Обзор математического анализа IV

Сюй Минчуань

9 сентября 2020 г.

Содержание

1 Интегралы, зависящие от параметров

1.1 Собственные интегралы, зависящие от параметра (ИЗП). Лек.1

Рассмотрим функцию f, определённую на $\Pi = [a \leqslant x \leqslant b] \times [c \leqslant y \leqslant d]$. Пусть $\forall y \in [c,d]$ существует интеграл по x $\int_a^b f(x,y)dx$. Тогда можно сказать, что на $[c,d]$ определена функция

$$J(y) = \int_a^b f(x,y)dx \tag{1}$$

называемая **собственным интегралом, зависящим от параметра**.
Теорема о непрерывности собственных ИЗП Если функция $f \in \mathcal{C}(\Pi)$, то ИЗП (1) непрерывен на Π (даже равномерно непрерывен по Теореме Кантора.)
Теорема об интегрируемости собственных ИЗП Если $f \in \mathcal{C}(\Pi)$, то $J(y)$ интегрируема на $[c,d]$, причем интегрирование можно проводить под знаком интеграла, т.е.

$$\int_a^b J(y)dy = \int_c^d (\int_a^b f(x,y)dx)dy = \int_a^b (\int_c^d f(x,y)dy)dx \tag{2}$$

Теорема о дифференцируемости собственных ИЗП Если $f \in \mathcal{C}(\Pi)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \in \mathcal{C}(\Pi)$, то $J(y)$ дифференцируема на $[c,d]$ и справедлива формула

$$J'(y) = \int_a^b f'_y(x,y)dx \tag{3}$$

Рассмотрим функцию f, определённую на Π. Пусть внутри него лежат две кривые: $x = \alpha(y), x = \beta(y)$. Рассмотрим область $D = \{\alpha(y) \le x \le \beta(y), c \le y \le d\} = [\alpha(y) \le x \le \beta(y)] \times [c \le y \le d]$. Пусть $\forall y \in [c,d]$ существует интеграл

$$J(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx \tag{4}$$

Теорема о непрерывности собственных ИЗП - 2 Если функция $f \in \mathcal{C}(\Pi)$, а функции $\alpha, \beta \in \mathcal{C}[c,d]$, то ИЗП (4) непрерывна на $[c,d]$.
Теорема о дифференцируемости собственных ИЗП - 2 Пусть $f \in \mathcal{C}(\Pi)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \in \mathcal{C}(\Pi)$, а $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ дифференцируемы на $[c,d]$ Тогда функция $J(y)$, определенная формулой (4) дифференцируема на $[c,d]$, причем её производная вычисляется по **формуле Эйлера**:

$$J'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x,y)dx + \beta'(y)f(\beta(y),y) - \alpha'(y)f(\alpha(y),y) \tag{5}$$

1.2 Признаки равномерной сходимости несобственных ИЗП (Вейерштрасса, Дирихле-Абеля, Дини). Лек.2

Несобственные интегралов 1-го рода
Пусть функция f определена в полуполосе $\Pi_\infty = [a \le x < +\infty) \times [c \le y \le d]$ и $\forall y \in [c, d]$ сходится по x **несобственный интеграл**

$$J(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)dx \tag{6}$$

Будем говорить, что *сходящийся* при $\forall y \in [c, d]$ несобственный интеграл (6) называется **равномерно сходящимся** по y на $[c, d]$, если

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A(\varepsilon) > a : \forall R \ge A(\varepsilon) \text{ и } \forall y \in [c, d] \Rightarrow |\int_R^{+\infty} f(x, y)dx| < \varepsilon. \tag{7}$$

Обозначение: $\int_a^{+\infty} f(x, y)dx \overset{[c,d]}{\rightrightarrows}$.
Несобственные интегралов 2-го рода - лек.3
Предположим, что функция $f(x, y)$ определена и ограничена в полуоткрытом прямоугольнике $\Pi = [a \leqslant x < b] \times [c \leqslant y \leqslant d]$ и что $\forall y \in [c, d]$ сходится несобственный интеграл второго рода $\int_a^b f(x, y)dx$, т.е. $\exists \lim_{\varepsilon \to 0+0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x, y)dx$
Будем называть несобственный интеграл $\int_a^b f(x, y)dx$ **равномерно сходящимся** на сегменте $[c, d]$, если он сходится $\forall y \in [c, d]$, и справедливо

