, совершаемая силами взаимодействия между точками этой пары, при их перемещении на $d\vec{r_i}$ и $d\vec{r_j}$ соответственно, равна сумме работ:

**δA = δAi + δAj=** $-dE^{взаим}_{пот_{ij}}$,

**В следствии свойства парности сил Епотij будет зависеть только от расстояния между этими двумя точками.**

Рассмотрим теперь одну $i$-ую точку системы. Силу, действующую на неё, можно представить в виде суммы всех внешних и внутренних сил:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\ внеш} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \vec{F}_{ij}$$

**После умножения на малое перемещение dr⃗** и суммирования по всем точкам системы получим:

$$dE_{кин} = -dE_{пот}$$

$$dE_{\text{мех}} = 0 \Rightarrow \boxed{E_{\text{мех}} = const} \quad \textbf{(ЗСЭ)}$$

*В системе с одними только консервативными силами механическая энергия остаётся неизменной. Могут происходить лишь превращения потенциальной энергии в кинетическую и обратно, но полный запас энергии измениться не может* – закон сохранения энергии системы в механике.

## 17. Закон сохранения импульса.

Как известно, в замкнутой системе двух МТ импульс сохраняется.

$$\vec{p}_{\text{сист}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' = const$$

Рассмотрим теперь **не**замкнутую систему $N$ МТ.

Силу, действующую на $i-$ую точку системы, можно представить в виде суммы всех внешних и внутренних сил, действующих на неё:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{внеш}} + \vec{F}_i^{\text{внутр}} \Leftrightarrow \vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{внеш}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \vec{F}_{ij},$$

Преобразовав левую и правую части по отдельности, а также просуммировав по всем точкам системы i получим:

$$\boxed{\frac{d\vec{p}_{\text{сист}}}{dt} = \vec{F}^{\text{внеш}}} -$$

*импульс системы МТ может изменяться под действием только внешних сил.*

Значит, если система МТ – замкнутая система $\left(\vec{F}^{\text{внеш}} = 0\right)$, то её импульс сохраняется:

$$\frac{d\vec{p}_{\text{сист}}}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{p}_{\text{сист}} = const} - \text{ЗСИ для замкнутой системы МТ.}$$

Импульс системы – векторная характеристика. У незамкнутой системы МТ может сохраняться не сам импульс в целом, а его проекция на некоторое направление.

*ЗСИ* – ***как и другие законы сохранения – фундаментальный закон природы.*** Иными словами, он связан с определёнными свойствами симметрии пространства и времени. Закон сохранения импульса является следствием *однородности пространства* (§1).

## 18. Центр инерции

При исследовании поведения систем частиц часто удобно использовать для описания движения точку, которая характеризует положение и движение рассматриваемой системы как единого целого. Такой точкой служит центр масс (центр инерции) – точка С.

*Центром масс* или *центром инерции* называется такая точка С, радиус-вектор которой $\vec{r}_c$ выражается через радиусы-векторы материальных точек системы $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$ по формуле

$$\boxed{\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{m},} \qquad (1)$$

где $m = m_1 + m_2 + \dots + m_N = \sum_{i=1}^{N} m_i$ – общая масса всей системы.

Для однородных тел, обладающих симметрией, центр масс часто совпадает с геометрическим центром тела.

Продифференцировав выражение (1) пс времени, можно найти *скорость центра масс* $\vec{v}_c$ (с

где $\vec{v}_i$ – скорость движения каждой материальной точки системы.

$$\boxed{\vec{v}_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i} \qquad (2)$$

*Если система замкнута, то её центр масс движется равномерно и прямолинейно* (если центр масс покоился, то продолжает покоиться), а импульс сохраняется:

## По теореме Кенинга:

$$\boxed{E_{кин} = E_{кин\,c} + E'_{кин},}$$

где $E_{кин\,c}$– кинетическая энергия движения системы как целого (во внешнем пространстве), $E'_{кин}$ – внутренняя/собственная энергия системы. {См. §10: $E_{пот} = E_{пот}^{внеш} + E_{пот}^{взаим}$ }. Например,

## 19. Момент импульса. Закон сохранения момента импульса.

Анализ поведения систем показывает, что кроме энергии и импульса существует ещё одна механическая величина, с которой также связан закон сохранения, – момент импульса (момент количества движения).

Рассмотрим МТ, движущуюся с некоторым импульсом $\vec{p}$, в пространстве, положение точки в любой момент времени описывается радиус-вектором $\vec{r}$ относительно точки отсчёта О. *Моментом импульса МТ относительно точки* называется вектор $\vec{L}$, равный векторному произведению векторов $\vec{r}$ и $\vec{p}$:

$$\boxed{\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}].}$$

Из этого определения следует, что

1) вектор $\vec{L}$ является аксиальным вектором (см. §3) – направлен по правилу «правого винта». $\vec{L} \perp$ плоскости, в которой лежат векторы $\vec{r}$ и $\vec{p}$.
2) модуль вектора $|\vec{L}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{p}| \cdot \sin(\vec{r}, \vec{p}) = |\vec{p}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin\alpha = \ p \cdot l.$
   где $l$ – плечо вектора $\vec{p}$ относительно точки О (кратчайшее расстояние от точки О до линии действия $\vec{p}$).

Рассмотрим систему $N$ МТ. Момент импульса данной системы будет равен векторной сумме моментов импульсов её отдельных точек:

$$\vec{L}_{\text{сист}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i, \vec{p}_i]$$

$dt$ $dt$

$\boxed{\vec{L}_{\text{сист}} = const}$ – закон сохранения момента импульса (ЗСМИ)

*момент импульса замкнутой системы МТ не меняется со временем.*

ЗСМИ – ***как и другие законы сохранения – фундаментальный закон природы.*** Иными словами, он связан с определёнными свойствами симметрии пространства и времени. Закон сохранения момента импульса является следствием *изотропности пространства* (§1).

## Для незамкнутой системы:

*Момент импульса системы МТ может изменяться под действием только суммарного момента всех внешних сил, действующих на систему*:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_{\text{сист}}}{dt} = \vec{M}^{\text{внеш}}}$$

## 20. Вращение твердого тела. Тензор инерции.

**Теперь попробуем учесть размеры движущихся тел, полагая их *твердыми телами,* состоящими из частиц, расстояния между которыми не меняются со временем. *И обратим особое внимание на вращательное движение таких тел.***

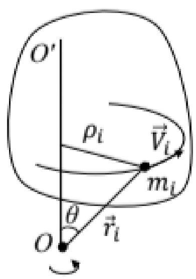
С немалым удивлением мы обнаружим, что *мерой инертности вращения твердых тел является отнюдь не их масса, а некая совокупность чисел,* которую математики за отсутствием в обыденном языке подходящего слова называют *тензором инерции.*

*В явном виде тензор инерции представляет собой двумерную симметричную относительно главной диагонали матрицу 3*3.*

$$I_{mn} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}.$$

*Тензор инерции любого тела зависит от точки, относительно которой он рассчитан. Когда ось вращения твердого тела закреплена и совпадает с одной из осей координат, например с осью Z, то вектор угловой скорости направлен по оси Z. Однако если ось вращения твердого тела не закреплена, то ее нельзя считать все время направленной вдоль фиксированной оси Z и необходимо вычислять все компоненты тензора инерции.*

## 21. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Момент инерции.




Момент импульса $i$ – ого элемента $\vec{L}_i = m_i[\vec{r}_i\,\vec{V}_i]$

Момент импульса относительно оси O O'

$L_{iz} = m_i r_i \sin\theta\, \omega_z \rho_i = m_i \omega_z \rho_i^2$

Для всего твердого тела

$$L_z = \sum L_{iz} = \sum m_i \omega_z \rho_i^2 = \omega_z \sum m_i \rho_i^2 = \omega_z I$$

$I$ – момент инерции твердого тела относительно оси O O'. $\quad I = \sum m_i \rho_i^2$

Момент инерции зависит от распределения массы относительно интересующей нас оси. Это аналог массы для вращательного движения. Момент инерции – величина аддитивная.

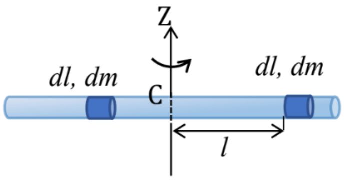
Для непрерывного распределения массы: $\quad I = \int r^2 dm = \int \rho r^2 dV$

$dm$, $dV$ – масса и объем элемента тела, находящегося на расстоянии $r$ от оси, ρ – плотность тела в данной точке.

## 22. Моменты инерции простых однородных твёрдых тел. Теорема Гюйгенса - Штейнера.

➢ Тонкий однородный стержень массы $m$ и длины $L$:

1) ось вращения перпендикулярна стержню и проходит через его центр масс.




$$I = \int\limits_{\text{по всему стержню}} dI_{dl} = \int r^2 dm = \int\limits_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} l^2 dm = \int\limits_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} l^2 \cdot \lambda dl = \lambda \int\limits_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} l^2 dl =$$

$$= \frac{m}{L}\frac{l^3}{3}\Bigg|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \frac{m}{3L}\left(\frac{L^3}{8} - \left(-\frac{L^3}{8}\right)\right) = \frac{mL^2}{12}$$

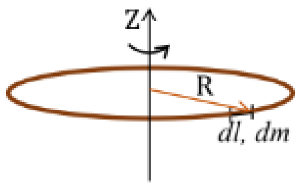
2) ось вращения совпадает с осью симметрии тонкого стержня ($d_{ст} \to 0$).

$$I = \int\limits_{\text{по всему стержню}} dI_{dl} = \int r^2 dm = 0$$

т.к. $r \to 0$.


