MÉTODOS PROBABILÍSTICOS
EM PRECIFICAÇÃO DE DERIVATIVOS

Vladimir Belitsky

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo

ABE – Associação Brasileira de Estatística

Prefácio

Este livro contém o material do mini-curso "Métodos Probabílisticos em Precificação de Derivativos", que o autor ministrou no 14º SINAPE.

O objetivo deste trabalho é apresentar os modelos de mercado em tempo discreto e contínuo (com somente um ativo – ação), bem como alguns métodos de precificação de derivativos nestes modelos (opções de compra e de venda do tipo europeu).

Os pré-requisitos são mínimos: conhecimento básico de álgebra linear, cálculo em $\mathbb{R}^n$ e conceitos de probablidade e variável aleatória. O autor não assume que o leitor saiba algo sobre o mercado financeiro. Aliás, este livro é destinado aos matemáticos que querem aprender um pouco sobre estes mercados. Dai o estilo do livro: axiomas, definições, afirmações, demonstrações. Mas o leitor não deve se assustar: tudo está muito bem detalhado. As vezes, até detalhado demais. Os detalhes secundários, embora importantes, estão escritos em letras menores formando um texto deslocado à direita.

> Este tipo de texto pode ser omitido na primeira leitura, para não prejudicar uma introdução rápida aos seus principais assuntos.

O material deste livro é uma parte do curso semestral "Métodos Probabílisticos em Finanças" ministrado para alunos de graduação em Estatística do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo. A outra parte do curso contém as noções de processos estocásticos em tempo discreto e, em particular, martingais. Quando resta tempo, as aulas são completadas com os seguintes assuntos: precificação de opções de ações que pagam dividendos e de opções sobre futuros, opções do tipo "americano" e métodos de aproximação do modelo em tempo contínuo pelo modelo em tempo discreto. A maioria destes assuntos está bem apresentada no livro de Chriss [Ch] (veja a seção Bibliografia).

O autor agradece a todas as pessoas que ajudaram na elaboração deste livro.

Sumário

Capítulo 1

Modelo de tempo discreto uniperíodo

1.1 Construções e definições básicas

O termo **modelo uniperíodo**[1] designa, neste livro, um mercado com somente um ativo de risco (chamado **ação**[2]), que pode ser comprado ou vendido em dois instantes de tempo designados por t_0 e t_1, sendo que o seu preço no tempo t_0 é S_0, enquanto que no tempo t_1 é

$$\begin{array}{ll} S_u, & \text{com probabilidade } p_u, \\ S_d, & \text{com probabilidade } p_d = 1 - p_u, \\ & \text{onde concordamos em todo texto que } S_u > S_d. \end{array} \tag{1.1}$$

> Quando digo **mercado** imagino (e sugiro que o leitor imaginasse também) um grupo de pessoas (chamadas **agentes** do mercado) que pode comprar e vender certos bens e papéis. Ao falar de um mercado, sempre definirei explicitamente tanto os seus bens e papéis, quanto as regras de compra e venda que os agentes são obrigados a seguir. Por exemplo, para o modelo uniperíodo, estas definições estão contidas nos axiomas **A1-A4** abaixo listados.
>
> Note que as regras de comportamento dos agentes são parecidas nos modelos a serem considerados neste livro. O que distingüe os modelos de mercado é o número de ativos de risco e o comportamento dos seus preços.

Destacaremos, mais uma vez, que no modelo uniperíodo há somente um ativo de risco e **a dinâmica** do seu preço (ou, em outras palavras, **a evolução** do seu preço) está determinada pelos seguintes parâmetros:

A1-a Os instantes t_0 e t_1, com $t_1 > t_0$.

A1-b O valor inicial (i.e., no tempo t_0) da ação, designado por S_0. Os valores terminais (i.e., no tempo t_1) da ação, designados por S_u e S_d e que satisfazem $S_u > S_d$.

A1-c A probabilidade do **preço da ação subir** para S_u, designada por p_u, e a probablidade do **preço da ação descer** para S_d, designada por p_d, sendo que $p_u > 0, p_d > 0$ e $p_d + p_u = 1$.

[1] **One-period model** em inglês, também às vezes chamado **one-step model**.

[2] Espero que o leitor conheça como funcionam "ações". Para quem não as conhece e para quem as conhece mas não sabe quais de suas características serão usadas, aviso que o que nos interesserá é só o preço da ação e não a própria ação como um todo. Portanto, aconselho enxergar o objeto denotado acima por "ação" como um quintet $(S_0, S_u, S_d, p_u, p_d)$, onde os valores deste quintet são interpretados no texto.

É muito cômodo visualizar o modelo uniperíodo na forma gráfica, conforme apresentamos na Figura 1. Esta forma se chama **diagrama de árvore**, ou simplesmente **árvore**.

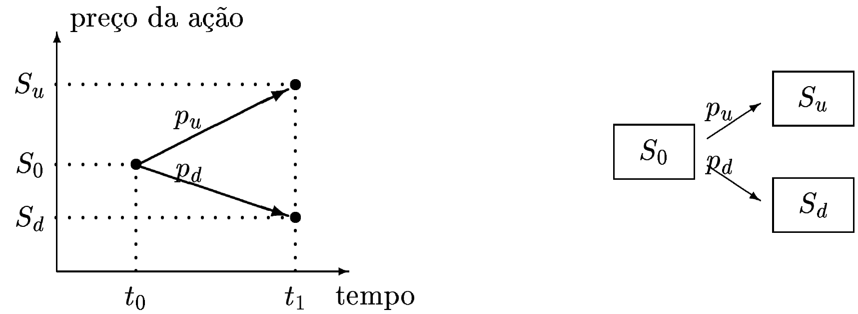

FIGURA 1

Diagrama de árvore da dinâmica do preço da ação. A sua forma completa está a esquerda e a sua forma sucinta está a direita. Observe que na forma sucinta as inclinações das flechas p_u e p_d são iguais, o que não implica $p_u = p_d$, nem $S_u/S_0 = S_0/S_d$.

O problema a ser abordado nesta seção é achar o preço dos contratos específicos que são assinados no tempo t_0 e que determinam certos direitos e obrigações válidos para o tempo t_1. Estes contratos se chamam opção européia de compra e opção européia de venda:

Opção européia de compra (ou simplesmente **opção de compra**) é um contrato entre duas partes chamadas **titular da opção** e **lançador da opção**, assinado no tempo t_0, no qual o titular tem direito a comprar do lançador uma ação no tempo t_1 por um preço K pré-estabelecido pelas partes no momento da assinatura do contrato; K é chamado **preço de exercício**.

Opção européia de venda (ou simplesmente **opção de venda**) é definida analogamente com a única diferença de que agora o titular da opção tem o direito de vender para o lançador uma ação no tempo t_1 pelo **preço de exercício** K.

Exemplo 1. Seja o modelo uniperíodo definido na Figura 2.

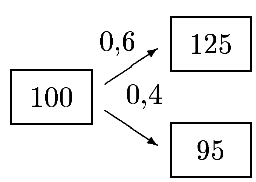

FIGURA 2

Suponhamos que o preço de exercício seja $K = 110$ e que o titular e o lançador assinaram um contrato de opção européia de compra no tempo t_0. Vejamos o que acontecerá no tempo t_1. Suponhamos que o preço da ação subiu. Neste caso, se o titular resolve **exercer** a opção, isto é, realizar o seu direito de comprar do lançador uma ação pelo preço $K = 110$, então ele poderá imediatamente vendê-la pelo seu preço de mercado 125, lucrando com isto 15.

Que há o lucro de 15, está claro se supomos que o titular tenha adquirido a opção com o objetivo puramente especulativo. A outra razão de adquirir a opção no tempo t_0 é garantir a possibilidade de comprar a ação no tempo t_1 por um preço não maior do que K. Se for esta a razão, também podemos dizer que o titular lucrou 15 quando a ação subiu, porque se ele não tivesse comprado a opção, teria que desembolsar 125.

Vejamos o que acontece se o preço da ação descer. Neste caso, não é racional exercer a opção porque o preço pré-estabelecido $K = 110$ é menor do que o preço da ação no mercado 95.

Vê-se no Exemplo 1 que exercer a opção não é sempre um negócio lucrativo. Note que o contrato da opção não obriga o titular a exercê-la. Definiremos explicitamente o comportamento do titular no seguinte axioma:

A2 O titular age **racionalmente**, o que significa que ele excerce a opção somente quando isto lhe traz lucros. Especificamente, ele exercerá

a opção de compra, quando o preço da ação é .... do que K;
a opção de venda, quando o preço da ação é .... do que K.

o que é mais um axioma do nosso modelo.

Exercício 1. Analogamente ao Exemplo 1, analise a situação quando o contrato assinado é uma opção de venda. Preencha "........" no axioma **A2** acima.

Uma conclusão importante que é genérica e pode ser vista claramente no Exemplo 1 acima discutido, é que o titular da opção nunca fica com prejuízo no tempo t_1, enquanto que o lançador nunca lucra no tempo t_1. Isto significa que o titular deve pagar para o lançador um prêmio no momento de assinatura do contrato. Este prêmio se chama **preço da opção no tempo** t_0 e será designado por C_0. O presente capítulo discutirá como estabelecer este preço.

Para podermos continuar, precisamos definir explicitamente como **os agentes** (**do mercado**) agem no nosso modelo e como este modelo envolve **dinheiro**[3]. Observe que já usei estes conceitos no texto acima, contando com a conceituação intuitiva dos leitores.

A3 No nosso modelo, há um número infinito de agentes. Cada agente pode comprar qualquer quantidade (inclusive qualquer fração) da ação no momento t_0 pelo preço de unidade S_0, e qualquer quantidade da ação no momento t_1 pelo preço de unidade S_u, se a ação subir, e pelo preço da unidade S_d, se descer. Qualquer agente pode vender qualquer fração das ações que possui nas mesmas condições: o preço de unidade é S_0 no t_0 e S_u ou S_d no t_1, conforme o fato do preço subir ou descer. Também qualquer agente pode vender no tempo t_0 qualquer quantidade de ações, sem possuí-las; esta venda se chama *short selling*. O leitor pode adiar a leitura do seu regulamento (abaixo) até o momento em que precisarmos interpretar as fórmulas (1.9),(1.10) e (1.11).

Short selling. Dois agentes A e B podem assinar no tempo t_0 um contrato que obriga A a entregar a B uma ação no tempo t_1. No momento da assinatura deste contrato, B paga S_0 a A. Note que este não é um contrato do tipo de opção: A entregará a B uma ação no tempo t_1 qualquer que seja o seu preço. Onde A arrumará a ação a ser entregue? Ele vai comprá-la pelo preço S_u, se a ação subir, e pelo preço S_d, se a ação descer. Uma simples análise de despesas e lucros de A e B mostra que o contrato entre eles poderá ser reescrito nas seguintes cláusulas: B paga S_0 a A no tempo t_0 e A paga a B no tempo t_1 a quantia

[3]Desculpem-me, mas não definirei o conceito de dinheiro. Quem não sabe o que isto significa, deve ser uma pessoa muito feliz.

S_u, se a ação subir, e a quantia S_d, se a ação descer. É esta a maneira de A vender a B no tempo t_0 uma ação sem possuí-la. Esta venda é chamada short selling.

Observe que em **A3** assumimos que o estoque de ações é ilimitado, e que se um agente quer vender ou comprar uma quantidada de ações, sempre se acha uma contrapartida – um outro agente que concorda comprar ou vender, respectivamente. A suposição de "número infinito dos agentes no mercado" é uma tentativa de justificar a existência desta contrapartida. Se o leitor não gostou desta justificativa, pode imaginar que existe um agente todo-poderoso com capital infinito, que faça a contrapartida a qualquer contrato que qualquer outro agente pode querer (dentro das regras determinadas em **A3**). Este super-agente pode ser um banco, que faz parte de nosso modelo pelo axioma **A4** abaixo descrito.

A4 Existe um **banco**. Qualquer agente pode tomar emprestado do banco/investir no banco no tempo t_0 qualquer quantia de dinheiro a ser devolvida no tempo t_1 corrigida pela **taxa de juros livre de risco** (ou simplesmente **taxa de juros**) designada aqui por r; isto significa que para x emprestado/investido, será devolvido/resgatado $e^{r(t_1-t_0)}x$.

Note que não limitamos os agentes de mercado em termos da quantidade de dinheiro que eles podem tomar emprestado do banco, aplicar no banco e gastar em compra de ações. Nem a quantidade de ações disponíveis, nem a quantidade de contratos de shortsell são limitadas. Isto ocorre devido ao fato de que as fortunas absolutas dos agentes não nos interessam. O leitor verá que nos nossos argumentos analisaremos os lucros e as perdas dos agentes no tempo t_1 em relação aos seus investimentos no tempo t_0. O investimento será entendido no amplo sentido: partes da quantia podem ser destinadas à compra/venda de ações, outras partes à compra/venda de opções, e o resto à aplicação no banco.

Em virtude da existência da taxa de juros, temos que tomar certos cuidados ao comparar ou somar uma fortuna x no tempo t_0 com uma outra fortuna y no tempo t_1. Se quisermos que o resultado seja visto no tempo t_1, temos que "levar" x de t_0 para t_1, o que significa multiplicá-lo por $e^{r(t_1-t_0)}$; se quisermos ver o resultado no tempo t_0, temos que "trazer" y de t_1 para t_0, o que significa multiplicá-lo por $e^{-r(t_1-t_0)}$. Veremos isto de forma mais concreta no Exemplo 2.

Exemplo 2. Suponha que na situação do Exemplo 1 o valor de r é tal que $\exp\{r(t_1 - t_0)\} = \frac{5}{3}$. Suponha que, ao assinar o contrato de opção de compra com o preço de exercício $K = 110$, o titular pagou 12 u.m. no tempo t_0. Suponha que no tempo t_1 a ação subiu e conseqüentemente o titular lucrou 125-110=15 u.m. Perguntaremos: o negócio foi lucrativo para o titular? Para responder, temos que comparar o lucro obtido no exercício da opção com o valor que o titular teria se aplicasse o preço da opção no banco em vez de comprar esta opção. Sendo $\exp\{r(t_1 - t_0)\} \cdot 12 = \frac{5}{3} \cdot 12 = 20 > 15$, concluímos que neste caso o negócio não é lucrativo e que a renda real (medida no tempo t_1) é $20 - 15 = 5$ u.m. (se fosse medida no tempo t_0, seria $12 - \exp\{-r(t_1 - t_0)\} \cdot 15 = 12 - \frac{3}{5} \cdot 15 = 3$ u.m.). Note que caso a ação desça, o titular não exerce a opção. Neste caso a perda dele, sendo medida no tempo t_0, é igual ao preço da opção pago em t_0.

Formalizaremos agora o problema central deste capítulo:

Dados todos os parâmetros do modelo $(S_0, S_u, S_d, t_0, t_1, p_u, p_d, r)$ e dado o tipo da opção e o seu preço de exercício K, qual o valor correto do seu preço inicial C_0?

Precificar opção significa resolver este problema.

Exercício 2. Sugiro ao leitor seguir um **caminho errado** para calcular C_0. Este caminho sugere que C_0 deve ser igual a perda média do lançador da opção. Calcule então a perda média do lançador da opção no Exemplo 1. O resultado será comparado com o que obtivermos por um caminho "certo".

1.2 Precificação de opções pelo hedging

O leitor que não tem experiência com a economia teórica ficará surpreso ao descobrir que o princípio do qual partiremos para calcular C_0 é completamente diferente da idéia de igualar os lucros médios do titular e do lançador da opção (veja Exercício 2). Este princípio se chama **hedging** [4].

Começaremos com uma definição. Por analogia com a nomenclatura usada para designar o preço da ação, introduziremos C_u e C_d por

$$C_u = \max\{S_u - K, 0\}, C_d = \max\{S_d - K, 0\}, \text{ para opção de compra} \tag{1.2}$$

$$C_u = \max\{K - S_u, 0\}, C_d = \max\{K - S_d, 0\}, \text{ para opção de venda} \tag{1.3}$$

e denotaremos C_u e C_d os **preços da opção no tempo** t_1 caso a ação tenha subido ou descido, respectivamente. São diversas as vantagens de utilizar os símbolos C_u e C_d em nossos argumentos. Uma delas é que poderemos tratar de forma unificada as opções de compra e as opções de venda. Uma outra só poderá ser revelada no Capítulo 2, quando apresentaremos o hedging dinâmico.

O **preço** ou o **valor**[5] em qualquer tempo t de uma opção (ou ação ou qualquer outro bem ou papel) é a quantidade de dinheiro que o seu dono recebe se a vender no tempo t.

Note que esta definição é coerente com o conceito "preço da opção no tempo t_0", introduzido na Seção 1.1. De fato, se C_0 foi corretamente precificado, e se o titular quiser se desfazer da opção imediatamente após a sua aquisição, então ele achará um comprador que lhe pagará C_0.

O raciocínio parecido justifica também o nome "preço" dado a C_u e C_d. Suponha que a ação subiu no t_1 e suponha que o titular não pode se encontrar com o lançador para realizar o contrato, porque a sua esposa o obrigou a ficar em casa cuidando da filha. Ele resolve então repassar o seu direito para o vizinho (solteiro). Qual é o preço deste repasse? Claro que C_u, porque é este o valor que o vizinho ganhará ao exercer a opção.

Note que C_u e C_d são exatamente os valores que o lançador precisa desembolsar no tempo t_1 para cumprir a sua obrigação frente ao titular. A interpretação dos valores C_u e C_d do ponto de vista do lançador é muito importante para o nosso futuro argumento.

Anteciparei a definição do princípio de hedging com um exemplo que demonstra como funcionam os conceitos utilizados nesta definição.

[4]Gramática extra-Portuguesa: introduziremos o verbo **hedgiar**. Poderia procurar uma tradução da palavra inglesa *hedging* no dicionário, mas não vou, pois o povo (ou pelo menos a parte do povo que está ligada às bolsas de valores) usa "hedgiar": hedgiava, hedgeia e hedgiará, independentemente de nosso desejo de usar palavras oriundas da língua Portuguesa.

[5]Não distingüiremos os conceitos "preço" e "valor" neste livro.

Exemplo 3. Consideremos o modelo uniperíodo da Figura 2 com $r = 0$. Suponhamos que ao assinar o contrato de opção de compra com $K = 110$, o titular pagou ao lançador $C_0 = 2,5$.

Demonstrarei neste exemplo como o lançador pode utilizar, no tempo t_0, o dinheiro recebido do titular, de forma a ter, no tempo t_1, o valor C_u, se a ação subir, e C_d, se a ação descer.

Sugiro que o lançador faça o seguinte no tempo t_0. Tomar emprestado do banco 47,5 u.m. (unidades monetárias), adicionar a este valor o prêmio da opção recebido, e comprar $\frac{1}{2}$ ação. Já que $\frac{1}{2}S_0 = \frac{1}{2}100 = 47,5 + 2,5$, então **o fluxo de caixa** do lançador no tempo t_0 é 0 (quer dizer, o procedimento dele não exigiu desembolsar dinheiro extra, nem deixou dinheiro extra no seu bolso). No tempo t_1, sugiro ao lançador vender a metade da ação que adquiriu e devolver a sua dívida ao banco. Como sabemos, há dois cenários no momento t_1: a ação pode subir ou descer. Caso a ação suba, a venda da metade da ação dará $\frac{1}{2} \cdot 125 = 62,5$. Deste valor, $47,5$ será devolvido ao banco, deixando 15 para o lançador. Note que $C_u = 15$. Caso a ação desça, a venda da metade da ação dará $\frac{1}{2} \cdot 95 = 47,5$. Todo este valor será devolvido ao banco, deixando 0 para o lançador. Note que $C_d = 0$.

Mostramos então que o prêmio da opção $C_0 = 2,5$ pode ser "investido" no tempo t_0 de tal forma que no tempo t_1 o resultado deste investimento coincida com o preço da opção, ou seja, o investimento retorna ao lançador o valor exato para que ele possa cumprir a sua obrigação. Diz-se, nesta situação, que 2,5 é o valor que o lançador precisa para **se hedgiar**, e este valor se chama preço da opção calculado pelo princípio de hedging.

O que sugeri no Exemplo 3 para o lançador tem nome: "compor no tempo t_0 um portfolio composto de 47,5 u.m. tomadas emprestado do banco e metade da ação comprada".

Em geral, quando um agente investe x u.m. no banco e compra y ações, no tempo t, diremos que ele compôs um **portfolio** (ou uma **carteira**, em outras palavras), que contém x u.m. investidas e y ações compradas[6]. O **preço** ou o **valor** deste portfolio no tempo t é definido como a quantia de dinheiro que o seu dono recebe ao **realizar** este portfolio. Para fins didáticos, entendemos "realizar" como "repassar" todo portfolio ao outro agente.

Imagine que você compôs um portfolio que contém x u.m. tomadas emprestado do banco e tenta, no mesmo instante, repassar este portfolio para seu amigo. O que você "vende" a ele é uma obrigação de devolver dinheiro ao banco. Portanto, ao repassar o portfolio, você terá que pagar-lhe x u.m.

Imagine que você compôs um portfolio que contém y ações vendidas (pelo "shortsell" definido na Seção 1.1) e tenta, no mesmo instante, repassar este portfolio para seu amigo. O que você "vende" a ele é uma obrigação de entregar no futuro y ações. Portanto, ao repassar o portfolio, você terá que pagar-lhe $y\times$(preço de uma ação) (lê-se "y vezes o preço de uma ação").

As observações acima determinam as seguintes regras de descrição da composição de um portfolio: diremos sempre que um portfolio contém x u.m. investidas no banco e y ações compradas, sendo que

$$\begin{array}{c} x > 0 \text{ significa } |x| \text{ u.m. investidas (ou aplicadas) no banco} \\ x < 0 \text{ significa } |x| \text{ u.m. tomadas emprestado do banco} \end{array} \tag{1.4}$$

$$\begin{array}{c} y > 0 \text{ significa } |y| \text{ ações compradas} \\ y < 0 \text{ significa } |y| \text{ ações vendidas (short sell)} \end{array} \tag{1.5}$$

[6]Um portfolio pode conter opções? Para as necessidades do argumento desta seção, é cômodo proibir. Mas futuramente, permitiremos.

Pelas nossas observações acima, em todos os casos o valor do portfolio (no momento em que foi composto) é $x + y\times$(preço de uma ação).

Diremos que C_0 é o preço da opção estabelecido pelo **princípio de hedging** se

H1 O lançador pode compor um **portfolio** no tempo t_0 cujo valor é exatamente C_0.

H2 O valor no tempo t_1 do portfolio composto no tempo t_0 conforme **H1** é C_u se a ação subir e C_d se a ação descer.

Podemos dizer que o princípio de hedging estabelece que o valor inicial da opção, C_0, devolverá ao lançador o valor necessário para cumprir sua obrigação frente ao titular, no instante t_1, qualquer que seja o preço da ação.

Exercício 3. Ache um erro no seguinte raciocínio: Pelo princípio de hedging, o preço justo da opção de compra é S_0. De fato, recebendo S_0 como prêmio na hora de assinar o contrato de opção de compra, o lançador usa todo este valor na aquisição de uma ação no tempo t_0. Caso o titular da opção venha a exercer o seu direito, o lançador entregará para ele a ação que comprou.