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \alpha, 0 < \alpha < \delta(\varepsilon), \forall y \in [c, d] \Rightarrow \left| \int_{b-\alpha}^b f(x, y)dx \right| < \varepsilon \tag{8}$$

Критерий Коши равномерной сходимости Для того, чтобы несобственный интеграл (6) сходился равномерно необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие Коши:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A(\varepsilon) > a : \forall R', R'' \ge A(\varepsilon) \text{ и } \forall y \in [c, d] \Rightarrow |\int_{R'}^{R''} f(x, y)dx| < \varepsilon. \tag{9}$$

Признак Вейерштрасса Пусть
1) функция $f(x, y)$ определена в Π_∞ и для $\forall y \in [c, d]$ интегрируема по x на $[a, R]$ для $\forall R \geqslant a$.
2) Пусть функция $g(x)$ также интегрируема на $[a, R]$ и для неё сходится несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.
3) Пусть, наконец, всюду в полуполосе Π_∞ справедливо неравенство $0 \leqslant |f(x, y)| \leqslant g(x)$.
Тогда несобственный интеграл (6) сходится по y равномерно на $[c, d]$.
Следствие признака Вейерштрасса Пусть функция $\varphi(x, y)$ определена и ограничена в Π_∞, и для $\forall y \in [c, d]$ и $\forall R > a$ интегрируема по x на $[a, R]$. Пусть, кроме того, функция $\psi(x)$ допускает сходимость $\int_a^{+\infty} |\psi(x)|dx$. Тогда $\int_a^{+\infty} \varphi(x) \cdot \psi(x)dx \overset{[c,d]}{\rightrightarrows}$ по y.

Признак Дини Пусть
1) функция $f = f(x,y)$ непрерывна и неотрицательна в Π_∞.
2) Пусть также несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ сходится $\forall y \in [c,d]$.
3) Определяемая им функция $J(y)$ является непрерывной на $[c,d]$.
Тогда сходимость несобственного интеграла $J(y)$ является равномерной на $[c,d]$.
Признак Дирихле Пусть для функций $f = f(x,y)$ и $g = g(x,y)$ выполнено:
1) $g \overset{[c,d]}{\rightrightarrows} 0$ при $x \to +\infty$
2) g монотонна по x для $\forall y \in [c,d]$
3) $\forall R > a, \forall y \in [c,d] \exists M > 0 : \left|\int_a^R f(x,y)dx\right| \leqslant M$
(Частичный интеграл от функции f равномерно ограничен)
Тогда $\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dx \overset{[c,d]}{\rightrightarrows}$.
Признак Абеля Пусть для функций $f = f(x,y)$ и $g = g(x,y)$ выполнено:
1) $\int_a^{\infty} f(x,y)dx \overset{[c,d]}{\rightrightarrows} 0$ по y, при $x \to +\infty$.
2) Функция g ограничена и монотонна по x.
Тогда $\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dx \overset{[c,d]}{\rightrightarrows}$.

1.3 Непрерывность и интегрируемость несобственных ИЗП на отрезке. Лек.3

Непрерывность несобственных ИЗП на отрезке Пусть $f = f(x,y)$ непрерывна на Π_∞, а несобственный интеграл $J(y) = \int_a^{\infty} f(x,y)dx \overset{[c,d]}{\rightrightarrows}$. Тогда $J(y) \in \mathcal{C}[c,d]$.
Интегрируемость несобственных ИЗП на отрезке Пусть $f = f(x,y)$ непрерывна на Π_∞, а несобственный интеграл $J(y) = \int_a^{\infty} f(x,y)dx \overset{[c,d]}{\rightrightarrows}$. Тогда $J(y)$ интегрируема на $[c,d]$, причем интегрирование можно проводить под знаком интеграла, т.е. справедлива формула:

$$\int_c^d J(y)dy = \int_a^{+\infty} \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx \tag{10}$$

1.4 Дифференцируемость несобственных ИЗП. Лек.3

Дифференцируемость несобственных ИЗП на отрезке Пусть функции $f = f(x,y)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ непрерывны в Π_∞. И, если интеграл $\int_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx \overset{[c,d]}{\rightrightarrows}$, а сам несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ сходится в некоторой точке $y \in [c,d]$, то $J(y)$ имеет производную на $[c,d]$, и

$$J'(y) = \int_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx \tag{11}$$

1.5 Интегрируемость несобственных ИЗП на полупрямой. Лек.3

Интегрируемость несобственных ИЗП на полупрямой Пусть $f = f(x,y)$ непрерывна и неотрицательна в четверти плоскости $\{(x,y) \mid x \geqslant a, y \geqslant c\}$. Пусть также
1) интеграл $J(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ сходится $\forall y \geqslant c$, и определённая им функция непрерывна.
2) интеграл $K(x) = \int_c^{+\infty} f(x,y)dy$ сходится $\forall x \geqslant a$, и определённая им функция непрерывна.
Тогда, если сходится один из двух интегралов:

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} K(x)dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f(x,y)dy, \\ \int_c^{+\infty} J(y)dy = \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x,y)dx \end{aligned} \tag{12}$$

то сходится и второй из этих интегралов, причём они равны друг другу.

1.6 Вычисление интеграла Дирихле. Задача 3812.1

Интеграл Дирихле

$$D(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin\beta x}{x}dx = \pi/2sgn\beta \tag{13}$$

Рассмотирим интеграл вида

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}dx, \alpha \geq 0 \tag{14}$$

1) Пусть $\beta > 0$. Зафиксируем произвольный β и покажем, что $I(\alpha) \rightrightarrows$ при $\alpha \in [0, +\infty)$.
1. $e^{-\alpha x}/x \rightrightarrows 0$ при $x \to +\infty$, так как $(0 \leq e^{-\alpha x}/x \leq 1/x$, и по признаку Вейерштрасса).
2. $e^{-\alpha x}/x$ монотонно убывает по x.
3. $|\int_0^A \sin\beta x dx| = |1/\beta(1-\cos\beta A)| \leq 2/\beta$, то есть частичный интеграл равномерно ограничен.
Тогда по признаку Дирихле $I(\alpha)$ сходится равномерно при $\alpha \geq 0$.
Следовательно $I(\alpha) \in \mathcal{C}[0, +\infty)$.

Заметим, что $\lim_{x\to+0} e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x} = \beta$. Тогда мы вычисляем производную от функции $I(\alpha)$ под знаком интеграла. Это обеспечивается
1) $|\frac{\partial}{\partial\alpha} e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}| = |e^{-\alpha x}\sin\beta x| \leq e^{\alpha_0 x}$ при $\alpha \geq \alpha_0 > 0$ и α_0 произвольный, а $\int_0^{+\infty} e^{\alpha_0 x}dx$ сходится, затем по признаку Вейерштрасса. 2) Сам интеграл $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}dx$ при любом фиксированном значении α, так как

$e^{-\alpha x}/x$ монотонно убывает по x и стремится к 0, а $\sin \beta x$ имеет ограниченную первообразную, поэтому по признаку Дирихле этот несобственный интеграл сходится при некотором(фактически при любом) α.

Используя интегрирование по частям, мы получим $I'(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} dx = -\beta/(\alpha^2 + \beta^2)$. Интегрируем $I'(\alpha)$, получим $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} -\beta/(\alpha^2 + \beta^2) d\alpha = -\arctan \alpha/\beta + C$. Так как $|I(\alpha)| \leq \beta \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = \beta/\alpha$ и пусть $\alpha \to +\infty$, получим $\lim_{\alpha \to +\infty} I(\alpha) = 0$. Из этого получим $C = \pi/2$. Тогда $I(\alpha) = -\arctan \alpha/\beta + \pi/2$.
Теперь $D(\beta) = I(0) = \pi/2$.
2) Пусть $\beta < 0$, тогда $D(\beta) = -D(-\beta) = -\pi/2$
3) Пусть $\beta < 0$, тогда очевидно $D(0) = 0$.

В итоге, $D(\beta) = \pi/2 sgn \beta$.

1.7 Свойства Γ-функции Эйлера. Лек.4

Гамма-функцией Эйлера, или **интегралом Эйлера второго рода** называется функция от одного параметра p:

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx \tag{15}$$

Свойства Γ-функции
1) Γ-функция существует при $p > 0$.
2) $\Gamma(p)$ непрерывна при $p > 0$.
3) **Формула приведения** $\forall p > 0, \Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$.
4) $\Gamma(n+1) = n!, n \in \mathbb{N}$.
5) $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.
6) **Дифференцирование по параметру** Для любых $0 < p_0 \leqslant p \leqslant p_1 < +\infty$ и $n \in \mathbb{N}$ гамма-функция n раз дифференцируема по параметру, причем справедлива формула

$$\frac{d^n}{dp^n} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{p-1} dt = \int_0^{+\infty} \frac{d^n}{dp^n} \left(e^{-t} t^{p-1} \right) dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{p-1} \ln^n t dt \tag{16}$$

1.8 Свойства B-функции Эйлера. Связь между эйлеровыми интегралами. Лек.4

Бета-функцией Эйлера, или интегралом Эйлера первого рода называется функция, зависящая от параметров p и q:

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \tag{17}$$

Свойства B-функции
1) B-функция существует при $p, q > 0$.

