“同心协力”策略研究

摘要

本文针对“同心协力”团队协作能力拓展项目进行了策略研究，并在理想情况和现实情况中分析了鼓和球的运动状态，鼓面倾角及其影响以及对应的措施，提供了一些可供参考的结论。

针对问题一，对绳拉鼓的模型进行一定程度的简化。考虑到选用绳子的材质和估算的空气阻力，忽略了绳子和空气对模型的影响。针对排球在鼓上的来回碰撞，先对球落下到第一次碰撞前的运动状态进行分析，考虑到第一次碰撞之后的球与鼓的运动行为具有反复性，对第 k 次碰撞后到第 k+1 次碰撞前的过程进行了普遍分析。在对第一次碰撞前进行分析时，对鼓和球进行了运动学的分析，并得出了一系列关于鼓和球在碰撞时刻的运动信息，如瞬时速度，运动时间，位移等等。对第二次及以后碰撞前进行分析时，借鉴了前面表述的分析过程，将鼓在碰撞前的运动状态分为 4 种状态（3 种转换状态），根据分析得出在碰撞间隔只会存在一次鼓的运动行为的循环。由于鼓在水平线上与线下的受力不同，对鼓在一次循环中根据是否经过水平线分为了 3 种可能出现的情况。而球可以在任何时刻与鼓进行碰撞，因此存在 9 种不同的碰撞方程。根据题目给定的条件和上述分析过程，得出了具有 6 个限制条件的规划模型，并通过 Matlab 求解得出了最佳颠球高度 0.4128m，以及对应的协作策略。

针对问题二，需要确定队员因力度和发力时机的不协调对于鼓面有怎样的影响。这里假设鼓的竖直位移不影响鼓的旋转，并忽略水平分力对鼓水平位移产生的影响。先从最简单的情况出发，即只有一名队员用力较大，且没有提前发力的情况。在分析过程中利用了等效转换，即减去相同大小的力，将模型转化为拉力绕定点旋转的简化模型。接下来分析题目要求的两种情况，即两个队员发力大于其他队员，以及有队员提前发力的情况。根据分析，可以将这两类划归成简单情况的组合。综合上述情况的分析，我们对一般鼓的旋转进行分析，通过 Matlab 解微分方程得出了旋转角θ的一般表达式，通过 Runge-Kutta 法对旋转角θ表达式中的关键量$\sin(\alpha(t))$进行了数值验证。最后根据题目要求代入序号内的求解，得出提前发力对倾角的影响较大，且无论题目怎样的情况，鼓面倾角都不会超过 6 度。

针对问题三，结合问题一和问题二的结论，得出了在题目给定的条件下，球再次落回的时候都不会落出鼓面，从而在问题一中的策略和颠球高度不需要大幅度调整。为了保证鼓面的稳定性，可做出的调整是：尽量保证成员发力时间的统一性，如通过统一口号的方式，保证发力的节奏性。

针对问题四，已知球回弹的高度，根据运动学公式求得球垂直方向的速度。已知球反弹后相对于竖直方向产生1°的倾斜角度，则可列出方程组解得水平和合力方向的速度分别是0.0605m/s,3.4646m/s.已知第一次碰撞时鼓与水平面的夹角，由运动学分析得上升时间为0.3464s。以球与鼓碰撞时的位置为坐标原点，建立二维直角坐标系，求得球的反弹轨迹。假设团队在球反弹后0.6928秒时再次颠球，则需要让团队保证第二次碰撞时鼓的倾斜角度与第一次角度相同，方向相反（即鼓的状态为左低右高）。已知球倾斜的方向在水平面的投影指向两位队员，与这两位队员的夹角之比为1：2。这里我们提供一种假设，即所有人同时用力，离球近的队员用F1=2F2的力，离球远的队员用F2的力，其余的人用80N的力。根据前文公式建立方程组，解得F1=320/3N,F2=160/3N.

关键词：运动循环 规划模型 受力等效 Runge-Kutta 法

1 问题重述

1.1 问题背景

“同心协力”是一项团队协作能力拓展项目。道具为一面牛皮双面鼓，鼓身中间沿圆周均匀分布固定点用于固定多根绳子，每根绳子长度相同。团队成员每人牵拉一根绳子，使鼓面保持水平。开始时球从鼓面中心上方竖直落下，队员同心协力将球颠起，使其有节奏地在鼓面上跳动。颠球过程中，队员只能抓握绳子末端。

项目所用排球质量270g。鼓面直径20cm，鼓身高度22cm，鼓质量3.6kg。队员人数不少于8人，队员间最小距离不得小于60cm。项目开始时，球从鼓面中心上方40cm处竖直落下，球被颠起的高度至少离开鼓面40cm，低于40cm即停止项目。项目目标为使得连续颠球的次数尽可能多。

1.2 问题重述

（1）理想状态下，每人可精确控制用力方向、时机和力度，制定此情形下团队的最佳协作策略，并给出该策略下的颠球高度。

（2）在现实情形中，队员发力时机和力度存在一定误差，鼓面可能出现倾斜。建立模型描述队员的发力时机和力度与某一特定时刻的鼓面倾斜角度的关系。设队员人数为8，绳长为1.7m，鼓面初始时刻水平静止，初始位置较绳子水平时下降11 cm，表1中为9组队员们的不同发力时机和力度，求0.1 s时鼓面的倾斜角度。

（3）在现实情形中，根据问题2的模型，是否需要调整问题1中给出的策略？如果需要，如何调整？

（4）当鼓面发生倾斜时，球跳动方向不再竖直，需要调整队员拉绳策略。假设人数为10，绳长2m，球的反弹高度为60cm，相对于竖直方向产生1度的倾斜角度，且倾斜方向在水平面的投影指向某两位队员之间，与这两位队员的夹角之比为1:2。为将球调整至竖直状态弹跳，给出在可精确控制条件下所有队员的发力时机及力度，并分析在现实情形中的实施效果。

2 问题分析

2.1 问题一分析

针对问题一，对绳拉鼓的模型进行一定程度的简化。考虑到选用绳子的材质和估算的空气阻力，忽略了绳子和空气对模型的影响。针对排球在鼓上来回碰撞的基本事实，先对球落下到第一次碰撞前的运动状态进行分析，然后考虑到第一次碰撞之后的球与鼓的运动行为具有反复性，对第 k 次碰撞后到第 k+1 次碰撞前的过程进行了普遍分析。在对第一次碰撞前进行分析时，对鼓和球进行了运动学的分析，并得出了一系列关于鼓和球在碰撞时刻的运动信息。对第二次及以后碰撞前进行分析时，借鉴了前面表述的分析过程，将鼓在碰撞前的运动状态分为 4 种状态（3 种转换）。由于鼓在水平线上与线下的受力不同，对鼓在一次循环中根据是否经过水平线分为了 3 种可能出现的情况。而球可以在任何时刻与鼓进行碰撞，因此存在 9 种不同的碰撞方程。根据题目给定的条件和上述分析过程，得出了规划模型，并通过 Matlab 求解得出了最佳颠球高度，以及对应的协作策略。

2.2 问题二分析

针对问题二，由于存在队员发力时机和用力大小的不协调而导致的鼓面倾斜，需要确

定这种不协调度对于鼓面有多大的影响。这里假设鼓的竖直位移不影响鼓的旋转，并忽略水平分力对鼓水平位移产生的影响。先从最简单的情况出发，即只有一名队员用力较大，且没有提前发力的情况。在分析过程中利用了等效转换，将复杂的受力分析进行了简化。接下来分析题目要求的两种情况，即两个队员发力大于其他队员，以及有队员提前发力的情况。根据分析，可以将这两类划归成简单情况的延展情形。综合上述情况的分析，我们对一般鼓的旋转进行分析，通过Matlab解微分方程得出了旋转角的一般表达式，并根据题目要求代入序号内的求解。