O Exemplo 3 mostrou que **H1-H2** são implementáveis num caso particular. Vamos agora ao caso geral. Primeiramente, vejamos se **H2** é sequer possível. Designaremos por x o valor que o lançador investe no banco e por y a quantidade de ações que ele compra no tempo t_0. Então, no tempo t_1, ele fica devendo ao banco $e^{r(t_1-t_0)}x$, e o valor de ações adquiridas é yS_u, se o preço subiu, e yS_d, se o preço desceu. Para satisfazer **H2**, o valor do portfolio deve ser igual a C_u, no primeiro caso, e igual a C_d, no segundo caso. Isto pode ser expresso por um sistema de duas equações com duas incógnitas x e y:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} xe^{r(t_1-t_2)} + yS_u & = & C_u \\ xe^{r(t_1-t_2)} + yS_d & = & C_d \end{array} \right. \tag{1.6}$$

No nosso modelo, o sistema (1.6) tem sempre uma única solução (pois supomos em (1.1) que $S_u \neq S_d$), que é

$$x = e^{-r(t_1-t_0)}\frac{S_uC_d - S_dC_u}{S_u - S_d}, \qquad y = \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d} \tag{1.7}$$

Temos então, por **H1** e **H2**, que

$$C_0^{hedging} = e^{-r(t_1-t_0)}\frac{C_uS_d - C_dS_u}{S_d - S_u} + S_0\frac{C_u - C_d}{S_u - S_d} \tag{1.8}$$

já que o lado direito de (1.8) expressa o valor do portfolio no tempo t_0 composto de x u.m. e y ações , quando x e y são dados por (1.7). A equação (1.8) é a resposta do problema de precificação de opção pelo princípio de hedging, o que é enfatizado pelo super-índice *hedging* em $C_0^{hedging}$.

Agora o leitor pode ver facilmente como cheguei ao resultado $C_0 = 2,5$ no Exemplo 3. De fato

$$\begin{aligned} x \text{ do Exemplo 3} \quad &= \quad e^{-0(t_1-t_0)}\frac{S_uC_d - S_dC_u}{S_u - S_d} = \frac{125\cdot 0 - 95\cdot 15}{125 - 95} \\ &\qquad = -47,5 && (1.9) \\ y \text{ do Exemplo 3} \quad &= \quad \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d} = \frac{15 - 0}{125 - 95} = \frac{1}{2} && (1.10) \\ C_0^{hedging} \text{ do Exemplo 3} \quad &= \quad x + yS_0 = -47,2 + \frac{1}{2}50 = 2,5 && (1.11) \end{aligned}$$

Observe que x assumiu valor negativo e y assumiu valor positivo. Conforme (1.4) e (1.5), isto significa que, ao compor o portfolio, o lançador tomou emprestado do banco $|x|$ u.m. e comprou y ações.

Exercício 4. Em quais condições $y = \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d}$ é negativo? A resolução deste problema pode ser facilitada observando-se as soluções dos Exercícios 6, 7 e 8.

Exercício 5. Existem condições nas quais x e y têm o mesmo sinal? Se não, explique o por quê. A resolução deste problema pode ser facilitada observando-se as soluções dos Exercícios 6, 7 e 8.

Exercício 6. Repetir o Exemplo 9 para a opção de venda, mantendo todos os outros valores dos parâmetros.

Exercício 7. Ache a expressão de C_0 para o caso $K > S_u$ e $K > S_d$. Comente os resultados obtidos.

Exercício 8. Ache a expressão de C_0 para o caso $K < S_u$ e $K < S_d$. Comente os resultados obtidos.

Exercício 9. Considere o modelo do Exemplo 1 (Figura 2) com os valores de t_0, t_1 e r tais que $\exp\{r(t_1 - t_0)\} = \frac{5}{3}$. Verifique, usando (1.7) e (1.8), que o princípio de hedging produz $C_0 = 21,5$ para a opção de compra com $K = 110$.

Exercício 10. Volte a analisar o resultado obtido no Exercício 9. Conforme a sua solução, o titular da opção deve pagar $21,5$ no tempo t_0. Mas, no tempo t_1, o seu lucro é 15 ou 0, dependendo do preço da ação. Porém, em ambos os casos, o valor do lucro é menor do que $21,5$ (se levarmos em conta a taxa de juros, o correto seria comparar 15 e 0 com $21,5\exp\{r(t_1 - t_0)\}$, o que não muda a situação). Por que isto aconteceu?

1.3 Precificação de opções pelo princípio de neutralidade ao risco

Começaremos com uma análise do nosso modelo uniperíodo. Descartaremos dele os valores p_u e p_d

Exercício 11. Certifique-se de que p_u e p_d não apareceram em nenhum lugar do nosso argumento que derivou o valor de C_0. Na verdade, você usou p_u e p_d no Exercício 2, mas este exercício não faz parte do referido argumento.

e perguntaremos: existem as probabilidades q_u e q_d do preço da ação subir para S_u e descer até S_d, tais que

$$S_0 e^{r(t_1 - t_0)} = q_u S_u + q_d S_d, \tag{1.12}$$

$$q_u > 0, \quad q_d > 0, \qquad q_u + q_d = 1. \tag{1.13}$$

Note que $q_u S_u + q_d S_d$ é o valor médio do preço da ação no tempo t_1, onde a "média" está calculada com relação à probabilidade hipotética (q_u, q_d), e não com relação à "verdadeira" probabilidade (p_u, p_d). Note também que $S_0 e^{r(t_1 - t_0)}$ é o valor que um agente terá no tempo t_1 se investir no tempo t_0 no banco um valor igual ao preço da ação em t_0. Portanto, resolver(1.12), (1.13) é equivalente a

(*) procurar as probabilidades que fazem com que aplicar uma quantia em ação dê o lucro médio igual ao lucro obtido em uma aplicação desta quantia no banco.

Exemplo 4. Voltemos ao modelo uniperíodo da Figura 2 com taxa de juros $r = 0$. Resolvendo a equação

$$100 = q_u 125 + (1 - q_u)95 \tag{1.14}$$

achamos a solução $q_u = 1/6$, $q_d = 1 - q_u = 5/6$ da pergunta (*) para este modelo.

Consideremos neste mercado uma opção de compra com $K = 110$. Denotaremos

$$q_u C_u + q_d C_d = \frac{1}{6} 15 + \frac{5}{6} 0 = 2,5 \tag{1.15}$$

o preço desta opção calculado pelo princípio de neutralidade ao risco. Note que este preço coincidiu com o preço achado pelo princípio de hedging no Exemplo 3. Esta coincidência é genérica. Isto será provado no futuro.

Analisaremos agora a existência e unicidade da solução de (1.12), (1.13), no caso geral. Substituindo $q_d = 1 - q_u$ em (1.12), temos que

$$q_u = \frac{e^{r(t_1 - t_0)} S_0 - S_d}{S_u - S_d}, \qquad q_d = \frac{S_u - e^{r(t_1 - t_0)} S_0}{S_u - S_d} \tag{1.16}$$

Lembrando (1.1) e que $S_u > S_d$, podemos concluir que a condição

$$S_d < e^{r(t_1 - t_0)} S_0 < S_u \tag{1.17}$$

é suficiente para que (1.16) seja uma e a única solução de (1.12), (1.13).

Exercício 12. Mostre que se

$$e^{r(t_1 - t_0)} S_0 < S_d < S_u \tag{1.18}$$

ou se

$$e^{r(t_1 - t_0)} S_0 > S_u > S_d \tag{1.19}$$

então (1.12)-(1.13) não tem solução.

Os valores q_u, q_d que satisfazem (1.12) e (1.13) se chamam **probabilidades de risco neutro**. O valor

$$C_0^{risk\ neutral} = e^{-r(t_1 - t_0)} (q_u C_u + q_d C_d) \tag{1.20}$$

se chama valor da opção determinado pelo **princípio de neutralidade ao risco**.

Formalmente, a precificação de uma opção pelo princípio de neutralidade ao risco no modelo uniperíodo é um procedimento de dois passos. No primeiro passo se acham as probabilidades com as quais o valor médio do preço da ação no tempo t_1 coincide com o seu valor inicial multiplicado por $\exp\{r(t_1 - t_0)\}$. No segundo passo, estas probabilidades são usadas para caclular a média do preço da opção no tempo t_1; isto é possível porque os preços terminais de opção são calculáveis. Esta média, sendo multiplicada por $\exp\{-r(t_1 - t_0)\}$, é chamada preço incial da opção. Claro que esta definição coloca C_0 na seguinte relação com C_u e C_d

$$C_0 e^{r(t_1 - t_0)} = q_u C_u + q_d C_d, \tag{1.21}$$

que é análoga à relação de S_0 com S_u e S_d:

$$S_0 e^{r(t_1-t_0)} = q_u S_u + q_d S_d. \tag{1.22}$$

O Exercício 12 mostra que não é em qualquer situação que é possível precificar uma opção. Mostramos, porém, que quando é possível a solução é única. Não é difícel ver que modificando um pouco o modelo uniperíodo podemos chegar à situação na qual o princípio de neutralidade ao risco não determina C_0 unicamente.

Exercício 13. Suponha que $S_0 = 100$ e que no tempo t_1 o preço da ação pode subir para $S_u = 125$, descer para $S_d = 95$, ou continuar intacta $S_i = 100$, com as respectivas probabilidades $p_u = p_d = p_i = 1/3$. Suponha que $r = 0$. Ache $q_u > 0, q_d > 0, q_i > 0$ cuja soma é 1 e tais que $S_0 = q_u S_u + q_d S_d + q_i S_i$. Quantas soluções tem este problema? Note que cada solução tem um valor diferente de $C_0^{risk\ neutral}$.

1.4 Precificação de opções por arbitragem

Diremos que um mercado não **permite arbitragem**[7] se nele é impossível obter um lucro garantido maior do que o oferecido pela taxa de juros livre de risco.

"**Obter lucro**" no modelo uniperíodo é possível somente se montar um portfolio no tempo t_0 e realizá-lo no tempo t_1.

Consideremos o modelo uniperíodo com uma só ação. Consideremos um portfolio que contém no tempo t_0 x unidades monetárias investidas no banco e y ações compradas. O preço deste portfolio no tempo t_0 será denotado por Π_0. Ele é facilmente calculado: $\Pi_0 = x + yS_0$. Designemos por Π_u e Π_d o valor deste portfolio no tempo t_1 se o preço da ação subir ou descer, respectivamente. Eles também são facilmente calculados: $\Pi_u = xe^{r(t_1-t_0)} + yS_u$, $\Pi_d = xe^{r(t_1-t_0)} + yS_d$. O **lucro obtido** por este portfolio[8] é expresso por $\Pi_u - e^{r(t_1-t_0)}\Pi_0$, caso a ação tenha subido, e por $\Pi_d - e^{r(t_1-t_0)}\Pi_0$, caso a ação tenha descido. Notemos que o **lucro oferecido pela taxa de juros** na aplicação de todo o valor do portfolio no tempo t_0 é 0 (porque por analogia com os lucros definidos acima este lucro se expressa por $e^{r(t_1-t_0)}\Pi_0 - e^{r(t_1-t_0)}\Pi_0$, que é a diferença entre o valor resgatado no tempo t_1 e o valor aplicado no tempo t_0 ajustado pela taxa de juros).

Alternativamente, podemos dizer que um mercado uniperíodo **não permite arbitragem** se para todo portfolio

$$\begin{array}{c} \Pi_u < e^{r(t_1-t_0)}\Pi_0 \text{ e } \Pi_d > e^{r(t_1-t_0)}\Pi_0, \\ \text{ou } \Pi_u > e^{r(t_1-t_0)}\Pi_0 \text{ e } \Pi_d < e^{r(t_1-t_0)}\Pi_0, \end{array} \tag{1.23}$$

onde Π_0 é o preço do portfolio no tempo t_0 e Π_u e Π_d são os seus preços quando a ação sobe e desce, respectivamente. A condição (1.23) pode ser reescrita em outra forma, mais transparente:

$$\text{as duas desigualdades } \begin{array}{l} \Pi_0 e^{r(t_1-t_0)} < \Pi_u \\ \Pi_0 e^{r(t_1-t_0)} < \Pi_d \end{array} \text{ não acontecem juntas} \tag{1.24}$$

[7]As seguintes frases expressam a mesma coisa: um mercado não permite arbitragem, um mercado está **livre de arbitragem**, há **ausência** ou **falta de arbitragem** no mercado. O oposto é indicado pela frase "o mercado **permite arbitragem**".

[8]Mais exatamente, o lucro obtido por este portfolio durante o intervalo de tempo $[t_0, t_1]$. No modelo uniperíodo não é essencial enfatizar o intervalo no qual foi obtido o lucro, porque há somente dois momentos de tempo nos quais é permitido comprar e vender. Mas no modelo multiperíodo a não indicação do período no qual um portfolio "vivia" pode gerar confusão.

Exercício 14. Suponha que

$$e^{r(t_1-t_0)}S_0 < S_d < S_u. \tag{1.25}$$

Mostre que, neste caso, existe arbitragem.

Exercício 15. Espero que o leitor não tenha dificuldades em resolver o Exercício 14. Era suficiente criar um portfolio que contém somente uma ação comprada. Ambos os valores finais dele são maiores do que seu valor inicial multiplicado por $e^{r(t_1-t_0)}$. Este argumento cria uma falsa impressão de que a condição "contrária" a (1.25)

$$S_d < S_u < e^{r(t_1-t_0)}S_0 \tag{1.26}$$

garante a ausência de arbitragem. Prove então que no mercado com (1.26) há arbitragem. O argumento que prova este fato é parecido com aquele utilizado para resolver o Exercício 14. A diferença na resolução é que agora o portfolio tem que conter uma ação vendida (shortsell).

Uma conclusão importante que segue do Exercício 15 é que se num mercado existe um portfolio que satisfaz

$$\Pi_u > e^{r(t_1-t_0)}\Pi_0, \text{ e } \Pi_d > e^{r(t_1-t_0)}\Pi_0 \tag{1.27}$$

então também existe um outro portfolio que satisfaz

$$\Pi_u < e^{r(t_1-t_0)}\Pi_0, \text{ e } \Pi_d < e^{r(t_1-t_0)}\Pi_0 \tag{1.28}$$

e vice versa. Este fato é usado para justificar a equivalência das condições (1.23) e (1.24).

Exercício 16. Suponha que $S_d < e^{r(t_1-t_0)}S_0 < S_u$. Mostre que, neste caso, não há arbitragem. Note que este fato pode ser demonstrado pela técnica que usaremos abaixo para mostrar (1.30). Esta técnica é bastante poderosa e funciona em diversas situações. Porém, o caso que pedi para analisar neste exercício é extremamente simples (por conter um só ativo) e pode ser feito "na raça". Ao fazê-lo, o leitor descobrirá as razões que fazem com que um mercado não permita arbitragem

Consideremos agora o modelo uniperíodo com um só ativo, como foi definido neste capítulo. Suponhamos que ele não permite arbitragem. Vamos agora escolher o tipo de opção européia (compra ou venda) e o seu preço de exercício K. Estes parâmetros determinam C_u e C_d. Suponha que C_0 foi determinado por nós (por qualquer método). **Introduzir** esta opção no mercado significa permitir aos agentes do mercado comprar e vender esta opção pelas mesmas regras de compra e venda de ação (inclusive o shortselling). Formalmente falando, a introdução da opção modifica o mercado: temos um **novo mercado**, que tem dois **produtos**, ação e opção, enquanto o **antigo mercado** tinha um só produto, que era a sua ação. Isto muda as oportunidades dos agentes do mercado: no novo mercado os agentes podem compor portfolios de ações, opções e aplicações na taxa de juros livre de risco. Podemos então perguntar se este novo mercado não permite arbitragem (lembre que assumimos que o antigo mercado era livre de arbitragem). Se sim, então se diz que o valor C_0 **satisfaz o princípio de ausência de arbitragem**, ou que a opção foi **precificada pelo princípio de arbitragem**.

Enfatisarei mais uma vez que a precificação de opção pelo princípio de arbitragem só faz sentido se o mercado no qual esta opção está sendo introduzida não permite arbitragem.

Mostraremos agora que se

$$\text{o mercado uniperíodo com só uma ação não permite arbitragem} \tag{1.29}$$

então

$$\begin{array}{c}\text{é possível precificar uma opção (seja de compra ou de venda)}\\ \text{pelo princípio de arbitragem}\end{array} \tag{1.30}$$

$$\begin{array}{c}\text{e este preço coincide com o preço desta opção achado}\\ \text{pelo princípio de neutralidade ao risco.}\end{array} \tag{1.31}$$

Assumindo (1.30), temos que $\Pi_d < e^{r(t_1-t_0)}\Pi_0 < \Pi_u$, para qualquer portfolio. Tomando o portfolio que tem somente uma ação comprada, concluímos então de (1.30) que

$$S_d < e^{r(t_1-t_0)}S_0 < S_u \tag{1.32}$$

As desigualdades (1.32) são idênticas às de (1.17), as quais garantem a existência de dois valores q_u e q_d no intervalo $(0,1)$ cuja soma é 1 e tais que

$$S_0 = e^{r(t_1-t_0)}\left[q_u S_u + q_d S_d\right] \tag{1.33}$$

Este fato foi demonstrado na Seção 1.3 e a expressão exata para q_u e q_d foi dada em (1.16) desta mesma seção.

Introduziremos agora neste mercado uma opção, determinando o seu tipo (compra ou venda) e o seu preço de exercício K. Estes determinam os seus valores terminais C_u e C_d por (1.2) e (1.3). Definirei C_0 por

$$C_0 = e^{-r(t_1-t_0)}\left[q_u C_u + q_d C_d\right] \tag{1.34}$$

Para mostrar que o mercado, no qual foi introduzida uma opção com o seu preço inicial C_0 dada por (1.34), está livre de arbitragem, temos que estabelecer a relação (1.24) para qualquer portfolio composto de unidades monetárias investidas no banco, ações e opções compradas. Para tal, denotaremos por x a quantidade de unidades monetárias, por y a quantidade de ações e por z a quantidade de opções num portfolio. Então

$$\begin{gathered}\Pi_0 = x + yS_0 + zC_0,\\ \Pi_u = e^{r(t_1-t_0)}x + yS_u + zC_u, \qquad \Pi_d = e^{r(t_1-t_0)}x + yS_d + zC_d\end{gathered} \tag{1.35}$$

denotam o valor inicial deste portfolio, e os seus valores finais nos casos do preço da ação subir ou descer, respectivamente. Faremos o seguinte cálculo:

$$\begin{aligned} e^{r(t_1-t_0)}\Pi_0 &= e^{r(t_1-t_0)}\left[x + yS_0 + zC_0\right]\\ &= e^{r(t_1-t_0)}x\left[q_u + q_d\right] + y\left[q_u S_u + q_d S_d\right] + z\left[q_u C_u + q_d C_d\right]\\ &= q_u\left[e^{r(t_1-t_0)}x + yS_u + zC_u\right] + q_d\left[e^{r(t_1-t_0)}x + yS_d + zC_d\right]\\ &\qquad\qquad = q_u\Pi_u + q_d\Pi_d \end{aligned} \tag{1.36}$$

onde na passagem da primeira linha para a segunda usamos $[q_u + q_d] = 1$ e as relações (1.33) e (1.34). Segue diretamente de (1.36) que

$$q_u\left[\Pi_u - e^{r(t_1-t_0)}\Pi_0\right] + q_d\left[\Pi_d - e^{r(t_1-t_0)}\Pi_0\right] = 0 \tag{1.37}$$

Analizemos (1.37). Lembrarei ao leitor que os pesos q_u e q_d são estritamente positivos. Portanto, para que a soma ponderada de $\left[\Pi_u - e^{r(t_1-t_0)}\Pi_0\right]$ e $\left[\Pi_d - e^{r(t_1-t_0)}\Pi_0\right]$ com os respectivos pesos q_u e q_d seja zero, é necessário que ambos sejam zero, ou um deles seja positivo enquanto o outro seja negativo. Isto prova (1.24) e portanto, (1.30). O fato (1.31) segue da própria escolha (1.34) de C_0.

1.5 A coincidência dos preços da opção calculados por diversos métodos

No modelo uniperíodo, tem-se

$$C_0^{hedging} = C_0^{risk\ neutral} = C_0^{arbitragem} \tag{1.38}$$

A demonstração disto será exposta nesta seção.

Comecemos com a expressão de $C_0^{hedging}$ dada em (1.8):

$$\begin{aligned}
C_0^{hedging} &= e^{-r(t_1-t_0)}\frac{C_uS_d - C_dS_u}{S_d - S_u} + S_0\frac{C_u - C_d}{S_u - S_d} \\
&= e^{-r(t_1-t_0)}\left(\frac{C_uS_d - C_dS_u}{S_d - S_u} + S_0e^{r(t_1-t_0)}\frac{C_u - C_d}{S_u - S_d}\right) \\
&= e^{-r(t_1-t_0)}\left(\frac{e^{r(t_1-t_0)}S_0 - S_d}{S_u - S_d}C_u + \frac{S_u - e^{r(t_1-t_0)}S_0}{S_u - S_d}C_d\right) \\
&= e^{-r(t_1-t_0)}\left(q_uC_u + q_dC_d\right) = C_0^{risk\ neutral}
\end{aligned}$$

onde na última passagem usamos as expressões (1.16). Pronto! Mostramos a primeira iqualdade em (1.38).

Com relação à segunda igualdade em (1.38), note que na Sessão 1.4 mostramos que $C_0^{risk\ neutral}$ satisfaz o princípio de arbitragem. Isto ainda não garante a igualdade. O que falta é um fato que deixei como exercício:

Exercício 17. Mostre que se no modelo uniperíodo C_0 é diferente de $C_0^{risk\ neutral}$, então há arbitragem.

Note que provamos a coincidência dos valores de $C_0^{hedging}$, $C_0^{risk\ neutral}$, e $C_0^{arbitragem}$ quando todos eles são determinados pelos seus respectivos métodos. Existem situações nas quais o método de neutralidade ao risco simplesmente não dá o valor $C_0^{risk\ neutral}$, enquanto o método de hedging funciona normalmente. Uma delas é quando

$$S_d < S_u < S_0e^{r(t_1-t_0)} \tag{1.39}$$

Exercício 18. Revele todas as situações nas quais pelo menos um dos três métodos não funciona e pelo menos um deles funciona. Veja que o método que funcionou gera um resultado inaceitável do ponto de vista prático. O Exercício 10 do presente capítulo trata de uma das tais situação.

1.6 Por que o preço da opção que calculamos é justo?

A justificativa de $C_0^{arbitragem}$ ser o preço correto encontra-se a seguir. Se $C_0 \neq C_0^{hedging}$, então existe um portfolio, que dá um lucro maior do que o lucro da aplicação de todo seu valor inicial na taxa de juros livre de risco, para qualquer estado de mercado no tempo t_1. O bom senso diz que então todos os agentes do mercado aplicariam todo seu dinheiro neste portfolio, o que "desequilibraria" o mercado.

Exercício 19. No modelo do Exemplo 3, tome $C_0 = 2$ (que é $< 2,5 = C_0^{arbitragem}$). Qual a composição do portfolio mencionado acima? Qual seria a composição deste portfolio se tomássemos $C_0 = 3$?

A justificativa de $C_0^{hedging}$ ser o preço correto encontra-se a seguir. Se $C_0 = C_0^{hedging}$, então para qualquer agente que queira assumir a posição do titular da opção sempre se acha outro agente que concorda em tomar a parte do lançador desta opção. De fato, mostramos que $C_0^{hedging}$ é exatamente o volume de dinheiro que o lançador precisa para compor um portfolio no tempo t_0, que lhe devolverá no tempo t_1 o valor necessário para cumprir a sua obrigação frente ao titular. Portanto, nada custa a qualquer agente assumir a posição do lançador. Podemos dizer que $C_0^{hedging}$ é um preço correto porque ele preserva a propriedade **A3** do mercado (veja Seção 1.1).