2) $B(p,q)$ непрерывна при $p,q>0$.
3) **Симметрия** $\forall p,q>0, B(p,q)=B(q,p)$.
4) **Формула приведения**

$$\begin{aligned} B(p+1,q) &= \frac{p}{p+q}B(p,q), \\ B(p,q+1) &= \frac{q}{p+q}B(p,q) \end{aligned} \tag{18}$$

5) При $\forall p>0, \forall n\in\mathbb{N}$:

$$B(p,n)=\frac{(n-1)!}{p(p+1)\dots(p+n-1)} \tag{19}$$

Если $p\in\mathbb{N}$, то

$$B(p,n)=\frac{(n-1)!(p-1)!}{(p+n-1)!} \tag{20}$$

Связь между эйлеровыми интегралами
При $p,q>0$ справедливо

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{21}$$

1.9 Асимптотическая формула для функции $\Gamma(\lambda+1), \lambda\to+\infty$. Формула Стирлинга. Лек.5

Формула Стирлинга Пусть $\lambda\in\mathbb{N}$. Тогда для $\lambda!$ справедлива следующая асимптотическая оценка:

$$\lambda! = \left(\frac{\lambda}{e}\right)^{\lambda}\cdot\sqrt{2\pi\lambda}\,(1+\gamma_\lambda) \tag{22}$$

где $\gamma_\lambda=\frac{1}{12\lambda}+\frac{1}{228\lambda^2}-\frac{139}{51840\lambda^3}-\frac{571}{2448320\lambda^4}+\underline{O}\left(\frac{1}{\lambda^5}\right)$

2 Теория рядов Фурье

2.1 Ортонормированные системы. Задача о наилучшем приближении элемента евклидова пространства. Лек.6

Система элементов $\{\psi_j\}\in L$ называется **ортонормированной**, если $(\psi_j,\psi_k)=\delta_j^k$ - символ Кронекера.
Пример Важным примером такой системы является система

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}\right\} \tag{23}$$

в $L[-\pi,\pi]$ и $[-\pi,\pi]$, где $k=1,2,3,\ldots$, которая называется **тригонометрической системой функций**.

Пусть $\{\psi_j\}$ произвольная ортонормированная система. Фиксируем $\forall n \in \mathbb{N}$ и рассмотрим сумму $\sum_{j=1}^{n} c_j\psi j$.
Отклонение элемента g **от** f в псевдоевклидовом пространстве называют число $||f-g||$.
Требуется найти $\min_{c_k} ||f-\sum_{j=1}^{n} c_j\psi j||$. Оказывается, при $c_k = f_k = (f,\psi_k)$ достигается минимум.
Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k\psi_k$ называется **рядом Фурье** функции f по ортонормированной системе $\{\psi_k\}$.
$f_k = (f,\psi_k)$ **- коэффициенты ряда Фурье**.
$\sum_{k=1}^{n} f_k\psi_k$ **-** n**-ая частичная сумма ряда Фурье**.
Тождество Бесселя $\min_{c_k} ||f-\sum_{j=1}^{n} c_j\psi j||^2 = ||f||^2 - \sum_{k=1}^{n} {f_k}^2$. Это справедливо $\forall f \in L$ и для любой ортонормированной системы $\{\psi_k\}$.
$\forall f \in L$ и для любой ортонормированной системы $\{\psi_k\}$ справедливо **неравенство Бесселя**: $\sum_{k=1}^{\infty} {f_k}^2 \le ||f||^2$.
Тригонометрический ряд Фурье обычно принято записывать немного в другом виде, а именно:

$$\begin{aligned}
&\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx),\\
&a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,\\
&a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos k_x dx,\\
&b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin k_x dx.
\end{aligned} \tag{24}$$

2.2 Замкнутость и полнота ортонормированных систем. Лек.7

Ортонормированная система $\{\psi_k\}$ в псевдоевклидовом пространстве называется **замкнутой**, если для любого произвольного элеиента этого пространства

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \exists c_1,\ldots,c_n : ||f-\sum_{j=1}^{n} c_j\psi_j|| < \varepsilon. \tag{25}$$

Ортонормированная система $\{\psi_k\}$ в псевдоевклидовом пространстве называется **полной**, если из $\forall k \in \mathbb{N}, f \perp \psi_k$ следует $f \equiv 0$. То есть если любой элемент пространства ортогональный ко всем элементам $\{\psi_k\}$ обязательно является нулевым.