2.3 问题三分析

结合问题一和问题二的结论，得出了在题目给定的条件下，球再次落回的时候都不会落出鼓面，从而在问题一中的策略和颠球高度不需要大幅度调整。

2.4 问题四分析

由题目可知球回弹的高度，根据运动学公式求得球垂直方向的速度。已知球反弹后相对于竖直方向产生1°的倾斜角度，则可列出方程组解得水平方向和合力方向的速度。已知第一次碰撞时鼓与水平地面所成角度，此时鼓的状态为左高右低由运动学分析得小球的上升时间。以球与鼓碰撞时的位置为坐标原点，建立二维直角坐标系，求得球的反弹轨迹。假设团队在球反弹后0.6928秒时再次颠球，则需要让团队保证第二次碰撞时鼓的倾斜角度与第一次碰撞时鼓与水平地面所成角度相同，且鼓的状态为左低右高。已知球倾斜的方向在水平面的投影指向两位队员，以及与这两位队员的夹角之比，这里提供一种假设，即所有人同时用力，离球近的队员用$2F_2^1$N的力，离球远的队员用F_2^1N的力，其余的人用80N的力。根据前文公式建立方程组，解得两位队员应该发出的力。

3 模型假设

1.假设每次球与鼓的碰撞都在鼓的中心位置。
2.假设无水平风速的影响。
3.假设参与者的身高体重大致相同
4.假设重力加速度的值为$10\mathrm{m}/s^2$
5.假设初次放球与鼓开始运动的时间相同
6.假设在鼓面上发生的是非弹性碰撞
7.假设绳子一直绷紧（即绳子不弯曲，在F=0时仍保持不弯曲的状态）
8.假设每次拉绳手的高度不发生变化

4 符号说明

符号	符号说明
l	绳长
$d_{人}$	队员间距
θ	两队员与鼓心所成夹角

$v_{球}$	排球的速度
$v_{鼓}$	鼓的速度
$v_{球}^{(k)}$	第 k 次撞击后球的瞬时速度
$v_{鼓}^{(k)}$	第 k 次撞击后鼓的瞬时速度
$F_{人}$	队员的拉力
α	绳与水平面的夹角
Δh	初始鼓面与绳拉平时水平鼓面高度差

5 模型建立与求解

5.1 问题一模型建立：

➢ *基本假设和模型的提出*

这里我们对绳拉鼓的模型进行一定程度的简化。规定绳被系在鼓的中间高度，即$\frac{H}{2}$处；规定绳子是非弹性绳，即不考虑绳子伸缩带来的影响（考虑到一般项目中所用的绳是麻绳，在存在拉力的时候形变程度几乎可以忽略不计，因此假设成立）；规定忽略空气阻力的影响（根据查阅相关文献[1][3]得知，根据空气阻力系数和空气阻力计算公式，在小球质量为 0.27kg 且速度不超过 10m/s 时受到的空气阻力约为 0.1N，与小球所受到的重力之比为 1:27，因此假设成立）.

➢ *小球落下到第一次碰撞前*

我们对排球从初始位置开始落下的理想状态情况进行研究，规定垂直地面向上为正方向。

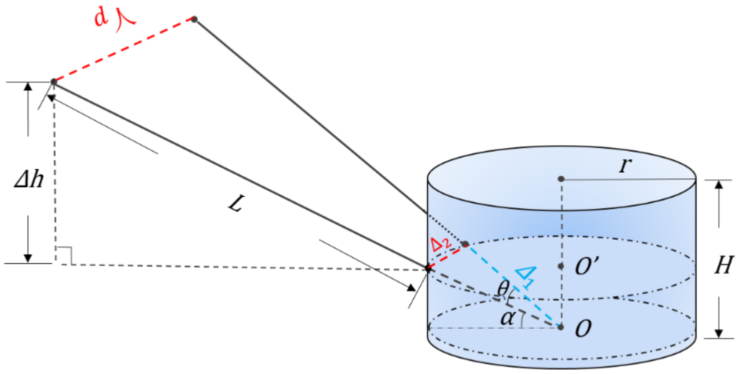

图 5–1 同心鼓简化模型图

$$\begin{cases} \cos\alpha = \frac{r}{\Delta_1} \\ \sin\frac{\theta}{2} = \frac{1/2\Delta_2}{\Delta_1} \\ \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + l} = \frac{\Delta_2}{d_{人}} \end{cases} \tag{5-1-1}$$

由(5-1)可得(5-2)，且队员之间的距离$d_{人}$应不小于 0.6m

$$d_{人} = 2sin\theta\left(\frac{r}{cos\alpha} + l\right) \geq 0.6m \tag{5-1-2}$$

在鼓和球开始运动后，

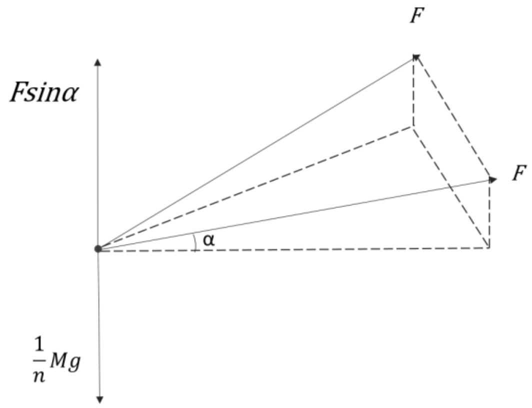

图 5–2 鼓的受力分析图

由鼓的受力分析图可得：

$$nF(t)\sin\alpha(t) - Mg = Ma_{鼓} \tag{5-1-3}$$

对$a_{鼓}$进行积分，可得到鼓的速度关于时间 t 的函数关系：

$$v_{鼓} = \int_0^{t_0}\left(\frac{nF(t)\sin(\alpha(t))}{M} - g\right)dt \tag{5-1-4}$$

其中$t_0 = t_{鼓} = t_{球}$，表示球和鼓从初始位置开始至第一次碰撞运动的时间。

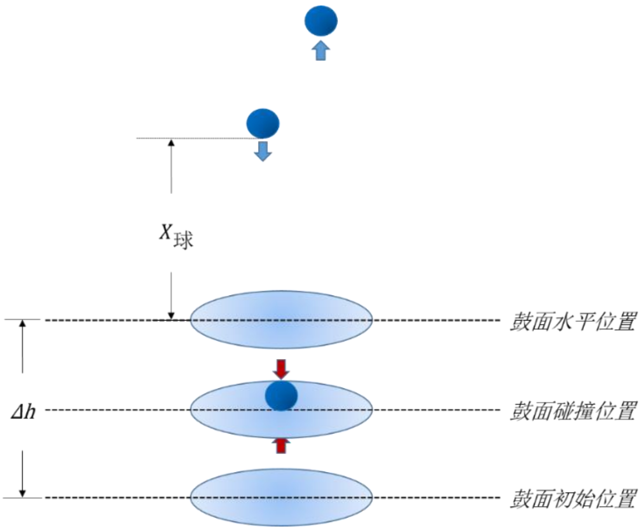

图 5-3 球初始时落下与被弹回的过程

假设第一次碰撞发生时鼓和球的速度分别是$v_{鼓}$和$v_{球}$。

$$\frac{1}{2}gt_0^2 + \int_0^{t_0} v_{鼓}dt = \Delta h + 0.4 \tag{5-1-5}$$

通过(5-4)代入$v_{鼓}$，根据方程求得发生碰撞时的t_0，然后代入(5-4)求得发生第一次撞击时鼓的速度$v_{鼓}(t_0)$，根据$v_{球}(t_0) = gt_0$求得发生第一次撞击时排球的速度。

此时球下落的位移和鼓上升的位移分别是：

$$x_{球}(t_0) = \frac{1}{2}gt_0^2, x_{鼓}(t_0) = \Delta h + 0.4 - \frac{1}{2}gt_0^2 \tag{5-1-6}$$