➢ Тонкое кольцо массы $m$ и радиуса $R$.

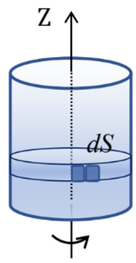
➢ Тонкое кольцо массы $m$ и радиуса $R$,




ось вращения перпендикулярна плоскости кольца и проходит через его центр масс.

$$I = \int\limits_{\text{по всему кольцу}} dI_{dl} = \int r^2 dm = \int R^2 dm = R^2 \int\limits_{\text{по всему кольцу}} dm = mR^2$$

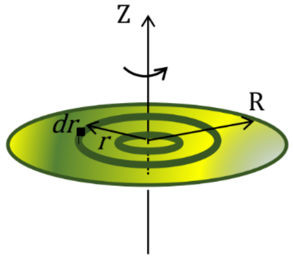
➢ Тонкостенная труба (полый цилиндр) массы $m$, радиуса $R$ и длины $L$, ось вращения совпадает с осью симметрии трубы.




$$I = \int\limits_{\text{по всей поверхности трубы}} dI_{dS} = \{\text{сгруппировали отдельные элементы } dS \text{ в кольца}\} = \int\limits_{\text{по всем кольцам}} dI_к =$$

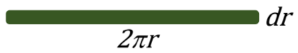
$$= \int\limits_{\text{по всем кольцам}} R^2 dm_к = R^2 \int\limits_{\text{по всем кольцам}} dm_к = mR^2$$

- Тонкий диск массы $m$ и радиуса $R$,




ось вращения перпендикулярна плоскости кольца и проходит через его центр масс.

Как и в предыдущем примере представляем диск набором тонких колец радиуса $r$ толщиной $dr$.




$$I = \int\limits_{\text{по всей поверхности диска}} dI_{dS} = \int\limits_{\text{по всем кольцам}} dI_{к} = \int r^2 dm_{к} = \int\limits_{\text{по всем кольцам}} r^2 \sigma dS_{к} = \sigma \int_0^R r^2 2\pi r dr =$$

$$= 2\pi\sigma \int_0^R r^3 dr = 2\pi \frac{m}{S_{д}} \frac{R^4}{4} = 2\pi \frac{m}{\pi R^2} \frac{R^4}{4} = \frac{mR^2}{2}$$

- Сплошной цилиндр массы $m$ и радиуса $R$,



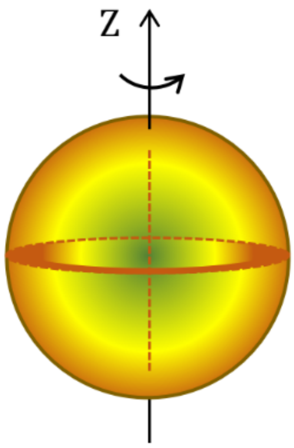
ось вращения совпадает с осью симметрии цилиндра.

Сплошной цилиндр можно представить как набор дисков одинакового радиуса, нанизанных на ось вращения.

$$I = \int dI_{д} = \int \frac{R^2}{2} dm_{д} = \frac{R^2}{2} \int dm_{д} = \frac{mR^2}{2}$$

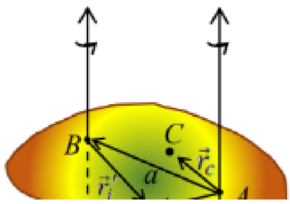
➢ Шар массы $m$ и радиуса $R$

(момент инерции шара можно вычислить, разбивая его на диски).




$$I = \frac{2}{5}mR^2$$

Прикладная теорема, позволяющая при известном моменте инерции относительно одной оси находить момент инерции относительно другой оси. Оси должны быть параллельны.



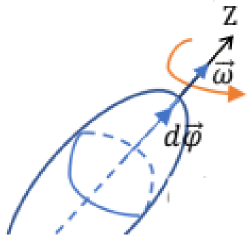

Предположим, что момент инерции АТТ относительно оси, проходящей через точку A, известен. Необходимо найти момент инерции АТТ относительно оси, проходящей через точку $B$. Обе оси параллельны. Известны масса АТТ $m$ и расстояние между осями $a$.

$$\boxed{I_B = I_A + ma^2 - 2m\vec{r}_C\vec{a}.}$$

Если точка A не только точка, через которую проходит ось вращения, но и центр масс этого АТТ (точки A и $C$ совпадают), то $\vec{r}_C = 0$ и $\boxed{I = I_C + ma^2}$ –

**23. Кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Аналогия между движением материальной точки и вращением твердого тела. Динамика плоского движения твердого тела.**

Рассмотрим АТТ, вращающееся с угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг неподвижной оси, совпадающей с осью $Z$ ДСК.




Пусть за время $dt$ тело поворачивается на угол $d\vec{\varphi}$:

$d\vec{\varphi} = d\varphi \cdot \vec{k},\ \vec{k} -$ единичный вектор (орт) оси $Z$.

Сосчитаем работу, совершённую силами, действующими на АТТ:

$$\delta A = \vec{M} \cdot d\vec{\varphi} = d\left(\frac{I \cdot \omega^2}{2}\right)$$

По теореме о кинетической энергии работа всех сил, действующих на тело, равна приращению его кинетической энергии (§7):

$$\delta A = dE_{\text{кин}}$$

$$dE_{\text{кин}} = d\left(\frac{I \cdot \omega^2}{2}\right) \Rightarrow \boxed{E_{\text{кин}} = \frac{I \cdot \omega^2}{2}} -$$

*кинетическая энергия твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси*.

Это выражение напоминает выражение для кинетической энергии МТ, только вместо массы фигурирует момент инерции, а вместо линейной скорости – угловая: $E_{\text{кин}} = \frac{mv^2}{2}$.

| МТ | АТТ, вращающееся вокруг неподвижной оси |
|---|---|
| $d\vec{r}$ | $d\vec{\varphi}$ |
| $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ | $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$ |
| $m$ | $I$ |
| $p = mv$ | $L_z = I\omega$ |
| $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ | $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ |
| $\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ | $\delta A = \vec{M} \cdot d\vec{\varphi}$ |
| $m\vec{a} = \vec{F}$ | $I\beta_z = M_z$ |
| $E_{кин} = \frac{mv^2}{2}$ | $E_{кин} = \frac{I \cdot \omega^2}{2}$ |

По аналогии с плоским движением МТ, плоское движение АТТ можно представить как двумя уравнениями:

$\boxed{m\vec{a}_C = \vec{F}}$ – уравнение движения центра масс системы (§12) (поступательное движение АТТ как целого);

$\boxed{I_C\beta_z = M_z}$ – уравнение динамики АТТ, вращающегося вокруг неподвижной оси (§14) (вращение АТТ), где $M_z$ суммарный момент всех внешних сил относительно оси, проходящей через центр масс ($C$).

Кинетическая энергия АТТ при плоском движении тоже складывается из энергии движения центра масс (поступательного движения) и энергии вращения вокруг неподвижной оси, проходящей через точку $C$:

$$\boxed{E_{кин} = \frac{m{v_C}^2}{2} + \frac{I_C \cdot \omega^2}{2}}$$

## 24. Фазовое пространство и фазовые траектории.

Фазовое пространство (плоскость) в физике — пространство, на котором множество всех состояний системы представлено так, что каждому возможному состоянию системы соответствует одна и только одна точка этого пространства, — которая носит название «изображающей» точки, — и, наоборот, каждой точке этого пространства соответствует одно и только одно состояние системы. Таким образом, изменению состояний системы, можно сопоставить движение изображающей точки; траекторию этой точки называют фазовой.

Полная совокупность различных фазовых траекторий — это фазовый портрет. Он даёт представление о совокупности всех возможных состояний системы и типах возможных движений в ней.

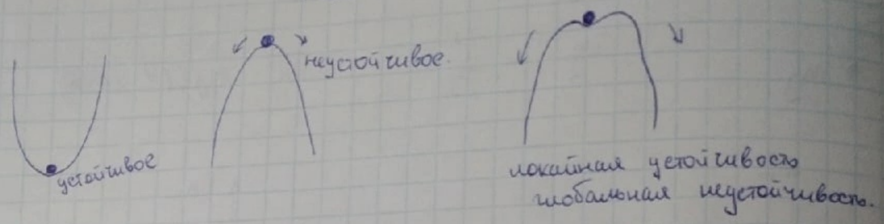
В случае механических движений на оси абсцисс фазовой плоскости откладывается координата, на оси ординат — первая производная от координаты по времени (скорость или импульс).

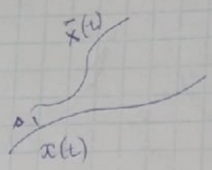
**При помощи уравнений траектории в фазовом пространстве (фазовой плоскости) для исследуемой системы строят интегральные кривые, — то есть кривые в фазовом пространстве такие, что в каждой их точке касательная имеет наклон, задаваемый уравнением траектории. Геометрическое построение интегральных кривых называют «*качественным интегрированием уравнений*».[2]**

## 25. Устойчивость движения. Хаотическое поведение.

§15. Устойчивое движение.

Хаотическое поведение.




$\tilde{x} = x + \Delta$

Если $t \to \infty$ $\Delta \to 0$ устойчивое

Если $t \to \infty$ $\Delta \to \infty$ неустойчивое

$t \to t_1, t_2, t_3 \dots$

$x \to x_1, x_2, x_3 \dots$

$x_{n+1} = \Phi(x_n)$

• $\Delta_{n+1} = \tilde{x}_{n+1} - x_{n+1} = \Phi(\tilde{x}_n) - \Phi(x_n) =$

$= \frac{\Phi(x_n + \Delta_n) - \Phi(x_n)}{\Delta_n} \cdot \Delta_n = \frac{d\Phi}{dx}\Big|_{x_n} \cdot \Delta_n$

• $\left|\frac{d\Phi}{dx}\right| < 1$ $|\Delta_{n+1}| = \left|\frac{d\Phi}{dx}\right| \Delta_n < |\Delta_n|$ $\Rightarrow$ $\Delta \to 0$ устойчивое

• $\left|\frac{d\Phi}{dx}\right| > 1$ $|\Delta_{n+1}| > |\Delta_n|$ $\Delta \to \infty$ неустойчивое

Система, в которой уст-е движение: неустойчивое.