Равенство Парсеваля В псевдоевклидовом пространстве для замкнутой системы неравенство Бесселя переходит в тождество, а именно:

$$\sum_{k=1}^{\infty} {f_k}^2 \leq ||f||^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} {f_k}^2 = ||f||^2 \tag{26}$$

Теорема Если ортонормированная система $\{\psi_k\}$ в произвольном псевдоевклидовом пространстве $\mathcal{L}$ является замкнутой, то $\forall f \in \mathcal{L}$ его ряд Фурье сходится к f по норме $\mathcal{L}$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f - \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k \right\|_{\mathcal{L}} = 0 \tag{27}$$

в $\mathcal{L}[-\pi, \pi]$ выполнено

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k \right\|_{\mathcal{L}} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k(x)\right)^2 dx} \tag{28}$$

Это **сходимость в среднем ряда Фурье** этой функции.

Теорема В евклидовом пространстве $\mathcal{L}$ всякая замкнутая ортонормированная система $\{\psi_k\}$ является полной.
Теорема Для полной ортонормированной системы в евклидовом пространстве $\mathcal{L}$ два различных элемента f и g не могут иметь совпадающих для всех номеров коэффициентов Фурье по этой системе.

2.3 Теорема Фейера. Лек.8

Пусть f - 2π-периодическая функция, для тригонометрического ряда Фурье имеем

$$S_n(x, f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{29}$$

Будем называть **чезаровскими средними** для тригонометрического ряда Фурье выражение

$$\sigma_n(x, f) = \frac{S_0(x, f) + S_1(x, f) + \ldots + S_{n-1}(x, f)}{n} \tag{30}$$

Утверждения Справедливы

$$\begin{aligned} S_n(x, f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \underbrace{\frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}}}_{\text{ядро Дирихле}} dt \\ \sigma_n(x, f) &= \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \underbrace{\frac{\sin^2 \frac{tn}{2}}{2\sin^2 \frac{t}{2}}}_{\text{ядро Фейера}} dt \end{aligned} \tag{31}$$

Удобнее обозначать ядро Фейера и ядро Дирихле как

$$\begin{aligned} D_n(t) &= \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} \\ \Phi_n(t) &= \frac{\sin^2\frac{tn}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} \end{aligned} \tag{32}$$

Теорема Фейера Функция $f(x) \in \mathcal{C}[-\pi,\pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$ тогда и только тогда, когда $\sigma_n(x,f) \overset{[-\pi,\pi]}{\rightrightarrows} f(x), n \to +\infty$

2.4 Замкнутость тригонометрической системы. Следствия из замкнутости. Лек.8-9

Теорема Тригонометрическая система функций[1] замкнута в псевдоевклидовом пространстве[2] $\mathcal{L}[-\pi,\pi]$, и тем более в евклидовом пространстве $\hat{\mathcal{C}}[-\pi,\pi]$.[3]
Следствия к теореме
1) Для $\forall f \in L$ неравенство Бесселя для тригонометрической системы функций переходит в равенство Парсеваля.

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \tag{33}$$

2) Для $\forall f \in L$ ее тригонометрический ряд Фурье сходится к ней в среднеквадратичном(в среднем).
3) Для $\forall f \in L$ ее тригонометрический ряд Фурье можно интегрировать почленно.
4) Тригонометрическая система функций является полной в евклидовом пространстве $\mathcal{C}[-\pi,\pi]$, но она не является полной в псевдоевклидовом пространстве $L[-\pi,\pi]$.
5) Все коэффициенты Фурье двух различных кусочно-непрерывных на $[-\pi,\pi]$ функций f и g не могут совпадать.

2.5 Теоремы Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной функции. Лек.8

Будем называть **тригонометрическим многочленом** конечную линейную комбинацию sin и cos, т.е.

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos kx + b_k\sin kx\right) \tag{34}$$

[1] Ортогональная система, не ортонормированная

[2] Всякое евклидово пространство является псевдоевклидовым.