根据动量守恒定律和动能守恒定律求得发生第一次碰撞后排球的鼓的瞬时速度$v_{球}^{(1)}$、$v_{鼓}^{(1)}$：

$$v_{球}^{(1)} = \frac{(m-M)v_{球}+2Mv_{鼓}}{m+M} \tag{5-1-7}$$

$$v_{鼓}^{(1)} = \frac{2mv_{球}+(M-m)v_{鼓}}{m+M} \tag{5-1-8}$$

根据动能守恒定律：

$$\frac{1}{2}m(v_{球}^{(1)})^2 = mgh^{(1)} \tag{5-1-9}$$

求得排球在第一次撞击后所能上升的最大高度，并且保证此高度大于 0.4m:

$$h^{(1)} = \frac{(v_{球}^{(1)})^2}{2g} \geq 0.4\text{m} \tag{5-1-10}$$

此时球上升所用的时间

$$t_0^{(1)} = \frac{v_{球}^{(1)}}{g} \tag{5-1-11}$$

因此球从下落到在空中重新静止的时间是：

$$t_{总}^{(1)} = t_0 + t_0^{(1)} \tag{5-1-12}$$

➢ *第 k 次碰撞后到第 k+1 次碰撞前*

对于第二次及以后的撞击全过程，我们需要与第一次撞击分开处理，因为初始状态鼓和球的初速度皆为 0，而球第二次（及以后）处于静止的状态时，鼓的速度不一定为 0。在鼓准备第 k+1 次与球相碰之前，会存在一系列不同的运动状态。我们定义一次动作循环为从第 k 次撞击到第 k+1 次撞击中间的过程，考虑到最大可能性，这其中可能包含 4 种状态：

①第 k 次鼓与球相碰时;

②鼓到达高点开始回落时;

③鼓到达最低点被拉起时;

④第$k+1$次鼓与球相碰时。

在每两次碰撞的间隔有且仅有一次循环的发生，因为在这一间隔内发生多次循环是没有意义的，发生多次循环与只发生一次循环对于下一次碰撞前球的状态的影响是同等的，而且根据粗略估算，球在两次撞击的间隔中的飞行时间一般小于 0.8s，鼓在这段时间内进行多次的复杂循环对于队员的力度控制和体力来说都是无法完成的任务，因此我们只考虑一次循环的情况。

首先我们明确标号系统：

速度：$v_{鼓}^{(k)}$、$v_{球}^{(k)}$ —第 k 次撞击后鼓和球的瞬时速度，$k \geq 1, k \in \mathbb{Z}$

时间：$t_{j,j+1}^{(k)}$ —第 k 次撞击后鼓第j个状态和第$j+1$个状态之间所用的时间，$j \in [1,3], j \in \mathbb{Z}$

$t_{撞}^{(k)}$ —从第 k 次撞击到第 k+1 次撞击所用的时间，$t_{撞}^{(0)} = t_0$

位移：$x_{j,j+1}^{(k)}$ —第 k 次撞击后鼓第j个状态和第$j+1$个状态之间所用的位移

$x_{撞}^{(k)}$ —第 k 次撞击前从撞击所处状态的开始到撞击时鼓的位移

在不影响实际结果的前提下，我们对第二次循环进行研究，并对 3 种可能出现的情况进行讨论：

1、 第一次碰撞后鼓在水平线下： $x(t_0) \leq \Delta h$

->鼓到达最高点后在水平线上： $x(t_0) + x_{1,2}^{(1)} \geq \Delta h$ (5-1-13)

->鼓到达最低点后在水平线下：$x(t_0) + x_{1,2}^{(1)} - x_{2,3}^{(1)} \geq \Delta h$

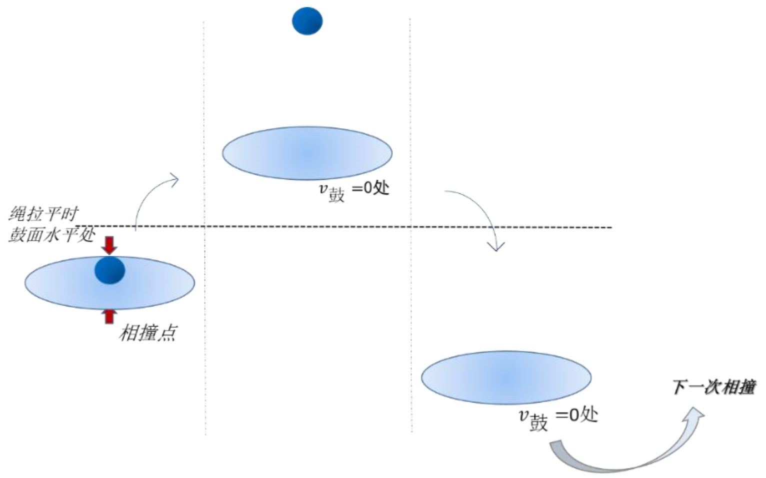

图 5-4 鼓撞击后运动过程的第一种情况

2、第一次碰撞后鼓在水平线下： $x(t_0) \leq \Delta h$

->鼓到达最高点后在水平线下: $x(t_0) + x_{1,2}^{(1)} \leq \Delta h$ (5-1-14)

->鼓到达最低点后在水平线下: $x(t_0) + x_{1,2}^{(1)} - x_{2,3}^{(1)} \leq \Delta h$

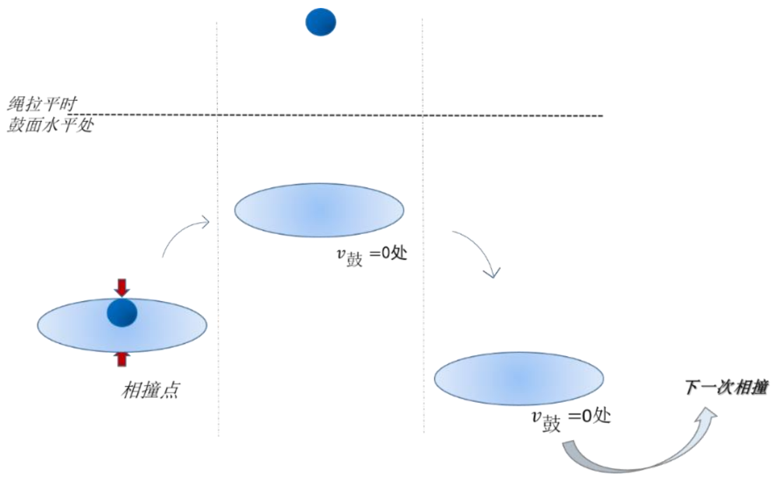

图 5-5 鼓撞击后运动过程的第二种情况

3、第一次碰撞后鼓在水平线上: $x(t_0) \geq \Delta h$

->鼓到达最高点后在水平线上: $x(t_0) + x_{1,2}^{(1)} \geq \Delta h$ (5-1-15)

->鼓到达最低点后在水平线下:$x(t_0) + x_{1,2}^{(1)} - x_{2,3}^{(1)} \leq \Delta h$

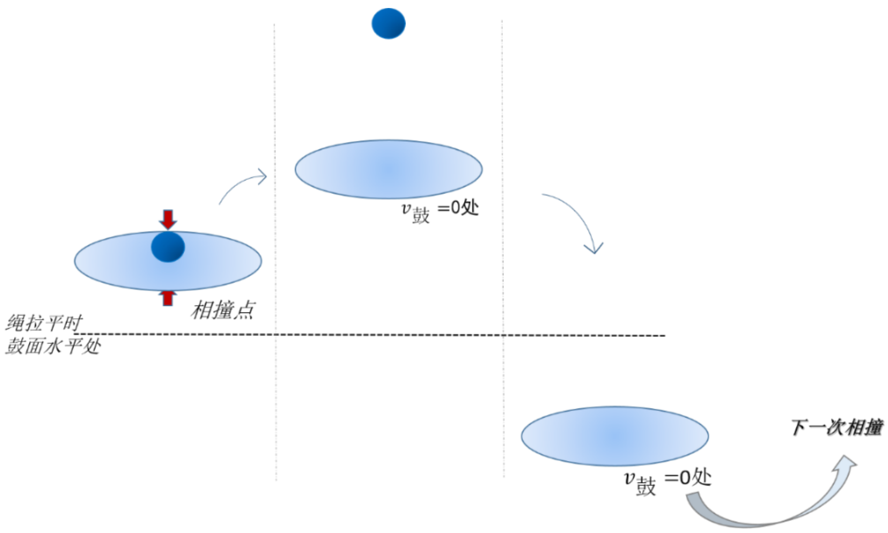

图 5-6 鼓撞击后运动过程的第三种情况

这里由于鼓在水平线上的时候，队员作用在绳上的力在竖直方向上的分力与重力的方向相同，即都竖直向下，所以当鼓处于第三种状态（即将被拉回的时候）只可能在水平面之下，这样才会存在向上的分力将鼓拉回。