Conheço uma outra forma de justificar $C_0^{hedging}$. É um raciocínio de duas partes. A primeira parte afirma que se $C_0 > C_0^{hedging}$, então qualquer agente pode vender a opção pelo preço C_0, usar a parte $C_0^{hedging}$ para garantir que poderá cumprir as obrigações do lançador e obter um lucro sem risco igual a $C_0 - C_0^{hedging}$.

Exercício 20. Faça a outra parte deste raciocínio. Você não acha que esta justificativa se baseia nas idéias de arbitragem?

Não conheço nenhuma explicação direta do porque $C_0^{risk\ nutral}$ é um preço justo da opção (tanto no modelo uniperíodo quanto nos outros modelos). Todas as justificativas que conheço são indiretas:

ou se mostra que $C_0^{risk\ neutral} = C_0^{arbitragem}$ e se utiliza a justificativa de precificação pelo princípio de arbitragem,

ou se mostra que $C_0^{risk\ neutral} = C_0^{hedging}$ e se utiliza a justificativa de precificação pelo princípio de hedging.

1.7 Exercícios

Exercício 21. Repita o cálculo de C_0 pelo princípio de hedging tomando a taxa de juros livre de risco $r = 0$. Certifique-se de que o raciocínio não mudou. Você então provou que o fato de $r = 0$ não impede fazer hedging.

Exercício 22. Put-call pairity. Considere uma carteira formada no tempo t_0 por uma ação comprada, uma posição titular de uma opção de venda com o preço de exercício K e uma posição lançadora de uma opção de compra com o mesmo preço de exercício K, onde as duas opções são da ação comprada. Mostre que no tempo t_1 o valor desta carteira não depende do preço da ação. Derive deste fato a relação entre os preços das opções de venda e de compra:

$$S_0 - C_0^{compra} + C_0^{venda} = e^{r(t_1 - t_0)} K$$

A forma correta de colocar a pergunta deste exercício encontra-se a seguir. Considere um modelo uniperíodo, no qual foram introduzidas opções européias de compra e de venda, sendo que os seus preços são determinados pelo princípio de hedging (ou qualquer outro princípio que dá valores iguais aos do princípio de hedging). Suponha que os agentes deste mercado possam comprar e vender (inclusive short-selling) ações e opções de ambos os tipos, e investir dinheiro no banco. Considere uma carteira ....

Exercício 23. Dá para formar uma carteira no tempo t_0 de ações e opções de compra de tal forma que o seu valor no tempo t_1 não depende do valor da ação neste tempo?

Esta questão é interessante do ponto de vista da comparação do hedging no modelo contínuo (a ser discutido no Capítulo 3) com o hedging que introduzimos aqui no modelo discreto.

Exercício 24. Por que consideramos somente opções de compra e de venda no modelo uniperíodo? Será que é possível inventar um contrato cujos preços finais não podem ser replicados por *(a)* uma quantidade apropriada de opção de compra; *(b)* um portfolio que contém somente opções de compra e de venda; *(c)* um portfolio?

Exercício 25. Na definição de ausência de arbitragem (1.24), as duas desigualdades são estritas. O que mudará na implementação do método de precificação de opções pelo princípio de arbitragem se *(a)* uma delas é fraca (isto é $\leq$); *(b)* se ambas são fracas?

Exercício 26. Lembre que permitiremos aos agentes de mercado comprar qualquer fração de ações, inclusive e^{π} ou π^{e}. Você consegue dizer, sem usar calculadora, quem entre π^{e} e e^{π} é maior?

Capítulo 2

Modelo de tempo discreto multiperíodo

2.1 Construções e definições básicas

O modelo multiperíodo neste livro designa um mercado com somente um ativo de risco (chamado ação), que pode ser comprado ou vendido em $N+1$ instantes $t_0, t_1, \ldots, t_N$, e cujo preço evolui conforme o diagrama de árvore da Figura 3.

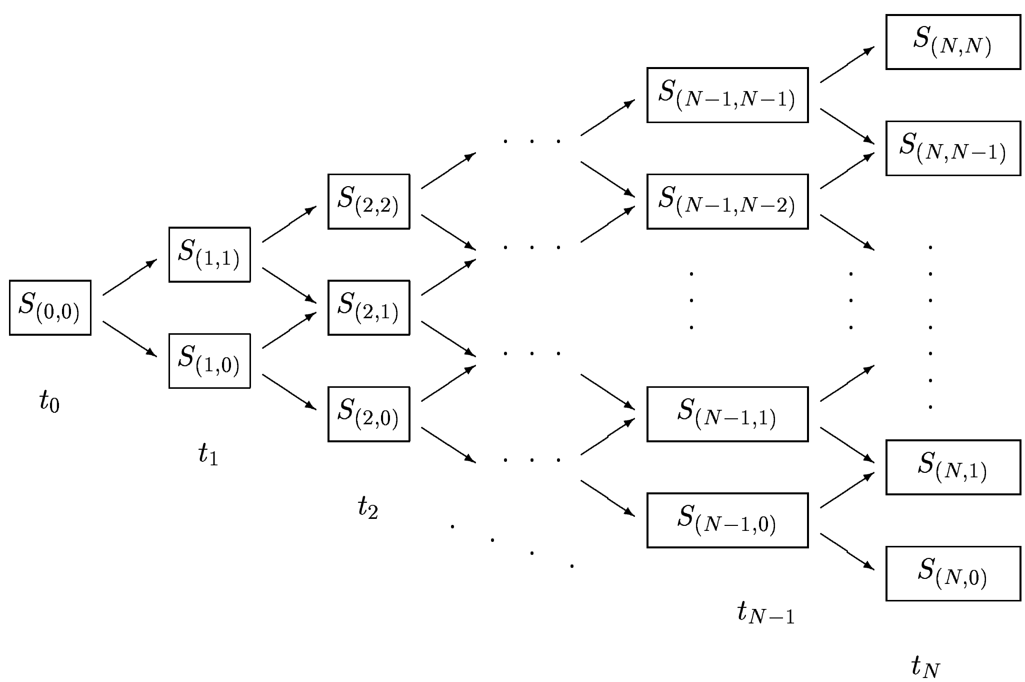

FIGURA 3

Cada retângulo do diagrama de árvore será chamado **nó**. Para que possamos nos referir a qualquer um deles, daremos o índice (i, j) ao j-ésimo nó na coluna acima de t_i, contando a partir de 0 de baixo para cima. Por exemplo, o nó mais a esquerda da árvore tem índice $(0, 0)$; os dois seguintes são $(1, 0)$, o de baixo, e $(1, 1)$, o de cima; a última coluna de nós tem índices $(N,0),(N,1),\dots,(N,N-1),(N,N)$, contando de baixo para cima. O preço da ação no (i,j)-ésimo nó será denotado por $S_{(ij)}$.

A árvore apresentada na Figura 3 se chama **recombinante**, porque os caminhos $\nearrow\searrow$ e $\searrow\nearrow$ que saem do mesmo nó, acabam no mesmo nó. Árvores não recombinantes são usadas para a precificação de derivativos financeiros, porém não serão estudadas neste livro.

Temos então que os seguintes parâmetros determinam a dinâmica do preço do único ativo de risco no nosso modelo multiperíodo:

Am1-a O número de períodos N.

Am1-b Os instantes $t_0, t_1, \dots, t_{N-1}, t_N$, que na maioria dos casos estudados, satisfazem

$$\Delta t := t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = \cdots = t_{N-1} - t_{N-2} = t_N - t_{N-1} \tag{2.1}$$

Am1-c Os valores $S_{(i,j)}$, que expressam o preço da ação no nó (i,j) da árvore. Introduziremos as razões

$$u_{(i,j)} := \frac{S_{(i+1,j+1)}}{S_{(i,j)}} \text{ e } d_{(i,j)} := \frac{S_{(i+1,j)}}{S_{(i,j)}} \tag{2.2}$$

para todos os nós, salvo os terminais. Concordamos que no nosso modelo multilperíodo, $u_{(i,j)} > 1$, enquanto $d_{(i,j)} < 1$.
Observe que não exigimos que os valores de $u_{(i,j)}$ e de $d_{(i,j)}$ sejam os mesmos para todos os nós (claro que eles não podem ser completamente arbitrários, pois a árvore deve ser recombinante).

Am1-d A probabilidade de o preço da ação subir de $S_{(i,j)}$ para $S_{(i+1,j+1)}$ será designada por $p_{(i,j)}$, e a probabilidade de o preço da ação descer de $S_{(i,j)}$ para $S_{(i+1,j+1)}$ será designada por $1 - p_{(i,j)}$.
Note que os $p_{(i,j)}$'s não são obrigatoriamente iguais. Porém, quando forem, usaremos os símbolos p_u e p_d para designar as probabilidades de o preço subir e descer, respectivamente.

Como o leitor já percebeu, estou tentando definir o modelo multiperíodo de forma parecida com a dada no Capítulo 1 para o modelo uniperíodo. Lá, a dinâmica do preço de único ativo de risco foi determinada pelos axiomas **A1a, A1b, A1c** e o comportamento dos agentes de mercado era regido pelos axiomas **A2-A4**. No modelo multiperíodo, os axiomas **Am1-a** – **Am1-d** determinam a dinâmica do preço do único ativo de risco, os axiomas **A3, A4** devem passar por pequenos ajustes devido ao fato de que as compras e vendas são permitidas em instantes intermediários entre o inicial t_0 e o terminal t_N. Eles assumem as seguintes formas:

Am3 No nosso modelo há um número infinito de agentes. Em qualquer istante t_i, $i = 0,1,\dots,N$, qualquer agente pode comprar ou vender qualquer quantidade (inclusive, qualquer fração) da ação pelo preço $S_{(i,j)}$,se o mercado estiver no nó (i,j) neste instante. Inclusive, os contratos de short-selling são permitidos com qualquer data de vencimento posterior à data do seu início.

Am4 Em qualquer istante t_i, $i = 0,1,\dots,N-1$, qualquer agente pode tomar emprestado do banco/investir no banco qualquer quantia de dinheiro, que deve ser devolvida até t_N, mas o exato momento de devolução fica a critério do agente. Se for devolvida em t_j $(t_j > t_i)$, deve ser ajustada pela taxa de juros r, quer dizer, para x emprestado/investido, há $e^{r(t_j - t_i)}x$ devolvido/resgatado.

O sentido do axioma **A2** fica o mesmo no modelo multiperíodo: o titular da opção age racionalmente, porém a definição do “comportamento racional” fica vinculada ao tipo da opção. Para cada caso, daremos explicações necessárias.

2.2 Precificação de opção européia pelo princípio de neutralidade ao risco

Introduziremos no modelo multiperíodo

opção européia de compra (ou simplesmente **opção de compra**) como um contrato entre duas partes chamadas de titular da opção e de lançador da opção, assinado no tempo t_0, segundo o qual o titular tem direito de comprar do lançador uma ação no tempo t_N por um preço K, pré-estabelicido pelas partes no momento de assinatura do contrato; K se chama o preço de exercício, t_N se chama **tempo de exercício** ou **de vencimento**;

e **opção européia de venda** (ou simplesmente **opção de venda**) que é definida analogamente, com a única diferença de que agora o titular da opção tem o direito de vender para o lançador uma ação no tempo t_N pelo preço de exercício K.

Aplicando o argumento parecido com o da Seção 1.1 do Capítulo 1 podemos justificar que na hora de assinatura do contrato o titular deve pagar ao lançador da opção um prêmio, o qual chamaremos **preço da opção** e designaremos por C_0.

O problema da **precificação de opções européias no modelo multiperíodo** é:

Dados os parâmetros do modelo, o tipo da opção
e o seu preço de exercício,
qual o valor justo de C_0?

Nesta seção, definirei e discutirei o método de precificação de opção no modelo multiperíodo pelo princípio de neutralidade ao risco. Para fixar as idéias, começarei com um exemplo em que mostrarei a implementação deste método para um caso específico.

Exemplo 5. Seja o modelo multiperíodo como apresentado na Figura 4(a) com os valores de r e de Δt tais que $R := e^{r\Delta t} = \frac{5}{4}$.

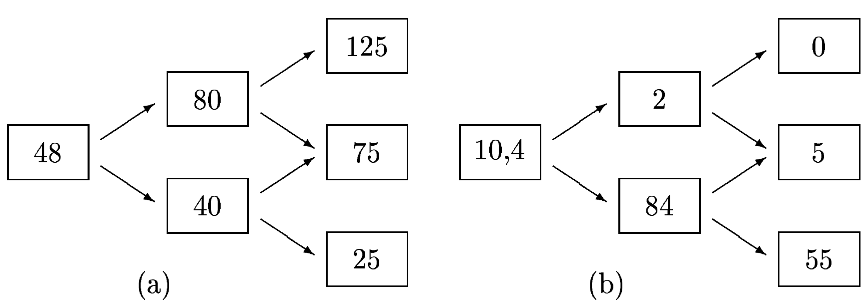

FIGURA 4

Neste exemplo, calcularei C_0 para a opção de venda com o preço de exercício $K = 80$. O procedimento que adotarei para tal cálculo é a implementação do princípio de neutralidade ao risco, que será definido em termos gerais após o exemplo.

No primeiro passo, introduzo três quantias chamadas $C_{(2,0)}, C_{(2,1)}, C_{(2,2)}$:

$$\begin{aligned} C_{(2,0)} &= \max\{K - S_{(2,0)}; 0\} = 80 - 25 = 55 \\ C_{(2,1)} &= \max\{K - S_{(2,1)}; 0\} = 80 - 75 = 5 \\ C_{(2,2)} &= \max\{K - S_{(2,2)}; 0\} = 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

No segundo passo, considero separadamente as duas sub-árvores $(1,0) \genfrac{}{}{0pt}{}{\nearrow (2,1)}{\searrow (2,0)}$ e $(1,1) \genfrac{}{}{0pt}{}{\nearrow (2,2)}{\searrow (2,1)}$ que "começam" no tempo t_1 e "terminam" no tempo t_2.
Para a primeira sub-árvore procuro as probabilidades $q_u > 0$ e $q_d > 0$ tais que

$$S_{(1,0)} = e^{-r\Delta t}\left(q_d S_{(2,0)} + q_u S_{(2,1)}\right) \tag{2.4}$$

A solução é: $q_u = q_d = \frac{1}{2}$, já que $40 = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}25 + \frac{1}{2}75\right)$. Estas probabilidades são usadas para introduzir um valor chamado $C_{(1,0)}$:

$$C_{(1,0)} := \frac{4}{5}\left(q_d C_{(2,0)} + q_u C_{(2,1)}\right) \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}5 + \frac{1}{2}55\right) = 24 \tag{2.5}$$

A variável $C_{(1,0)}$ é intermediária. Ela será usada no segundo passo para calcular C_0. Portanto, guardo o valor de $C_{(1,0)}$ e prossigo para tratar da segunda sub-árvore. O meu procedimento na segunda sub-árvore é muito parecido com o da primeira sub-árvore. Acho que $q_u = \frac{1}{2}$ e $q_d = \frac{1}{2}$[1] são as probabilidades que satisfazem

$$S_{(1,1)} = e^{-r\Delta t}\left(q_d S_{(2,1)} + q_u S_{(2,2)}\right) \text{ pois } 80 = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}75 + \frac{1}{2}125\right) \tag{2.6}$$

e uso estas probabilidades para calcular um certo valor que denomino por $C_{(1,1)}$:

$$C_{(1,1)} = \frac{4}{5}\left(q_d C_{(2,1)} + q_u C_{(2,2)}\right) = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}5 + \frac{1}{2}0\right) = 2 \tag{2.7}$$

O primeiro passo resultou então na obtenção de dois valores denominados $C_{(1,0)}$ e $C_{(1,1)}$ que serão usados no segundo passo.
No segundo passo, considero a sub-árvore $(0,0) \genfrac{}{}{0pt}{}{\nearrow (1,0)}{\searrow (1,1)}$. Nela acho que $q_d = \frac{1}{2}$ e $q_u = \frac{1}{2}$ são as probabilidades que resolvem a equação

$$S_{(1,0)} = e^{-r\Delta t}\left(q_d S_{(2,0)} + q_u S_{(2,1)}\right) \tag{2.8}$$

(de fato, $48 = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}40 + \frac{1}{2}80\right)$) e uso estas probabilidades e os valores $C_{(1,0)}, C_{(1,1)}$ para definir

$$C_{(0,0)} = \frac{4}{5}\left(q_d C_{(1,0)} + q_u C_{(1,1)}\right) = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}24 + \frac{1}{2}2\right) = 10,4 \tag{2.9}$$

O valor $C_{(0,0)}$ define o preço inicial da opção considerada: $C_0 = 10,4$.

Agora formularemos o **método de precificação de opções (européias) no modelo multiperíodo pelo princípio de neutralidade ao risco**. Neste método, para cada nó (i,j) da árvore determina-se um valor chamado $C_{(i,j)}$. A determinação destes valores é recursiva (usualmente esta recursão se chama **backward induction**):

[1] A coincidência de valores de q_u e q_d em todas as sub-árvores consideradas não é uma condição obrigatória para o funcionamento do princípio de neutralidade ao risco. Os preços da ação foram escolhidos por mim de forma que $q_u = q_d = \frac{1}{2}$ em todas as sub-árvores deste exemplo.

NR1 Primeiramente estabelecem-se $C_{(N,j)}, j = 0, 1, \ldots, N$ (chamados "valores nos nós no tempo N") pelo

$$C_{(N,j)} = \max\{S_{(N,j)} - K, 0\}, \qquad \text{para a opção de compra} \tag{2.10}$$
$$C_{(N,j)} = \max\{K - S_{(N,j)}, 0\}, \qquad \text{para a opção de compra} \tag{2.11}$$

NR2 Dados os valores $C_{(i,j)}, j = 0, 1, \ldots, i$, (chamados "valores nos nós no tempo t_i") estabelecem-se os valores $C_{(i-1,j)}, j = 0, 1, \ldots, i-1$, pelo

$$C_{(i-1,j)} = e^{-r\Delta_t}\left(q_d C_{(i,j)} + q_u C_{(i,j+1)}\right) \tag{2.12}$$

onde q_u, q_d são duas constantes cujos valores podem depender de i e j, e são tais que

$$q_u > 0, q_d > 0, q_u + q_d = 1 \text{ e } S_{(i-1,j)} = e^{-r\Delta_t}\left(q_d S_{(i,j)} + q_u S_{(i,j+1)}\right) \tag{2.13}$$

NR3 Finalmente, define-se

$$C_0 := C_{(0,0)} \tag{2.14}$$

que é **o preço da opção calculado pelo princípio de neutralidade ao risco.**

Exercício 27. No modelo dado pelo Figura 4, ache C_0 da opção de compra com o preço de exercício $K = 80$.

O valor $C_{(i,j)}$ achado pelo princípio de neutralidade ao risco será chamado **o preço da opção no nó** (i, j). A justificativa deste nome encontra-se a seguir. Suponha que no mercado multiperíodo dado pelo Figura 3, o contrato da opção com tempo de exercício t_N possa ser assinado (quer dizer iniciado) em qualquer momento $t_0, t_1, \ldots, t_{N-1}$. Fixe o tipo da opção e o seu preço de exercício K. Calcule C_0 para esta opção usando o princípio de neutralidade ao risco e guarde os valores de $C_{(i,j)}, j = 0, 1, \ldots, i$, que foram obtidos no caminho. Agora suponha que no momento t_i dois agentes de mercado A e B resolveram iniciar o contrato da opção do mesmo tipo e com o mesmo valor de exercício K. Se neste momento o preço da ação for $S_{(i,j)}$, então será fácil ver que o preço desta opção é exatamente $C_{(i,j)}$, quando o método de sua precificação for o princípio de neutralidade ao risco.

Agora suponha que além de iniciar um contrato de opção em qualquer momento, também seja permitido revender opções. Em termos exatos, isto significa que um um agente A que adquiriu uma opção no tempo t_i pode vendê-la para outro agente D em qualquer outro instante $t_\ell \geq t_i$ pasando com isso para D todos os direitos que esta opção dá. Suponhamos que A adquiriu no tempo t_0 uma opção com o preço de exercício K. Ao chegar o momento t_ℓ ele resolve vedê-la para um agente D. Suponha que neste momento o preço da ação seja $S_{(\ell,j)}$. Pergunta-se: qual o preço justo que D deve pagar a A? Veja, para o agente D, comprar a opção de A ou iniciar um novo contrato de opção no tempo t_ℓ com o preço de exercício K é a mesma coisa. Se ele seguir a segunda escolha, então pagará $C_{(\ell,j)}$. Portanto, este é o preço que ele pagará a A, caso resolver seguir a segunda escolha. Este fato justifica o termo "o preço da opção no nó (i, j)" dado para $C_{(i,j)}$. Claro que todo nosso argumento usou fortemente a crença de que o princípio de neutralidade ao risco forneça o preço justo da opção. Isto será provado em seguida.

Fica claro, então, que o método de precificação de opção pelo princípio de neutralidade ao risco determina não somente o valor inicial da opção C_0, mas também os seus valores em todos os nós da árvore. Estes valores costumam ser colocados em forma de árvore que se chama **árvore**

da opção. Por exemplo, a Figura 4(b) apresenta a árvore da opção achada no Exemplo 5 para a árvore da ação dada na Figura 4(a).

Lembrarei que achar C_0 no modelo uniperíodo pelo princípio de neutralidade ao risco significava

(1) Achar as probabilidades q_u e q_d que fazem com que o preço da ação fique neutro ao risco:

$$S_0 = e^{r\Delta t}\left(q_u S_u + q_d S_d\right) \tag{2.15}$$

(2) Usar estas probabilidades para determinar C_0:

$$C_0 = e^{r\Delta t}\left(q_u C_u + q_d C_d\right) \tag{2.16}$$

É natural perguntar se no modelo multiperíodo um procedimento parecido com (1)-(2) é aplicável e se o seu resultado coincide com o método de precificação pelo neutralidade ao risco definido acima. Mais especificamente, perguntamos se é possível

(1′) achar as probabilidades $n_{(N,0)}, n_{(N,1)}, \dots, n_{(N,N)}$ que fazem com que

$$S_0 = e^{r(t_N - t_0)}\left(n_{(N,0)}S_{(N,0)} + n_{(N,1)}S_{(N,1)} + \cdots + n_{(N,N)}S_{(N,N)}\right) \tag{2.17}$$

(2′) e usá-las para determinar um valor $\hat{C}_0$:

$$\hat{C}_0 = e^{r(t_N - t_0)}\left(n_{(N,0)}C_{(N,0)} + n_{(N,1)}C_{(N,1)} + \cdots + n_{(N,N)}C_{(N,N)}\right) \tag{2.18}$$

e se for realmente possível, será que $\hat{C}_0$ coincide com $C_{(0,0)}$, achado pelo princípio de neutralidade ao risco como formulado acima? O leitor achará a resposta fazendo o Exercício 28 abaixo.

Exercício 28. Mostre que se $N > 2$, então há mais de uma solução da equação (2.17), e portanto há mais de um valor $\hat{C}_0$ determinado pelo (2.18). Se o leitor tiver dificuldades em tratar o caso geral, sugiro fazer este exercício para o caso particular apresentado na Figura 4.