[3] $\hat{\mathcal{C}}[a,b]$ - пространство кусочно-непрерывных на $[a,b]$ функций, имеющих конечное число разрывов I-ого рода в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a,b]$.

Теорема Вейерштрасса Пусть $f(x) \in \mathcal{C}[-\pi,\pi]$ и $f(-\pi)=f(\pi)$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists T(x) : \forall x \in [-\pi,\pi] \Rightarrow |f(x)-T(x)| < \varepsilon \tag{35}$$

Теорема о приближении непрерывной функции алгебраическими многочленами Если $f(x) \in \mathcal{C}[a,b]$, то

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists P(x) : \forall x \in [a,b] \Rightarrow |f(x)-P(x)| < \varepsilon \tag{36}$$

где $P(x)$ - алгебраический многочлен.

2.6 Локальная теорема Фейера. Лек.9

Локальная теорема Фейера Пусть $f(x)$ 2π - периодична и интегрируема по любому конечному отрезку. Пусть также существуют конечные пределы $f(x_0 \pm 0)$. Тогда чезаровские средние частичных сумм тригонометрического ряда Фурье этой функции сходятся в этой точке к полусумме односторонних пределов:

$$\sigma_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (x_0, f)\, \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} \tag{37}$$

Сходимость тригонометрического ряда Фурье в точке Пусть $f(x)$ 2π - периодична и интегрируема, и пусть её тригонометрический ряд Фурье сходится[4] в точке x_0, в которой f непрерывна. Тогда

$$S_n(x_0, f) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x_0) \tag{38}$$

Если функция f имеет в точке x_0 разрыв первого рода, то

$$S_n(x_0, f) = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} \tag{39}$$

2.7 Простейшие условия равномерной сходимости и почленной дифференцируемости рядов Фурье. Лек.9

Теорема Карлесона Если функция f допускает понимаемый в смысле Лебега интеграл $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$, то тригонометрический ряд Фурье этой функции сходится к ней почти всюду на отрезке $[-\pi,\pi]$.
Из теоремы Карлесона вытекает, что тригонометрический ряд Фурье любой интегрируемой на $[-\pi,\pi]$ по Риману функции f сходится к ней почти всюду на этом отрезке.

Будем говорить, что функция f имеет на отрезке $[-\pi,\pi]$ **кусочно-непрерывную производную**, если $\exists f'$ существует во всех внутренних точках этого отрезка за исключением, быть может конечного их числа, в каждой из которых

[4] В Теореме Римана из лек.11 не говорится сходимость в точке, там теорема Римана горовит, от чего зависит сходимость ряда Фурье.

f' имеет конечный правый и левый пределы и, кроме того, существуют пределы: $\lim_{x\to-\pi+0} f'(x)$ и $\lim_{x\to\pi-0} f'(x)$.
Будем говорить, что функция f имеет на $[-\pi,\pi]$ кусочно-непрерывную производную порядка $n>1$, если функция $f^{(n-1)}$ имеет на этом отрезке кусочно-непрерывную функцию.
Простейшие условия равномерной сходимости Пусть $f\in\mathcal{C}[-\pi,\pi], f(-\pi)=f(\pi)$ и f имеет кусочно-непрерывную производную. Тогда её тригонометрический ряд Фурье сходится к ней равномерно на $[-\pi,\pi]$. Более того, равномерно сходится и ряд, состоящий из модулей:

$$\frac{|a_0|}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|\,|\cos nx|+|b_n|\,|\sin nx|\right) \tag{40}$$

Предположим теперь, что выполнены следующие условия

$$\begin{aligned}
&(1) f(x) \text{ и } f^{(k)}(x) \text{ для } k=\overline{1,m} \text{ непрерывны на } [-\pi,\pi].\\
&(2) f^{(m+1)}(x) \text{ кусочно-непрерывна на } [-\pi,\pi].\\
&(3) f(-\pi)=f(\pi), f'(-\pi)=f'(\pi),\ldots,f^{(m)}(-\pi)=f^{(m)}(\pi).
\end{aligned} \tag{41}$$

Теорема о почленном дифференцировании ряда Фурье Пусть для функции f выполнены условия (41). Тогда ряд Фурье этой функции можно дифференцировать почленно m раз. Причем ряд, полученный m -кратным дифференцированием, сходится равномерно на $[-\pi,\pi]$ к соответствующей производной.