➢ *第 k 次球与鼓的碰撞*

对于球来说，碰撞可以在每次循环的任何时期发生。根据上述分析的过程，我们得知小球可能与鼓在九种不同的状态下发生碰撞（小球共存在三种不同的情况，每种情况共有三种状态），因此我们根据情况的不同列出方程组：

情况 1：

$$x_{撞}^{(k)}+\frac{1}{2}g\left(t_{撞}^{(k)}-\frac{\mathrm{v}_{球}^{(\mathrm{k})}}{g}\right)^2=\frac{(\mathrm{v}_{球}^{(\mathrm{k})})^2}{2g}，\ x_{撞}^{(k)}\le x_{1,2}^{(k)},\mathrm{x}(t_0)\le\Delta\mathrm{h} \tag{5-1-16}$$

$$\frac{\mathrm{v}_{球}^{(\mathrm{k})}}{g}+\sqrt{\frac{2\left(x_{撞}^{(k)}+\left(\frac{(\mathrm{v}_{球}^{(\mathrm{k})})^2}{2g}-x_{1,2}^{(k)}\right)\right)}{g}}=t_{撞}^{(k)}\le，\ x_{撞}^{(k)}\le x_{2,3}^{(k)},\mathrm{x}(t_0)+x_{1,2}^{(1)}\ge\Delta\mathrm{h} \tag{5-1-17}$$

$$\frac{\mathrm{v}_{球}^{(\mathrm{k})}}{g}+\sqrt{\frac{2\left(\left(\frac{(\mathrm{v}_{球}^{(\mathrm{k})})^2}{2g}-x_{1,2}^{(k)}\right)-x_{2,3}^{(k)}+x_{撞}^{(k)}\right)}{g}}=t_{撞}^{(k)}，\ x_{撞}^{(k)}\le x_{3,4}^{(k)},\mathrm{x}(t_0)+x_{1,2}^{(1)}-x_{2,3}^{(1)}\ge\Delta\mathrm{h} \tag{5-1-18}$$

情况 2：

$$x_{撞}^{(k)}+\frac{1}{2}g\left(t_{撞}^{(k)}-\frac{\mathrm{v}_{球}^{(\mathrm{k})}}{g}\right)^2=\frac{(\mathrm{v}_{球}^{(\mathrm{k})})^2}{2g}，\ x_{撞}^{(k)}\le x_{1,2}^{(k)},\mathrm{x}(t_0)\le\Delta\mathrm{h} \tag{5-1-19}$$

$$\frac{\mathrm{v}_{球}^{(\mathrm{k})}}{g}+\sqrt{\frac{2\left(x_{撞}^{(k)}+\left(\frac{(\mathrm{v}_{球}^{(\mathrm{k})})^2}{2g}-x_{1,2}^{(k)}\right)\right)}{g}}=t_{撞}^{(k)}，\ x_{撞}^{(k)}\le x_{2,3}^{(k)},\mathrm{x}(t_0)+x_{1,2}^{(1)}\le\Delta\mathrm{h} \tag{5-1-20}$$

$$\frac{v_{球}^{(k)}}{g}+\sqrt{\frac{2\left(\left(\frac{(v_{球}^{(k)})^2}{2g}-x_{1,2}^{(k)}\right)-x_{2,3}^{(k)}+x_{撞}^{(k)}\right)}{g}}=t_{撞}^{(k)},\ x_{撞}^{(k)}\le x_{3,4}^{(k)},x(t_0)+x_{1,2}^{(1)}-x_{2,3}^{(1)}\le \Delta h \tag{5-1-21}$$

情况 3：

$$x_{撞}^{(k)}+\frac{1}{2}g(t_{撞}^{(k)}-\frac{v_{球}^{(k)}}{g})^2=\frac{(v_{球}^{(k)})^2}{2g},\ x_{撞}^{(k)}\le x_{1,2}^{(k)},x(t_0)\ge \Delta h \tag{5-1-22}$$

$$\frac{v_{球}^{(k)}}{g}+\sqrt{\frac{2(x_{撞}^{(k)}+(\frac{(v_{球}^{(k)})^2}{2g}-x_{1,2}^{(k)}))}{g}}=t_{撞}^{(k)},\ x_{撞}^{(k)}\le x_{2,3}^{(k)},x(t_0)+x_{1,2}^{(1)}\ge \Delta h \tag{5-1-23}$$

$$\frac{v_{球}^{(k)}}{g}+\sqrt{\frac{2\left(\left(\frac{(v_{球}^{(k)})^2}{2g}-x_{1,2}^{(k)}\right)-x_{2,3}^{(k)}+x_{撞}^{(k)}\right)}{g}}=t_{撞}^{(k)},\ x_{撞}^{(k)}\le x_{3,4}^{(k)},x(t_0)+x_{1,2}^{(1)}-x_{2,3}^{(1)}\le \Delta h \tag{5-1-24}$$

➢ *连续颠球的次数*

$\sum_{k=0}^{n1} t_{撞}^{(k)}\le T$,其中给定时间 T，n1 是当总时长超过 T 时颠球的次数且 n 是整数。

问题 1 模型求解：

根据题目要求的限定条件:

1. 队员人数不低于 8 人
2. 队员间距不低于 0.6m
3. 球被颠起高度离开鼓面 40cm 以上
4. 每两次碰撞的间隔有且仅有一次循环的发生
5. 碰撞时所满足的方程（共九种情况）
6. 颠球总时长不超过给定的时间 T（这里我们假设总时长 5 分钟）

我们得到了如下规划：

$$\max\ n1$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} n\ge 8 \\ d_{人}=2sin\theta\left(\frac{r}{cos\alpha}+l\right)\ge 0.6m \\ h^{(k)}=\frac{(v_{球}^{(k)})^2}{2g}\ge 0.4m \\ \sum_{j=1}^{3} t_{j,j+1}^{(k)}\le t_{撞}^{(k)} \\ f_1\left(x_{撞}^{(k)},t_{撞}^{(k)},v_{球}^{(k)},x_{1,2}^{(k)},x_{2,3}^{(k)}\right)=f_2\left(t_{撞}^{(k)},v_{球}^{(k)}\right),x_{撞}^{(k)}\le x_{j,j+1}^{(k)},\varphi_i(x(t_0),x_{1,2}^{(1)},x_{2,3}^{(1)})\le \Delta h \\ \sum_{k=0}^{n1} t_{撞}^{(k)}\le T \end{cases}$$

(5-1-24)

代入题目所给条件，利用 Matlab 软件进行求解，求得在最佳协作策略下的颠球高度为 0.4128m，每位队员用力为 81.6481N。综合分析所得结果，我们得出以下团队协作的策略：

1、 尽量使球的高度维持在 0.4m 至 0.5m，防止过长时间的等待，因此队员给力不要过猛，使球平稳地有节奏地跳动即可。
2、 队员站位分布尽量均匀，防止用力不均影响稳定性。
3、 初始位置放球的时候尽量放于中央位置，若出现鼓面倾斜，而球不在中心位置，则球无法再次落到鼓面的可能性会增大。

根据实际项目体验和较为成功的团队协作案例，稳定的团队协作基本上会保持在撞击之间完成一次循环，且在鼓被拉起的时候产生碰撞。

问题 2 模型建立：

为了确定在某些队员因发力时机和用力大小不同而导致的鼓面倾斜大小，我们需要对鼓进行重新的受力分析。对于题目给定的 9 种情况，鼓受力情况和对应的转动半径各不相同，这里我们建立了一般的问题模型。对于不同的情况，对应的方程组会有变化，但推导过程基本相同。这里我们假设鼓的竖直位移不影响鼓的旋转，即相对于竖直位移的惯性系。

➢ 我们先考虑简单的情况：即只有一名队员用力较大，且没有提前发力的情况。

我们假设队员 1 的发力大于其他成员，其绳子的拉力是$\mathrm{F_1}$，与水平方向所成角度为α在竖直方向上的分力是$\mathrm{F_1 sin\alpha}$；其他队员的发力F相同，与水平方向所成角度为α，且$\mathrm{F \le F_1}$，其在竖直方向上的分力是$\mathrm{Fsin\alpha}$。为了计算$\mathrm{F_1}$绕$\mathrm{F_1}$对面点旋转的加速度等运动状态，我们在每个向上的分力上减去$\mathrm{Fsin\alpha}$，最终等效于只有$\mathrm{F_1 sin\alpha - Fsin\alpha}$以半径为 d 对鼓产生旋转的作用力，如图 5-7 所示。在这里我们暂时忽略多出的水平分力对鼓水平位移产生的影响。