$\Phi(x) = ax$

$a = 0.1 < 1$

$x_1 = 3,14159$
$x_2 = 0,31416$
$x_3 = 0,03142$
$x_4 = 0,00314$
$\dots$
$x_n = 0,00000$

$\Phi(x) = a\{x\}$ — дробная часть.

$a = 10 > 1$.

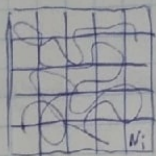
$x_1 = 3,14159$
$x_2 = 1,41592$
$x_3 = 4,15926$
$x_4 = 1,59265$
$\dots$

непредсказуемое поведение системы

## 26. Вероятность и ее свойства.

§ 16 Вероятность.

(количество попаданий в ячейку)




$N : N_i$

$w_i = \lim\limits_{N \to \infty} \frac{N_i}{N}$ — вероятность попадания.

События:

- совместные и несовместные (одновременно произойти не могут)
- зависимые и независимые.

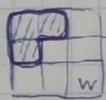
Полный набор событий:

1) ПНС $\sum w_i = \lim\limits_{N \to \infty} \frac{N_1 + N_2 + \dots N_k}{N} = \lim\limits_{N \to \infty} \frac{N}{N} = 1.$

2) $0 \le w_i \le 1$
невозможно — всегда.

3) Сложение вероятностей: $w(i \vee j) = w_i \vee w_j$

4) Умножение вероятностей $w(i \wedge j) = \lim\limits_{N \to \infty} \frac{N_i \cdot N_j}{N} = w_i \cdot w_j$




$w_p = 3w.$

§ 17. Случайные величины:

- дискретные
- непрерывные

$x_i$ : $w_i$

$\langle O_4 \rangle = \frac{2+3+4+2+2+\dots}{N} = \frac{N_2 \cdot 2 + N_3 \cdot 3 + N_4 \cdot 4 + N_5 \cdot 5}{N}.$

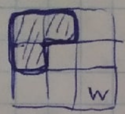
$\langle x \rangle = \lim\limits_{N \to \infty} \frac{N_1 \cdot x_1 + N_2 \cdot x_2 + \dots x_k N_k}{N} = x_1 \lim\limits_{N \to \infty} \frac{N_1}{N} + x_2 \lim\limits_{N \to \infty} \frac{N_2}{N} + \dots =$

$= x_1 w_1 + w_2 x_2 + \dots w_k x_k. \Rightarrow \langle x \rangle = \sum x_i w_i$

- $\langle x - \langle x \rangle \rangle = \langle x \rangle - \langle \langle x \rangle \rangle = \langle x \rangle - \langle x \rangle = 0$
- $\langle ax + b \rangle = a \langle x \rangle + b.$

## 27. Случайная величина. Среднее значение и дисперсия, функция распределения вероятностей.

ii) Умножение вероятностей $w(i \wedge j) = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{N_i \cdot N_j}{N} = w_i \cdot w_j$




$w_Г = 3w.$

§17. Случайные величины:

- дискретные
- непрерывные

$x_i \quad w_i$

$$\langle O_1 \rangle = \frac{2+3+4+2+2+\ldots}{N} = \frac{N_2 \cdot 2 + N_3 \cdot 3 + N_4 \cdot 4 + N_5 \cdot 5}{N}.$$

$$\langle x \rangle = \lim_{N\to\infty} \frac{N_1 \cdot x_1 + N_2 \cdot x_2 + \ldots x_k N_k}{N} = x_1 \lim_{N\to\infty} \frac{N_1}{N} + x_2 \lim_{N\to\infty} \frac{N_2}{N} + \ldots =$$

$$= x_1 w_1 + w_2 x_2 + \ldots w_k x_k. \Rightarrow \langle x \rangle = \sum x_i w_i$$

- $\langle x - \langle x \rangle \rangle = \langle x \rangle - \langle\langle x \rangle\rangle = \langle x \rangle - \langle x \rangle = 0$
- $\langle ax + b \rangle = a \langle x \rangle + b.$

$$D = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 - 2x\langle x \rangle - \langle x \rangle^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - 2\langle x \rangle \langle x \rangle + \langle x \rangle^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

(дисперсия)

$$D = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \langle x \rangle)^2$$

$D = \sigma^2$ Средне-квадратичное отклонение (СКО) (характеризует случайную величину)

Непрерывн. случайные величины.

$x_1$ $x_2$

$x = a$ $\quad w = \lim \frac{N_1}{N} = 0$

$w(x \in [x_1; x_2])$ $\quad \Delta x = x_2 - x_1.$

$w = w(\Delta x)$

$\Delta x \to dx \quad \Rightarrow \quad dw \sim dx$

$dw = f(x)\,dx$ $\quad f(x)$ – плотность вероятносты

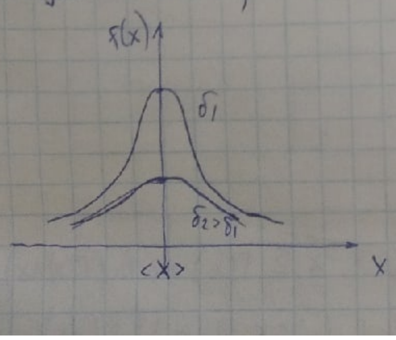
$$\int_{-\infty}^{\infty} dw(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x\,dw(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$$

$$\langle f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dw(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) f(x)\,dx$$

$$D = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x \rangle)^2 f(x)\,dx$$

Гаусс: $\langle x \rangle$; $\sigma$ $\quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\langle x \rangle)^2}{2\sigma^2}}$




# 28. Энтропия случайной величины

## §18 Энтропия.

В информатике:

$J = f(w)$ $\quad$ $J$ - кол-во информации. $w$ - вероятность.

$w_1$ $\qquad$ $w_2$

$w = w_1 \cdot w_2$

$J = J_1 + J_2$

$J = -\log_2 w$ (бит)

$J = -\ln w$ (нат)

$J = -\log_3 w$ (трит)

$J = \log_{256} w$ (байт).

$$S = \langle J \rangle = -\langle \log w \rangle = -\sum w_i \log w_i$$

Энтропия системы - среднее количество получаемой информации (мера неопределённости некоторой системы)

$N$ ; $w_i = \frac{1}{N}$ , $S = \log N$.

В физике: термодинамика => энтропия.

$S = -k \langle \ln w \rangle$ , $k$ - постоян. Больцмана, $\left(k = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{Дж}{К}\right)$

Энтропия - функция состояния системы, отражающая степень её неупорядоченности (изменение энтропии показывает, сколько энергии рассеивается в окр. среду)

$J = J_1 + J_2$

$\langle J \rangle = \langle J_1 \rangle + \langle J_2 \rangle$

$S = S_1 + S_2$.

• $S = -k\langle \ln w \rangle = -k \sum w_i \ln w = -k \sum \Delta w_i \ln \Delta w_i = -k \sum f(x_i)\,\Delta x \ln(f(x)\Delta x) =$

$= -k \sum f \ln(f \Delta x) - k \sum f \ln \Delta x \cdot \Delta x \underset{\Delta x \to dx}{=} -k \int f \ln f\, dx - k \ln(dx) \underbrace{\int f(dx)}_{=1} =$

$= -k \int f \ln f\, dx - \underbrace{k \ln(dx)}_{\to \infty}$ const.

## 29. Модели материального тела. Динамический метод описания систем с большим количеством частиц. Микропараметры.

Материальное тело:

- состоит из атомов/молекул – частиц вещества;
- частицы взаимодействуют друг с другом по некоторым законам;
- частицы движутся друг относительно друга;

внутри частиц.

Но говоря об этой новой модели материального тела, важно понимать, что теперь, заменяя материальное тело на систему $N$ МТ, мы будем иметь дело с очень большим количеством точек ($N \to \infty$).

Новая модель описания материального тела (как системы с бесконечно большим числом точек) требует и новых методов изучения поведения. Прежним остаётся лишь представление о «состоянии» системы (§4) как совокупности радиус-векторов всех точек системы и всех их векторов скорости:

$$\begin{pmatrix} \vec{r}_1 \dots \vec{r}_N \\ \vec{v}_1 \dots \vec{v}_N \end{pmatrix}.$$

Существует три метода описания систем: динамический, статистический и термодинамический.

Динамический метод основан на том, что мы пытаемся вычислить положение и скорости всех  частиц во все последующие моменты времени, т.е. получить детальную информацию о каждой частице и, следовательно, о всей системе в целом.