2.8 Уточнённые условия равномерной сходимости ряда Фурье. Лек.10

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[-\pi,\pi]$. Назовем **модулем непрерывности** функции f на $[-\pi,\pi]$ величину

$$\begin{aligned}
\omega(\delta,f) &= \sup_{x',x''\in[-\pi,\pi],|x'-x''|<\delta}|f(x')-f(x'')|\\
&= \sup_{x,h+x\in[-\pi,\pi],|x'-x''|<\delta}|f(x+h)-f(x)|
\end{aligned} \tag{42}$$

Предположим, что кроме того, функция f 2π - периодична и интегрируема на отрезке $[-\pi-\delta,\pi+\delta]$ для некоторого δ. Назовем величину

$$\widehat{\omega}(\delta,f)=\sup_{x,x+h\in[-\pi,\pi],|h|<\delta}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-f(x+h)|dx \tag{43}$$

интегральным модулем непрерывности.
Утверждение 1. Пусть функция f 2π - периодична и интегрируема по

любому конечному отрезку, а $g(t)$ интегрируема по $[-\pi,\pi]$. Тогда тригонометрические коэффициенты Фурье функции $F_x(t)=f(x+t)g(t)$

$$a_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\cos ntdt, \quad b_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\sin ntdt \quad (44)$$

стремятся к 0 при $n\to\infty$ равномерно по x на $[-\pi,\pi]$.
Утверждение 2. Пусть функция f 2π - периодична и интегрируема по любому конечному отрезку, а $g(t)$ интегрируема по $[-\pi,\pi]$. Тогда

$$c_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\sin t\left(n+\frac{1}{2}\right)dt \overset{[-\pi,\pi]}{\rightrightarrows} 0 \text{ при } n\to\infty \qquad (45)$$

Утверждение 3. Пусть функция f 2π - периодична и интегрируема по любому конечному отрезку, а δ - фиксированное число $0<\delta<\pi$. Тогда функциональные последовательности $\widehat{c}_n(x), c_n^+(x), c_n^-(x)$ стремятся к 0 равномерно по x на $[-\pi,\pi]$ при $n\to\infty$

2.9 Условие сходимости тригонометрического ряда Фурье в точке. Сходимость ряда Фурье кусочно-гельдеровой функции. Лек.12

Будем говорить, что функция f удовлетворяет **условию Гёльдера с показателем** $\alpha(0<\alpha\leqslant 1)$ **в точке** x **справа**, если выполнены два условия:
1) $\exists f(x+0)<\infty$,
2) $\exists M,\delta>0: |f(x+t)-f(x+0)|\leqslant M\cdot|t|^\alpha$ при $\forall t, 0<t<\delta$.
Будем говорить, что функция f удовлетворяет **условию Гёльдера с показателем** $\alpha(0<\alpha\leqslant 1)$ **в точке** x **слева**, если выполнены два условия:
1) $\exists f(x-0)<\infty$,
2) $\exists M,\delta>0: |f(x+t)-f(x-0)|\leqslant M\cdot|t|^\alpha$ при $\forall t, -\delta<t<0$.

Теорема о условии сходимости тригонометрического ряда Фурье в точке Пусть функция f 2π - периодична, интегрируема по любому конечному отрезку и удовлетворяет условию Гёльдера в точке x_0 с показателем $\alpha_1\,(0<\alpha_1\leqslant 1)$ справа и с показателем $\alpha_2\,(0<\alpha_2\leqslant 1)$ слева. Тогда ее тригонометрический ряд Фурье сходится в точке x_0 к числу $\hat{f}\,(x_0)$, где $\hat{f}\,(x_0)=\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$.

Рассмотрим функцию $f\in\mathcal{C}[-\pi,\pi]$. Будем говорить, что f принадлежит **классу Гёльдера с показателем** $\alpha(0<\alpha\leqslant 1)$ (и обозначать это как $f\in\mathcal{C}^\alpha[-\pi,\pi]$), если $\omega(\delta,f)=\underline{O}(\delta^\alpha)$, т.е.

$$\exists M>0,\delta>0: \sup_{|x_1-x_2|<\delta}|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant M\delta^\alpha \qquad (46)$$

Будем называть непрерывную функцию f принадлежащей **классу Дини-Липшица**[5] на $[-\pi, \pi]$, если

$$\omega(\delta, f) = \overline{O}\left(\frac{1}{\ln \frac{1}{\delta}}\right) \tag{47}$$

т.е. $\lim_{\delta\to 0+0} \omega(\delta, f) \ln \frac{1}{\delta} = 0$
Класс Дини-Липшица шире, чем класс Гёльдера.