Exercício 29. Mostre que se $n_{(2,0)} = 1/4$, $n_{(2,1)} = 1/2$, $n_{(2,2)} = 1/4$, então para o preço da ação dado na Figura 4(a), vale a relação (2.17). Ainda mais, o preço da opção achado no Exemplo 5 satisfaz (2.18).

2.3 Precificação de opção européia pelo princípio de hedging e sua coincidência com o preço determinado pelo princípio de neutralidade ao risco

Lembre que para precificar uma opção no modelo uniperíodo pelo princípio de hedging, procurávamos por um portfolio que replicasse o preço da opção no instante terminal. O preço inicial deste portfolio chamava-se o preço da opção achado pelo princípio de hedging. Acontece que este procedimento não se aplica para o modelo multiperíodo, como mostra o exercício abaixo.

Exercício 30. Suponha que o número de períodos do modelo multiperíodo seja maior que 2 ($N > 2$), e suponha que todos os valores $S_{(N,0)}, \dots, S_{(N,N)}$ sejam distintos. Seja $\Pi_{(0,0)}$ o valor no tempo t_0 de um portfolio composto de qualquer valor x investido no banco e qualquer número y de ações compradas. Denomine por $\Pi_{(N,j)}$ o valor deste portfolio no nó (N, j), $j = 0, 1, \dots, N$. Mostre que qualquer que seja o tipo (compra ou venda) da opção européia, se o seu preço de exercício K satisfizer $S_{(N,0)} \le K \le S_{(N,N)}$, então é impossível que $\Pi_{(N,j)} = C_{(N,j)}$ para todo $j = 0, 1, \ldots, N$. Se o leitor tem dificuldades em reolver este exercício de forma genérica como foi colocado, sugiro considerar um caso particular, que é o modelo multiperíodo apresentado na Figura 4(a).

O procedimento que funciona no modelo multiperíodo para replicar os preços da opção no instante final está exibido no seguinte exemplo.

Exemplo 6. Neste exemplo considerarei o modelo multiperíodo do Exemplo 5 (Figura 4(a); lembre-se que r e Δt neste exemplo são tais que $R := e^{r\Delta t} = \frac{5}{4}$). Lembre-se que naquele exemplo achamos os preços da opção de venda para o preço de exercício $K = 80$. A árvore de preços da opção está apresentada na Figura 4(b). No presente exemplo será apresentada uma estratégia que replica o preço desta opção no tempo de exercício t_2.

Consideremos a estratégia **E1-E2** definida abaixo.

E1 No tempo t_0 vender $\frac{11}{20}$ ações e aplicar 36,8 u.m. no banco. Note que o valor do portfolio criado no tempo t_0 é $\Pi_{(0,0)} = 36,8 - \frac{11}{20} \cdot 48 = 10,4$ u.m.

E2 No tempo t_1 vender todo o portfolio criado no tempo anterior e compor um novo, cuja composição depende do preço da ação no tempo t_1.

E2(a) Se o mercado estiver no nó $(1,0)$, o novo portfolio terá 64 u.m. investido no banco e 1 ação vendida. O preço deste portfolio é

$$\Pi_{(1,0)} = 64 - 1 \cdot S_{(1,0)} = 64 - 40 = 24 \tag{2.19}$$

Note que a venda no nó $(1,0)$ do portfolio criado em t_0 dá

$$36,8 \cdot e^{r\Delta t} - \frac{11}{20} \cdot S_{(1,0)} = 36,8 \cdot \frac{5}{4} - \frac{11}{20} \cdot 40 = 24 \tag{2.20}$$

portanto, neste caso, a recomposição do portfolio não precisa de dinheiro extra nem libera dinheiro extra.

E2(b) Se o mercado estiver no nó $(1,1)$, o novo portfolio terá 10 u.m. aplicadas no banco e $\frac{1}{10}$ da ação vendida. O preço deste portfolio é

$$\Pi_{(1,1)} = 10 - \frac{1}{10} \cdot S_{(1,1)} = 10 - \frac{1}{10} \cdot 80 = 2 \tag{2.21}$$

Note que a venda no nó $(1,1)$ do portfolio criado em t_0 dá

$$36,8 \cdot e^{r\Delta t} - \frac{11}{20} \cdot S_{(1,1)} = 36,8 \cdot \frac{5}{4} - \frac{11}{20} \cdot 80 = 2 \tag{2.22}$$

portanto, como no caso anterior, neste caso a recomposição do portfolio não precisa de dinheiro extra nem libera dinheiro extra.

Vejamos agora se a estratégia **E1-E2** realmente replica o preço da opção no tempo t_2 (lembre-se que a árvore do preço da opção que queremos replicar está representada na Figura 4(b)). Temos que considerar todos os casos possíveis.

- Se o mercado estiver no tempo t_2 no nó $(2,0)$, o valorem t_2 do portfolio composto no nó $(1,0)$ é $64 \cdot e^{r\Delta t} - 1 \cdot S_{(2,0)} = 64 \cdot \frac{5}{4} - 25 = 55$ o que coincide com $C_{(2,0)}$.

- O mercado pode chegar no tempo t_2 ao nó $(2,1)$ por dois caminhos. Por isso que temos que considerar dois casos separadamente.
  - Se o mercado estiver no tempo t_2 no nó $(2,1)$, saindo do nó $(1,0)$, então o portfolio criado por **E2(a)** contém 64 u.m. aplicadas no banco em t_1 e uma ação vendida. A realização deste portfolio dá $64 \cdot e^{r\Delta t} - 1 \cdot S_{(2,1)} = 64 \cdot \frac{5}{4} - 75 = 5$ o que coincide com $C_{(2,1)}$.
  - Se o mercado estiver no tempo t_2 no nó $(2,1)$, saindo do nó $(1,1)$, então o portfolio criado por **E2(b)** contém 10 u.m. aplicadas no banco em t_1 e $\frac{1}{10}$ ações vendidas. A realização deste portfolio dá $10 \cdot e^{r\Delta t} - \frac{1}{10} \cdot S_{(2,1)} = 10 \cdot \frac{5}{4} - \frac{1}{10} \cdot 75 = 5$, o que coincide com $C_{(2,1)}$.
- Se o mercado estiver no tempo t_2 no nó $(2,2)$, o valor em t_2 do portfolio composto no nó $(1,1)$ é $10 \cdot e^{r\Delta t} - \frac{1}{10} \cdot S_{(2,2)} = 10 \cdot \frac{5}{4} - \frac{1}{10} \cdot 125 = 0$ o que coincide com $C_{(2,2)}$.

Provamos então que a estratégia **E1-E2** realmente replica o preço da opção no tempo final. Note que o montante necessário para iniciar esta estratégia é 10,4. No presente exemplo, este valor denomina se "o preço da opção de venda para $K = 80$ determinado pelo preincípio de hedging".

Passaremos agora para definições gerais. Uma **estratégia** é um conjunto de regras que para cada nó (i,j), determinam tanto a composição do portfolio a ser criado neste nó, quanto o que fazer com os portfolios criados nos tempos anteriores a t_i. Uma estratégia se chama **autofinanciante** se o fluxo de caixa é zero em cada nó salvo o nó $(0,0)$ e os nós terminais. Diz-se que o fluxo de caixa é zero quando não se precisa adicionar dinheiro, e não se libera dinheiro extra. Isto acontece quando todo o lucro das vendas é gasto para a composição do novo portfolio. **O preço inicial** de uma estratégia é o valor necessário para compor o portfolio no nó $(0,0)$.

Dado um mercado, o tipo (compra ou venda) da opção européia e seu preço de exercício, suponha que existe uma estratégia autofinanciante que replique o preço desta opção no tempo de exercício t_N. O valor inicial desta estratégia se chama **preço da opção achado pelo princípio de hedging**. Nesta definição **replicar** os valores $C_{(N,0)}, \ldots, C_{(N,N)}$ significa que o valor alcançado pela estratégia no nó (N,j) (generalmente, este valor vem da venda de portfolios criados nos instantes anteriores) coincide com $C_{(N,j)}$ para todo $j = 0, 1, \ldots, N$.

A estratégia **E1-E2** do Exemplo 6 é autofinanciante e replica o preço da opção de venda para $K = 80$. Esta estratégia nos forneceu o preço da opção pelo hedging, que coincidiu com o seu preço obtido anteriormente pela neutralidade ao risco. Esta coincidência é genérica, como mostram as segintes afirmações.

Afirmação 1. Para qualquer que seja o tipo (compra ou venda) da opção européia, e para qualquer que seja o seu preço de exercício, sempre existe uma estratégia autofinanciante que replica o preço final desta opção.
2. O preço inicial desta estratégia (que se denomina o preço da opção determinado pelo princípio de hedging) coincide com o preço da opção determinado pelo princípio da neutralidade ao risco.

Demonstrarei abaixo as Afirmações 1 e 2 para o modelo multiperíodo com $N = 3$, para que o leitor possa acompanhar as demonstrações com os valores concretos do Exemplo 6. A generalização desta demonstração para N arbitrário é direta.

Sejam $C_{(2,0)}, C_{(2,1)}, C_{(2,2)}$ os preços finais de uma opção européia no modelo multiperíodo com $N = 3$. Queremos mostrar que existe uma estratégia tal que

Cnd1 $\Pi_{(2,0)} = C_{(2,0)}, \quad \Pi_{(2,1)} = C_{(2,1)}, \quad \Pi_{(2,2)} = C_{(2,2)}$

Cnd2 o valor necessário para compor o portfolio tanto em $(1,0)$ quanto em $(1,1)$ coincide com o valor obtido da venda do portfolio composto em $(0,0)$.

> Nos meus argumentos, uso o símbolo $\Pi_{(i,j)}$ para designar tanto o valor de portfolio composto no nó (i,j), quanto o valor obtido da venda neste mesmo nó do portfolio composto no instante anterior. Este uso duplo não cria confusões porque estes valores coincidem, conforme a condição **Cnd2**.

O nosso problema está em achar as composições de portfolios nos nós $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,1)$ que garantem que as condições **Cnd1-Cnd2** sejam satisfeitas. Designaremos por $x_{(i,j)}$ a quantidade de u.m. investidas no banco e por $y_{(i,j)}$ a quantidade de ações compradas no nó (i,j).

Primeiramente, respondemos à pergunta: qual deve ser a composição $(x_{(1,0)}, y_{(1,0)})$ do portfolio composto no nó $(1,0)$ para que os seus valores no tempo t_2 repliquem o preço da opção? A expressão matemática desta replicação é o seguinte sistema de equações no qual $x_{(1,0)}, y_{(1,0)}$ são incógnitas:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_{(1,0)} e^{r\Delta t} + y_{(1,0)} S_{(2,1)} & = & \Pi_{(2,1)} \\ x_{(1,0)} e^{r\Delta t} + y_{(1,0)} S_{(2,0)} & = & \Pi_{(2,0)} \end{array} \right. \tag{2.23}$$

A solução de (2.23) é

$$x_{(1,0)} = e^{-r\Delta t} \frac{S_{(2,1)}\Pi_{(2,0)} - S_{(2,0)}\Pi_{(2,1)}}{S_{(2,1)} - S_{(2,0)}}, \quad y_{(1,0)} = \frac{\Pi_{(2,1)} - \Pi_{(2,0)}}{S_{(2,1)} - S_{(2,0)}} \tag{2.24}$$

Portanto, o valor necessário para compor um portfolio no nó $(1,0)$ cujo preço replique o preço da opção no tempo t_2 é

$$\Pi_{(1,0)} = x_{(1,0)} + y_{(1,0)} S_{(1,0)} \tag{2.25}$$

Observe que o mercado pode chegar ao tempo t_2 tanto pelo nó $(1,0)$ quanto pelo nó $(1,1)$. Portanto temos que determinar a composição do portfolio no nó $(1,1)$. Para isto temos que responder à pergunta: qual deve ser a composição $(x_{(1,1)}, y_{(1,1)})$ do portfolio composto no nó $(1,1)$ para que os seus valores no tempo t_2 repliquem o preço da opção? A expressão matemática desta replicação é o seguinte sistema de equações no qual $x_{(1,1)}, y_{(1,1)}$ são incógnitas:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_{(1,1)} e^{r\Delta t} + y_{(1,1)} S_{(2,2)} & = & \Pi_{(2,2)} \\ x_{(1,1)} e^{r\Delta t} + y_{(1,1)} S_{(2,1)} & = & \Pi_{(2,1)} \end{array} \right. \tag{2.26}$$

e a sua solução é

$$x_{(1,1)} = e^{-r\Delta t} \frac{S_{(2,2)}\Pi_{(2,1)} - S_{(2,1)}\Pi_{(2,2)}}{S_{(2,2)} - S_{(2,1)}}, \quad y_{(1,1)} = \frac{\Pi_{(2,2)} - \Pi_{(2,1)}}{S_{(2,2)} - S_{(2,1)}} \tag{2.27}$$

Portanto, o valor necessário para compor um portfolio no nó $(1,1)$ cujos preços repliquem o preço da opção no tempo t_2 é

$$\Pi_{(1,1)} = x_{(1,1)} + y_{(1,1)} S_{(1,1)} \tag{2.28}$$

O que acabamos de descobrir é que para replicar o preço da opção no tempo final, precisamos $\Pi_{(1,0)}$ u.m. em t_1 se o mercado "passar" pelo nó $(1,0)$, e $\Pi_{(1,1)}$ em t_1 se ele passar pelo nó $(1,1)$.

Será que conseguimos obter estes valores por intermédio de um portfolio composto no nó $(0,0)$? Esta pergunta é muito parecida com as perguntas feitas em relação aos portfolios compostos nos nós $(1,0)$ e $(1,1)$. O caminho da sua solução é idêntico ao caminho já percorrido duas vezes: a exigência de replicação implica em que a composição $(x_{(0,0)}, y_{(0,0)})$ deste portfolio deva satisfazer o seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_{(0,0)}e^{r\Delta t} + y_{(0,0)}S_{(1,1)} & = & \Pi_{(1,1)} \\ x_{(0,0)}e^{r\Delta t} + y_{(0,0)}S_{(1,0)} & = & \Pi_{(1,0)} \end{array} \right. \tag{2.29}$$

cuja solução é

$$x_{(0,0)} = e^{-r\Delta t}\frac{S_{(1,1)}\Pi_{(1,0)} - S_{(1,0)}\Pi_{(1,1)}}{S_{(1,1)} - S_{(1,0)}}, \quad y_{(0,0)} = \frac{\Pi_{(1,1)} - \Pi_{(1,0)}}{S_{(1,1)} - S_{(1,0)}} \tag{2.30}$$

E portanto o valor necessário para compor um portfolio no nó $(0,0)$, cujo preço no nó $(1,0)$ seja $\Pi_{(1,0)}$ enquanto no nó $(1,1)$ seja $\Pi_{(1,1)}$ é

$$\Pi_{(0,0)} = x_{(0,0)} + y_{(0,0)}S_{(0,0)} \tag{2.31}$$

O argumento contido entre as equações (2.23) e (2.31) estabelece as composições de portfolios nos nós $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,1)$ que fazem a estratégia satisfazer as condições **Cnd1-Cnd2**. Portanto a Afirmação 1 está provada.

Passaremos à demonstração da Afirmação 2. Lembramos que o método de precificação de opção pela neutralidade ao risco determina o preço da opção para todos os nós da árvore; para o nó (i,j) este preço foi designado por $C_{(i,j)}$. Pretendemos estabelecer que

$$\Pi_{(i,j)} = C_{(i,j)} \text{ para todo nó } (i,j) \tag{2.32}$$

onde $\Pi_{(i,j)}$ é o valor do portfolio composto pela estratégia **Cnd1-Cnd2**. O objetivo da nossa demonstração, que é a igualdade

$$\Pi_{(0,0)} = C_{(0,0)} \tag{2.33}$$

seria uma consequência imediata de (2.32).

Começaremos a demonstração de (2.32) com a observação de que as igualdades

$$\Pi_{(2,0)} = C_{(2,0)}, \quad \Pi_{(2,1)} = C_{(2,1)}, \quad \Pi_{(2,2)} = C_{(2,2)} \tag{2.34}$$

seguem diretamente das definições de $\Pi_{(N,j)}$ e $C_{(N,j)}$.

Para mostrar que $\Pi_{(1,0)} = C_{(1,0)}$ consideraremos separadamente a sub-árvore $(1,0)\begin{array}{l}\nearrow (2,1)\\ \searrow (2,0)\end{array}$ como um modelo uniperíodo com os valores de S_0, S_u, S_d, C_u, C_d definidos por

$$S_0 = S_{(1,0)}, S_u = S_{(2,0)}, S_d = S_{(2,1)}, C_u = C_{(2,1)}, C_d = C_{(2,0)} \tag{2.35}$$

Lembraremos que $C_{(1,0)}$ designa o preço da opção determinado pelo princípio de neutralidade ao risco, e portanto ele coincide com $C_0^{riskneutral}$ obtido neste modelo uniperíodo. Lembramos ainda que na Seção 1.5 provamos que $C_0^{riskneutral} = C_0^{hedging}$ no modelo uniperíodo, onde

$$C_0^{hedging} = x + yS_0 \qquad \text{com} \left\{ \begin{array}{rcl} xe^{r\Delta t} + yS_u & = & C_u \\ xe^{r\Delta t} + yS_d & = & C_d \end{array} \right. \tag{2.36}$$

Juntaremos agora todas as informações

$$\begin{aligned} C_{(1,0)} &= C_0^{riskneutral} \text{ na sub-árvore} \\ &= C_0^{hedging} \text{ na sub-árvore} \\ &= \Pi_{(1,0)} \end{aligned} \tag{2.37}$$

Falta justificar a última passagem em (2.37). É muito simples. Usando (2.35) e (2.34), colocamos $\Pi_{(2,1)}.\Pi_{(2,0)}, S_{(2,1)}, S_{(2,0)}, S_{(1,0)}$ nos lugares de C_u, C_d, S_u, S_d, S_0 em (2.36) respectivamente, e descobrimos que a expressão e o sistema de (2.36) ficaram idênticos à expressão e ao sistema em (2.25) e (2.23). Isto garantiu a validade da última passagem em (2.37). Provamos, então que

$$C_{(1,0)} = \Pi_{(1,0)} \tag{2.38}$$

Um argumento similar aplicado à sub-arvore $(1,1) \begin{smallmatrix} \nearrow (2,2) \\ \searrow (2,1) \end{smallmatrix}$ mostra que

$$C_{(1,1)} = \Pi_{(1,1)} \tag{2.39}$$

Se no mesmo argumento substituirmos (2.34) por (2.38)-(2.39) e o aplicarmos à sub-arvore $(0,0) \begin{smallmatrix} \nearrow (1,1) \\ \searrow (1,0) \end{smallmatrix}$, derivaremos

$$C_{(0,0)} = \Pi_{(0,0)} \tag{2.40}$$

o que demonstra a Afirmação 2.

Exercício 31. Analise a demonstração da Afirmação 1. Note que as composições de portfolios compostas no tempo t_1 usam os valores da ação no tempo t_2. Isto significa que a estratégia **Cnd1-Cnd2** "depende do futuro"?

Exercício 32. Note que para demonstrar a Afirmação 1 apresentamos uma estratégia autofinanciante que replica o preço final de uma opção. Será que existe outra estratégia que possua estas propriedades? Se a resposta é "sim", qual a garantia de que o preço inicial da outra estratégia seja igual a da estratégia apresentada na demonstração da Afirmação 1?

Exercício 33. Analise a demonstração da Afirmação 2. Note que C_u e C_d do sistema em (2.36) satisfazem

$$\begin{array}{c} C_u = \max\{S_u - K; 0\}, C_d = \max\{S_d - K; 0\} \text{ para a opção de compra,} \\ C_u = \max\{K - S_u; 0\}, C_d = \max\{K - S_d; 0\} \text{ para a opção de venda.} \end{array} \tag{2.41}$$

Note que (2.41) estão satisfeitas com a substituição de C_u, C_d por $C_{(2,1)}, C_{(2,0)}$ ou por $C_{(2,2)}, C_{(2,1)}$. Portanto as conclusões (2.38) e (2.39) são válidas. Porém, (2.41) ficaram inválidas quando substituimos C_u, C_d por $C_{(1,1)}, C_{(1,0)}$. Será que isto invalidou o argumento que derivou (2.40)?

2.4 Precificação de opção européia pelo princípio de arbitragem

A análise de arbitragem no modelo multiperíodo utiliza as técnicas desenvolvidas para uma classe de processos estocásticos chamados martingais. Por não poder contar com o conhecimento prévio dos leitores neste assunto e por não pretender introduzir estes processos no presente livro, poderei discutir somente superficialmente o conceito de arbitragem no modelo multiperíodo.

Um mercado multiperíodo se chama **livre de arbitragem** caso não exista nenhuma estratégia autofinanciante que gere lucro garantido numa magnitude maior do que o lucro oferecido pelo taxa de juros livre de risco.

Para poder formular os resultados desta seção precisaremos definir certos conceitos vinculados às árvores de preço de ação no modelo multiperíodo. Lembramos que a probabilidade de sair "subindo" do nó (i, j) foi denotada por $p_{(i,j)}$, e a probabilidade de sair dele "descendo" ficou igual a $1 - p_{(i,j)}$. O conjunto $\{p_{(i,j)},\ 0 \le i \le N-1,\ 0 \le j \le i\}$ destas probablidades determina uma probablidade nos caminhos da árvore que ligam o nó inicial a um dos nós terminais. Chamaremos esta probablidade de P. Para cada t_i definimos a variável aleatória S_i de forma que:

$$S_i \text{ assume valor } S_{(i,j)} \text{ com a probablidade } P\left[(0,0) \to (i,j)\right] \tag{2.42}$$

onde $P\left[(0,0) \to (i,j)\right]$ designa a P-probablidade de chegar ao nó (i, j) saindo do nó $(0, 0)$.

Afirmação I. Para que o modelo multiperíodo (com uma só ação) seja livre de arbitragem é suficiente e necessário que exista uma probabilidade Q (no espaço de todos os caminhos da árvore que ligam o nó inicial a um dos nós terminais) tal que a seqüência de variáveis aleatórias $S_0, S_1, \ldots, S_N$ forme um martingal em relação à probabilidade Q. Aqui $S_0, S_1, \ldots, S_N$ são variáveis aleatórias definidas como em (2.42), mas subsituindo-se P por Q.

O método de precificação de opção pelo princípio de arbitragem, a ser definida daqui a pouco, determina não somente o valor C_0, mas também os preços da opção em cada nó da àrvore da ação. Designaremos por $C_{(i,j)}$ o preço da opção no nó (i, j).

Dado o tipo da opção européia (compra ou venda) e o seu preco de exercício K, diz-se que o conjunto de valores $\{C_{(i,j)},\ 0 \le i \le N,\ 0 \le j \le i\}$ representa os preços desta opção determinados pelo **princípio de arbitragem**, caso a seqüência de variáveis aleatórias $C_0, C_1, \ldots, C_N$ forme um martingal em relação à probabilidade Q, onde para cada $i = 0, 1, \ldots, N$,

$$C_i \text{ assume valor } C_{(i,j)} \text{ com a probablidade } Q\left[(0,0) \to (i,j)\right] \tag{2.43}$$

Claro que os valores terminais devem satisfazer as seguintes relações:

$$\begin{aligned} C_{(N,j)} &= \max\{S_{(N,j)} - K; 0\} \text{ para a opção de compra,} \\ C_{(N,j)} &= \max\{K - S_{(N,j)}; 0\} \text{ para a opção de venda, } 0 \le j \le N \end{aligned} \tag{2.44}$$

em qualquer que seja o método de precificação e, em particular, no método de precificação pelo princípio de arbitragem.