Решаем дифференциальные уравнения и знаем положение системы для любого $t$:

$$\begin{pmatrix} \vec{r}_1(t) \dots \vec{r}_N(t) \\ \vec{v}_1(t) \dots \vec{v}_N(t) \end{pmatrix}.$$

Однако, в результате анализа оказывается, что динамический метод описания систем многих частиц имеет больше минусов, чем плюсов:

- неосуществим с технической точки зрения (затраты на хранение информации). Хранение информации о положении и скорости каждой частицы в каждый момент времени занимает непомерно много информации.
- непригоден с теоретической точки зрения («склероз» системы); Для систем с таким количеством частиц практически невозможно будет сказать ,что случится с системой через секунду. Поведение таких систем хаотично.
- бесполезен с практической точки зрения (для решения практических

задач знания обо всех частицах бесполезны)

Всё же этот метод не совсем бесполезен. Для дальнейшего описания систем многих частиц (плюсы метода) у нас остаётся понятие *микросостояния системы* – набора всех $\begin{pmatrix} \vec{r}_1 \dots \vec{r}_N \\ \vec{v}_1 \dots \vec{v}_N \end{pmatrix}$ и

**Микропараметры**
(характеризуют одну молекулу)

$m_0 \quad \upsilon \quad p$

$E_K \quad r_0$

## 30. Статистический метод описания систем с большим количеством частиц. Распределение Больцмана.

Минусы динамического метода описания систем многих частиц, которые были приведены в предыдущем параграфе, заставляют сделать вывод о том, что при изучении таких систем *описание должно иметь обобщённый характер*. Оно должно рассматривать не каждую частицу системы по-отдельности, а описывать систему как совокупность большого числа частиц. Все понятия, используемые для описания системы, должны относиться не к отдельным частицам, а к их большим совокупностям. Кроме этого, «*склероз*» систем многих частиц (*хаотичность поведения*) свидетельствуют о том, что разговор о конкретном «состоянии» таких систем не имеет смысла. Можно лишь говорить о том, что система частиц *вероятно* будет находиться в том или ином «состоянии». Т.к. мы не сможем точно предсказывать, поведение системы, то нам будет казаться, что её поведение *случайно*.

Законы поведения совокупностей большого количества частиц исследуются *статистическими методами* и носят название статистических закономерностей. Описания этих методов строятся на *понятиях теории вероятности и математической статистики*.

Договоримся о следующем:

1) число частиц системы со времен не изменяется $N = const$;
2) все частицы системы одинаковы по своим свойствам и равноправны в своём поведении;
3) поведение частиц системы независимо (положение в пространстве и скорость движения $i$ частицы системы не зависит от положения в пространстве и скорости движения $j$ частицы).

Найдем $\langle v \rangle$ — среднее значение скорости для нашей системы, разделив полученную сумму на количество частиц в системе:

$$\langle v \rangle = \frac{\sum_{j=1}^{N} v_j}{N} = \frac{N_1 v_{\boxed{1}} + \dots + N_m v_{\boxed{m}}}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{m} N_i v_{\boxed{i}}}{N} = \sum_{i=1}^{m} \frac{N_i}{N} v_{\boxed{i}},$$

где $\frac{N_i}{N}$ – *относительное число частиц*, имеющих некоторое значение величины скорости.

*Среднее значение* дискретной случайной величины равно

$$\boxed{\langle v \rangle = \sum_{i=1}^{m} \frac{N_i}{N} v_{\boxed{i}}.}$$

неограниченному интервалу, называются *непрерывными*.

*Среднее значение* непрерывной случайной величины:

$$\boxed{\langle v \rangle = \int\limits_{\text{по всему диапазону значений } v} \frac{dN}{N} \cdot v \quad ,} \qquad (1)$$

где $\frac{dN}{N}$ – *относительное число частиц* (доля частиц).

Это определение универсально. *Среднее квадратичное* (*среднеквадратичное*) *значение* непрерывной случайной величины:

$$\boxed{\langle v^2 \rangle = \int\limits_{\text{по всему диапазону значений } v} \frac{dN}{N} \cdot v^2.}$$

IV. *Распределение Больцмана*.

Описывает распределение частиц системы в пространстве. Если на частицы не действуют внешние силы, то они распределяются по пространству равномерно – количество частиц $dN$ во всех $dV$ будет практически одинаковым. Если же на частицы действует внешняя сила, то они будут скапливаться там, куда их толкает эта сила.

$$\boxed{n(\vec{r}) = n(\vec{r}_0) exp\left(-\frac{E_{\text{пот}}(\vec{r}) - E_{\text{пот}}(\vec{r}_0)}{kT}\right)} - \qquad (4)$$

*распределение Больцмана* позволяет рассчитывать концентрацию газа, находящегося в равновесном состоянии во внешнем силовом поле.

Анализ распределения Больцмана показывает, что концентрация молекул газа тем выше, чем меньше их потенциальная энергия. Кроме этого, с понижением температуры увеличивается отличие концентраций в точках с различными значениями потенциальной энергии молекул. А при стремлении температуры к абсолютному нулю, молекулы начинают скапливаться в месте, где их потенциальная энергия принимает наименьшее значение.

## 31. Распределения Максвелла (для компоненты и вектора скорости).

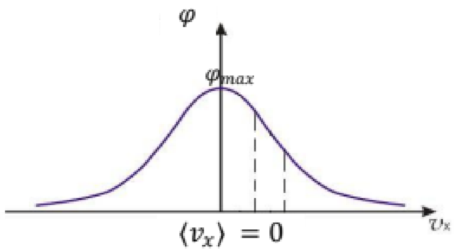
Все направления скоростей равноправны, и в среднем численные значения проекций скоростей частиц, движущихся по и против каждой из осей $OX, OY, OZ$, равны. Это вытекает из закона сохранения импульса: если бы предположение было неверным, то баллон с газом мог бы прийти в движение из-за того, что в одну его стенку частицы газа толкали бы интенсивнее, чем в противоположную.

Исходя из этих предположений, *Джеймс Клерк Максвелл* доказал, что проекции скоростей частиц распределены по Гауссу (2). Что средние значения проекций скорости равны нулю: $\langle v_x \rangle = 0$; $\langle v_y \rangle = 0$; $\langle v_z \rangle = 0$, как следствия из равноправия направления скоростей, а среднеквадратичное отклонение $\sigma^2 = \frac{kT}{m}$:

$$\boxed{\varphi(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{m{v_x}^2}{2kT}\right)} \qquad (2)$$

где $T$ – абсолютная температура системы ($[T] = K$), $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$ – постоянная Больцмана, являющаяся частью многих физических законов, $m$ – масса частицы системы.

$$\varphi(\langle v_x \rangle) = \varphi(0) = \varphi_{max}$$




*Функция распределения Максвелла для вектора скорости*:

$$\boxed{f(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right).}$$

Заметим, что функция распределения Максвелла для вектора скорости зависит только от квадрата его модуля и не зависит от направления. Следовательно, можно получить распределение частиц только по модулю скорости.

## 32. Распределение Максвелла для модуля скорости. Наиболее вероятная, средняя и среднеквадратическая скорости.

$$\boxed{F(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)4\pi v^2} \qquad (3)$$

Значение случайной величины, при которой функция распределения имеет максимум, носит название *наиболее вероятной величины* $t_{вер}$: $f(t_{вер}) = f_{max}$. Для симметричных функций распределения соответственно: $t_{вер} = \langle t \rangle$ и $v_{x_{вер}} = \langle v_x \rangle$ (§17 – функции распределения Гаусса и Максвелла для проекции скорости).

$$\boxed{v_{вер} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}} \quad (4)$$

*наиболее вероятное значение модуля скорости (наиболее вероятная скорость),* $v_{вер} \sim \sqrt{\frac{T}{m}}$.

$$F_{max} = F(v_{вер}) = 4\pi \cdot \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} v_{вер}^2 \exp\left(-\frac{mv_{вер}^2}{2kT}\right) = 4\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2\pi kT}{m} \exp\left(-\frac{m}{2kt} \cdot \frac{2kT}{m}\right) =$$

$$= 4\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{-1} \exp(-1) = \frac{4}{e}\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \sim \sqrt{\frac{m}{T}}$$

Рассмотрение Fmax и Vвер в дальнейшем поможет нам определить Vср и Vср.кв.

$$\boxed{\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}}$$

*среднее значение модуля скорости (средняя скорость).*

$$\boxed{v_{кв} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}}$$

*среднеквадратичное значение модуля скорости (среднеквадратичная скорость).*

Распределения Максвелла можно использовать и для жидких материальнх тел (жидкостей), т.к. в них входит лишь скорость частиц системы, и нет, ничего связанного с растоянием между частицами.

## 33. Макроскопические параметры. Флуктуации

Таким образом, индивидуальные характеристики микрочастиц – это микропараметры. Но существуют также и параметры, которые относятся ко всей системе в целом, а не к отдельным ее частицам. **Примеры:** V- полный объём рассматриваемой системы, M- полная масса системы, P – давление, оказываемое на стенки сосуда или на мембрану манометра, T – температура системы, C ее теплоемкость, $\mu$ - химический потенциал, и многие, многие другие. Параметры, характеризующие систему в целом, - это макропараметры.

Макроскопические величины подчиняются своим, специфически законам, не сводимым к законам, определяющим поведение микрочастиц. Такие законы присущи только системам многих частиц, и их называют *статистическими*. Они теряют всякий смысл, когда число частиц становится мало.

Макроскопические средние значения физических величин обычно достаточно устойчивы и изменяются сравнительно плавно во времени. Однако, быстрые движения микрочастиц могут стать заметными, если, например, детали измерительного прибора становятся настолько малыми что сравниваются с размерами микрочастиц. Так, если измерительная мембрана датчика давления становится очень малой, то число ударов молекул (что и определяет давление) о мембрану заметно меняется в разные моменты времени, так что показания манометра начинают «прыгать», резко меняться. Вот эти **отклонения от среднего** значения и называют флуктуациями.

Величина флуктуации характеризуется разностью:

| | |
|---|---|
| $\Delta p = p - \langle p \rangle,$ | (2.1) |

где <p> – среднее значение давления. Она может быть как положительной, так и отрицательной.

# 34. Термодинамический метод описания систем с большим количеством частиц. Макропараметры. Термодинамическое равновесие.