图 5-7 有队员发力较大的受力分析的等效转换

➢ 下面我们讨论两种情况：

1、 两个队员的发力大于其他队员，位置随意，这里以序号 2 为例，即队员 1 和队员 2 发力较大。根据对简单情况的分析，我们将模型等效，并将此刻的受力效果图用下面的图 5-8 中的右图进行表示。由于多出两个竖直向上的分力，考虑到力作用效果的等效性，我们将这两个分力的效果等效为在两个分力作用点连线中点位置的竖直向上的 2 倍的

力，即$2(F_1\sin\alpha-F\sin\alpha)$，但此时的旋转半径已变成了 d’，而并非在简单情况中的 d。

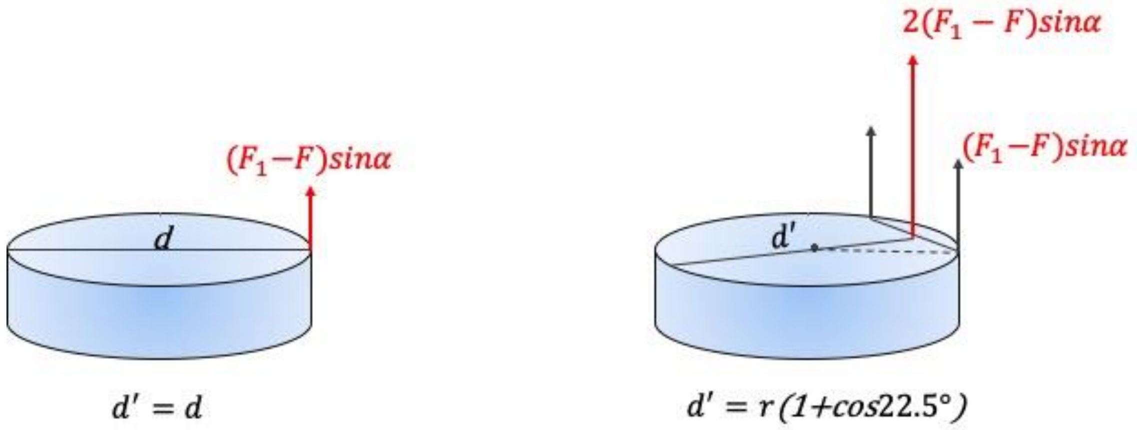

图 5-8 有两名队员发力较大的受力分析的等效转换

2、 有队员提前发力，位置随意。根据题目要求，在-0.1s 至 0s 的时间段内有队员提前发力，在 0s 至 0.1s 所有队员开始发力。我们可以将其分为两个阶段：

A. -0.1s 至 0s，此时只有一个力对鼓产生作用，我们也可以将其产生的效果进行等效，即提前的发力在竖直方向上的分力直接提供了使鼓以 d 为半径绕对点旋转的力，这时候的情况与在简单情况中等效后的效果是相同的。

B. 0s 至 0.1s，此时所有人发力相同，我们认定此时的鼓不再发生旋转，但仍然保持在 A 中的旋转角度进行位移。

- 综上所述，我们对一般情况进行分析：

在相对于竖直位移的惯性系下对旋转的鼓进行受力分析得

$$F=k(F_1\sin\alpha-F\sin\alpha)-Mg=Ma \tag{5-2-1}$$

其中α是绳与水平面所成的角度, a是鼓倾斜瞬间的线加速度，k值根据情况的不同，取值不同，例如序号 1 中，k=1；而在序号 2 中，k=2。

根据旋转力学的知识以及(5-2-1)式的受力分析，我们得到如下方程组：

$$\begin{cases} k(F_1\sin\alpha(t)-F\sin\alpha(t))-Mg=Ma \\ a=d'*a_\theta=d'*\frac{d\omega}{dt} \\ \int_0^{0.1}\omega dt=\theta \end{cases} \tag{5-2-2}$$

其中 d’是鼓的转动半径，a_θ是角加速度, ω是角速度.同样地，鼓的转动半径 d’根据情况不同取值不同。例如序号 1 中，$d'=d$，即鼓的直径；而在序号 2 中，$d'=r(1+\sin22.5°)$.

由(5-2-2)推出θ的一般表达式为：

$$\theta=\int_0^{0.1}\left(\int_0^{0.1}\frac{k(F_1-F)-Mg}{Md'}\sin\alpha(t)dt\right)dt+C \tag{5-2-3}$$

根据(5-2-3),我们得知需要进一步求解$\sin\alpha(t)$的表达式，即队员拉力与水平面所成角度的 sin 值与时间变化的关系。为了求取$\sin\alpha(t)$的一般表达式，我们对一般情况进行研究，这里我们需要考虑竖直位移给绳和水平面所成的角α带来的影响：

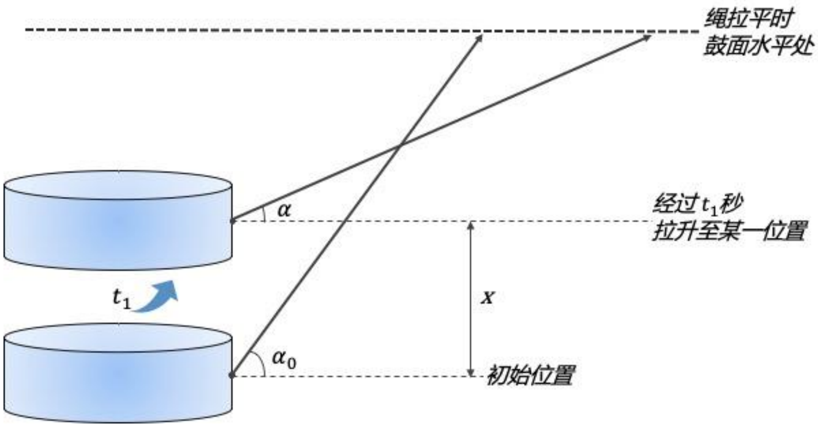

图 5-9 鼓从初始位置到撞击前处于某一位置

设初始位置绳与地面所成的角度为α_0。根据现实情况，在鼓从初始位置运动 t1 时间到某一位置的时候，图中绳子l的长度不变。由于人抓绳子的高度和位置保持不变，绳子末端处于同一高度。

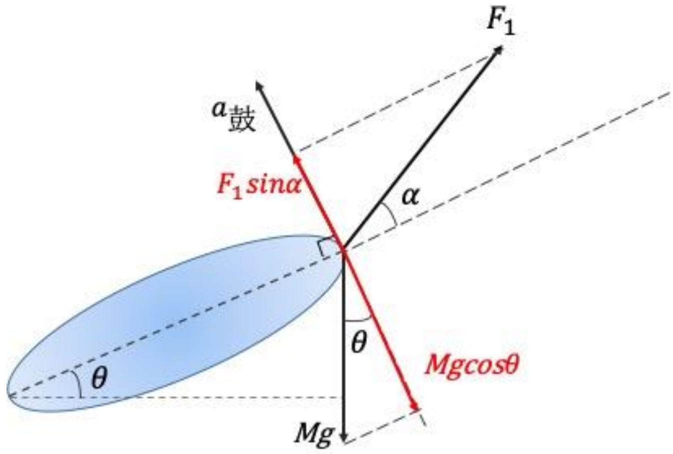

图 5-10 鼓开始转动后受到的力以及转动加速度

通过受力分析图 5-10 得到$a_鼓$的一般表达式：

$$a_鼓=\frac{\sum_{i=1}^{n}F_i\sin(\alpha(t))-Mg\cos\theta}{M} \tag{5-2-3}$$

其中F_i表示每个队员的发力大小。

根据图 5-9 的几何关系，我们得到如下的方程：

$$\begin{cases}\int_0^{t1}\left(\int_0^{t1}\frac{\sum_{i=1}^{n}F_i\sin(\alpha(t))-Mg\cos\theta}{M}dt\right)dt=l\sin\alpha_0-l\sin\alpha(t)\\ \theta=\int_0^{0.1}\left(\int_0^{0.1}\frac{k(F_1-F)-Mg}{Md'}\sin\alpha(t)dt\right)dt+C\end{cases} \tag{5-2-4}$$