Note que a probabilidade Q usada na precificação da opção advêm do modelo multiperíodo com uma só ação, ou seja, sem que uma opção faça parte deste mercado. Isto destaca, mais uma vez, o fato de que a introdução de uma opção num mercado pelo princípio de arbitragem é possível somente caso este mercado não permita arbitragem. Esta ausência de arbitragem garante, pela Afirmação I acima, a existência da probabilidade Q, que é utilizada para precificar a opção.

Afirmação II. Os preços da opção européia (de compra ou de venda) no modelo multiperíodo calculados pelo princípio de arbitragem coincidem com os seus preços determinados pelo princípio de neutralidade ao risco (e também, com os preços determinados pelo hedging, pois já mostramos na Seção 2.3 que a neutralidade ao risco e hedging dão o mesmo resultado).

A diferença do modelo multiperíodo para o modelo uniperíodo está no fato de que no primeiro modelo um agente pode comprar/vender ações e emprestar/aplicar dinheiro no banco entre os instantes inicial e terminal. Isto permite compor estratégias cuja execução depende do passado (por exemplo: vender todas as ações adquiridas, caso o mercado descer duas vezes consecutivas, e dobrar a quantidade de ações já adquiridas, caso o mercado subir duas vezes consecutivas). Tais estratégias são facilmente representadas com a ajuda do processo de preço da ação $S_0, S_1, \dots, S_N$ e dos momentos de parada (*stopping times*). Daí a necessidade de utilização de linguagem de martingais para analizar a ausência/presença de arbitragem no modelo multiperíodo.

2.5 Exercícios

Exercício 34. Ache o preço da opção Europeia de compra com $K = 96$ em cada nó da árvore, para a ação apresentada na árvore em Figura 5. Use o princípio de neutralidade ao risco. Construa a árvore do preço da opção.

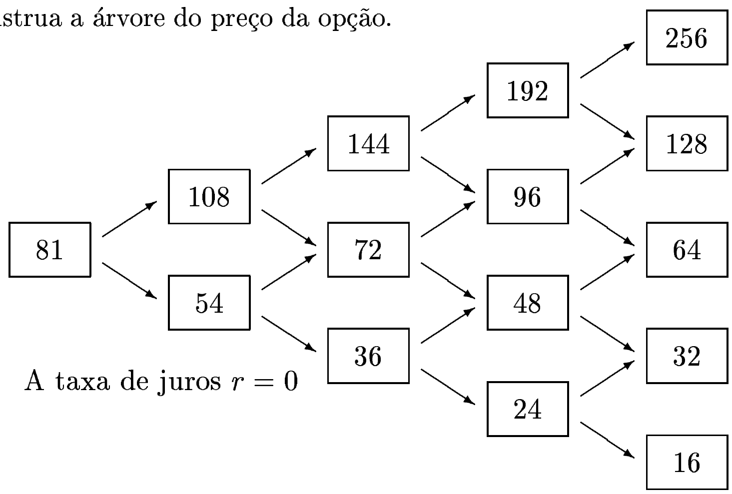

FIGURA 5

As probabilidades de subida e descida não são apresentadas nesta árvore, porque não tem utilidade para o cálculo do preço da opção pelo princípio de neutralidade ao risco.

Exercício 35. Ache o preço da opção Europeia de venda com $K = 64$ em cada nó da árvore, para a ação apresentada na árvore em Figura 5. Use o princípio de neutralidade ao risco. Construa a árvore do preço da opção.

Exercício 36. Considere o mercado apresentado na Figura 5. Designa por $\Pi_{(i,j)}$ o portfolio composto no nó (i, j) pela estratêgia que replica o preço final da opção européia de compra com $K = 96$. Segue o caminho $(0, 0) \to (1, 1) \to (2, 1) \to (3, 2) \to (4, 2)$. Quais são as composições dos portfolios nos nós deste caminho? Verifique que o valor necessário para compor o portfolio em cada nó coincide com o valor de venda do portfolio composto no nó anterior.

Exercício 37. Considere o mercado apresentado na Figura 5. Designa por $\Pi_{(i,j)}$ o portfolio composto no nó (i, j) pela estratêgia que replica o preço final da opção européia de venda com $K = 64$. Segue o caminho $(0,0) \to (1,0) \to (2,0) \to (3,1) \to (4,1)$. Quais são as composições dos portfolios nos nós deste caminho? Verifique que o valor necessário para compor o portfolio em cada nó coincide com o valor de venda do portfolio composto no nó anterior.

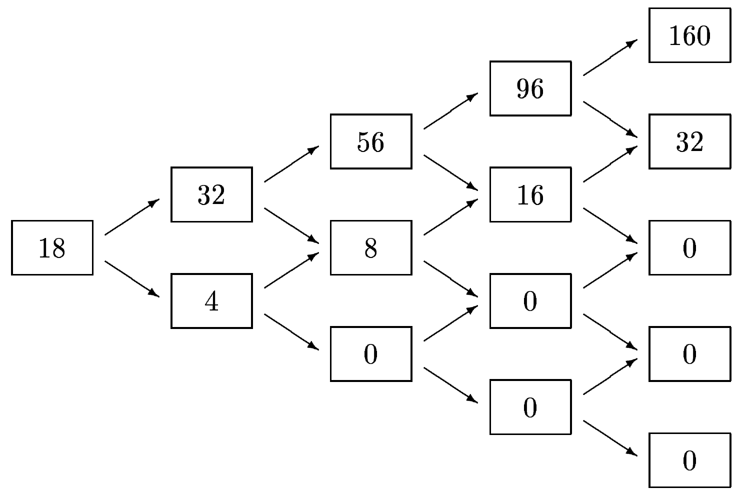

FIGURA 6
Resposta ao Exercício 34: A árvore da opção de compra com $K = 96$ para a árvore da ação da Figura 5.

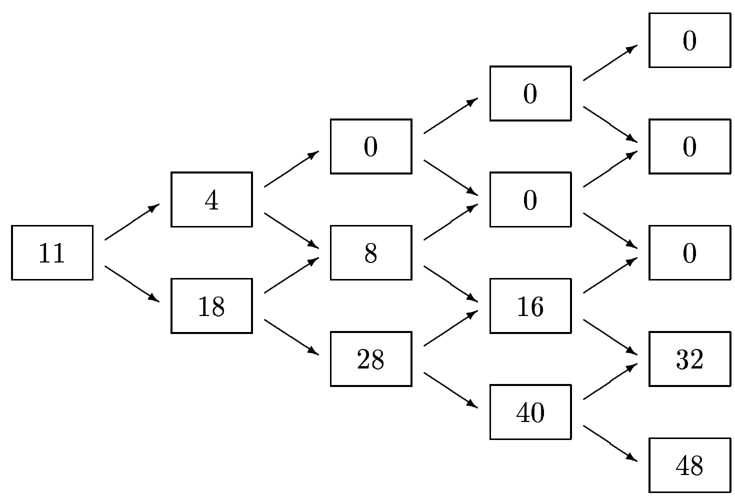

FIGURA 7
Resposta ao Exercício 35: A árvore da opção de venda com $K = 64$ para a árvore da ação da Figura 5.

Capítulo 3

Modelo em tempo continuo (modelo de Black-Scholes)

3.1 Modelo de tempo contínuo com trajetórias diferenciáveis

Embora o Capítulo 3 seja destinado ao modelo de Black-Scholes, começamos com a análise de um outro modelo, chamado modelo com trajetórias diferenciáveis. Esta análise será utilizada para esclarecer algumas ideias usadas no modelo de Black-Scholes. A vantagem deste modelo é que, ao contrário do modelo de Black-Scholes, ele não exige a utilização de cálculo estocástico, e o cálculo em $\mathbb{R}^n$ entra no lugar do cálculo estocástico na análise do modelo com trajetórias diferenciáveis. Já que o cálculo em $\mathbb{R}^n$ é mais natural para a maioria dos leitores, a exposição fica mais transparente.

O modelo estudado nesta seção, alem de ser didático no sentido mencionado acima, tem sua contribuição à teoria que desenvolvemos neste livro. Ele mostra que a dinâmica do preço de ativos financeiros deve ser modelada pelo processo com trajetórias não diferenciáveis. Notaremos que tais processos são utilizados no modelo de Black-Scholes.

Tomamos um valor $T > 0$ e o fixamos em todos os nossos argumentos. Definiremos, em três passos, um processo $V_.$, no intervalo de tempo $[0, T]$. Primeiro, fixamos um número natural N e dividimos $[0, T]$ em N sub-intervalos de tamanhos iguias. Designamos por $0 = t_0, t_1, \ldots, t_{N-1}, t_N = T$ os extremos destes intervalos e por Δt o comprimento de cada um deles. No segundo, passo definimos os valores de $V_.$ nos instantes $t_0, t_1, \ldots, t_{N-1}, t_N$ por

$$\begin{aligned} V_0 \equiv V_{t_0} := 0, \qquad V_{t_1} - V_{t_0} := Y_1, \quad V_{t_2} - V_{t_1} = Y_2, \ldots \\ \ldots, \quad V_{t_{N-1}} - V_{t_{N-2}} := Y_{N-1}, \quad V_{t_N} - V_{t_{N-1}} := Y_N, \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde

$$\begin{gathered} Y_1, Y_2, \ldots, Y_N \text{ são variáveis aleatórias independentes,} \\ \text{sendo que } Y_i \sim \mathcal{N}(0, \Delta t) \text{ para todo } i \end{gathered} \tag{3.2}$$

No terceiro passo, definimos os valores de $V_.$ nos demais pontos do intervalo $[0, T]$. Fazemos isto separadamente em cada um dos sub-intervalos da partição de $[0, T]$ pelo seguinte procedimento. Para $t \in (t_{i-1}, t_i)$, definimos

$$V_t := (Y_1 + \ldots + Y_{i-1}) + \frac{Y_i}{2} \left\{ 1 - \cos\left(\frac{\pi}{\Delta t}(t - t_{i-1}) \right) \right\}, \ t \in (t_{i-1}, t_i) \tag{3.3}$$

Lembramos que a função $\cos(x)$, usada em (3.3), satisfaz $\cos'(0) = \cos'(\pi) = 0$ e, portanto, em cada t_i a derivada à direita de $V_.$ é igual à derivada à esquerda, já que ambas são 0. Assim, cada trajetória de $V_.$ é diferenciável em todos os pontos $t_0, t_1, \ldots, t_N$. Também é claro, da própria construção (3.3), que cada trajetória é diferenciável entre estes pontos. Portanto, construimos um processo com as trajetórias diferenciáveis em todo $[0, T]$.

O processo $V_.$ agora definido será usado para construir o processo de preço da ação. Para podermos calcular a diferencial deste processo de preço, precisamos que as trajetórias de $V_.$ sejam diferenciáveis. Isto foi alcançado pela nossa construção. Notamos que a forma específica da função "cos" que usamos em (3.3) não será utilizada em nenhum lugar do nosso argumento. Na lugar de "cos" poderíamos tomar qualquer outra função cuja forma nos assegure que $V_.$ tem a propriedade desejada, que é a diferenciabilidade de todas as suas trajetórias.

Modelo de tempo contínuo com trajetórias diferenciáveis, ou simplesmente **modelo com trajetórias diferenciáveis**, é um mercado com somente um ativo que pode ser vendido ou comprado em quaisquer instantes do intervalo de tempo $[0, T]$ e cujo preço no tempo t é uma variável aleatória S_t, que tem a seguinte estrutura:

$$S_t = S_0 e^{V_t}, t \in [0, T], \tag{3.4}$$

onde, S_0 é uma constante chamada o valor inicial da ação.

Exercício 38. Deixamos ao leitor determinar todos os axiomas do mercado "modelo com trajetórias diferenciáveis". Acreditamos que o leitor não terá dificuldades de adaptar ao presente modelo os axiomas do modelo multiperíodo. O único cuidado deve ser com o fato de que compras, vendas, empréstimos e resgates podem ser feitos em qualquer momento do intervalo de tempo $[0, T]$.

Poderíamos fazer o modelo com trajetórias diferenciáveis ser mais "parecido" com o modelo de Black e Scholes, já que a intenção final é comparar os resultados obtidos para os dois modelos por intermédio do mesmo raciocínio. Para tal, teríamos que definir

$$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma V_t}, t \in [0, T] \tag{3.5}$$

onde $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$ são duas constantes. Porém, estas constantes não fazem nenhum papel no argumento a ser apresentado. Por isto e com a intenção de não sobrecarregar as notações, preferimos (3.4) a (3.5).

Introduzimos agora as opções européias de compra e venda no modelo com trajetórias diferenciáveis, cujas definições são análogas às das opções européias no modelo multiperíodo.

Opção européia de compra é um contrato entre duas partes chamadas de lançador e titular da opção, assinado no tempo 0, segundo o qual o titular tem direito de comprar do lançador uma ação no tempo T por um preço K pré-estabelicido pelas partes no momento da assinatura do contrato; K se chama **preço de exercício** e T se chama **tempo de exercício** ou **de vencimento**.

Opção europeia de venda é análoga à opção européia de compra, com a diferença que agora o titular tem o direito de vender para o lançador uma ação no tempo de exercício T pelo preço de exercício K.

O problema abordado nesta seção é

$$\begin{array}{c}\text{Dados os valores de } S_0, K, T \text{ e o valor de taxa de juros } r,\\ \text{qual o preço inicial da correspondente opção européia de compra?}\end{array} \tag{3.6}$$

Para tratar da opção de venda o argumento não mudará, só as condições de fronteira (3.14) devem ser alteradas adequadamente.

Lembramos que no modelo multiperíodo, para achar o preço inicial da opção, tivemos que calcular os seus preços em todos os instantes $t_0, t_1, \ldots, t_N$ e para todos os possíveis preços da ação nestes instantes. Ou, melhor dizendo, estes preços saíram como "subprodutos" do método aplicado para aquele modelo. Algo parecido acontece na precificação de opções nos modelos de tempo contínuo: o método que aplicamos dará o preço da opção em qualquer que seja $t \in [0, T]$ e qualquer que seja S_t, o preço da ação neste instante.

Começamos o nosso argumento com a seguinte suposição:

Sup Suponhamos que dentre os valores que variam no modelo, o preço da opção no tempo t depende somente do próprio t e de S_t (onde S_t designa o preço da ação observado neste tempo). Em linguagem matemática, esta suposição diz que existe uma função de duas variáveis $C(\cdot, \cdot)$, tal que $C(S_t, t)$ expressa o preço da opção no instante t para o preço S_t da ação neste instante, para quaisquer que sejam os valores de t e S_t.
Suponhamos ainda que $C(\cdot, \cdot)$ é pelo menos uma vez diferenciável em relação de cada um dos seus argumentos.

Acho que **Sup** exige certas explicações que farei agora.

O conceito de "preço da opção no instante $t > 0$ para o preço S_t da ação neste instante" foi introduzido no Capítulo 2. Lembramos que ele significa o preço da opção se ela for iniciada no instante t, quando o valor da ação é S_t.

A suposição **Sup** diz que se no tempo t o preço da ação é S_t, então o preço da opção depende somente de t e S_t e é dado pelo valor da função $C(\cdot, \cdot)$ no ponto (S_t, t). É claro que o preço da opção deve depender também dos valores de T, K e r. A nossa suposição não nega esta dependência, pois considera estes valores como os valores fixos do modelo. O que a suposição diz é que entre os valores que variam, só S_t e t afetam o preço da opção. Surge então uma pergunta natural: quais são os outros fatores, além de S_t, t, T, K, r, que podem influenciar o preço da opção mas não influenciam, segundo a suposição **Sup**?

A resposta é simples: a princípio, o preço da opção no tempo t podia depender tanto dos preços da ação até t, quanto dos preços após t. Não é razoável supor a dependência dos preços da ação após t, pois são desconhecidos no tempo t. Aliás, o presente livro trata justamente da questão de como elimimar o futuro na precificação de opções. De outro lado, nada impede que o preço da opção no tempo t dependa de todo passado $S_s, s \in [0, t]$. O que a suposição **Sup** diz é que nenhum dos $S_s, s \in [0, t)$, afeta o preço da opção, mas somente S_t. Aproveitarei esta discussão para chamar a atenção do leitor que para qualquer $s \in [0, t]$, o valor S_s deve ser visto como "valor numérico do preço da ação observado no tempo s" e não como uma variável aleatória. Esta visão segue da interpretação do nosso modelo como um mercado: se o mercado estiver no tempo t, então todos os agentes sabem todos os valores passados do preço da ação. Note que em **Sup** acima já chamei a atenção do leitor ao fato de que S_t deve ser visto como um valor númerico e não como uma variável aleatória.

Continuamos o nosso argumento observando que se a forma da função $C(\cdot,\cdot)$ fosse conhecida, então qualquer agente do mercado poderia realizar a seguinte estratégia:

Est Manter uma carteira que em cada instante t contém uma opção comprada e $\frac{\partial C}{\partial S}$ ações vendidas.

O símbolo $\frac{\partial C}{\partial S}$ pode causar confusões, as quais tentarei eliminar por esclarecer o seu sentido:

$$\frac{\partial C}{\partial S} \text{ é uma notação sucinta de } \frac{\partial}{\partial x} C(x,y)\Big|_{\substack{x=S_t\\ y=t}} \tag{3.7}$$

Com este esclarecimento, a estratêgia **Est** pode ser escrita mais detalhadamente:
Est (versão detalhada) Comprar uma opção no momento 0 e mante-la até T. O que muda na composição da carteira é a quantidade de ações, que se calcula de seguinte forma: em cada momento t observe o valor S_t da ação neste momento e calcule o valor da derivada parcial da função C em relação do seu primeiro argumento no ponto (S_t,t) – este é o número de ações vendidas que a carteira deve conter no tempo t.

Note que a implementação da estratêgia **Est** é possível graças ao fato que $C(\cdot,\cdot)$ depende somente dos valores que podem ser observados até o instante t, como foi assumido em **Sup**.

A relação (3.7) e a versão detalhada de **Est** sugerem que entre os símbolos $\frac{\partial C}{\partial S}$ e $\frac{\partial C}{\partial S_t}$ o segundo seria mais próximo ao sentido que demos as estes símbolos. Porém, há uma razão séria para não usar S_t no lugar de S, em todo nosso argumento, pois tal uso pode induzir à impressão de que o preço da ação depende do tempo, o que por sua vez, pode implicar em interpretações incorretas, como, por exemplo, a fórmula $\frac{\partial C}{\partial S_t} = \frac{\partial C}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial t}$, que não é coerente com a interpretação de $\frac{\partial C}{\partial S_t}$ que queremos. Notamos a respeito da utilização de S no lugar de S_t que, embora o preço da ação mude no decorrer do tempo, não é o tempo que determina o valor de S_t. Este valor depende do valor do processo $V_\cdot$ por (3.4). A distribuição deste processo no instante t depende de t, mas os próprios valores não.

O nosso objetivo agora é analisar a carteira composta pela estratégia **Est** com a intenção de obter uma equação envolvendo a função $C(\cdot,\cdot)$. A solução desta equação dará a expressão de $C(\cdot,\cdot)$, que até agora supomos que existe mas não a conhecemos.

Começamos notando que o valor da carteira composta pela **Est** no tempo t é

$$\Pi = C - \frac{\partial C}{\partial S}\cdot S \tag{3.8}$$

Lembrando que ela é uma função de duas variáveis (as quais são o valor da ação e o tempo), calculamos a sua diferencial completa (a sua existência é conseqüência da suposição de diferenciabilidade de $C(\cdot,\cdot)$ feita em **Sup**)

$$\begin{aligned} d\Pi &= dC - \frac{\partial C}{\partial S}\cdot dS \\ &= \frac{\partial C}{\partial t}\cdot dt + \frac{\partial C}{\partial S}\cdot dS - \frac{\partial C}{\partial S}\cdot dS \\ &= \frac{\partial C}{\partial t}\cdot dt \end{aligned} \tag{3.9}$$

Agora, lembrando que $d\Pi$ é uma aproximação (de primeira ordem em dt) para o acréscimo de valor da carteira durante o intervalo de tempo $[t, t+dt]$, podemos interpretar o resultado da conta em (3.9):

Intr O acréscimo de valor da carteira durante um pequeno intervalo de tempo $[t, t + dt]$ não depende do comportamento do preço da ação durante este intervalo.

Para prossegir no nosso argumento, lembramos que o acréscimo no valor da carteira é o que o dono da carteira ganha durante o referido intervalo $[t, t + dt]$. Descobrimos em **Intr** que este ganho é deterministico. Lembramos agora que uma outra possibilidade de obter o ganho determinístico é aplicar o dinheiro na taxa de juros livre de risco r. O princípio de arbitragem afirma que os dois devem ser iguais, caso C esteja corretamente calculada. Em outras palavras, o valor correto de C implica que

$$d\Pi = r\Pi dt \tag{3.10}$$

o que pode ser re-escrito, usando (3.8) e (3.9), da seguinte forma

$$\frac{\partial C}{\partial t} \cdot dt = r\left(C - \frac{\partial C}{\partial S} \cdot S\right) dt \tag{3.11}$$

Eliminando dt em (3.11), obtemos a seguinte equação diferencial, na qual C é uma incógnita

$$\frac{\partial C}{\partial t} - rC + rS\frac{\partial C}{\partial S} = 0 \tag{3.12}$$

Talvez, valha a pena, agora, substituir C por $C(S,t)$ para reescrever (3.12) como:

$$\frac{\partial C(S,t)}{\partial t} - rC(S,t) + rS\frac{\partial C(S,t)}{\partial S} = 0 \tag{3.13}$$

o que não deixa dúvida de que obtivemos uma equação diferencial envolvendo a função $C(S,t)$, definida na faixa $(S,t) \in [0, +\infty) \times [0, T]$, pois o tempo t varia de 0 a T no nosso modelo, e porque o preço da opção pode assumir qualquer valor não negativo.

Para achar a solução de (3.13), presisamos de condições de fronteira. Estas condições seguem dos valores terminais da opção européia de compra com o preço de exercício K e o tempo de exercício T, e das considerações de bom senso.

$$\begin{cases} C(S,T) = \max\{S - K, 0\}, \text{ para todo } S \geq 0 \\ C(0,t) = 0, \text{ para todo } t \in [0,T] \\ \lim_{S\to\infty} C(S,t) = S, \text{ para todo } t \in [0,T] \end{cases} \tag{3.14}$$

Exercício 39. Reconstitua as considerações de bom senso que forneceram as últimas duas linhas em (3.14).

A solução de equação (3.13) com as condições de fronteira (3.14) pode ser obtida usando os métodos clássicos de solução de equações diferencias lineares (veja [Fo]). Esta solução tem a seguinte forma:

$$C(S,t) = e^{-r(T-t)} \times \begin{cases} Se^{r(T-t)} - K, & \text{se } Se^{r(T-t)} \geq K \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases} \tag{3.15}$$

Analisaremos o valor inicial da opção para o valor inicial da ação S_0, isto é, analisaremos a solução dada por (3.15), para $t = 0$ e $S = S_0$. Substituindo $t = 0$ e $S = S_0$ em (3.15) obtemos: que é

$$C(S_0,0) = e^{-rT} \times \begin{cases} S_0e^{rT} - K, & \text{se } S_0e^{rT} \geq K \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases} \tag{3.16}$$

A fórmula (3.16) nos diz que para saber o preço da opção temos que "levar" o preço atual da ação para o tempo de exercício e compará-lo com o preço de exercício. Se ele ficar maior que K, então a diferença $S_0 e^{rT} - K$ deve ser "trazida" para o momento inical e o resultado disto é o preço da opção. Se ele ficar menor que K, então o preço da opção é zero.