Будем называть функцию f **кусочно-гёльдеровой** на $[-\pi, \pi]$, если $[-\pi, \pi] = \bigcup_{k=1}^{n} [x_{k-1}, x_k]$ и $f \in \mathcal{C}^{\alpha_k} [x_{k-1}, x_k]$. Иными словами, на каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ функция принадлежит классу Гёльдера с показателем α_k.
Утверждение Если f - кусочно-гёльдеровая на $\mathbb{R}$, то:
1) На любом конечном сегменте $S_n(x, f)$ сходится к f в среднем интегральном.
2) $\forall x_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow S_n(x_0, f) \underset{n\to\infty}{\to} \widehat{f}(x_0)$,
3) На всех отрезках гёльдеровости $S_n(x, f) \overset{[x_{k-1}, x_k]}{\rightrightarrows} f(x)$.

2.10 Принцип локализации Римана. Лек.11

Теорема Римана Пусть функция f 2π - периодична и интегрируема по любому конечному отрезку. Тогда сходимость ее тригонометрического ряда Фурье в произвольной фиксированной точке x зависит только от значения её аргумента в как угодно малой δ - окрестности этой точки, $U_\delta(x)$.

2.11 Свойства преобразования Фурье. Лек.13-14

Будем говорить, что функция f принадлежит классу $L_1(\mathbb{R})$, если:
1) f интегрируема по Риману по любому конечному отрезку;
2) Сходится несобственный интеграл $\int_{\mathbb{R}} \|f(x) \mid dx$.
Основная лемма об образе Фурье Если $f \in L_1(\mathbb{R})$, то для нее сходится интеграл

$$\widehat{f}(y) = v \cdot p \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} f(x) dx \tag{48}$$

называемый **образом** или **преобразованием Фурье функции** f. Причем $\widehat{f}(y)$ является непрерывной $\forall y \in \mathbb{R}$ и $\exists \lim_{|y|\to\infty} |\widehat{f}(y)| = 0$.

[5] **Теорема Дини-Липшица** Пусть $f \in \mathrm{C}[-\pi, \pi], f(-\pi) = f(\pi)$ и f принадлежит классу Дини-Липшица на $[-\pi, \pi]$. Тогда $S_n(x, f) \Rightarrow f(x)$ при $n \to \infty$.
Теорема Пусть $f \in \mathcal{C}^\alpha[-\pi, \pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$. $S_n(x, f) \overset{[-\pi,\pi]}{\rightrightarrows} f(x)$ при $n \to \infty$.
Теорема Пусть $f \in \mathrm{C}^\alpha[a, b]$, где $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$. Тогда $S_n(x, f) \rightrightarrows f(x)$ при $n \to \infty$ на любом отрезке $[a + \delta, b - \delta]$, где $\delta \in \left[0, \frac{b-a}{2}\right]$.

Разложение функции $f(x) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$ в интеграл Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} v \cdot p \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyx} \hat{f}(y) dy \tag{49}$$

восстанавливающее функцию по её образу Фурье, называется **обратным преобразованием Фурье**.
При этом, выражение для образа Фурье

$$\widehat{f}(y) = v \cdot p \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iyx} f(x) dx \tag{50}$$

называется **прямым преобразованием Фурье**.

2.12 Условия разложимости функции в интеграл Фурье. Лек.13-14

Будем говорить, что функция $f \in L_1(\mathbb{R})$ **разложима в интеграл Фурье** в точке x, если

$$\begin{aligned}
&\exists \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy} \widehat{f}(y) dy \\
&= \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi y} f(\xi) d\xi \right) dy \\
&= \frac{1}{2\pi} v \cdot p \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy} \hat{f}(y) dy
\end{aligned} \tag{51}$$

Интеграл Фурье - это обратное преобразование Фурье, восстанавливающее функцию f по ее Фурье-образу.
Условия разложимости функции в интеграл Фурье Если $f \in L_1(\mathbb{R})$ и удовлетворяет условию Гёльдера в точке слева с показателем α_1 и справа с показателем α_2 ($\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$), то существует предел

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy} \hat{f}(y) dy \tag{52}$$

который равен $\frac{1}{2}(f(x-0) + f(x+0))$.