其中，n, F, M, l 均为常量。

利用 Matlab 软件求解，解得$\sin(\alpha(t))$的一般表达式为：

$$\sin(\alpha(t))=\frac{3\times e^{-A}\times(D\times e^{B}+E\times e^{C})}{F\times10^{6}\times(e^{C}-1)}-\frac{3\times e^{A}\times D\times e^{B}+E}{F\times10^{6}\times(e^{C}-1)}+\frac{10^{31}}{F} \tag{5-2-5}$$

其中$A=\frac{(1.\dot{7}\dot{2}\dot{9}\times10^{32})^{\frac{1}{2}}\times t}{10^{15}}$，$B=\frac{2929\times(1.\dot{7}\dot{2}\dot{9}\times10^{32})^{\frac{1}{2}}}{10^{19}}$，$C=\frac{2929\times(1.\dot{7}\dot{2}\dot{9}\times10^{32})^{\frac{1}{2}}}{5\times10^{18}}$，

$D=26522[234]_9 23317$，$E=39[711]_{10}7700$，$F=1.\dot{7}\dot{2}\dot{9}\times10^{32}$．

其图像的大致走向为：

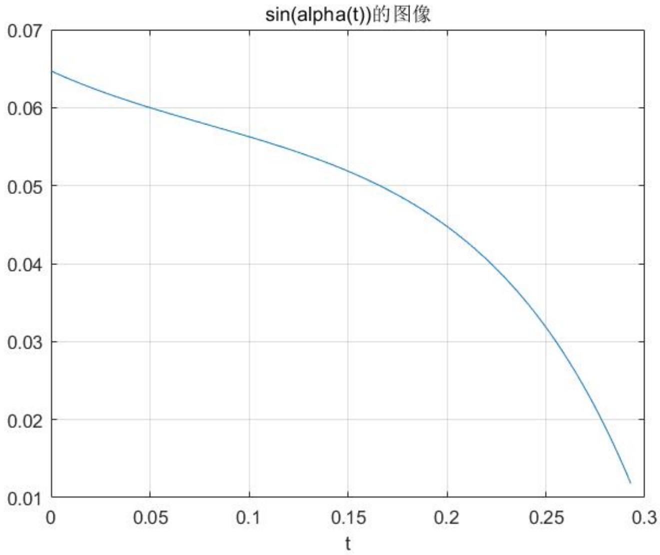

图 5-11 $\sin(\alpha(t))$在$t\in[0,0.3]$范围内的图像

将(5-2-5)式代入(5-2-3)式，解得θ的表达式为：

$$\theta=\int_0^{0.1}\left(\int_0^{0.1}\frac{k(F_1-F)-Mg}{Md'}\left(\frac{3\times e^{-A}\times\ (D\times e^{B}+E\times e^{C})}{F\times10^6\times(e^C-1)}-\frac{3\times e^{A}\times D\times e^{B}+E}{F\times10^6\times(e^C-1)}+\frac{10^{31}}{F}\right)dt\right)dt$$

(5-2-6)

至此，我们根据求得的θ表达式，结合上述分情况的论述，通过 Matlab 软件求得每个序号对应的鼓面倾角，结果如表 5-10：

序号	用力参数	1	2	3	4	5	6	7	8	鼓面倾角（度）
1	发力时机	0	0	0	0	0	0	0	0	**0.2239**
	用力大小	**90**	80	80	80	80	80	80	80	
2	发力时机	0	0	0	0	0	0	0	0	**0.4656**
	用力大小	**90**	**90**	80	80	80	80	80	80	
3	发力时机	0	0	0	0	0	0	0	0	**0.6478**
	用力大小	**90**	80	80	**90**	80	80	80	80	
4	发力时机	**-0.1**	0	0	0	0	0	0	0	**1.9695**
	用力大小	80	80	80	80	80	80	80	80	
5	发力时机	**-0.1**	**-0.1**	0	0	0	0	0	0	**4.0949**
	用力大小	80	80	80	80	80	80	80	80	
6	发力时机	**-0.1**	0	0	**-0.1**	0	0	0	0	**5.6976**
	用力大小	80	80	80	80	80	80	80	80	
7	发力时机	**-0.1**	0	0	0	0	0	0	0	**2.1934**
	用力大小	**90**	80	80	80	80	80	80	80	
8	发力时机	0	**-0.1**	0	0	**-0.1**	0	0	0	**4.5605**
	用力大小	**90**	80	80	**90**	80	80	80	80	
9	发力时机	0	0	0	0	**-0.1**	0	0	**-0.1**	**5.0498**
	用力大小	**90**	80	80	**90**	80	80	80	80	

表 5-12 发力时机（单位：s）和用力大小（单位：N）对鼓面倾角的影响

分析表内数据，发现前三组鼓面倾角很小，所以某成员用力较大对倾角影响较小，而对比 1 组和 4 组的数据，以及 4 组和 5 组的数据可知，队员提前发力会对鼓面倾角产生显著的影响，且提前发力的队员数量越多，影响就越大。这是因为在提前发力的时候，其他成员的作用力为 0，相对差值较大；而在某成员发力较大的情形时，队员之间作用力的相对差值较小，因此影响并不明显。从表中还可以得出的结论是，无论题目怎样的情况，鼓面倾角都不会超过 6 度。

问题 3：

根据问题 2，由于现实情形中存在队员的发力时机和用力大小不能做到协调统一，会导致鼓面出现不同程度的倾角，进而影响球撞击后的走向和接下来的动作。

根据问题 2 求得的结果，在问题 2 给定的每个队员的发力时机和用力大小的情况下，鼓面倾角都未超过 6 度。根据问题 1 的结果，最佳颠球高度约为 0.4m 以上，基于这些数据，根据估算，在保持颠球高度在 0.4-0.6m 的高度，且球初始高度为 0.4m 时，球接触到倾斜的鼓面后回弹再落回的时候不会落出鼓面。所以问题 1 给出的策略基本不需要调整，已经是比较好的策略了。

不过，为了保证鼓面的稳定性，可做出的调整是：尽量保证成员发力时间的统一性，如通过统一口号的方式，保证发力的节奏性。

问题 4：

当鼓面发生倾斜时，球跳动方向不再竖直，于是需要队员调整拉绳策略。球弹起后相对于竖直方向产生 1 度的倾斜角度。根据题目给定数据，我们由题目可知，球回弹的高度 $H_{上升}=0.6m$，由运动学公式：

$$\mathrm{mg}H_{上升}=\frac{1}{2}mv_{垂}^{2} \tag{5-4-1}$$

可知球垂直方向的速度$v_{垂}=3.4641m/s$；已知球反弹后相对于竖直方向产生 1° 的倾斜角度，则有：

$$\begin{cases} v_{垂}=v_{合}\sin(89^{\circ}) \\ v_{水}=v_{合}\cos(89^{\circ}) \end{cases} \tag{5-4-2}$$

