Обзор функционального анализа

Сюй Минчуань

3 сентября 2020 г.

Содержание

1 Открытые и замкнутые множества на прямой

1.1 Открытые и замкнутые множества на прямой. Канторово множество и его свойства. Лек.1 Вопрос 1

Множество **замкнуто**, если оно содержит все свои предельные точки.
Множество **открыто**, есои все его точки являются внутренними.
Объединение любого числа (в том числе бесконечного числа) открытых множеств - открыто.
Пересечение любого числа (в том числе бесконечного числа) замкнутых множеств - замкнуто.
Объединение бесконечного числа замкнутых множеств - может быть незамкнутым. Для конечного числа - замкнуто.
Пересечение бесконечного числа открытых множеств - может быть неоткрытым. Для конечного числа - открыто.

Теорема 1.1 Любое открытое множество E на прямой является объединением конечного или счётного числа попарно непересекающихся интервалов: $E = \bigcup_{a=1}^{\infty} I_a, I_a = (a, b)$, где, возможно, $a = -\infty, b = \infty$.

Канторово множество: получается из удаления открытого множества $G = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right) \cup \ldots$ из интервала $(0, 1)$), причем общая длина удаленных интервалов равна $\frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{1}{27} + \ldots = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1$. Оставшееся множество $K = [0, 1] \setminus G$ называется канторовым множеством. в множество K входят все точки, в разложении троичной дроби которых нет 1, а только 0 и 2. Следовательно множество K содержит множество, эквивалентное множеству двоичных дробей и имеет мощность континуум.

2 Измеримые множества на прямой. Мера Лебега

2.1 Свойства внешней меры. Измеримость открытого множества и счетного объединения измеримых множеств. Измеримость замкнутого множества, дополнения, разности и счетного пересечения измеримых множеств. Критерий измеримости. Лек. 1-2 Вопрос 2

Внешней мерой множества E называется точная нижняя грань по всем покрытиям $s = s(E)$ множества E и обозначается $|E|^* = \inf_{s(E)} \sigma(s)$.
Свойства внешней меры

1. Если $E_1 \subset E_2$, то $|E1|^* \leq |E2|^*$.

2. Если $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, то $|E|^* \leq \sum_{k=0}^{\infty} |E_k|^*$.

3. Если $\rho(E_1, E_2) > 0$, то $|E_1 \bigcup E_2|^* = |E_1|^* + |E_2|^*$.

4. Для любого множества E и любого числа ε существует открытое множество G и такое, что $|G|^* < |E|^* + \varepsilon$.

Множество E называется **измеримым** (измеримым по Лебегу), если для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество G, содержащее E и такое, что $|G \setminus E|^* < \varepsilon$. Внешняя мера измеримого множества E называется **мерой** множества E и обозначается $|E|$. Мера E равна нулю тогда и только тогда, когда $|E|^* = 0$.

Теорема 2.1 Любое открытое множество измеримо и его мера равна сумме длин составляющих его попарно непересакающихся интервалов.
Теорема 2.2 Объединение конечного или счетного числа измеримых множеств является измеримым множеством.
Теорема 2.3 Любое замкнутое множество измеримо.
Теорема 2.4 Если E измеримо, то измеримо и его дополнение CE.
Теорема 2.5 Пересечение конечного или счетного числа измеримых множеств является измеримым множеством.
Теорема 2.6 Разность двух измеримых множеств является измеримым множеством.
Критерий измеримости Для того чтобы множество E было измеримо необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось замкнутое множество F, содержащееся в E и такое, что $|E \setminus F|^* < \varepsilon$.

2.2 Свойство σ-аддитивности меры. Множества типа F_σ и G_δ. Мера Лебега-Стилтьеса. Общее понятие меры. Пример неизмеримого множества. Лек.2-3 Вопрос 3

Теорема 3.1 σ - аддитивность[1] Мера объединения конечного или счетного числа попрано непересекающихся множеств равна сумме мер этих множеств.
Множество E называется множеством **типа** G_δ[2], если оно представимо в виде пересечения счетного числа открытых множеств.

[1]Эта теорема в частности доказывает, что множество рациональных чисел имеет меру нуль, так как это множество можно рассматриваться как объединение счетного числа попарно непересекающихся множеств(точек), у которых меры нуль, и в силу σ - аддитивность Мера этого множества равна нулю.

[2]Множество иррациональных чисел - G_δ Пусть $X(q)$ - это $R \setminus q$, где q - это одно рациональное число (т.е. вся прямая с одной выколотой точкой). Рациональных чисел - счетное количество. Множество иррациональных чисел I - это все числа, кроме рациональных. Это множество можно представить в виде $I = \cap_q X(q)$. Причем каждое $X(q)$ - открытое (т.е. это дополнение одной точки, т.е. замкнутого множества). Получили определение множества G_δ.