A fórmula (3.16) não pode ser aceita como uma forma correta de precificar a opção. Há diversas razões para descartá-la. A mais natural é que o preço da opção não pode ser 0 para nenhum $S_0 > 0$, pois se assim fosse, a posição de titular desta opção não custaria nada, embora podesse trazer um lucro positivo com probabilidade positiva.

> **Exercício 40.** Sejam $r = 0.1$ anual, $T = 1$ ano, $N = 10$, $S_0 = 100$, e $K = 200$. Note que, para estes valores, $C(S_0, 0) = 0$. Calcule a probabilidade de que o lucro do titular desta opção seja maior que 0. Certifique-se que a probabilidade calculada é maior que 0, o que justifica a última frase no texto acima do presente exercício. Calcule também o lucro médio do titular desta opção.

Como o resultado (3.15) contradiz o bom senso, então o modelo de trajetórias diferenciáveis deve refletir inadequadamente a realidade. Mostramos agora que de fato o processo $S.$ de (3.4) não é um modelo correto para a dinâmica do preço da ação.

Podemos imaginar o seguinte funcionamento do modelo de trajetórias diferenciáveis. No instante $t_0 = 0$, Deus estabelece o valor y_1 da variável aleatória[1] Y_1 e liga os pontos $(0, 0)$ e (t_1, y_1) por uma função $v.$, a qual ele obtém por "esticar" adequadamente a função "cos". Depois disso, Deus pode descançar até t_1 porque o preço da ação se desenvolve conforme $s_t = S_0 e^{v_t}$ no intervalo de tempo $[t_0, t_1]$.

No instante t_0 nenhum agente de mercado sabe o valor y_1. Porém, das observações de valores de $s.$ durante um pequeno intervalo de tempo $[t_0, t_0 + dt]$, qualquer agente pode reconstituir os valores de derivadas de todas as ordens da função $s.$ no ponto $t_0 = 0$. Colocando estes valores na fórmula de Taylor, qualquer agente pode, então, prever o preço da ação até o momento t_1. Esta situação se repete em todos os instantes $t_1, t_2, \ldots, t_{N-1}$.

Vemos então que a diferenciabilidade das trajetórias do processo $S.$ expressa-se em previsibilidade do preço da ação modelado por este processo. Esta previsibilidade não acontece nos mercados reais e é por isso que o resultado da análise do nosso modelo é irreal. Não vamos nos decepcionar, porque este resultado nos dá alguns proveitos.

O primeiro proveito da análise do modelo de trajetórias diferenciáveis está na conclusão que o modelo de preço da ação deve ser um processo cujas trajetórias não são diferenciáveis em todo instante t.

O segundo proveito está em que o modelo de trajetórias diferenciáveis nos permite analisar detalhadamente o argumento que será aplicado para precificar opções no modelo de Black e Scholes. Este último é um modelo adequado de mercado real, por usar processos não diferenciáveis para modelar o preço da ação. Porém, esta não diferenciabilidade exige a utilização de cálculo estocástico. Sendo que não podemos introduzir esta ferramenta com todo rigor, somos, então, limitados à análise de argumentos como um todo. No modelo de trajetórias diferenciáveis, este mesmo argumento usa o cálculo em $\mathbb{R}^n$. A intimidade com esta ferramenta nos permite entrar em detalhes deste argumento, o que será feito abaixo.

[1] Note que usamos letras maiusculas para variáveis aleatórias e letras minusculas para seus valores. Em particular, $v.$ é uma realização do processo $V.$.

Daqui até o final da presente seção refaremos cuidadosamente todas as passagens do argumento que originou o preço da opção (3.15).

Notaremos que embora a carteira composta pelo **Est** contenha opções e ações, o seu valor depende de dois fatores que são t e S_t. Isto porque tanto a quantidade das ações na carteira quanto o preço da única opção da carteira dependem, seguindo a nossa suposição **Sup**, somente de S_t e de t. É por isso que adotamos a notação $\Pi(S_t,t)$ (no lugar de Π usado em (3.8) acima) para designar o valor da carteira no tempo t para o preço da ação S_t. Seguindo a nossa intencão de expressar explicitamente a dependência de todas as funções que entram no nosso cálculo, reescrevemos (3.8):

$$\Pi(S_t,t) = C(S_t,t) - S_t \cdot \frac{\partial}{\partial x} C(x,y)\big|_{\substack{x=S_t\\ y=t}} \tag{3.17}$$

Fixamos arbitrariamente um $t \in [0,T)$ e suponhamos que estamos no instante t no nosso modelo. Para fins da conta a ser feita, notamos que "estar no tempo t" significa saber todos os preços da ação no intervalo de tempo $[0,t]$. Portanto na nossa conta, todo S_s com $s \in [0,t]$ e em particular S_t deve ser entendido como um valor e não como uma variável aleatória.

Estamos interessados em estimar o acréscimo no valor da carteira durante um pequeno intervalo de tempo $[t,t+dt]$. Este acréscimo tem a expressão matemática

$$\Pi(S_{t+dt}, t+dt) - \Pi(S_t,t) \tag{3.18}$$

Porém, graças à infinitesimalidade do dt, a diferença (3.18) pode ser aproximada pela diferencial completa de Π no ponto (S_t,t):

$$\begin{aligned}
&\Pi(S_{t+dt}, t+dt) - \Pi(S_t,t) \approx d\Pi(S_t,t)\\
&= dC(S_t,t) - dS_t \cdot \frac{\partial}{\partial x} C(x,y)\big|_{\substack{x=S_t\\ y=t}}\\
&= \left(dt \cdot \frac{\partial}{\partial y} C(x,y)\big|_{\substack{x=S_t\\ y=t}} + dS_t \cdot \frac{\partial}{\partial x} C(x,y)\big|_{x=S_t,y=t}\right) - \\
&\qquad\qquad dS_t \cdot \frac{\partial}{\partial x} C(x,y)\big|_{\substack{x=S_t\\ y=t}} \qquad (3.19)\\
&= dt \cdot \frac{\partial}{\partial y} C(x,y)\big|_{\substack{x=S_t\\ y=t}}
\end{aligned}$$

onde "d" designa a diferencial completa de função (lembre: $df(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)dx + \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)dy$).

A conta (3.19) demanda comentários que serão feitos agora. Primeiro, lembramos que as nossas contas são feitas como se estivessem no tempo t. Isto significa que vemos (porque realmente queremos ver) o momento $t+dt$ como um momento no futuro. Portanto S_{t+dt} é uma variável aleatória. Então a nossa intensão seria analisar a variável aleatória $\Pi(S_{t+dt}, t+dt) - \Pi(S_t,t)$. O que a análise (3.19) mostrou é que esta diferença não é aleatória, mas sim determinística.

A conclusão obtida acima será combinada agora com o princípio de arbitragem que diz que se o lucro trazido pela manutenção de uma carteira durante um intervalo $[t,t+dt]$ é deterministico, então este lucro deve ser igual ao lurco obtido durante o mesmo intervalo, na aplicação do valor total desta carteira na taxa de juros livre de risco. Matematicamente:

$$dt \cdot \frac{\partial}{\partial y} C(x,y)\big|_{\substack{x=S_t\\ y=t}} = r dt \cdot \left(C(S_t,t) - S_t \cdot \frac{\partial}{\partial x} C(x,y)\big|_{\substack{x=S_t\\ y=t}}\right) \tag{3.20}$$

Podemos eliminar dt nos dois lados de equação (3.20), chegando à conclusão

Cncl Se é realmente possível expressar o preço da opção como uma função C do tempo t e do valor da ação observado neste tempo S_t, então para que o mercado com esta opção fique livre de arbitragem é necessário que

$$\frac{\partial}{\partial y}C(x,y)\Big|_{\substack{x=S_t\\ y=t}} - rC(S_t,t) + rS_t \cdot \frac{\partial}{\partial x}C(x,y)\Big|_{\substack{x=S_t\\ y=t}} = 0 \tag{3.21}$$

Neste momento o leitor pode lembrar da parte de nosso argumento (logo após a fórmula (3.17)) onde sugerimos destinguir entre o valor de S_t e a variável aleatória S_{t+dt}. Esta sugestão deixa uma dúvida:

S_t na equação (3.21) é variável aleatória ou não?

Daremos a resposta. O nosso argumento começou com "seja t qualquer", e além disto, em lugar nenhum impusemos restrições nos valores de S_t. Portanto, a conclusão **Cncl** alega que (3.21) vale para quaisquer valores (observe: "valores"!) de S_t e t. Portanto, não há nenhuma variável aleatória em (3.21).

Para levar a equação (3.21) à forma usual de uma equação diferencial, substituímos S_t por x e t por y. Temos então a seguinte equação diferencial a ser resolvida:

$$\frac{\partial C(x,y)}{\partial y} rC(x,y) + rx\frac{\partial C(x,y)}{\partial x} = 0, \qquad x \geq 0, y \in [0,T] \tag{3.22}$$

Note que $x \geq 0$ porque o preço da ação não pode ser negativo, e note que $y \in [0,T]$ porque o tempo no nosso modelo percorre o intervalo $[0,T]$. A construção de condições de fronteira (3.14) foi detalhada junto com (3.14). A solução de (3.22)-(3.14) existe e se calcula usando os métodos de [Fo]. Colocando S e t no lugar de x e y desta solução, obtemos (3.15).

Gostaria de notar que, no nosso modelo, S_t pode assumir qualquer valor em $[0,+\infty)$ e portanto as equações em (3.21) e (3.22) são equivalentes. Podem existir outros modelos nos quais existem restrições nos valores de S_t. Nestes casos, a existência de solução para (3.22) garante a existência da solução para (3.21).

Acredito ter mostrado os detalhes de forma suficiente para eliminar todas as possíveis dúvidas do leitor. Todas, menos uma, que deixei como exercício.

Exercício 41. Uma análise meticulosa da estratégia **Est** revela que

$$\begin{aligned}
&\Pi(S_{t+dt}, t+dt) - \Pi(S_t,t) = \\
&= \left(C(S_{t+dt},t+dt) - S_{t+dt}\frac{\partial}{\partial x}C(x,y)\Big|_{\substack{x=S_{t+dt}\\ y=t+dt}}\right) \\
&\qquad - \left(C(S_t,t) - S_t\frac{\partial}{\partial x}C(x,y)\Big|_{\substack{x=S_t\\ y=t}}\right)
\end{aligned} \tag{3.23}$$

e não

$$\begin{aligned}
&\Pi(S_{t+dt}, t+dt) - \Pi(S_t,t) = \\
&= \left(C(S_{t+dt},t+dt) - S_{t+dt}\frac{\partial}{\partial x}C(x,y)\Big|_{\substack{x=S_t\\ y=t}}\right) \\
&\qquad - \left(C(S_t,t) - S_t\frac{\partial}{\partial x}C(x,y)\Big|_{\substack{x=S_t\\ y=t}}\right)
\end{aligned} \tag{3.24}$$

No nosso argumento, (3.9) é uma consequência de (3.24). Sugiro ao leitor assumir (3.23) e, refazendo todas as contas do nosso argumento, convencer-se de que o resultado final não difere do resultado obtido no nosso argumento, que se baseou em (3.24).

3.2 Precificação da opção européia no modelo de Black e Scholes pelo princípio de arbitragem

Modelo de Black e Scholes é um mercado com somente um ativo, que pode ser vendido ou comprado em quaisquer instantes do intervalo de tempo $[0, T]$, e cujo preço no tempo t é uma variável aleatória S_t, que tem a seguinte estrutura:

$$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma W_t}, t \in [0, T] \tag{3.25}$$

Acima, S_0 é uma constante chamada o valor inicial da ação, μ e σ são duas constantes, cujos nomes e interpretações são o assunto da Seção 3.5, e $W_t, t \in [0, T]$, é um processo chamado **movimento Browniano padrão** ou simplesmente **movimento Browniano**. Este processo é definido pelas seguintes regras:

$$\begin{gathered}\text{para qualquer } n \in \mathbf{N} \text{ e para quaisquer } 0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n \leq T, \\ \text{as variáveis aleatórias } W_{t_1} - W_{t_0}, \ldots, W_{t_i} - W_{t_{i-1}}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}} \text{ são} \\ \text{independentes, } W_0 \equiv 0 \text{ e } W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, (t-s)) \\ \text{para quaisquer } 0 \leq s < t \leq T.\end{gathered} \tag{3.26}$$

Não abordaremos neste livro a questão da **existência** do movimento Browniano e não demonstraremos que as trajetórias deste processo são continuas mas não diferenciáveis em t. As razões da não diferenciabilidade são mostradas na Seção 3.3. Que a existência e a continuidade não seguem imediatamente da definição, está demonstrado pelos seguintes exercícios.

Exercício 42. Seja o processo $\varepsilon_t, t \in [0, T]$, definido pelas regras (3.26), com a única diferença de que, agora, $\varepsilon_t - \varepsilon_s$ é uma variável aleatória que assume os valores $+1$ e -1, com as probabilidades $\frac{1}{2}$ para quaisquer $0 \leq s < t \leq T$. Mostre que tal processo não existe.

Exercício 43. Seja o processo $\epsilon_t, t \in [0, T]$, definido pelas seguintes regras: $\epsilon_t, t \in [0, T]$ são variáveis aleatórias independentes e, para cada $t \in [0, T]$, ϵ_t é uma variável aleatória que assume os valores $+1$ e -1, com as probabilidades $\frac{1}{2}$. Mostre que as trajetórias deste processo não são funções contínuas em t.

As opções européias de compra e de venda são definidas no modelo de Black e Scholes de forma idêntica às suas definições no modelo de trajetórias diferenciáveis (veja Seção 3.1). O problema abordado nesta seção é o mesmo:

$$\begin{gathered}\text{Dados os valores de } S_0, K, T \text{ e o valor da taxa de juros } r, \\ \text{qual o preço inicial da correspondente opção européia de compra?}\end{gathered} \tag{3.27}$$

O método que aplicamos para resolver (3.27) é parecido com o método usado na Seção 3.1. Fazemos apenas algumas modificações técnicas, afim de adaptar o método apresentado na Seção 3.1 (trajetórias diferenciáveis) para o modelo de Black e Scholes (trajetórias não diferenciáveis).

Começamos o nosso argumento com a seguinte suposição:

Sup Suponhamos que entre os valores que variam no modelo, o preço da opção no tempo t dependa somente de t e de S_t – o preço da ação no instante t. Em linguagem matemática, esta suposição diz que existe uma função de duas variáveis $C(\cdot, \cdot)$ tal que $C(S, t)$ expressa o preço da

opção no instante t para o preço S da ação neste instante, para quaisquer que sejam os valores de t e S.
Suponhamos ainda que $C(\cdot,\cdot)$ é pelo menos uma vez diferenciável em relação ao seu segundo argumento, e pelo menos duas vezes diferenciável em relação ao seu primeiro argumento.

Observamos que se a forma da função $C(\cdot,\cdot)$ fosse conhecida, então qualquer agente do mercado poderia realizar a seguinte estratégia:

Str Manter uma carteira que em cada instante t contenha uma opção comprada e $\frac{\partial C}{\partial S}$ ações vendidas.

Como na sessão anterior, o simbolo $\frac{\partial C}{\partial S}$ significa $\frac{\partial}{\partial x} C(x,y)\big|_{x=S_t,y=t}$.

O nosso objetivo agora é analisar esta carteira com a intenção de derivar uma equação envolvendo a função C. A solução desta equação dará a expressão de C, que até agora supomos que exista mas não conhecemos. Começamos notando que o valor da carteira composta pela **Str** no tempo t é

$$\Pi = C - \frac{\partial C}{\partial S} \cdot S \tag{3.28}$$

A nossa intensão agora é calcular o diferencial completo de Π. Como no caso do modelo com trajetórias diferenciáveis, Π é uma fução de duas variáveis. A principal diferença do caso da Seção 3.1 é que Π agora é gerado por um movimento Browniano. Então a diferencial de Π não é mais um diferencial usual, mas **diferencial estocástica**, que será definida na Seção 3.3. Usando $\mathbf{d}$ para diferencial estocástica e d para diferencial usual, temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}\Pi &= \mathbf{d}C - \frac{\partial C}{\partial S} \cdot \mathbf{d}S \\ &= \left[\frac{\partial C}{\partial t} \cdot dt + \frac{\partial C}{\partial S} \cdot \mathbf{d}S + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \cdot dt\right] - \frac{\partial C}{\partial S} \cdot \mathbf{d}S \\ &= \frac{\partial C}{\partial t} \cdot dt + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \cdot dt \end{aligned} \tag{3.29}$$

onde a expressão usada para $\mathbf{d}C$ é obtida no Exercício 54 da Seção 3.3. É para obter esta expressão que precisamos das suposições sobre a diferenciabilidade da função C (veja os detalhes na Seção 3.3).

Agora interpretamos o resultado da conta em (3.29):

Intr O acréscimo de valor da carteira durante um pequeno intervalo de tempo $[t, t+dt]$, $\mathbf{d}\Pi$, não depende do comportamento do preço da ação durante este intervalo.

Assim, o ganho do dono da carteira durante um pequeno intervalo de tempo $[t, t+dt]$ ficou determinístico. Lembramos que outra possibilidade de obter o ganho determinístico é aplicar o dinheiro na taxa de juros livre de risco r. Por outro lado, o princípio de arbitragem diz que se C está corretamente calculada, então os dois devem ser iguais. Em outras palavras, o valor correto de C implica em

$$\mathbf{d}\Pi = r\Pi dt, \tag{3.30}$$

que pode ser re-escrito, usando (3.28) e (3.29) da seguinte forma

$$\frac{\partial C}{\partial t} \cdot dt + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \cdot dt = r\left(C - \frac{\partial C}{\partial S} \cdot S\right) dt \tag{3.31}$$

Eliminando dt em (3.31), derivamos a segunte equação diferencial, na qual C é uma incógnita

$$\frac{\partial C}{\partial t} - rC + rS\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = 0 \tag{3.32}$$

Para achar a sua solução precisamos de condições de fronteira. Estas condições seguem dos valores terminais da opção européia de compra com o preço de exercício K e o tempo de exercício T (a primeira linha em (3.33)), e das considerações baseadas em bom senso (as últimas duas linhas em (3.33):

$$\begin{cases} C(S,T) = \max\{S-K,0\}, \text{ para todo } S \geq 0 \\ C(0,t) = 0, \text{ para todo } t \in [0,T] \\ \lim_{S\to\infty} C(S,t) = S, \text{ para todo } t \in [0,T] \end{cases} \tag{3.33}$$

A equação (3.32) é uma equação de calor (ou de difusão de calor). Os passos da solução da euqação (3.32) com as condições de fronteira (3.33) podem ser achados em qualquer livro sobre equações diferenciais parciais (uma apresentaqção cuidadosa e detalhada destes passos está no Capítulo 6 de [K]). Esta solução é a famosa **fórmula de Black e Scholes** do preço da opção européia de compra, derivada em [BS]:

$$\begin{aligned} C(S,t) &= S\Phi(d_1) - Ke^{r(t-T)}\Phi(d_2), \\ \text{onde} \quad d_1 &= \frac{\ln(S/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)\cdot(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \\ d_2 &= \frac{\ln(S/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\cdot(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ \text{e} \quad \Phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}}dz, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Note que μ aparece na definição (3.25) do preço da ação, mas não tem influência na fórmula (3.34) do preço da opção. Antes do artigo [BS] aparecer, já existiam argumentos heurísticos que justificaram a não influência de μ no preço da opção. A grande contribuição de Black e Scholes está em que eles apresentaram um raciocínio rigoroso que derivou uma fórmula que agradou tadas as exigências do bom senso e das considerações financeiras. A maioria das tentativas anteriores ao artigo [BS] falharam, porque os resultados eram variáveis aleatórias (melhor dizendo, dependia da trajetória do preço da ação). Isto não aconteceu no método de Black e Scholes, porque a equação final (3.32) "saiu" uma equação diferencial deterministica e não estocástica. Isto, por sua vez, é uma conseqüência do desaparecemento de $\mathbf{d}S$ em (3.29). É usual chamar este desaparecimento por "eliminação de aleatoriedade" do método de Black e Scholes. É, também, usual atribuir esta eliminação à utilização do cálculo estocástico neste método. Isto não é correto, pois o cálculo em $\mathbb{R}^n$ elimina a aleatoriedade da mesma forma, como mostra o conteúdo da Seção 3.1. A contribuição real do cálculo estocástico ao sucesso de Black e Scholes está no aparecimento do elemento $\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$ na equação final (3.31) – elemento que é impossível gerar com o uso do cálculo em $\mathbb{R}^n$.

Exercício 44. Reconstitua todos os detalhes do argumento desta seção do forma parecida ao que foi feito na Seção 3.1. Talvez, uma breve introdução ao cálculo estocástico da Seção 3.3, possa ajudar ao leitor.

Exercício 45. Derive a fórmula de Black e Scholes do preço da opção européia de venda.

3.3 Cálculo estocástico

Para convencer o leitor de que o Cálculo Estocástico é uma ferramenta natural para tratar o movimento Browniano, precisamos mostrar que ele não pode ser tratado no ambiente de Cálculo em $\mathbb{R}$. Vamos lembrar alguns conceitos de Cálculo em $\mathbb{R}$.

Começamos com os conceitos relacionados à diferenciabildade em $\mathbb{R}$.

$$\text{Se } f \text{ é uma função diferenciável, então} \\ f(t+dt) - f(t) = f'(t) + o(dt). \tag{3.35}$$

A formula em (3.35) se interpreta da seguinte maneira: a diferença entre $f(t+dt)$ e $f(t)$ é aproximadamente $f'(t)dt$ com a precisão $o(dt)$, onde $o(dt)$ significa uma quantia que tende a zero mais rápido que dt. Formalmente: $\lim_{dt\to 0}\{[f(t+dt)-f(t)]-f'(t)dt\}/dt = 0$. A palavra "tende" e o símbolo "$\lim_{dt\to 0}$" indicam que (3.35) é uma afirmação dinâmica (porque trata do comportamento de $f(t+dt)-f(t)$ quando $dt \to 0$). Nesta afirmação, $o(dt)$ e $f(t+dt)$ são quantias que também mudam em virtude da mudança de dt; enquanto $f(t)$ e $f'(t)$ são constantes.

O caráter dinâmico de (3.35) sugere ver dt como um acréscimo de tamanho extremamente pequeno, infinitesimal, em termos matemáticos, e traduzir (3.35) como

$$f(t+dt) - f(t) \approx f'(t)dt \text{ quando } dt \text{ é pequeno.} \tag{3.36}$$

A expressão $f'(t)dt$ se chama a **diferencial** da função f no ponto t; ela é designada por $df(t)$ ou df, quando o valor de t está claro no contexto. A expressão $f(t+dt)-f(t)$ é designada por $\Delta f(t)$ ou Δf, e se chama o **acréscimo** da função f no ponto t (note que estas notações não são boas porque não esclarecem para qual acrescimo do argumento foi calculado o acréscimo da função). Notamos ainda, a respeito do uso de simbolos d e Δ, que dt e Δt têm usualmente o mesmo sentido na literatura matemática, quer dizer $\Delta t = dt$. No presente livro usarmos dt para designar o acréscimo do argumento, e usarmos Δt para designar o comprimento de cada sub-intervalo da partição do intervalo $[0,T]$.