解得$v_{水}=0.0605m/s$，$v_{合}=3.4646m/s$；

$\theta_{第一次碰撞}=-0.5^{\circ}$（即鼓的状态为左高右低）；

同时由

$$H_{上升}=\frac{1}{2}gt_{上升}^{2} \tag{5-4-3}$$

得$t_{上升}=0.3464s$；

以球与鼓碰撞时的位置为坐标原点，建立二维直角坐标系，坐标为“t-时间”和“H-高

度”利用抛物运动的对称性以及上述数据可得知，球的反弹轨迹为：

$$H = -5.0003t^2 + 3.4642t \tag{5-4-4}$$

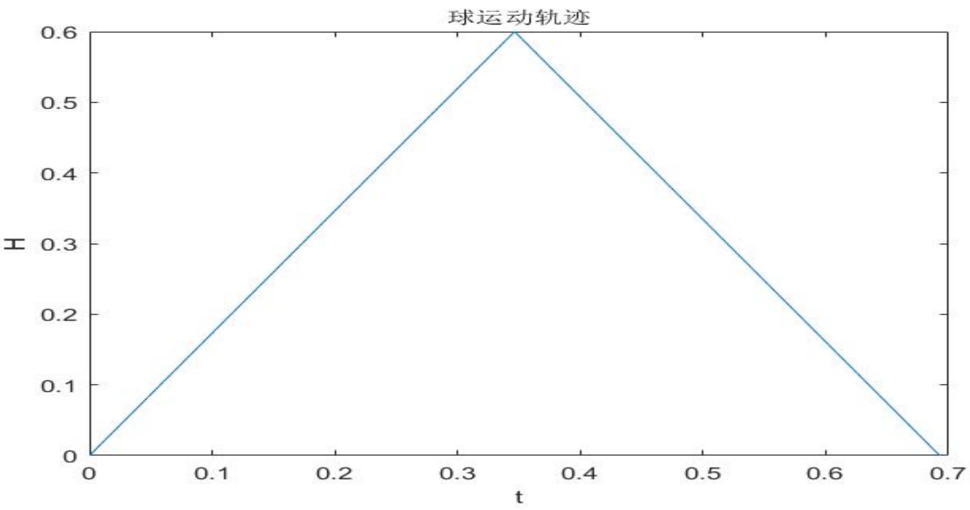

图 5-13 球运动的轨迹

假设团队在球反弹后 0.6928 秒时再次颠球，则需要让团队保证碰撞时鼓的倾斜角度为 $\theta_{第二次碰撞} = 0.5°$ （即鼓的状态为左低右高）；

已知球倾斜的方向在水平面的投影指向两位队员，与这两位队员的夹角之比为 1：2。

所有人同时用力，离球近的队员用 $2F_2^1$N 的力，离球远的队员用F_2^1N 的力，其余的人用F_0 =80N 的力。

由前文公式可得
$$\begin{cases} a_{线} = \frac{(3F_2-2F_0)\sin(\alpha(t))}{M} \\ a_{线} = r(1+\cos(18°))a_{角} \\ \int\left(\int a_{角}\,dt\right)dt = 0.5° \end{cases} \tag{5-4-4}$$

解得$F_2^1 = \frac{320}{3}N$，$F_2^2 = \frac{160}{3}N$

6 模型检验

问题 2 中的关键量是$\sin(\alpha(t))$。由于通过分析求得的表达式形式较为复杂，我们进一步通过 Runge-Kutta 法[1]对上述微分方程的解进行数值方法的验证。

Runge-Kutta 法[2]通常简称 RK 方法，是 19 世纪末德国科学家 C.Runge 和 M.W.Kutta 提出来的一种常微分方程迭代数值方法，其中尤其以 4 阶方法使用最为广泛。对于复杂的微分方程，尤其是方程的解很难通过一定的解析式进行表示的时候，通过此精度较高的方法，可以通过数值表的形式模拟方程的真实解。

通过 RK 方法求得的结果与$\sin\left(\alpha(t)\right)$的图像进行比较发现，方程解析解与数值解重合

度较高，两者之差小于 1%，所以此解析式具有较高的准确度和适用性。因此，在接下来对序号的求解中，仍可借助上述类似的方式求得每种情况对应的$\sin(\alpha(t))$的解析式，并求得θ的一般表达式，然后代入时间即可求解。

7 模型推广

在查阅文献的过程中，了解到关于“同心鼓”模型的研究在国内外领域很少，尤其在国外相关领域基本处于空白阶段。因为此类团建协作类游戏项目在国外并不流行，且对于实际工程和科技的可借鉴意义较小。不过，此类多绳单物动态模型对于某类特定物理模型的建立和求解具有一定借鉴意义，如类似“FAST”天眼系统的钢索悬吊模型，以及其他稳定性和动态调整的问题。

8 模型优缺点

8.1 模型优点

1. 本模型利用规划模型，可根据实际情况针对给定要求对问题进行求解，模型更贴近实际，通用性较强。
2. 构建鼓面受力与偏转角关系模型时，对于形式复杂的表达式进行数值方法的验证，保证了微分方程解的准确性和可靠性。
3. 分析受力时进行了等效处理，简化模型，不受参与力数量的影响，具有可推广性。

8.2 模型缺点

1.模型假设中考量空气阻力影响时，由于空气阻力计算公式中包含空气阻力系数（须经过实验测得），因此我们参照了一种可行的球状物体空气阻力测量方法，$f=\frac{1}{4}\rho v^2\pi R^2$,其中$\rho$为空气密度，$v$为物体速度，R 为球体半径，计算时代入常温时的空气密度，速度按 10m/s 代入（根据估算，小球的最大速度不会超过 10m/s），球体半径参照比赛标准排球参数[3]。所求得空气阻力或存在较大误差，但就估算值与球所受重力比例而言可以忽略。

2.模型前提为鼓面与球发生的是非弹性碰撞，若考虑鼓面的形变，则模型构建时还需另加考虑，但题目中为牛皮股面，因此在假设中适当忽略。

3.构建鼓面受力与偏转角关系模型时，求解 θ 的表达式形式复杂，计算量大，编程及程序运行耗时较多。

9 参考文献

[1] 吴庆春、钱仰德.用空气阻力系数测定仪研究运动物体所受空气阻力的成因与定量分析[J].大学物理,2017,36(05):27-32.

[2] 张德丰.《MATLAB 数值分析与应用(第 2 版)》[M].国防工业出版社.2009 年第二版

[3] 苏剑锋.对我校女生气排球与硬式排球教学对比实验[J].体育世界(学术版),2008(10):33-34.