В предыдущих параграфах были рассмотрены динамический и статистический методы описания систем многих частиц. Динамический метод предполагал детальное описание системы на основе информации о положении и скорости всех частиц. Статистический метод описывает систему, опираясь на параметры, относящиеся к большим совокупностям частиц. Оба из перечисленных методов учитывают внутреннее устройство материальных тел.

Но систему многих частиц можно рассматривать и по-другому, не интересуясь совсем её внутренней структурой. При таком методе описания нужно использовать понятия и физические величины, относящиеся к системе в целом. Таких физических величин немного, и носят они название *макроскопических* (*термодинамических*) *параметров системы*. Например, макроскопическими параметрами, описывающими модель идеального газа, являются:

- $V$ – объём – область пространства, занимаемая системой;
- $\rho$ – плотность – масса единицы объёма системы $\left(\rho = \frac{dm}{dV}\right)$;
- $n$ – концентрация – число частиц в единице объема $\left(n = \frac{dN}{dV}\right)$;
- $P$ – давление – сила, с которой части системы действуют друг на друга, отнесенная к единице поверхности;
- $T$ – температура – интенсивность теплового движения частиц системы, мера нагретости тела.

Значения этих параметров могут быть установлены с помощью измерительных приборов.

Такой метод изучения систем многих частиц получил название *термодинамический*. Он не интересуется внутренними механизмами процессов, определяющих поведение системы. Система при этом рассматривается как целое.

Начиная описывать системы термодинамическим методом, договоримся рассматривать только системы, находящиеся в *состоянии термодинамического равновесия* (или в

Если, например, температура в разных точках системы неодинакова, то системе нельзя приписать определённое значение макропараметра T. В этом случае состояние системы называется неравновесным.
Таким образом, равновесным состоянием или термодинамическим равновесием
называется такое состояние, при котором все макропараметры, описывающие систему, имеет определённые значения, остающиеся постоянными сколь угодно при неизменных внешних условиях.

## 35. Внутренняя энергия идеального газа. Теорема о равнораспределении энергии по степеням свободы.

Термодинамический метод описания систем многих частиц использует при описании макроскопические параметры – физические величины, относящиеся к системе в целом. Ещё одним таким макропараметром, описывающим системы, является внутренняя энергия $U$,

Как было сказано в том же §16, простейшей моделью систем с большим количеством является идеальный газ. В этой модели принимается, что частицы идеального газа не взаимодействуют друг с другом на расстоянии, и потенциальная энергия такого взаимодействия равна нулю. Внутренняя энергия определяется как сумма кинетических энергий частиц (с некоторыми оговорками про энергию частиц, составляющих сложные частицы).

$$\boxed{U_{\text{иг}} = \frac{i}{2}\nu RT} -$$

внутренняя энергия идеального газа.

Одноатомный идеальный газ: $U = \frac{3}{2}\nu RT$; двухатомный – $U = \frac{5}{2}\nu RT$.

Как видно из формулы внутренняя энергия идеального газа зависит только от температуры, следовательно она имеет вполне определённое значение в любом равновесном состоянии системы. Это означает, что внутренняя энергия $U$ является функцией состояния, что согласуется с тем, что мы получили в §16, а её бесконечно малое изменение будет обозначаться $dU$ (см. §7).

Это положение – суть *теоремы о равнораспределении энергии по степеням свободы*, которая связывает температуру системы с её средней энергией. Теорема утверждает (в рамках классической статистической физики), что *при тепловом равновесии на каждое квадратичное слагаемое в выражении для энергии в среднем приходится одинаковое количество энергии:*

$$\boxed{\langle \varepsilon_n \rangle = \frac{kT}{2}}.$$

Молекула *одноатомного* идеального газа имеет $i = 3$ степени свободы (см. §3) и в состоянии

# 36. Давление идеального газа. Уравнение состояния.

*Давлением* называется (средняя) сила нормального давления, действующая на единицу площади

$$P = \frac{F}{\Delta S}$$

Окончательно, давление, оказываемое идеальным газом на стенку, равно:

$$\boxed{P = nkT} - \text{давление идеального газа.}$$

Полученное уравнение связывает между собой три макроскопических параметра, описывающих модель идеального газа: P, n и T, находящегося в состоянии термодинамического равновесия. Соотношения, определяющие связь между макроскопическими параметрами какой-либо системы, находящейся в состоянии термодинамического равновесия, называются уравнениями состояния.

$P = nkT$ – уравнение состояния идеального газа.

Через замену концентрации на число частиц и ее на массу получаем:

$$PV = NkT = \frac{}{\mu} N_A kT$$

$$\boxed{PV = \frac{m}{\mu} RT} -$$

уравнение Менделеева-Клапейрона,

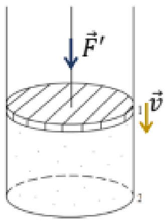
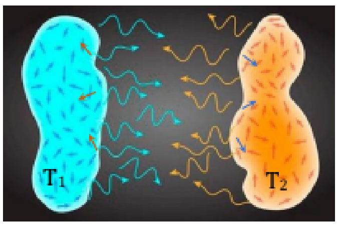
или используя *количество вещества* $\nu = \frac{N}{N_A} = \frac{m}{\mu}$: $\boxed{PV = \nu RT}$.

закорючка - маолярная масса.

# 37. Два способа изменения внутренней энергии. Первое начало термодинамики

Макропараметр внутренняя энергия – это энергия, всевозможного движения частиц системы и их взаимодействиями между собой, и, следовательно, функция состояния системы

$\Delta U$

| *Внешнее воздействие* **(*макроскопический способ*)** | *Передача тепла* **(*микроскопический способ*)** |
|---|---|
|  Внешние макроскопические силы, совершают работу над системой $A'$, при этом сам газ совершает работу A. По *III закону Ньютона* $\vec{F}' = -\vec{F}$ $A' = -A$ | Передача тепла от одной системы к другой осуществляется через взаимодействие частиц систем. При столкновениях частицы более нагретой системы отдают часть своей энергии частицам менее нагретой системы. Совокупность таких микроскопических процессов называется *теплопередачей*. Количество энергии, переданное от системы к системе путём теплопередачи, и определяет количество теплоты $Q$, передаваемое в результате теплообмена.  $T_1 < T_2$ |

Таким образом, в общем случае получается, что приращение (изменение) внутренней энергии

Таким образом, в общем случае получается, что приращение (изменение) внутренней энергии системы равно сумме количества теплоты, подведённого к системе, и работы, совершённой над системой внешними телами: $\Delta U = Q + A'$ или $\Delta U = Q - A$ (учтя, что $A' = -A$).

$$\boxed{Q = \Delta U + A} -$$

*Количество теплоты $Q$, сообщённое макросистеме, идёт на приращение $\Delta U$ её внутренней энергии и на совершение системой работы A над внешними телами* – <u>I начало термодинамики</u>.

какой-то процесс происходит.

Первое начало термодинамики в дифференциальной форме записи: $\boxed{\delta Q = dU + \delta A,}$

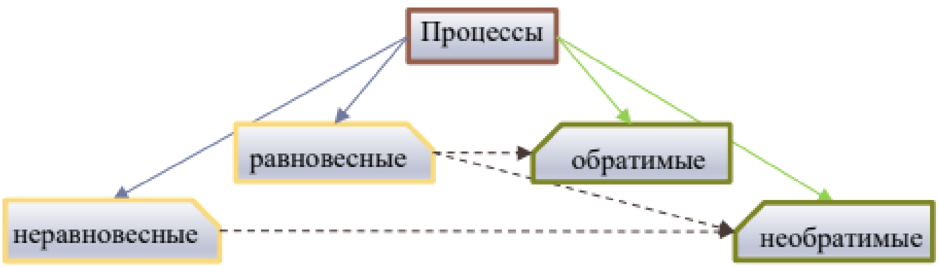
где:

- $dU$ (полный дифференциал) – бесконечно малое изменение внутренней энергии системы
- $\delta A$ – элементарная работа
- $\delta Q$ – бесконечно малое количество теплоты.

# 38. Тепловые процессы. Работа, совершаемая макросистемой.

Любое изменение макроскопических параметров при переходе системы из одного равновесного состояния в другое, т.е. от одного набора параметров $T_1, P_1, V_1$ к другому $T_2, P_2, V_2$ называется *процессом*. Главным в этом определении является требование, чтобы и начальное и конечное состояния были равновесными.

процесс




1. Неравновесный процесс (Переход от начального равновесного состояния к конечному равновесному состоянию можно осуществлять через неравновесные состояния. Пример - поршень с разряженным газом, двигаем быстро)
2. Равновесный процесс (Если в каждый момент времени система будет находиться в состоянии очень близком к равновесному , то и весь такой процесс будет равновесным.)

Для всех равновесных процессов возможен переход из конечного состояния в начальное через те же промежуточные состояния, что и в прямом процессе. Такие процессы называются обратимыми. Если процесс равновесный, то макропараметры для любого состояния известны, и переход из состояния 1 в состояние 2, или из состояния 2 в состояние 1, через одни и те же промежуточные состояния в принципе возможен.

Необратимыми называют процессы, когда обратный переход из конечного состояния в начальное через те же промежуточные состояния, что и в прямом процессе невозможен. Неравновесные процессы всегда необратимы.

### Работа, совершаемая макросистемой

Рассмотрим газ в цилиндрическом сосуде под плотно пригнанным поршнем. Первоначально система занимает объём $V$, давление газа – $P$. Газ расширяясь, увеличивает свой объём на $dV$, в результате чего поршень поднимается на высоту $dh$. Сила, действующая со стороны газа на поршень

$$\boxed{\delta A = PdV} –$$

бесконечно малая работа, совершённая газом.