Podemos também, interpretar (3.35) dizendo que:

E existe uma constante "const" (cujo valor exato é $f'(t)$) tal que a função linear "const"$\times dt$ é uma aproximação de primeira ordem (em dt) para o comportamento de $f(t+dt)-f(t)$ na vizinhança infenitesimal de t.

Estudamos a existência da diferencial do movimento Brwoniano do ponto de vista da visão **E**.

Perguntamos agora se a diferencial usual existe para o movimento Browniano W.:

$$\text{Dados } t \in [0,T] \text{ e } W_t \in \mathbb{R} \text{ fixos, porém arbitrários,} \\ \text{pergunta-se: existe uma variável aleatória } X_t \text{ tal que} \\ X_t dt \text{ seja a aproximação de primeira ordem para } W_{t+dt} - W_t? \tag{3.37}$$

Acontece que[2]

$$\text{"}\mathbf{não}\text{" é a resposta para (3.37), quaisquer que sejam } t \text{ e } W_t. \tag{3.38}$$

[2]A rigor, a afirmação (3.38) e todas as outras afirmações sobre as propriedades de trajetórias do movimento Browniano deveriam conter a frase "com probabilidade 1". Já que a exposição desta sessão não é rigorosa, resolvi abandonar este formalismo.

Para justificar o "**não**" de (3.38) precisaremos de algumas notações as quais serão introduzidas agora. Introduziremos Ω como o conjunto de todas as trajetórias do movimento Browniano $W.$ no intervalo $[0, T]$. Usaremos ω para designar um elemento de Ω (quer dizer, uma trajetória); quando precisarmos de mais que uma trajetória, usaremos $\omega_1, \omega_2, \ldots$. O simbolo $W_t[\omega]$ designará o valor do processo $W.$ no tempo t na trajetória ω.

ω é o argumento de W_t, embora não seja um valor mas sim uma trajetória. A preferência por $W_t[\omega]$ ao lugar de $W_t(\omega)$ baseia-se somente em considerações estéticas.

Exercício 46. Prezado leitor! Por favor, certifique-se que entendeu a diferença entre W_t e $W_t[\omega]$. Outras perguntas vinculadas à última são: Como você interpretaria $W.[\omega]$? Qual a diferença entre $W_t[\omega]$ e ω_t? (Lembre que ω é uma trajetória, portanto ω_t deve ser entendido como o valor desta trajetória no ponto t.) Se a sua resposta na última pergunta é "nenhuma", ache as razões para usarmos $W_t[\omega]$ e não ω_t.

Com as construções acima introduzidas, podemos detalhar a pergunta (3.37):

D Fixe arbitrariamente $t \in [0, T]$ e um número real w_t. Considere o conjunto Ω', constituído de todas as trajetórias ω para as quais $W_t[\omega] = w_t$. Pergunte-se se para cada ω de Ω', existe uma constante $X_t[\omega]$ tal que $X_t[\omega]dt$ seja uma aproximação de primeira ordem de $W_{t+dt}[\omega] - W_t[\omega]$. Vale a pena acrescentar que $W_{t+dt}[\omega] - W_t[\omega]$ entede-se como a diferença entre os valores do processo $W.$ para os tempos $t + dt$ e t na (mesma!) trajetória ω.

A colocação da pergunta **D** deixou claro que se a resposta fosse "sim", então para todo $\omega \in \Omega'$ teríamos um valor que designamos por $X_t[\omega]$. Lembramos qma função que associa um valor numérico ao cada elemento de Ω', se chama **variável aleatória** (definida em Ω'). É por esta razão que perguntamos sobre a existência de uma variável aleatória X_t em (3.37).

Exercício 47. Mostre que para quaisquer que sejam t e W_t, não existe uma constante x, tal que xdt é a aproximação de primeira ordem para $W_{t+dt} - W_t$.

Vamos agora ver porque a resposta em (3.37) é **não**. A demosntração será menos pesada se tomar $t = 0$ em (3.37).

Para justificar (3.38), precisamos do seguinte fato[3]: Existe uma constante $c > 0$, tal que para toda trajetória ω, a função $W.[\omega]$ cruza tanto a linha $c\sqrt{t}$ quanto a linha $-c\sqrt{t}$ infinitas vezes, em qualquer intervalo $[0, dt]$.

Fixamos agora um ω e seja $X_0[\omega]$ um valor real não negativo arbitrário (para o valor não positivo, o argumento é similar). Consideremos a função linear $X_0[\omega] \cdot t$ e o comportamento da diferença entre ela e $W_t[\omega] - W_0[\omega]$ quando $t \to 0$. Em cada instante t, em que $W.[\omega]$ cruza a curva $-c\sqrt{\cdot}$, esta diferença é pelo menos $c\sqrt{t}$, em valor absoluto. Portanto, o resultado de Dvoretzky implica que a considerada diferença não se comporta como $o(t)$ quando $t \to 0$ (usamos o simples fato de que $\sqrt{t}$ tende a 0 mais devagar que t). Isto implica em (3.37) para o caso $t = 0$. Outros casos seguem de modo similar.

Exercício 48. Para o processo $V.$, definido em (3.3) da Seção 3.1, ache a variável aleatória X_0 tal que $X_0 dt$ seja a aproximação de primeira ordem para $V_{dt} - V_0$. Qual a distribuição de X_0?

[3]Provado por A. Dvoretzky em seu artigo "On the oscillation of the Brownian motion process", *Israel Journal of Mathematics*, **1**, 212-214 (1963). Conheci este resultado através da Seção 2.11 do [KS]. Este resultado é parecido com a Lei do Logaritmo Iterado para o movimento Browniano. Para as necessidades do nosso argumento, poderia usar esta lei no lugar do resultado de Dvoretzky.

Exercício 49. Para o processo $V_\cdot$, definido em (3.3) da Seção 3.1, ache a variável aleatória $X_{\pi/2}$ tal que $X_{\pi/2}dt$ seja a aproximação de primeira ordem para $V_{\pi/2+dt} - V_{\pi/2}$. Qual a distribuição de $X_{\pi/2}$?

Exercício 50. Seja $W_\cdot$ o movimento Browniano. Definimos o processo $M_\cdot$ por $M_t = t^2 W_t, t \in [0,T]$. Mostre que $0 \cdot dt$ é a aproximação de primeira ordem para $M_{dt} - M_0$.

Exemplo 7. Definimos o processo $Z_t, t \in [0,T]$, por

$$Z_t = 2t + 3W_t, \quad t \in [0,T] \tag{3.39}$$

A presença de $W_\cdot$ na definição de $Z_\cdot$ e o argumento aplicado para mostrar (3.37) implicam que

$$\begin{array}{c}\text{para quaisquer valores fixos, } t \in [0,T] \text{ e } Z_t, \text{ não existe variável aleatória } Y_t \\ \text{tal que } Y_t dt \text{ é a aproximação de primeira ordem para } Z_{t+dt} - Z_t.\end{array} \tag{3.40}$$

Porém,

$$Z_{t+dt} - Z_t = 2dt + 3\{W_{t+dt} - W_t\} \tag{3.41}$$

o que mostra que (3.40) não impede que $Z_{t+dt} - Z_t$ seja expresso da forma

$$\text{“algo”} \times dt + \text{“outro algo”} \times \{W_{t+dt} - W_t\} \tag{3.42}$$

Exemplo 8. Seja o processo $U_\cdot$, definido por

$$U_t = \sin(t) + 3W_t, \quad t \in [0,T] \tag{3.43}$$

Novamente, como no Exemplo 7, temos que para quaisquer valores fixos,
$t \in [0,T]$ e U_t, não existe variável aleatória Y_t tal que $Y_t dt$ seja uma aproximação de primeira ordem para a diferença $U_{t+dt} - U_t$. Contrariamente ao caso do Exemplo 7, não podemos igualar esta diferença à expressão (3.42), porém, a seguinte conta

$$U_{t+dt} - U_t = (\sin(t+dt) - \sin(t)) + 3\{W_{t+dt} - W_t\} \tag{3.44}$$
$$= (\cos(t)dt + o(dt)) + 3\{W_{t+dt} - W_t\} \tag{3.45}$$

mostra que podemos aproximá-la por esta expressão com a precisão $o(dt)$.

O resultado (3.45) do Exemplo 8 sugere uma pergunta genérica: se $Z_\cdot$ é um processo tal que Z_t é uma função de W_t e t, será que existe uma expressão da forma (3.42) que seja a aproximação de $Z_{t+dt} - Z_t$ com a precisão $o(dt)$? Nesta pergunta os dois “algos” de (3.42) podem ser funções de W_t e t. Quando a resposta é positiva, a referida expressão denota-se por $\mathbf{d}Z_t$ e denomina-se **a diferencial estocástica** do processo $Z_\cdot$. Esta foi a definição do símbolo **d** usado na Seção 3.2. Note que esta definição dá a expressão exata para $\mathbf{d}W_t$, que aparecerá no Lema de Itô e nas nossas contas embaixo:

$$\mathbf{d}W_t = W_{t+dt} - W_t \tag{3.46}$$

O seguinte resultado responde à pergunta acima.

Lema de Itô (versão coloquial).[4] Seja $f(x,y)$ uma função de duas variáveis, pelo menos duas vezes diferenciável em relação ao primeiro argumento x, e pelo menos uma vez diferenciável em relação ao segundo argumento y. Seja $Z.$ um processo definido por

$$Z_t = f(W_t, t), \quad t \in [0,T]. \tag{3.47}$$

Então, $\mathbf{d}Z_t$ existe e tem a seguinte expressão:

$$\mathbf{d}Z_t = dt \cdot \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)|_{\substack{x=W_t\\ y=t}} + dt \cdot \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y)|_{\substack{x=W_t\\ y=t}} + \mathbf{d}W_t \cdot \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)|_{\substack{x=W_t\\ y=t}} \tag{3.48}$$

ou em forma mais sucinta:

$$\mathbf{d}Z_t = dt \cdot \frac{\partial f(W_t,t)}{\partial t} + dt \cdot \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(W_t,t)}{\partial (W_t)^2} + \mathbf{d}W_t \cdot \frac{\partial f(W_t,t)}{\partial W_t} \tag{3.49}$$

Exemplo 9. Usaremos Lema de Itô para calcular a diferencial estocástica do preço da ação no modelo de Black e Scholes (fórmula (3.54)). Lembramos que este preço é dado por

$$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma W_t}, \quad t \in [0,T], \tag{3.50}$$

onde μ, σ, S_0 são constantes.

Introduzimos a função $f(x,y) = e^{\mu y + \sigma x}$ e notamos que

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \sigma \cdot e^{\mu y + \sigma x}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) = \sigma^2 \cdot e^{\mu y + \sigma x}, \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \mu \cdot e^{\mu y + \sigma x} \tag{3.51}$$

Portanto, pelo Lema de Itô,

$$\begin{aligned} \mathbf{d}\,[f(W_t,t)] \;\;&=\;\; \mu e^{\mu t + \sigma W_t} dt + \frac{1}{2}\sigma^2 e^{\mu t + \sigma W_t} dt \\ &\qquad + \sigma e^{\mu t + \sigma W_t} \mathbf{d}W_t \end{aligned}$$

Agora, usando

$$\mathbf{d}S_t = S_0\, \mathbf{d}\,[f(W_t,t)] \tag{3.52}$$

podemos concluir que

$$\mathbf{d}S_t = (\mu + \frac{1}{2}\sigma^2) S_0 e^{\mu t + \sigma W_t} dt + \sigma S_0 e^{\mu t + \sigma W_t} \mathbf{d}W_t. \tag{3.53}$$

Exercício 51. Prove que (3.52) é válido. Prove um fato mais geral: se c é uma constante e se o processo $U.$ possui a diferencial estocástica, então $\mathbf{d}\,[cU_t] = c\,\mathbf{d}U_t$.

Notando que $S_0 e^{\mu t + \sigma W_t}$ em (3.53) é o próprio S_t, podemos reescrever (3.53) da seguinte forma:

$$\frac{\mathbf{d}S_t}{S_t} = \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma \mathbf{d}W_t. \tag{3.54}$$

[4] A formulação completa e a sua demonstração podem ser encontradas em [KS].

O exemplo acima mostra que definir o processo de preço $S.$ por $S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma W_t}$ é equivalente a definí-lo pela equação (diferncial estocástica) (3.54) junto com a condição inicial $S_t|_{t=0} = S_0$. A primeira é a forma explícita e a segunda é a forma implícita. A segunda forma é freqüentemente usada na literatura.

O Lema de Itô apresentado acima permite calcular o diferencial estocástico para um processo cuja dependência do movimento Browniano é conhecida explicitamente. Este não é o caso que precisávamos tratar na Seção 3.2. Na conta (3.29) daquela seção tivemos que expressar a diferencial estocástica de $C.$, cuja forma da dependência de $W.$ não conhecemos. Ainda tivemos um agravante a mais: $C.$ dependia de $W.$ por intermédio de $S.$ (ou seja: $C_t = C(S_t, t)$, onde $S_t = S(W_t, t) := S_0 e^{\mu t + \sigma W_t}$). Acontece que existe uma versão genérica do Lema de Itô que permite tratar deste caso. Este resultado tem grande utilidade nos trabalhos que estudam processos estocásticos como modelos de dinâmica de preços de ativos financeiros. Este resultado é o seguinte

Lema de Itô; caso genérico (versão coloquial). Seja o processo $Z.$ como definido em (3.47). Seja $g(x,y)$ uma função de duas variáveis, pelo menos duas vezes diferenciável em relação ao primeiro argumento x, e pelo menos uma vez diferenciável em relação ao segundo argumento y. Seja $U.$ um processo definido por

$$U_t = g(Z_t, t), \quad t \in [0, T]. \tag{3.55}$$

Então, $\mathbf{d}U_t$ existe e tem a seguinte expressão:

$$\mathbf{d}U_t = dt \cdot \frac{\partial}{\partial y} g(x,y)\bigg|_{\substack{x=Z_t\\ y=t}} + (\mathbf{d}Z_t)^2 \cdot \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} g(x,y)\bigg|_{\substack{x=Z_t\\ y=t}} + \mathbf{d}Z_t \cdot \frac{\partial}{\partial x} g(x,y)\bigg|_{\substack{x=Z_t\\ y=t}} \tag{3.56}$$

ou em forma mais sucinta:

$$\mathbf{d}U_t = dt \cdot \frac{\partial g(Z_t,t)}{\partial t} + (\mathbf{d}Z_t)^2 \cdot \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g(Z_t,t)}{\partial (Z_t)^2} + \mathbf{d}Z_t \cdot \frac{\partial g(Z_t,t)}{\partial Z_t} \tag{3.57}$$

onde $(\mathbf{d}Z_t)^2$ é obtido elevando ao quadrado a expressão de $\mathbf{d}Z_t$ dada por (3.48) e obedecendo às seguintes regras:

$$\mathbf{d}W_t \cdot \mathbf{d}W_t = dt, \quad dt \cdot \mathbf{d}W_t = \mathbf{d}W_t \cdot dt = 0, \quad dt \cdot dt = 0 \tag{3.58}$$

Exercício 52. Seja $U.$ definido por $U_t = \log(S_t)$, onde S_t é dado por (3.25). Calcule $\mathbf{d}U_t$ usando o caso genérico do Lema de Itô (com $g(x,y) = \log(x)$). Calcule $\mathbf{d}U_t$ diretamente (o que é possível, pois $U_t = \log S_0 + \mu T + \sigma W_t$). Compare os resultados. Se não errou, devem coincidir.

Exercício 53. Seja $U.$ definido por $U_t = \sin(tS_t)$. Calcule $\mathbf{d}U_t$.

Exercício 54. Justifique a expressão para $\mathbf{d}C$ usada na primeira passagem em (3.29).

Exercício 55. Justifique as regras em (3.58).

O argumento da presente seção é pouco rigoroso. Uma das razões é que

a diferencial estocástica não existe.

O que existe (no sentido de possuir uma definição matemática) é a integral estocástica. Existem também equações integrais estocásticas que envolvem tais integrais. Equações diferenciais estocásticas são formas de apresentar estas equações integrais. Esta apresentação é simbólica, no sentido de que podemos estabelecer as regras de manipulação com diferenciais estocásticas e até as suas interpretações intuitivas, mas não podemos demonstrar nada. As demonstrações são factíveis somente para equações integrais estocásticas; são os resultados destas demonstrações que podem ser expressos em termos de diferenciais estocásticas. Algo similar acontece no Cálculo em $\mathbb{R}$. Considere a seguinte conta

$$\int_2^3 x^3 dx = \int_2^3 x^2 \cdot x dx = \frac{1}{2}\int_2^3 x^2 d(x^2) = \frac{1}{2}\int_4^9 y dy.$$

Na segunda passagem usamos a regra $xdx = \frac{1}{2}d(x^2)$, que é uma regra simbólica. Na verdade, $\int_a^b \cdot(x)dx$ é um símbolo inseparável, que significa "o integral de Riemann no intervalo $[a,b]$ da função colocada no lugar do $\cdot$". A igualdade de $\int_2^3 x^3 dx$ e $\frac{1}{2}\int_4^9 y dy$ pode ser demonstrada a partir da definição destas integrais. A regra $xdx = \frac{1}{2}d(x^2)$ é uma expressão simbólica desta igualdade.

3.4 Precificação da opção européia no modelo de Black e Scholes pelo princípio de neutralidade ao risco

Certos pontos do argumento da Seção 3.2 não foram esclarecidos com devido rigor. Isto pode criar dúvidas sobre a validade do resultado daquela seção, que é a famosa fórmula (3.34) de Black e Scholes. Um forte argumento a favor de sua validade é a derivação da mesma fórmula por outro método e é o que faremos na presente seção: derivaremos a fórmula de Black e Scholes usando o princípio de neutralidade ao risco.

O nosso argumento precisará do seguinte fato (3.61) que deixarei para ser provado pelo leitor.

Exercício 56. Seja $Y \sim \mathcal{N}(m,\tau^2)$ (quer dizer, Y é uma variável aleatória normalmente distribuída com média m e variância τ^2. Designamos por $f_Y(y)$ a densidade da sua distribuição:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau} e^{-\frac{(y-m)^2}{2\tau^2}}, \qquad y \in (-\infty, +\infty) \tag{3.59}$$

Então, para quaisquer dois valores k e a,

$$\mathbb{E}\left[e^{kY}\mathrm{I}_{\{Y\geq a\}}\right] \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau}\int_a^\infty e^{ky} f_Y(y)dy \tag{3.60}$$

$$= e^{km+\frac{1}{2}k\tau^2}\Phi\left(\frac{m-a+k\tau^2}{\tau}\right), \tag{3.61}$$

onde Φ é a função acumulada da distrubuição normal padrão:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz. \tag{3.62}$$

O símbolo $\mathbb{E}\left[e^{kY}\mathrm{I}_{\{Y\geq a\}}\right]$ significa o valor esperado da variável aleatória e^{kY} sobre todos os valores de Y não menores que a.

Note que não há milagre em que $\mathbb{E}\left[e^{kY}\mathrm{I}_{\{Y\geq a\}}\right]$ possa ser calculado explicitamente. A razão é que e^{kY} de $\mathbb{E}\left[e^{kY}\mathrm{I}_{\{Y\geq a\}}\right]$ contribuiu e^{ky} em integral em (3.60), enquanto f_Y contrubuiu $e^{(y-m)^2/2\tau^2}$ na mesma integral, fazendo com que a função integrada tem a forma "exp{polinómio quadrado em y}". Portanto toda integral pode ser levada à expressão $\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}}dz$, com o apropriado valor de x, por uma transformação linear de y para z. É uma dica que pode ajudar a resolver o Exercício 56.

Começamos reescrevendo o processo (3.25) de preço da ação no modelo de Black e Scholes da seguinte forma:

$$S_t = S_0 e^{B_t}, \quad t \in [0,T], \tag{3.63}$$

onde $B_t, t \in [0,T]$ é o movimento Browniano não padrão, cuja P-distribuição é determinada pela seguinte regra:

$$\begin{gathered}\text{para qualquer } n\in\mathbf{N} \text{ e quaisquer } 0\leq t_1<\cdots<t_i<\cdots<t_n\leq T,\\ \text{as variáveis aleatórias } B_{t_1}-B_0,\ldots,B_{t_i}-B_{t_{i-1}},\ldots,B_{t_n}-B_{t_{n-1}}\\ \text{são independentes, } B_0\equiv 0, \text{ e para quaisquer } 0\leq s<t\leq T,\\ B_t-B_s\sim\mathcal{N}(\mu(t-s),\sigma^2(t-s)),\end{gathered} \tag{3.64}$$

onde μ e σ são duas constantes.

Há necessidade de introduzir outra distribuição do processo $B.$. Para podermos distinguir entre as duas, a que definimos em (3.64), chamamos "P-distribuição", e a que será definida chamaremos "Q-distribuição".

Claro que a probabilidade de qualquer evento que envolve o processo $B.$ (por exemplo, $\mathbb{P}\left[B_T\geq 0\right]$) depende da distribuição deste processo. Para indicar que usamos a P-distribuição, escreveremos $\mathbb{P}^P$. Quando calculamos a esperança matemática e a variância em relação à P-distribuição, escreveremos $\mathbb{E}^P$ e Var^P. Os símbolos $\mathbb{P}^Q$, $\mathbb{E}^Q$ e Var^Q se referirão à Q-distribuição.

A precificação de qualquer derivativo pelo princípio de neutralidade ao risco começa com a procura da probabilidade Q, que faz com que todos os ativos sejam neutros ao risco. No nosso caso, isto significa que procuramos por uma Q-distribuição, tal que

$$\begin{gathered}\mathbb{E}^Q\left[S_v \text{ dado que o valor de } S_u \text{ é } s_u\right]=e^{r(v-u)}s_u,\\ \text{para todos } 0\leq u<v\leq T \text{ e todo } s_u\geq 0,\end{gathered} \tag{3.65}$$

onde r é a taxa de juros livre de risco.

Felizmente, no caso de modelo de Black e Scholes, a Q-distribuição admite a expressão explícita, dada abaixo (Exercício 58 dara detalhes sobre como esta expressão foi achada).

$$\begin{gathered}\text{para qualquer } n\in\mathbf{N} \text{ e quaisquer } 0\leq t_1<\cdots<t_i<\cdots<t_n\leq T,\\ \text{as variáveis aleatórias } B_{t_1}-B_0,\ldots,B_{t_i}-B_{t_{i-1}},\ldots,B_{t_n}-B_{t_{n-1}}\\ \text{são independentes, } B_0\equiv 0, \text{ e para quaisquer } 0\leq s<t\leq T,\\ B_t-B_s\sim\mathcal{N}\left((r-\tfrac{1}{2}\sigma^2)(t-s),\sigma^2(t-s)\right).\end{gathered} \tag{3.66}$$

Exercício 57. Mostre que se $S.$ é definido por (3.63) e $B.$ tem Q-distribuição (3.66), então para quaisquer $0\leq u<v\leq T$ e qualquer valor $s_u\geq 0$, temos que

$$\begin{gathered}\text{dado que } S_u=s_u, \text{ a variável aleatória } S_v=S_0e^{B_v}\\ \text{tem a distribuição } s_ue^Y, \text{ onde}\\ \text{a variável aleatória } Y\sim\mathcal{N}\left((r-\tfrac{1}{2}\sigma^2)(v-u),\sigma^2(v-u)\right)\end{gathered} \tag{3.67}$$

Calculamos

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}^Q\left[S_v \text{ dado que o valor de } S_u \text{ é } s_u\right] = \\
&= s_u \mathbb{E}\left[e^Y\right] \quad (\text{usando } (3.67), \text{ onde a variável aleatória } Y \text{ é de } (3.67)) \\
&= s_u e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(u-v)+\frac{1}{2}\sigma^2(u-v)} \quad (\text{tomando } a=-\infty, k=1, \tau=\sigma \\
&\qquad\qquad\qquad \text{e } m = r-\frac{1}{2}\sigma^2 \text{ em } (3.61)) \\
&= s_u e^{r(v-u)}
\end{aligned}
\tag{3.68}
$$

o que demonstra (3.65).