附录

```
sita2jiaodu=a2sita*0.01*57.3

sita2jiaodu =

   0.6478

a2sita=a2/(r*(1+cosd(22.5)))

a2sita =

   0.8125

sita2jiaodu=a2sita*0.01*57.3

sita2jiaodu =

   0.4656

a1=10*sin_at/M

a1 =

   0.1563

d=0.4

d =

   0.4000

a1sita=a1/(d)

a1sita =

   0.3908

sita1jiaodu=a1sita*0.01*57.3

sita1jiaodu =
```

```
   0.2239

a3=a2

a3 =

   0.3126

a3sita=a3/(r*(1+cosd(135/2)))

a3sita =

   1.1305

sita3jiaodu=a3sita*0.01*57.3

sita3jiaodu =

   0.6478

final

final =

(3*exp(-
(172972972972972972972972972973^(1/2)*t)/1000000000000000)*(26522234234
234234234234234234234234423317*exp((2929*172972972972972972972972972973^(1/
2))/10000000000000000000) +
3971171171171171171171171171117700*exp((2929*172972972972972972972972972
972973^(1/2))/5000000000000000000)))/(172972972972972972972972972973000
000*(exp((2929*172972972972972972972972972973^(1/2))/50000000000000000
0) - 1)) -
(3*exp((172972972972972972972972972973^(1/2)*t)/1000000000000000)*(2652
2234234234234234234234234423317*exp((2929*172972972972972972972972972972
973^(1/2))/10000000000000000000) +
3971171171171171171171171171117700))/(17297297297297297297297297297297300
00000*(exp((2929*172972972972972972972972972973^(1/2))/5000000000000000
000) - 1)) +
1000000000000000000000000000000/172972972972972972972972972973

sin01=(3*exp(-
(172972972972972972972972972973^(1/2)*0.1)/1000000000000000)*(265222342
34234234234234234234423317*exp((2929*172972972972972972972972972973^(
1/2))/10000000000000000000) +
```

```
397117117117117117117117117117117700*exp((2929*1729729729729729729729729729729
72973^(1/2))/50000000000000000000)))/(172972972972972972972972972972972973000
000*(exp((2929*1729729729729729729729729729729729 73^(1/2))/500000000000000000
0) - 1)) -
(3*exp((17297297297297297297297297297297 2973^(1/2)*0.1)/1000000000000000)*(26
5222342342342342342342342342342 3317*exp((2929*17297297297297297297297297297297
2973^(1/2))/100000000000000000000) +
397117117117117117117117117117117700))/(17297297297297297297297297297297297297 30
00000*(exp((2929*172972972972972972972972972972972973^(1/2))/5000000000000000
000) - 1)) +
10000000000000000000000000000000/172972972972972972972972972972972973;
sin02=(3*exp(-
(172972972972972972972972972972972973^(1/2)*0.2)/1000000000000000)*(265222342
342342342342342342342342 3317*exp((2929*172972972972972972972972972972972973^(
1/2))/100000000000000000000) +
397117117117117117117117117117117700*exp((2929*1729729729729729729729729729729
72973^(1/2))/50000000000000000000)))/(172972972972972972972972972972972973000
000*(exp((2929*172972972972972972972972972972972973^(1/2))/500000000000000000
0) - 1)) -
(3*exp((172972972972972972972972972972972973^(1/2)*0.2)/1000000000000000)*(26
522234234234234234234234234234 23317*exp((2929*17297297297297297297297297297297
2973^(1/2))/100000000000000000000) +
397117117117117117117117117117117700))/(17297297297297297297297297297297297297 30
00000*(exp((2929*172972972972972972972972972972972973^(1/2))/5000000000000000
000) - 1)) +
10000000000000000000000000000000/172972972972972972972972972972972973;
a4_01=90*sin01/M

a4_01 =

   1.4068

a4sita_01=a4_01/d

a4sita_01 =

   3.5170

sita4_01jiaodu=a4sita_01*0.01*57.3

sita4_01jiaodu =

   2.0153
```

```
a4_02=10*sin02/M

a4_02 =

    0.1244

a4sita_02=a4_02/d

a4sita_02 =

    0.3109

sita4_02jiaodu=a4sita_02*0.01*57.3

sita4_02jiaodu =

    0.1782

sita4_jiaodu=sita4_01jiaodu+sita4_02jiaodu

sita4_jiaodu =

    2.1934

a5_01=2*90*sin01/3.7

a5_01 =

    2.7376

a5sita_01=a5_01/(r*(1+cosd(22.5)))

a5sita_01 =

    7.1147

sita5_01jiaodu=a5sita_01*0.01*57.3

sita5_01jiaodu =

    4.0767

a5_01=2*90*sin01/M
```

```
a5_01 =

    2.8136

a5sita_01=a5_01/(r*(1+cosd(22.5)))

a5sita_01 =

    7.3124

sita5_01jiaodu=a5sita_01*0.01*57.3

sita5_01jiaodu =

    4.1900

a5_02=2*10*sin02/M

a5_02 =

    0.2487

a5sita_02=a5_02/(r*(1+cosd(22.5)))

a5sita_02 =

    0.6465

sita5_02jiaodu=a5sita_02*0.01*57.3

sita5_02jiaodu =

    0.3704

sita5_jiaodu=sita5_01jiaodu+sita5_02jiaodu

sita5_jiaodu =

    4.5604

a6_01=a5_01

a6_01 =
```

```
   2.8136

a6sita_01=a6_01/(r*(1+cosd(135/2)))

a6sita_01 =

  10.1745

sita6_01jiaodu=a6sita_01*0.01*57.3

sita6_01jiaodu =

   5.8300

a6_02=2*10*sin02/M

a6_02 =

   0.2487

a6sita_02=a6_02/(r*(1+cosd(135/2)))

a6sita_02 =

   0.8995

sita6_02jiaodu=a6sita_02*0.01*57.3

sita6_02jiaodu =

   0.5154

sita6_jiaodu=sita6_01jiaodu+sita6_02jiaodu

sita6_jiaodu =

   6.3454

a4_01=80*sin01/M

a4_01 =

   1.2505
```

```
a4sita_01=a4_01/d

a4sita_01 =

    3.1262

sita4_01jiaodu=a4sita_01*0.01*57.3

sita4_01jiaodu =

    1.7913

a4_02=10*sin02/M

a4_02 =

    0.1244

a4sita_02=a4_02/d

a4sita_02 =

    0.3109

sita4_02jiaodu=a4sita_02*0.01*57.3

sita4_02jiaodu =

    0.1782

sita4_jiaodu=sita4_01jiaodu+sita4_02jiaodu

sita4_jiaodu =

    1.9695

a5_01=2*80*sin01/M

a5_01 =

    2.5010

a5sita_01=a5_01/(r*(1+cosd(22.5)))
```

```
a5sita_01 =

    6.4999

sita5_01jiaodu=a5sita_01*0.01*57.3

sita5_01jiaodu =

    3.7244

a5_02=2*10*sin02/M

a5_02 =

    0.2487

a5sita_02=a5_02/(r*(1+cosd(22.5)))

a5sita_02 =

    0.6465

sita5_02jiaodu=a5sita_02*0.01*57.3

sita5_02jiaodu =

    0.3704

sita5_jiaodu=sita5_01jiaodu+sita5_02jiaodu

sita5_jiaodu =

    4.0949

a6_01=a5_01

a6_01 =

    2.5010

a6sita_01=a6_01/(r*(1+cosd(135/2)))

a6sita_01 =
```

```
    9.0440

sita6_01jiaodu=a6sita_01*0.01*57.3

sita6_01jiaodu =

    5.1822

a6_02=2*10*sin02/M

a6_02 =

    0.2487

a6sita_02=a6_02/(r*(1+cosd(135/2)))

a6sita_02 =

    0.8995

sita6_02jiaodu=a6sita_02*0.01*57.3

sita6_02jiaodu =

    0.5154

sita6_jiaodu=sita6_01jiaodu+sita6_02jiaodu

sita6_jiaodu =

    5.6976

40*sind(5.6976)

ans =

    3.9711

40*cosd(5.6976)

ans =

   39.8024
```

```
turn1=[cosd(sita6_jiaodu),cosd(90-
sita6_jiaodu),cosd(90);cosd(90+sita6_jiaodu),cosd(sita6_jiaodu),cosd(90);c
osd(90),cosd(90),cosd(0)]

turn1 =

    0.9951    0.0993         0
   -0.0993    0.9951         0
         0         0    1.0000

turn2=[cosd(sita3jiaodu),cosd(90),cosd(90);cosd(90),cosd(sita3jiaodu),cosd
(90);cosd(90),cosd(90),cosd(sita3jiaodu)]

turn2 =

    0.9999         0         0
         0    0.9999         0
         0         0    0.9999

[x y z]'=turn1*turn2*([20 22 0]')
 [x y z]'=turn1*turn2*([20 22 0]')

turn1*turn2*([20 22 0]')

ans =

   22.0839
   19.9045
         0

turn2=[cosd(sita3jiaodu),sind(sita3jiaodu)/sqrt(2),sind(sita3jiaodu)/sqrt(
2);sind(sita3jiaodu)/sqrt(2),cosd(sita3jiaodu),cosd(sita3jiaodu)*sind(15);
sind(sita3jiaodu)/sqrt(2),cosd(sita3jiaodu)*sind(15),cosd(sita3jiaodu)]

turn2 =

    0.9999    0.0080    0.0080
    0.0080    0.9999    0.2588
    0.0080    0.2588    0.9999

turn1*turn2*([20 22 0]')

ans =
```

```
   22.2748
   20.0461
    5.8535

xiebian=sqrt(22.2748^2+20.0461^2+5.8535^2)

xiebian =

   30.5332

sita9_jiaodu=90-atan(20.0461/sqrt(22.2748^2+5.8535^2))

sita9_jiaodu =

   89.2838

20.0461/sqrt(22.2748^2+5.8535^2)

ans =

    0.8704

sqrt(22.2748^2+5.8535^2)

ans =

   23.0311

mi=acos(23.0311/xiebian)

mi =

    0.7162

mi*57.3

ans =

   41.0390

89.2838*57.3

ans =
```

```
   5.1160e+03

89*57.3

ans =

   5.0997e+03

ans/360

ans =

   14.1658

89.2829*57.3-14*360

ans =

   75.9102

1dao3=[0.2239 0.4656 0.6478']
 1dao3=[0.2239 0.4656 0.6478']

qiansan = [0.2239 0.4656 0.6478]'

qiansan =

    0.2239
    0.4656
    0.6478

zonghe=[0.2239,1.9695;0.4656,4.0949;0.6478,5.6976]

zonghe =

    0.2239    1.9695
    0.4656    4.0949
    0.6478    5.6976

zonghe(:,1)/0.2239

ans =

    1.0000
```

```
    2.0795
    2.8933

zonghe(:,2)/1.9695

ans =

    1.0000
    2.0792
    2.8929

zonghe

zonghe =

    0.2239    1.9695
    0.4656    4.0949
    0.6478    5.6976

housan=[1*2.1934 2.0792*2.1934 2.8929*2.1934]'

housan =

    2.1934
    4.5605
    6.3453
```