В случае расширения газа на конечный объём $\Delta V = V_2 - V_1$, давление системы под поршнем, вообще говоря, будет меняться $P = P(V, T)$. Работа газа в этом случае может быть найдена как сумма бесконечно большого количества бесконечно малых слагаемых $\delta A$:

$$\boxed{A = \int_1^2 \delta A = \int_{V_1}^{V_2} PdV} –$$

работа газа (макросистемы).

# 39. Теплоемкость. $c_v$ и $c_p$ для идеального газа. Уравнение Майера.

### Теплоёмкость

При сообщении системе теплоты $\delta Q$ её температура изменяется на $dT$. Величина, определяемая как отношение этих величин, называется *теплоёмкостью системы*:

$$C = \frac{\delta Q}{dT}.$$

*Теплоемкость* – это количество теплоты, которое надо подвести к системе, чтобы повысить ее температуру на один кельвин. Единицей измерения теплоёмкости является $[C] = \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$.

Теплоёмкость, отнесённая к массе, называется *удельной теплоёмкостью*:

$$c_{\text{уд}} = \frac{C}{m} = \frac{1}{m}\frac{\delta Q}{dT}.$$

теплоемкости такое же, как и у формул для мгновенной и средней скоростей.

Чаще всего при описании макросистем используют теплоёмкость одного моля вещества – *молярную теплоемкость* $c = \frac{C}{\nu}$:

$$\boxed{c = \frac{1}{\nu}\frac{\delta Q}{dT},} \qquad [c] = \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}.$$

$$\boxed{c_V = \frac{1}{\nu}\left(\frac{dU}{dT}\right)_V} -$$

молярная теплоёмкость при постоянном объёме.

Если же процесс передачи тепла происходит при постоянном давлении ($P = const$), то теплоёмкость обозначается $c_P$.

$$\boxed{c_P = \frac{1}{\nu}\left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_P} -$$

молярная теплоёмкость при постоянном давлении.

Если вернуться на полшага назад к выражению для $c_P$, то можно получить соотношеı связывающее $c_P$ и $c_V$ характеристики идеального газа: $c_P = \frac{i}{2}R + R = c_V + R$.

*Формула Майера* для идеального газа: $\boxed{c_P - c_V = R.}$

Важной характеристикой газов является отношение $c_P/c_V$, обозначаемое $\gamma$, и называе *показатель адиабаты газа*. Для идеального газа показатель адиабаты – величина постоянı определяемая строением частиц газа, как и $c_P, c_V$:

$$\gamma = \frac{c_P}{c_V} = \frac{\frac{i+2}{2}R}{\frac{i}{2}R}.$$

$$\boxed{\gamma = \frac{i+2}{i}} -$$

*показатель адиабаты идеального газа*.

# 40. Процессы в идеальных газах.

*Изопроцессы* – термодинамические процессы, в которых количество вещества и один из параметров состояния: давление, объём или температура – остаются неизменными: $\nu = const \Longrightarrow \frac{PV}{T} = const$ .

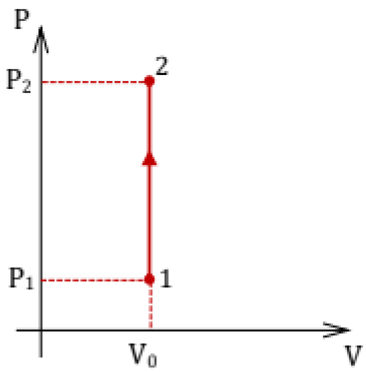
1. *Изохорический (изохорный) процесс.*

Процесс, протекающий при постоянном объёме: $V = const$.

$$\frac{P}{T} = const - \text{ закон Шарля.}$$

Для любых состояний идеального газа в изохорическом процессе

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}.$$



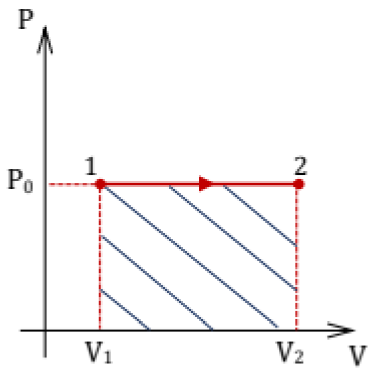

2. *Изобарический (изобарный) процесс.*

Процесс, протекающий при постоянном давлении: $P = const$.

$$\frac{V}{T} = const - \text{закон Гей} - \text{Люссака}.$$

Для любых состояний идеального газа в изобарическом процессе

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}.$$




$$A = \int_1^2 \delta A = \int_1^2 P_0 dV = P_0 \int_{V_1}^{V_2} dV = P_0(V_2 - V_1) = P_0 \Delta V$$

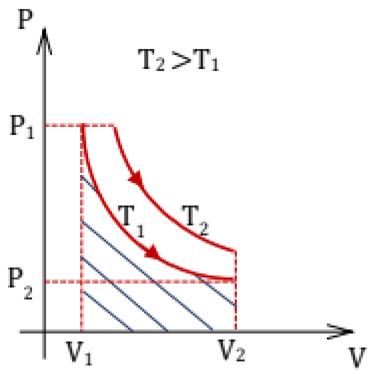
3. *Изотермический процесс*.

Процесс, протекающий при постоянной температуре: $T = const$.

$$PV = const \text{ — закон Бойля – Мариотта.}$$

Для любых состояний идеального газа в изотермическом процессе

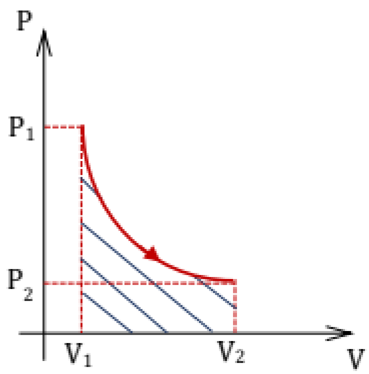
$$P_1V_1 = P_2V_2.$$




A=Q.

4. *Адиабатический (адиабатный) процесс*.

Процесс, при котором газ не обменивается теплом с окружающим пространством: $\delta Q = 0$.




# 41. Термодинамическое (макроскопическое) определение энтропии. Энтропия идеального газа. Термодинамические координаты (T,S).

Решение этих проблем предложил Рудольф Клаузиус 1862 г, впервые введя понятие *энтропии* – $S$. *При равновесной теплопередаче* при температуре $T$ малое количество тепла равно

$$\boxed{\delta Q = T dS,}$$

где $dS$ – бесконечно малое *изменение энтропии*. Т.е. наша неизвестная функция состояния $X$ – это *энтропия* $S$. Из приведённого определения следует, что

$$\boxed{dS = \frac{\delta Q}{T},}$$

и энтропия измеряется в единицах теплоёмкости (см. §23) $[S] = [C] = \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$. Ещё одно название *энтропии – приведённое тепло*.

$\delta Q$ – *малое количество* теплоты, полученное системой, после деления на температуру $T$, оказывается *приращением* энтропии. В отличие от теплоты, *энтропия* такая же *функция состояния* как температура, давление и внутренняя энергия. Изменение энтропии при переходе из одного равновесного состояния в другое может быть найдено по формуле:

$$\boxed{S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T},}$$

при этом не играет роли, какой именно процесс перевёл систему из состояния 1 в состояние 2. Важно, чтобы этот процесс был равновесным.

Свойства энтропии:

- ✓ энтропия системы является суммой энтропий всех её частей, энтропия – аддитивная величина:

$$S = \sum_i S_i.$$

- ✓ определение энтропии, введённое Р. Клаузиусом, позволяет вычислять только изменение энтропии в равновесном процессе:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T},$$

Из уравнения состояния идеального газа:

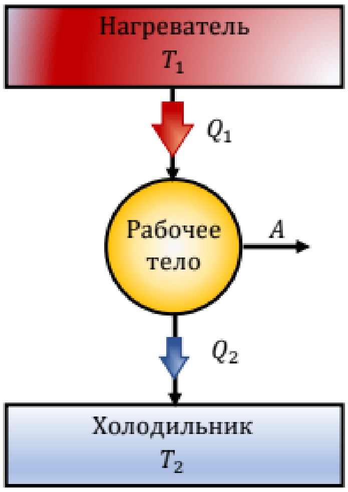
$$PV = \nu RT \quad \text{и} \quad \frac{P}{T} = \frac{\nu R}{V}.$$

$$\boxed{dS = \nu c_V \frac{dT}{T} + \nu R \frac{dV}{V}.}$$

Найдём конечное изменение энтропии при переходе идеального газа

## 43. Преобразование тепла в механическую работу. Тепловая машина. Цикл Карно.

Периодически действующая система, совершающая работу за счёт подводимого из вне




тепла, называется *тепловой машиной*. Вещество, совершающее работу в тепловой машине, (газ или что-то другое) называется *рабочим телом*. Рабочее тело тепловой машины получает тепло от *нагревателя* – системы, чья температура выше температуры рабочего тела. Полученное тепло будем теперь обозначать $Q_1 = Q_{AB}$. А температуру нагревателя $T_1$ соответственно. Тепло $Q_{BA}$ отдаётся рабочим телом *холодильнику* – системе, чья температура ниже температуры рабочего тела. Это тепло теперь будем обозначать $Q_2 = |Q_{BA}|$, температуру холодильника $T_2$. Таким образом, в новых обозначениях первое начало термодинамики примет следующий вид:

$$Q_1 - Q_2 = A.$$

Часть тепла равная $Q_2$ должна быть возвращена холодильнику для того, чтобы тепловая машина работала непрерывно, и следовательно, использовать её для совершения работы нельзя. Обычно в качестве холодильника используется окружающая среда, и $Q_2$ просто уходит на нагрев атмосферы. Тепловые машины принято характеризовать *коэффициентом полезного действия* (КПД), который определяется как отношение совершаемой в цикле работы к получаемому за цикл теплу:

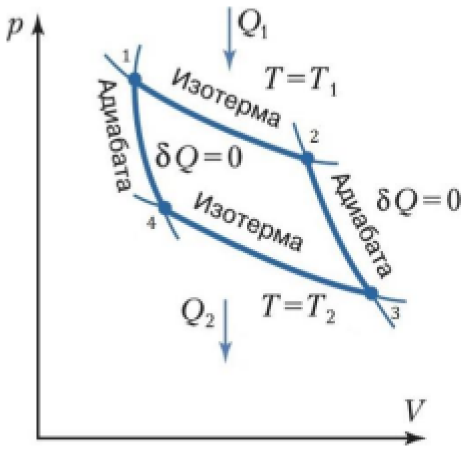
$$\boxed{\eta = \frac{A}{Q_1}}\ , \quad \eta < 1.$$

Из определения КПД следует, что он никогда *не может быть больше единицы*, но чем ближе он к ней, тем лучше тепловая машина.