Множество E называется множеством **типа** F_σ[3], если оно представимо в виде объединения счетного числа замкнутых множеств.
Теорема 3.2 Если множество E измеримо, то существуют множество E_1 типа G_δ и множество E_2 типа F_σ и такие, что $E_2 \subset E \subset E_1$, причем $|E_1| = |E_2| = |E|$.
Пример неизмеримого множества[4]
Пусть C - окружность, длина которой равна 1, α- некоторое иррациональное число. Отнесем к одному классу те точки окружности C, которые могут быть переведены одна в другую поворотом окружности C на угол $\pi n\alpha$(n-целое). Каждый из этих классов будет состоять из счетного числа точек. Выберем из каждого такого класса по одной точке.

Покажем, что полученное таким образом множество (обозначим его Φ_0) неизмеримо. Обозначим через Φ_n множество, получаемое из Φ_0 поворотом на угол $\pi n\alpha$. Легко видеть, что все множества Φ_n попарно не пересекаются и их объединенем является окружность . Если бы множество Φ_0 было измеримым, то были бы измеримы и все конгруентные ему множества Φ_n. Так как$C = \cup_{n=-\infty}^{\infty}\Phi_n, \quad \Phi_n \cap \Phi_m = \emptyset, \quad n \neq m$, то в силу σ -аддитивности меры отсюда следовало бы, что $1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\Phi_n|$. Но конгруентные множества должны иметь одну и ту же меру, так что если множество Φ_0 измеримо, то $|\Phi_n| = |\Phi_0|$. Отсюда видно, что равенство для ряда невозможно, так как сумма ряда равна нулю, если $|\Phi_n| = 0$, и равна бесконечности, если $|\Phi_n| > 0$. Итак, множество Φ_0(а, следовательно, и каждое Φ_n) неизмеримо. Из этого примера следует также неаддитивность внешней меры.

Мера Лебега-Стилтьеса
Пусть $F(t)$ - некоторая неубывающдя, непрерывная слева функция на прямой. Положим

$$m(a,b) = F(b) - F(a+0), \quad m[a,b] = F(b+0) - F(a)$$
$$m(a,b] = F(b+0) - F(a+0), \quad m[a,b) = F(b) - F(a)$$

Это мера называется **мерой Лебега-Стилтьеса**.

Общее понятие меры
Непустая система множеста иазывается **кольцом**, если она обладает тем свойством, что из $A \in K$ и $B \in K$ следует $A \triangle B \in K$ и $A \cap B \in K$.
Кольцо множеств есть система множеств, замкнутое по отношению к взятию суммы и пересечения, вычитания и образования симметричной разности.

[3]Множество рациональных чисел - F_σ Т.к. каждое рациональное число само образует замкнутое множество, и объединение всех рациональных чисел естественно является F_σ

[4]微信-收藏-和 qc 的聊天 c1 c2 c3 就是各个 класс, 每个 класс 里面的点都相差 pi*α（比如 x11 点转动 piα 得到 x12，再转动 piα 得到 x13）。Φ0 是在每个 класс 中选一个点组成的，那么比如我们可以选择对角线的这样的元素作为 Φ0, 那么对应的 Φ1 就是所有的点转动 pi*α。所有 Φn 的并集是整个 C 而且互不相交。根据 аддитивность |C|=1 =Σ|Φn|。但是 Φn 都是一样的所以 |Φ0|=|Φ1|=...=|Φn|。但这样的话 |C|=1 =Σ|Φn| 就不可能成立了.

Система состоящая только из пустого множества есть **наименьшее возможное кольцо** множеств.
Множество E называется **единицей** системы множеств K, если $E \subset K$ и если для любого $A \in K$ имеет $A \cap E = A$.
Кольцо множеств с единицей называется **алгеброй множеств**.
Для любого непустой системы множеств Σ существует одно и только одно кольцо $R(\Sigma)$, содержащее Σ и содержащееся в любом кольце R, содержащее Σ. Это кольцо называется **минимальным кольцом** и обозначается $R(\Sigma)$.
Система множеств называется **полукольцом**, если она содержит пустое множество, замкнута по отношению к преобразованию пересечений и обладает тем же свойством, что из $A_1 \subset A \in K$ вытекает возможности представления в виде $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, где A_k - попарно непересекающихся множеств из K,первое из которых - заданное A_1.
Функция множества $\mu(A)$ называется **мерой**, если
1) область определения Σ_μ функции $\mu(A)$ есть полукольцо множеств,
2) значения функции $\mu(A)$ действительны и неотрицательны,
3) $\mu(A)$ аддитивна, т.е. Для любого конечного разложения $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ множества $A \subset \Sigma_\mu$ на попарно непересекающихся множества $A_n \subset \Sigma_\mu$ выполнено равенство $\mu(A) = \sum_{k=1}^{n} \mu\left(A_k\right)$.
Мера μ называется **продолжением меры** m, если $\Sigma_m \subset \Sigma_\mu$ и для каждого $A \subset \Sigma_m$ имеет место разложение $\mu(A) = m(A)$.