Abordamos agora o problema de precificação de opção européia de compra com o tempo de exercício T e o preço de exercício K. Um processo $C_t, t \in [0,T]$, é o processo de preço desta opção calculado pelo princípio de neutralidade ao risco se

$$
C_T = \max\{S_T - K, 0\}, \tag{3.69}
$$

$$
\text{e } \mathbb{E}^Q\left[C_v \text{ dado que o valor de } C_u \text{ é } c_u\right] = e^{r(v-u)} c_u, \tag{3.70}
$$

$$
\text{para todos } 0 \leq u < v \leq T \text{ e todo } c_u \geq 0,
$$

onde Q é aquela Q-distribuição que procurávamos para satisfazer (3.65).

O nosso conhecimento de Q permite calcular a distribuição da variável aleatória C_t para qualquer $t \in [0,T]$, porém calcularemos somente C_0. Para isto, tomamos $v = T$ e $u = 0$ em (3.70). Temos então

$$
\mathbb{E}^Q\left[C_T \text{ dado que o valor de } C_0 \text{ é } c_0\right] = c_0 e^{rT} \tag{3.71}
$$

Lembramos agora que C_0 é um valor e não uma variável aleatória. Aproveitando este fato, podemos fazer duas modificações em (3.71): podemos eliminar "dado que $C_0 = c_0$" (já que condicionar a distribuição de C_T por uma constante não modifica a distribuição de C_T), e podemos colocar C_0 no lugar de c_0, no lado direito de (3.71). Fazendo estas modificações e lembrando a condição (3.69), concluímos que o valor procurado C_0 satisfaz

$$
\mathbb{E}^Q\left[C_T\right] = C_0 e^{rT}, \text{ onde } C_T = \max\{S_T - K; 0\} \tag{3.72}
$$

Para continuar a nossa conta, observamos que, em virtude de (3.63), $S_T \geq K$ se e somente se $B_T \geq \ln(K/S_0)$. Portanto, a relação (3.72) implica que

$$
\begin{aligned}
C_0 e^{rT} &= \mathbb{E}^Q\left[\max\{S_T - K; 0\}\right] = \mathbb{E}^Q\left[\left(S_0 e^{B_T} - K\right) \mathrm{I}_{\{B_T \geq \ln(K/S_0)\}}\right] \\
&= S_0 \mathbb{E}^Q\left[e^{B_T} \mathrm{I}_{\{B_T \geq \ln(K/S_0)\}}\right] - K \mathbb{E}^Q\left[\mathrm{I}_{\{B_T \geq \ln(K/S_0)\}}\right]
\end{aligned}
\tag{3.73}
$$

Para calcular a última esperança em (3.73) aplica-se a fórmula (3.61) com $k = 0$, para calcular a penúltima, aplica-se (3.61) com $k = 1$. Em ambos os casos, $Y = B_T$, $a = \ln(K/S_0)$, $m = (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T$ e $\tau = \sigma$, devido ao fato de que as esperanças são calculadas sobre a Q-distribuição de B_T. Deixo ao leitor terminar a conta (3.73) e se certificar de que a expressão final para C_0 coincide com a fórmula de Black e Scholes (3.34) obtida na Seção 3.2.

Agora é um bom momento para mostrar ao leitor **como** o princípio de neutralidade ao risco fornece o preço de uma opção, e **porque** este preço é considerado correto. Faremos isto para um mercado que possui somente um ativo.

Como. Seja $S_t, t \in [0,T]$, o processo de preço do único ativo do mercado. Note que "dar" um processo significa determinar seus valores e as probabilidades de assumir estes valores. Esta probabilidade "dada" será chamada P-distribuição. No primeiro passo, procura-se uma outra distribuição, chamada Q (nos valores do processo $S_.$; note, os valores não se modificam!), tal que o preço do ativo, descontado por taxa de juros livre de risco (r), seja um martingal em relação à Q-distribuição. Em termos matemáticos:

$$\mathbb{E}^Q\left[S_v \text{ dado que } S_t = s_t \text{ para todo } t \in [0,u]\right] = s_u \cdot e^{r(v-u)}, \qquad (3.74)$$
$$\text{para todos } 0 \le u < v \le T \text{ e todos os possíveis valores } s_t, t \in [0,u]$$

Note a diferença entre a requisição geral (3.74) e a sua implementação (3.65). O condicionamento por "$S_t = s_t, t \in [0,u)$" em (3.65) é desnecessário porque o preço da ação no modelo de Black e Scholes é um processo de Markov[5]. A conseqüência é que, dado $S_u = s_u$, o comportamento de $S_t, t > u$, não depende dos valores de $S_t, t < u$.

Suponha agora que um derivativo na base do ativo $S_.$ foi introduzido no mercado. A definição deste derivativo em termos de obrigações e direitos de lançador e de titular, sempre pode ser reescrito em termos de certas condições. Por exemplo, no caso de opção européia de compra estas condições são $C_T = \max\{S_T - K; 0\}$. O princípio de neutralidade ao risco denomina um processo $C_t, t \in [0,T]$, "o processo de preço do derivativo" se

$$\mathbb{E}^Q\left[C_v \text{ dado que } C_t = c_t \text{ para todo } t \in [0,u]\right] = c_u \cdot e^{r(v-u)}, \qquad (3.75)$$
$$\text{para todos } 0 \le u < v \le T \text{ e todos os possíveis valores } c_t, t \in [0,u]$$
$$\text{e } C_t, t \in [0,T] \text{ satisfaz as condições do derivativo} \qquad (3.76)$$

A necessidade da condição (3.76) está clara. A condição (3.75) tem a seguinte interpretação: o preço do derivativo, sendo descontado por taxa de juros livre de risco (r), é um martingal em relação à Q-distribuição.

Porque o princípio de neutralidade ao risco dá o preço correto de derivativo, segue da interpretação de (3.75) dada acima. A justificativa é a seguinte. Se era possível achar Q que satisfaz (3.74), então o mercado não permitiu arbitragem. O derivativo introduzido neste mercado está corretamente precificado se o mercado continua não permitir a arbitragem – este é princípio de arbitragem que foi discutida nos Capítulos 1 e 2. A exigência (3.75) é a condição que garante a ausência de arbitragem no mercado com o ativo e seu derivativo. Este fato foi demonstrado para o mercado uniperíodo. Ele pode ser demonstrado no mercado multiperíodo, usando técnicas simples. Para mercado de tempo contínuo, tal demonstração exige técnicas que não cabem a este livro.

Note que a Q-distribuição está sendo usada somente para "testar" a ausência de arbitragem no mercado sem derivativo e depois, para garantir esta ausência quando o derivativo for adicionado ao mercado. Esta Q-distribuição não tem nada a ver com a realidade. Por exemplo, não faz sentido procurar a Q-probabilidade do evento "o derivativo vale 0 no tempo final". A verdadeira P-probabilidade deste evento pode ser completamente diferente da sua Q-probabilidade.

Voltamos à implementação de (3.75) e (3.76) da presente seção. O requerimento (3.76) se reduziu ao (3.69) por razões já explicadas. Analisando a dedução de (3.75), o leitor nota que a

[5] Pela forma da sua dependência do movimento Browniano, e porque este movimento é um processo de Markov por sua própria definição.

condição “$C_t = c_t$, para todo $t \in [0, u]$” foi substituída por “$C_u = c_u$” em (3.70). Isto aconteceu porque supomos que $C.$ é um processo de Markov. Felizmente, o resultado final (que é a fórmula (3.34) de Black e Scholes) confirma esta suposição. Porém, não existem razões genéricas que justifiquem esta substituição para qualquer derivativo.

Há mais um detalhe que não passa despercebido: por que na passagem de (3.71) à (3.72) tomamos C_0 como uma constante? Poderíamos responder que tomamos porque quisemos que o preço inicial fosse um valor e não uma variável aleatória. Mas esta resposta levanta outra pergunta natural: tomamos porque quisemos ou tomamos porque podíamos? Na verdade, tomamos porque podíamos, e isto seria claro se as esperanças condicionais (3.74) e (3.75) fossem escritas com o uso de filtração. Já que não consiguimos explicar o conceito de filtração para processos de tempo contínuo, a dúvida ficará até o próximo livro.

Exercício 58. Para motivar a pergunta deste exercício, revelamos o caminho que levou à caraterização de Q-distribuição.

Fixamos desde princípio que a Q-distribuição procurada seja tal que

$$\begin{aligned}
&1) \quad \text{o processo } B. \text{ seja um movimento Browniano sobre } Q; && (3.77)\\
&2) \quad \mathrm{Var}^Q[B_t - B_s] = \mathrm{Var}^P[B_t - B_s] \text{ para todos } 0 \le s < t \le T && (3.78)\\
&\quad\quad \text{quer dizer, } \mathrm{Var}^Q[B_t - B_s] = \sigma^2(t-s) \text{ para } \sigma \text{ de (3.64)}
\end{aligned}$$

O que ficou indeterminado era o *drift* de $B.$ sobre a Q-distribuição, onde por *drift* entende-se um valor m tal que $\mathbb{E}^Q[B_t - B_s] = m(t-s)$, para todos $0 \le s < t \le T$. Lembramos porém, que Q deve satisfazer a condição (3.65). Esta condição determinou o *drift*:

$$\mathbb{E}^Q[B_t - B_s] = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \cdot (t-s), \qquad 0 \le s < t \le T \tag{3.79}$$

A descrição de Q, dada em (3.66), é um equivalente a (3.77), (3.78), (3.79) juntas.

Sugerimos agora ao leitor demonstrar que a igualdade (3.65) é válida sobre qualquer Q-distribuição que satisfaz (3.77) e as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
&1) \quad \mathrm{Var}^Q[B_t - B_s] = \kappa^2(t-s);\\
&2) \quad \mathbb{E}^Q[B_t - B_s] = \left(r - \frac{1}{2}\kappa^2\right)(t-s), \qquad 0 \le s < t \le T, && (3.80)
\end{aligned}$$

onde κ é um valor positivo qualquer.

O Exercício 58 levanta a dúvida

Qual a razão de exigir (3.78), em outras palavras, por que a volatilidade de $B.$ sobre a distribuição Q deve ser igual à sua volatilidade original (sobre a distribuição P)?

Pensar nesta pergunta gera duas dúvidas ainda mais profundas:

Qual a razão de exigir (3.77), em outras palavras, porque $B.$ deve “continuar” a ser um movimento Browniano sobre a distribuição Q?

Porque não podemos modificar os valores de $B.$, mas somente a sua distribuição?

A profundidade da teoria desenvolvida neste livro não permite responder estas perguntas. O livro [Ne] tenta esclarecer as dúvidas agora levantadas, porém, sem o rigor desejado.

3.5 O retorno e a volatilidade da ação no modelo de Black e Scholes

A dinâmica do preço da ação no modelo de Black e Scholes depende dos dois parâmetros: σ e μ. O primeiro se chama a **volatilidade** do preço da ação, e o segundo se refere ao **retorno esperado** deste preço. Dependendo do livro e do autor, o termo "retorno esperado" é usado para denominar quantias diferentes. O objetivo da presente seção é esclarecer as razões desta ambigüidade e justificar uma receita simples para combatê-la: quando algem usar um termo contendo a palavra "retorno", não se intimide em pedir a definição exata deste termo.

Seja o preço da ação dado por

$$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma W_t}, \qquad t \in [0, T], \tag{3.81}$$

onde $W.$ é o movimento Browniano padrão. Para quaisquer $0 \leq s < t \leq T$ dizemos que

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_s}\right) \tag{3.82}$$

é **o logaritmo do retorno no intervalo de tempo** $[s, t]$, ou abreviadamente, **o ln-retorno em** $[s, t]$. O ln-retorno possui a propriedade que se chama **aditividade**, que significa que o ln-retorno em $[s, t]$ é a soma dos ln-retornos em $[s, u]$ e em $[u, t]$ para todos $s < u < t$. A **esperança**, ou **média**, de ln-retorno em $[s, t]$ é facilmente calculada de (3.81):

$$\mathbb{E}\left[\ln\left(\frac{S_t}{S_s}\right)\right] = \mathbb{E}\left[\mu(t-s) + \sigma(W_t - W_s)\right] = \mu(t-s). \tag{3.83}$$

A fórmula (3.83) revela que a média do ln-retorno cresce linearmente com o aumento de t. Portanto, faz sentido falar em **taxa** de crescimento da média. Segue-se diretamente de (3.83) que esta taxa é μ. Por isto que μ se chama **taxa de retorno médio do preço da ação**. Este é o nome usual, embora bastante confuso. O correto e completo seria **a taxa da média do ln-retorno**, mas parece que sou só quem gosta deste nome.

Existe outro conceito de retorno, que é diferente do ln-retorno definido acima. Ele será chamado aqui por **retorno-Δ-relativo**. O retorno-Δ-relativo no intervalo de tempo $[s, t]$ é dado por

$$\frac{S_t - S_t}{S_s} \tag{3.84}$$

O retorno-Δ-relativo não possui a propriedade de aditividade e

$$\mathbb{E}\left[\frac{S_t - S_s}{S_s}\right] = e^{(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)(t-s)} - 1 \tag{3.85}$$

o que mostra que a sua média não cresce linearmente com o crescimento do intervalo de tempo no qual este retorno foi calculado.

Não afirmamos que o ln-retorno é melhor do que o retorno-Δ-relativo para necessidades práticas ou teóricas. Somente destacamos que a palavra "retorno" pode se referir tanto ao ln-retono quanto ao retorno-Δ-relativo. O importante é compreender esta ambigüidade e estar consciente de que o conceito "taxa de retorno médio" faz sentido para ln-retorno e não faz sentido para o retorno-Δ-relativo, a menos que este nome se refira a algo diferente de sua definição dada acima.

Com isto encerramos estas observações. Contudo, ainda há um mal entendido na interpretação da fórmula (3.54). Lembramos que

$$\text{a equação diferencial estocástica } \frac{\mathbf{d}S_t}{S_t} = \left(\mu + \sigma^2\right) dt + \sigma \mathbf{d}W_t \tag{3.86}$$

$$\text{com a condição inicial } S_t|_{t=0} = S_0 \tag{3.87}$$

define $S.$ de (3.81). O mal entendido referido acima nasce da interpretação de $\mathbf{d}S_t$ como

$$\mathbf{d}S_t = S_{t+dt} - S_t \tag{3.88}$$

Colocando (3.88) em (3.86) e tomando a esperança em ambos os lados, derivamos

$$I\!\!E\left[\frac{S_{t+dt} - S_t}{S_t}\right] = \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt \tag{3.89}$$

Já (3.89) admite a interpretação: a média do retorno-Δ-relativo cresce linearmente com o crescimento de intervalo $[t, t+dt]$ com a "taxa" $(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)$.

Agora é só chamamr a nova "taxa" $(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)$ também de "taxa de retorno médio" para criar a dúvida: a taxa é μ ou $(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)$?

O erro no argumento que derivou a "taxa" $(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)$, está em (3.88): $\mathbf{d}S_t$ não é a diferença $S_{t+dt} - S_t$, mas uma aproximação desta diferença (a Seção 3.3 determina exatamente o tipo de aproximação: $S_{t+dt} - S_t = \mathbf{d}S_t + o(dt)$).

Não podemos culpar o Cálculo Estocástico pela confusão com a taxa de retorno médio. É verdade que este cálculo providenciou (3.86), (3.87) como uma alternativa a (3.81). A interpretação errada de $\mathbf{d}S_t$ é nossa culpa. Para provar isto, mostraremos o mesmo tipo de erro numa conta que não envolve variáveis aleatórias e, portanto, o Cálculo Estocástico.

Seja y uma função de x que satisfaz a seguinte equação diferencial

$$dy = ay\, dx, \text{ para uma constante } a \text{ com condição inicial } y(0) = 1. \tag{3.90}$$

A sua solução é $y(x) = e^{ax}$ e, portanto,

$$y(x + dx) - y(x) = e^{a(x+dx)} - e^{ax} = e^{ax}\left(e^{a\,dx} - 1\right) \tag{3.91}$$

De outro lado, assumindo a interpretação errada $dy = y(x + dx) - y(x)$, temos de (3.90) que $y(x + dx) - y(x) = ay(x)dx = ae^{ax}dx$.

Exercício 59. Demostre a aditividade de ln-retorno.

Exercício 60. Justifique o resultado (3.83).

Exercício 61. A fórmula (3.83) mostra que a média de ln-retornos é aditiva: a média de ln-retorno em $[s, t]$ é a soma das médias de ln-retornos em $[s, u]$ e $[u, t]$ para todos $s < u < t$. Mostre que a aditividade da média de ln-retorno é conseqüência da aditividade do próprio ln-retorno. Construa um processo $S.$ cujo ln-retorno não seja aditivo, mas a média de ln-retorno seja aditiva.

Exercício 62. O nome **a taxa de retorno médio** e o seu equivalente inglês, **expected rate of return**, podem ser interpretados erradamente como **a taxa de crescimento do retorno do preço médio da ação**, que tem a seguinte expressão:

$$\ln\left(\frac{\mathbb{E}\left[S_t\right]}{\mathbb{E}\left[S_s\right]}\right) \tag{3.92}$$

Verifique se (3.92) possui a propriedade da aditividade e se ele cresce linearmente com o crescimento de t. Se sim, ache a taxa de crescimento.

Exercício 63. Verifique a conta em (3.85).

Exercício 64. J. Hull no Capítulo 11 do seu livro [H], diz: "O retorno esperado, μ, demandado pelos investidores para uma ação, depende do risco da própria ação. Quanto maior o risco, maior o retorno". Depois ele conclui: "As teorias desta seção revelam que a expressão *retorno esperado* é ambígüa, já que ela pode referir-se tanto a μ quanto a $\mu-\sigma^2/2$." Estas duas frases me parecem contraditórias. Tomando σ como a medida de risco, obtenho que se o retorno é μ, então ele não depende do risco, já que não depende de σ. De outro lado, se o retorno é $\mu-\sigma^2/2$ então ele diminui com o crescimento de risco. Deixo estas dúvidas para o leitor. O máximo que posso imaginar para entender $\mu-\sigma^2/2$ como o "retorno" é que alguém, por razões quaisquer que sejam, desejou ter a equação $\mathbf{d}S_t/S_t = \mu dt + \sigma \mathbf{d}W_t$ como a equação que determina a dinâmica do preço da ação. Sabemos que isto implica na seguinte expressão explícita: $S_t = S_0 \exp\{(\mu-\sigma^2/2)t + \sigma W_t\}$. Daí, $\mu-\sigma^2/2$ é a taxa de retorno médio, se o "retorno" for entendido como o ln-retorno.

BIBLIOGRAFIA

Aprendi os modelos em tempo discreto com

[Ch] Neil A. Chriss, *Black-Scholes and beyond; option pricing models.* Times Mirror Professional Publishing Ltd., 1997.

Embora grosso (quase 500 páginas), este livro é fácil de ler. Chriss tenta explicar todos os conceitos em detalhes e de diversos ângulos. Ao meu ver, num primeiro momento este detalhamento atrapalha um pouco porque desvia a atenção dos principais conceitos ali tratados. Em compensação, o livro de Chriss foi para mim uma excelente fonte de consultas; nele achei respostas para todas as perguntas que surgiram em relação dos modelos de tempo discreto e suas aplicações. A matemática exigida não vai muito além de soluções de sistemas lineares de duas equações. Isto explica porque Chriss não se aprofunda nem um pouco nos modelos de tempo contínuo.

O modelo de Black-Scholes em tempo contínuo aprendi pelo original

[BS] F. Black and M. Scholes, The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy.* **81**, 1973, pp.673-657.

junto com meu aluno de mestrado Herbert Kimura. Minha visão do método de Black-Scholes se formou durante o trabalho com Herbert. A Seção 3.1 do Capítulo 3 é baseada em sua tese de mestrado

[K] Herbert Kimura, *A precificação de opções para processos de mistura de Brownianos.* Tese de mestrado. IME-USP.

Como sabemos, Black e Scholes derivam a fórmula de precificação de opção usando o método de hedging. Que o método de neutralidade ao risco dá o mesmo resultado em situações mais gerais que a estudada no Capítulo 3 está bem descrito no Capítulo 15 do

[Ne] Salih N. Neftci, *An introduction to the Mathematics of Financial Derivatives.* Academic Press, 1996.

A medida de probabilidade que torna os processos neutros ao risco se chama "martingale measure"; isto pode servir como referência para quem quiser ler o livro de Neftci. O problema dele é que no espaço deste livro (350 páginas) não foi posível definir todos os conceitos com o devído cuidado. É por isto que nas demonstrações só as passagens principais ficam claras (pelo menos, para mim). En particular, não consegui "sentir" o teorema de Girsanov a partir da exposição do Neftci.

Tanto o teorema de Girsanov, quanto a transformação de medidas estão bem colocadas se o problema de precificação é formulado no âmbio de tempo discreto, e não em tempo contínuo. Há diversos livros que apresentam as versões discretas das técnicas dos modelos contínuos. Eu aprendi bastante do livro

[Me] A. V. Mel'nikov, *Financial Markets: Stochastic Analysis and the Pricing of Derivative Securities.* Translations of Mathematical Monographs, Vol. 184, American Mathematical Society, 1999

Este livro tem estilo oposto a [Ch]. O autor assume que o leitor conheça os processos estocásticos em tempo discreto e define todos os conceitos financeiros por intermédio destes processos; exemplo: "...portfolio is defined to be a two-dimensional stochastic sequence $\pi = (\pi_n = \beta_n, \gamma_n))_{n \in Z_+}$ whose elements $\beta_n \in \mathcal{F}_n$ and $\gamma_n \in \mathcal{F}_{n-1}$ are interpreted as the amounts of the respective assets

B and S at time $n \in Z_+$." A vantagem deste caminho é que em 97 páginas o autor conseguiu encaixar bastante informação.

Outros livros que não são tão densos de fórmulas-de-três-andares mas ainda apresentam uma profunda e clara análise dos modelos em tempo discreto são (em ordem de minha preferência)

[Pl] Stanley R. Pliska, *Introducation to Mathematical Finance: Discrete Time Models.* Blackwell Publishers, 1997.

[D] Michael U. Douthan, *Prices in Financial Markets.* Oxford Univ. Press, 1990.

Lembrei ainda, que no Capítulo 3 me referi aos livros

[Fo] Gerald B. Folland, *Introduction to Partial Differential Equations.* Princeton Univ. Press and Univ. of Tokio Press (1976).

[H] John Hull, *Introduction to Futures and Options Markets.* Prentice Hall, Inc., (1995).