Используя первое начало термодинамики, записанное для цикла, получаем следующее выражение для КПД тепловой машины:

$$\boxed{\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}.}$$

Для повышения эффективности работы тепловой машины – увеличения её КПД

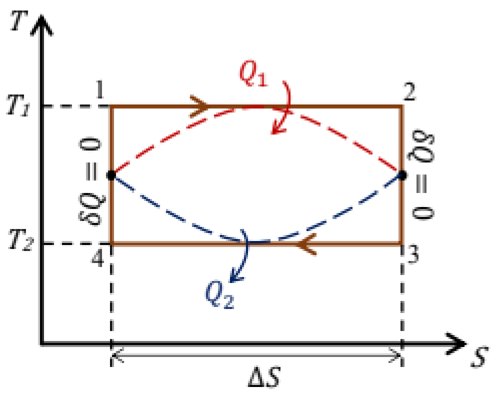



$Q_1$ $T_1\Delta S$

$$\boxed{\eta_{max} = \eta_{\text{карно}} = 1 - \frac{T_2}{T_1}.}$$

Цикл, обладающий максимальным значением коэффициента полезного действия при заданных температурах нагревателя и холодильника, называется *циклом Карно*.

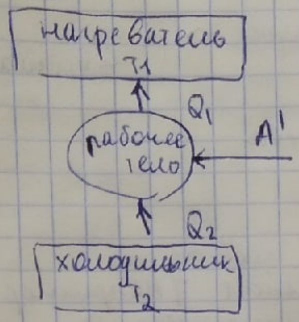
Поскольку в своём выводе мы не делали никаких предположений о свойствах рабочего тела и о самом устройстве тепловой машины, то справедливой является *теорема Карно*: коэффициент полезного действия тепловой машины, работающей по циклу Карно, зависит только от температур $T_1$ и $T_2$ нагревателя и холодильника, но не зависит от устройства машины, а также от вида используемого рабочего тела.




# 44. Тепловой насос.

## Тепловой насос.

Тепловой насос – это система, используемая для нагрева или охлаждения путём передачи тепловой энергии из более холодного пространства в более теплое, с использованием холодильника.

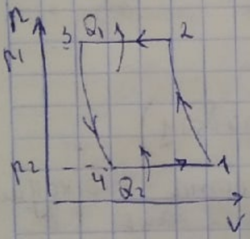



$Q_2$ – теплота, отводимая от хол.
$Q_1$ – теплота, подводимая к нагр.

Если более важным для нас является возможность теплового насоса понизить темп-ру холодильника, то такой насос называется холодильной машиной.

$$k_{х.м.} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} = \frac{Q_2}{A'} \qquad k_{х.м.\,Карно} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

коэф. эффективности холодильной машины




• холодильник:

1-2: компрессор газ сжимается и нагрев.

2-3: радиатор (конденсатор) фреон превращается в жидкость газ охлаждается до комн. темп.

3-4: испаритель (фреон испаряется) $p\downarrow$ $T\downarrow$

4-1: морозильник

• динамическое отопление:

(Тепловой насос забирает тепло от менее нагретого передаёт более нагретому)

$$k_{д.от} = \frac{Q_1}{Q_1 - Q_2} \qquad k_{д.от\,Карно} = \frac{T_1}{T_1 - T_2}$$

**45. Второе начало термодинамики: формулировки Клаузиуса и Кельвина. Энтропия замкнутой макросистемы.**

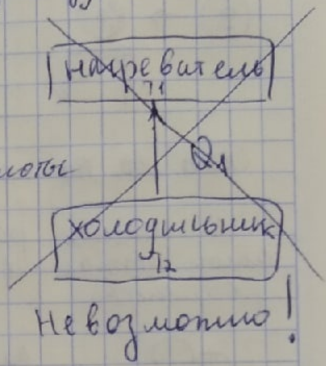
Второе начало термодинамики.
Энтропия замкнутой макросистемы.

Второе начало термодинамики определяет направление протекания процессов, отвечает на вопрос, возможен ли такой процесс.

• Формулировка Клаузиуса:

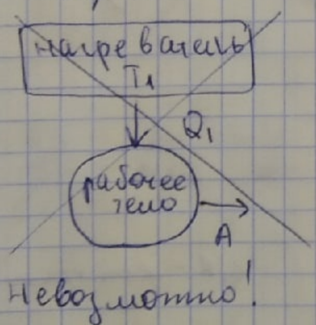
„Невозможен процесс самопроизвольной передачи теплоты от менее нагретого тела к более нагретому" (т.е процесс при котором этот переход происходил бы без воздействия других тел и ~~без~~ изменений в них)

Пример: холодильник отбирает теплоту от менее нагретого тела в пользу более нагретого, но холодильник при этом потребляет электроэнергию, т.е переход теплоты не является самопроизвольным.




• Формулировка Томсона:

„Невозможен циклический процесс единственный результат которого состоял бы в получении теплоты от нагревателя и полного преобразования её в работу.




Внутренняя энергия не может быть преобразована в другую без отдачи некоторого кол-ва теплоты холодильнику

• Формулировка через энтропию:

„Энтропия замкнутой макросистемы не уменьшается, она либо возрастает, либо остаётся постоянной". $dS \geq \frac{\delta Q}{T}$

„=" - обратимый

## 46. Реальные газы. Газ Ван-дер-Ваальса. Внутренняя энергия газа Ван-дер-Ваальса.

## Реальные газы. Газ Ван-дер-Ваальса. Внутренняя энергия газа Ван-дер-Ваальса

Уравнение Менделеева–Клапейрона подходит для описания только идеального газа.

• В реальных газах между частицами действуют силы притяжения – силы Ван-дер-Ваальса (на больших расстояниях). Эти силы возникают вследствие того, что при небольшом смещении отриц. и пол. зарядов молекула превращается в диполь (перестаёт быть нейтральной)

$+q$ $-q$ — диполь создаёт электр. ое поле с напр $E = E_- + E_+$

$|E_+| = \frac{kq}{r_+^2}$  $|\vec{E}_-| = \frac{kq}{r_-^2}$

На молекулы действуют силы $F = q\vec{E}$

• На малых расстояниях между молекулами действуют силы отталкивания (молекула занимает нек. область пространства и не даёт другим туда проникать)

для и.г.: $pV_m = RT$  $V_m = \frac{V}{\nu}$ (молярн. V)

для р.г.: $p(V_m - b) = RT$, где

$b$ – недоступный объём $4V_1 N_A$ (молекулы занимают не весь объём).

$p = \frac{RT}{V_m - b} - \Delta p$ (учитываем прит. с молекул → $p\downarrow$)

где $\Delta p \sim n^2$  $\Delta p \sim \left(\frac{N}{V}\right)^2 \sim \frac{N_A}{V_m^2}$

$\Delta p = \frac{a}{V_m^2}$

$$p = \frac{RT}{V_m - b} - \frac{a}{V_m^2}$$

$$p + \frac{a}{V_m^2} = \frac{RT}{V_m - b} \Rightarrow \underbrace{\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT}_{\text{уравнение Ван-дер-Ваальса}}$$

$a, b$ – константы

Внутренняя энергия реального газа равна сумме кинетических энергий молекул и потенц-ой энергии взаимодействия.