3 Измеримые функции

3.1 Измеримые функции и их свойства. Измеримость верхнего и нижнего пределов последовательности измеримых функций. Лек.5 Вопрос 4

Функция $f(x)$, определённая на измеримом множестве E называется **измеримой** на нём, если для любого числа a множество $E[f \geq a]$[5] измеримо.
Если функция $f(x)$ измерима на E, то она измерима и на любом измеримом подмножестве E_1 множества E.
Если $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, E_n - измеримы и $f(x)$ измерима на каждом множестве E_n, то она измерима и на всем E.
Любая функция измерима на множестве E меры нуль.

Две заданные на измеримом множестве E функции $f(x)$ и $g(x)$ называются **эквивалентными**, если множество $E[f(x) \neq g(x)]$ имеет меру нуль. Обозначают эквивалентность функции формулой $f(x) \sim g(x)$.
Если $f(x) \sim g(x)$ на E и функция $f(x)$ измерима на E, то и функция $g(x)$ измерима на E.

[5] $E[f(x) \geq a] = x \in E : f(x) \geq a$, причем это условие равносильно $E[f(x) \leq a]$, $E[f(x) < a]$, $E[f(x) > a]$.

Говорят, что некоторое свойство выполняется **почти всюду** на измеримом множестве E, если оно не выполняется на подмножестве множества E меры нуль.
Если функция $f(x)$ непрерывна почти всюду[6] на измеримом множестве E, то $f(x)$ измерима на E.

Теорема 4.1 Если функция f(x) измерима на E, то $|f(x)|$ также измерима на нём. Если $C = const$, то $f(x) + C$ и $C \cdot f(x)$ измеримы на E. Если $f(x)$ и $g(x)$ измеримы на E, то и множество $E[f > g]$ - измеримо.
Теорема 4.2 Если функции $f(x)$ и $g(x)$ измеримы на измеримом множестве E, то и функции $f \pm g$, $f \cdot g$ и $\frac{f}{g}(g \neq 0)$ измеримы на E.
Теорема 4.3 Если $f_n(x)$ -последовательность измеримых на E функций, то нижний и верхний пределы этой последовательности -измеримы на E (ограниченность функций не предполагается).

3.2 Измеримость предела сходящейся почти всюду последовательности измеримых функций. Сходимость по мере. Теорема Лебега. Связь между сходимостью почти всюду и сходимостью по мере. Лек.5 Вопрос 5

Теорема 5.1 Если $f_n(x)$ - последовательность измеримых на E функций, сходится почти всюду на E к функции $f(x)$, то $f(x)$ измерима на E.

Пусть функции $f_n(x), n = 1, 2, 3, \ldots,$ и $f(x)$ измеримы на E и принимают почти всюду на E **конечные значения**. Говорят, что последовательность $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ **по мере** на E, если для любого ε выполняется $\lim_{n\to\infty} (E [|f_n - f| \geq \varepsilon]) = 0$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ и любого $\delta > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon, \delta)$ такой, что для всех номеров $n \geq N$ справедливо равенство $|E [|f_n - f| \geq \varepsilon] | < \delta$.
Теорема 5.2 Теорема Лебега Пусть E - измеримое множество конечной меры и пусть функции $f_n(x)$ и $f(x)$ измеримы на E и почти всюду конечны. Тогда из сходимости последовательности $f_n(x)$ к $f(x)$ почти всюду на E следует сходимость $f_n(x)$ к $f(x)$ по мере.
Из сходимости $f_n(x) \to f(x)$ по мере не следует сходимость последовательности $f_n(x)$ к функции $f(x)$ не только почти всюду, но даже сходимость хотя бы в одной точке.[7]

[6]Так, функция Дирихле, определяемая на отрезке $[0, 1]$ и принимающая значение 1 в рациональных точках и значение 0 в иррациональных, не является непрерывной ни в одной точке, однако она эквивалентна функции, тождественно равной нулю на $[0, 1]$.
[7]см. замечание на лек.5 стр.4

3.3 Теорема Рисса. Эквивалентность функций. Лек.6 Вопрос 6

Теорема 6.1 Теорема Рисса Пусть E - измеримое множество конечной меры и пусть функции $f_n(x)$ и $f(x)$ - измеримы и почти всюду конечны на E, то из последовательности $f_n(x)$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к $f(x)$ почти всюду на E.
Теорема 6.2 Пусть E - множество конечной меры[8] и пусть функции $f_n(x)$, $f(x)$ и $g(x)$ почти всюду конечны. Тогда, если $f_n(x) \to f(x)$ и $f_n(x) \to g(x)$ по мере одновременно, то $f(x) \sim g(x)$.