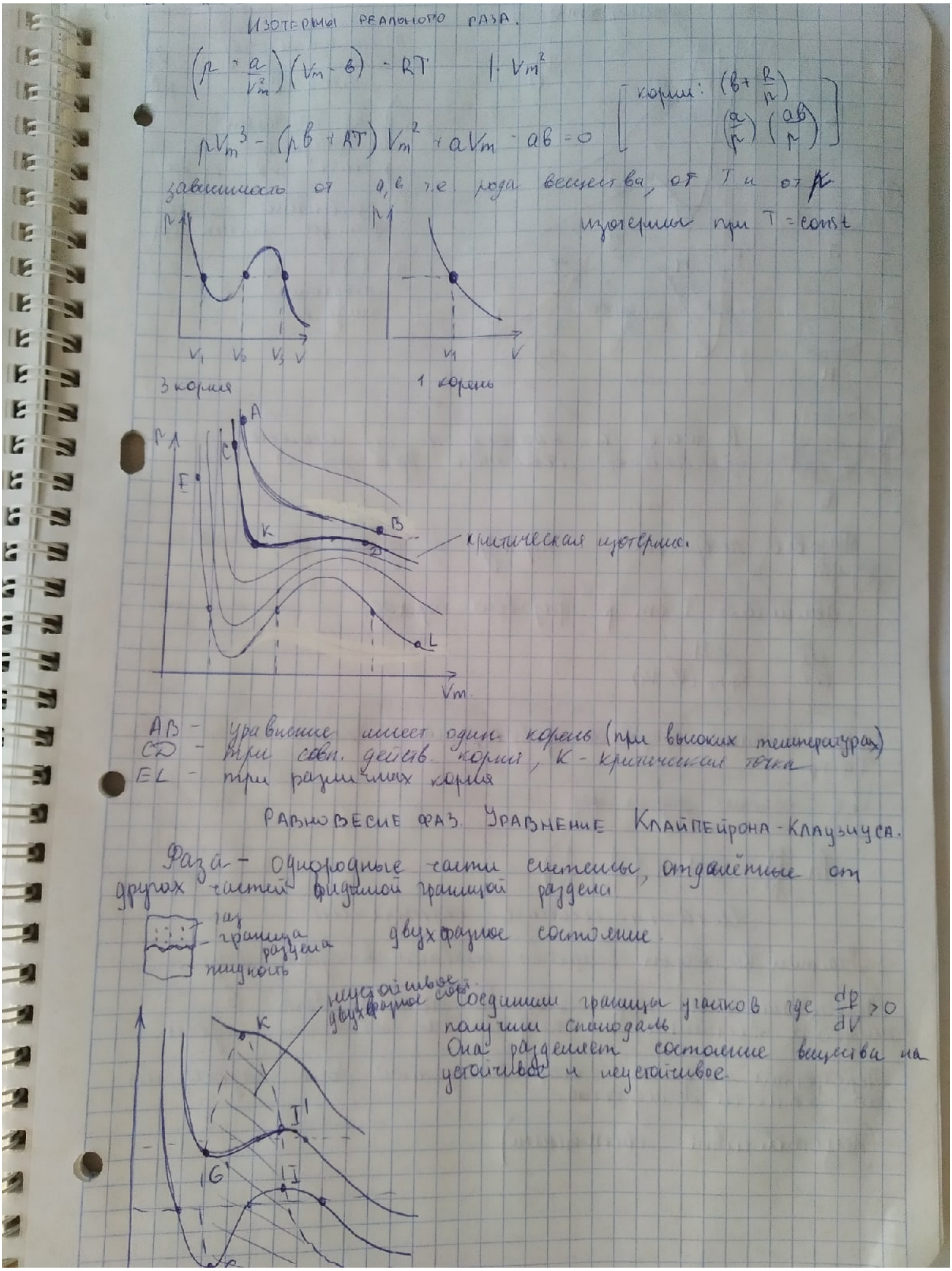
$U_p = E_k + E_n = \frac{i}{2}\nu RT + E_n$

на увеличение $E_n$ идёт работа по преодолению сил притяжения при увеличении объёма на $dV_m$

$dA = \frac{a}{V_m^2} \cdot dV_m = -dE_n \to E_n = -\frac{a}{V_m}$

$$\boxed{U_p = C_V \cdot T - \frac{a}{V_m}}$$

# 47. Изотермы реального газа, газа Ван-дер-Ваальса.



Изотермы реального газа.

$$\left(p+\frac{a}{V_m^2}\right)(V_m-b)=RT \quad \Big|\cdot V_m^2$$

$$pV_m^3-(pb+RT)V_m^2+aV_m-ab=0$$

$$\left[\text{корни: } \left(b+\frac{R}{p}\right) \quad \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{ab}{p}\right)\right]$$

зависимость от a, b т.е. рода вещества, от T и от p

изотермы при T = const



AB – уравнение имеет один корень (при высоких температурах)
CD – три совп. действ. корня, K – критическая точка
EL – три различных корня

Равновесие фаз. Уравнение Клайпейрона-Клаузиуса.

Фаза – однородные части системы, отделённые от других частей видимой границей раздела



двухфазное состояние

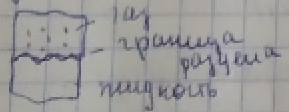


Соединим границы участков где $\frac{dp}{dV}>0$ получим спинодаль. Она разделяет состояние вещества на устойчивое и неустойчивое.

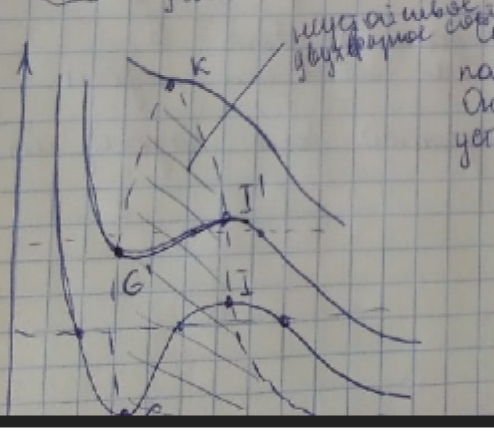
# 48. Равновесие фаз. Уравнение Клапейрона- Клаузиуса.

Клапейрона Клаузиуса

Фаза – однородные части системы, отделённые от других частей видимой границей раздела

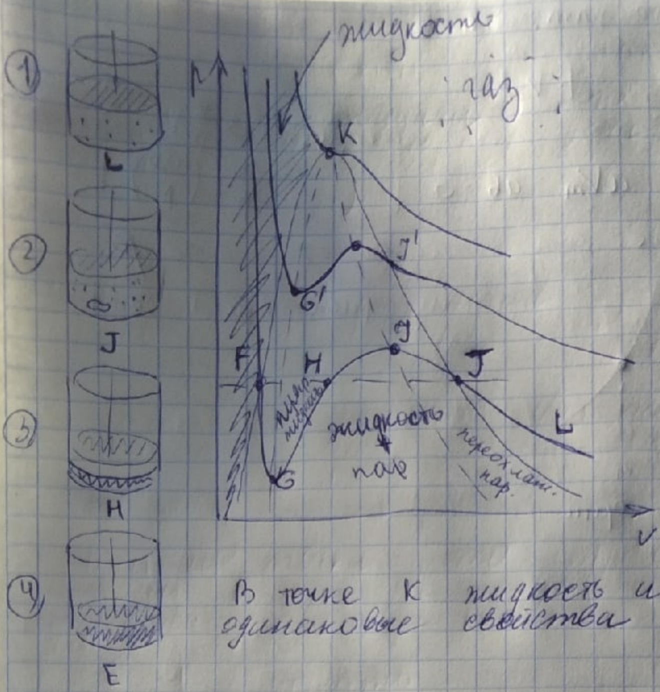



двухфазное состояние




Соединим границы участков где $\frac{dP}{dV} > 0$ получим спинодаль

Она разделяет состояние вещества устойчивое и неустойчивое




1) сжимаем газ, только газ, участок LJ $V\downarrow$ $p\uparrow$

2) газ распался на жидкость и газ, p const $V\downarrow$ (·) J

3) появление чёткой границы, участок JH

4) (·) F - газ превратился в жидкость.

В точке K жидкость и газ имеют одинаковые свойства ($\rho_ж = \rho_г$)

Фазовое превращение - переход из одной фазы в другую.

Зависимость T от p фазового переход.

$$\frac{dP}{dT} = \frac{\Delta H}{T_{ф.пр}(V_2 - V_1)}$$

$\Delta H$ - теплота фазового превращения (Дж/моль)

$T_{ф.пр}$ -

$V_{1,2}$ - объёмы разных фаз.

$$\ln\frac{p_1}{p_2} = \Delta H_{ф.п}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)$$

Метастабильные состояния:

Участки, в которых вещество остаётся в одной фазе:

Переохлаждённый пар - вещество должно быть в жидком состоянии, но продолжает оставаться газом.

Перегретая жидкость - вещество должно быть газом, но оно остаётся жидкостью.

(Неустойчивые состояния)

**49. Зависимость давления насыщенного пара от кривизны поверхности. Метастабильные состояния.**

Участки, в которых вещество остаётся в одной фазе:

Переохлаждённый пар – вещество должно быть в жидком состоянии, но продолжает оставаться газом.

Перегретая жидкость – вещество должно быть газом, но оно остаётся жидкостью.

(Неустойчивые состояния)

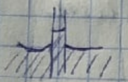
## Зависимость давления насыщенного пара от кривизны поверхности. Метастабильные состояния.

Насыщенный пар – динамическое равновесие между паром и жидкостью.

Влажность: • абсолютная (плотность водяных паров) $\rho = \frac{m}{V}$

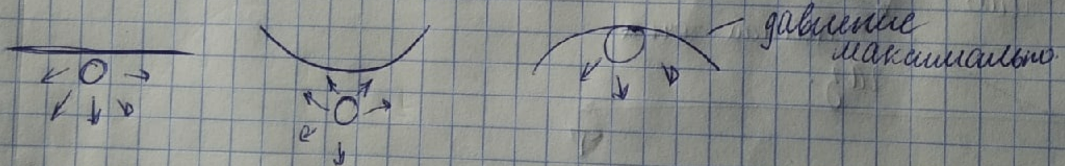
• относительная (отношение парциального давления водяного пара к давлению насыщенного пара при данной T) $\varphi = \frac{p}{p_{н.п}} \cdot 100\% =$

Капиллярные явления – явление которое заключается в способности жидкости изменять свой уровень.



Данное явление возможно благодаря искривлённой поверхности жидкости (обусловленной поверхностным натяжением).

Зависимость давления от кривизны:




Над выпуклой поверхностью давление насыщенного пара больше, а над вогнутой меньше, чем на плоской

$$\frac{p^s}{p^0} = e^{\frac{2\sigma V}{rRT}}$$

$p^s$ - давление над искривлённой
$p^0$ - давление над плоской.
r - радиус кривизны поверхности.