4 Интеграл Лебега

4.1 Интеграл Лебега от ограниченной функции. Интегрируемость ограниченной и измеримой функции. Лек.6 Вопрос 7

Пусть E - измеримое множество и $|E| < +\infty$. Назовём **разбиением** любое семейство $T = \{E_k\}_{k=1}^n = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ конечного числа измеримых, попарно не пересекающихся множеств и таких, что $E = \bigcup_{k=1}^n E_k$.
Пусть $f(x)$ - произвольная ограниченная на множестве E функция. Для любого разбиения T обозначим $M_k = \sup_{x\in E_k} f(x), m_k = \inf_{x\in E_k} f(x)$ и рассмотрим суммы $S_T = \sum_{k=1}^n M_k\,|E_k|$, $s_T = \sum_{k=1}^n m_k\,|E_k|$, которые называются **верхней и нижней суммами Лебега** разбиения T.
Ясно, что $s_T \le S_T$ и эти суммы ограничены. Поэтому существуют $\bar{I} = \inf_T S_T$ и $\underline{I} = \sup_T s_T$, называемые **верхним и нижним интегралами Лебега** функции f(x) соответственно.

Ограниченная на множестве конечной меры E функция $f(x)$ называется **интегрируемой (по Лебегу)** на E, если $\bar{I} = \underline{I}$, т.е. её верхний и нижний интеграл Лебега совпадают.
Общее значение $I = \bar{I} = \underline{I}$ называется **интегралом Лебега** от $f(x)$ по множеству E и обозначается $I = \int_E f(x)dx$.

Свойства сумм и интегралов:
1. Если разбиение T^* является измельчением T, то $s_T \le s_{T^*}, S_{T^*} \le S_T$.
2. Для любых двух разбиений T_1 и T_2 справедливо неравенство $s_{T_1} \le S_{T_2}$.
3. Имеет место также соотношение $\underline{I} \le \bar{I}$.

Теорема 7.1 Всякая интегрируемая по Риману функция $f(x)$ является интегрируемой по Лебегу, причём её интегралы Римана и Лебега совпадают.
Теорема 7.2 Всякая ограниченная и измеримая на измеримом множестве

[8]это условие может быть не существенным

конечной меры функция интегрируема на нём по Лебегу.

4.2 Свойства интеграла Лебега от ограниченной функции. Лек.7 Вопрос 8

1. $\int_E 1dx = |E|$. Если $f(x) \equiv 1$ на E, то $s_T = S_T = |E|$.
2. Если $f(x)$ ограничена, интегрируема на E, $|E| < +\infty$, и α - любое действительное число, то функция $\alpha f(x)$ также интегрируема на E и $\int_E \alpha f(x)dx = \alpha \int_E f(x)dx$.
3. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ ограничены и интегрируемы на E, $|E| < +\infty$, то их сумма интегрируема на множестве и $\int_E (f_1(x) + f_2(x))\,dx = \int_E f_1(x)dx + \int_E f_2(x)dx$.
4. Если $f(x)$ ограничена и интегрируема на каждом из непересекающихся множеств конечной меры E_1 и E_2, то $f(x)$ интегрируема и на $E = E_1 \cup E_2$ и $\int_E f(x)dx = \int_{E_1} f(x)dx + \int_{E_2} f(x)dx$.
5. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ ограничены и интегрируемы на E, $|E| < +\infty$, и $f_1(x) \geq f_2(x)$ всюду (почти всюду) на E, то $\int_E f_1(x)dx \geq \int_E f_2(x)dx$.

4.3 Интеграл Лебега от неограниченной и неотрицательной функции. Полная аддитивность и абсолютная непрерывность интеграла Лебега. Мажорантный признак суммируемости. Лек.7 Вопрос 9

Пусть $f(x) \geq 0$ всюду на E, $|E| < +\infty$, $f(x)$ - измерима и, возможно, не ограничена. Для любого числа $N > 0$ положим $f_N(x) = \min\{N, f(x)\}$ - **срезка** функции $f(x)$. Функция $f_N(x)$ также измерима на E:

$$E\left[f_N > a\right] = \begin{cases} E[f > a], & \text{при } a < N \\ \varnothing, & \text{при } a \geq N \end{cases} \tag{1}$$

Причём срезка $f_N(x)$ - ограничена. Поэтому существует интеграл $I_N(f) = \int_E f_N(x)dx$.

Если при $N \to \infty$ существует $\lim_{N\to\infty} I_N(f) < +\infty$, то $f(x)$ называется **суммируемой** на множестве , а этот предел называется **интегралом** от $f(x)$ на и обозначается $\int_E f(x)dx = I(f)$.
Если $f(x) \geq 0$ и суммируема на E, то $f(x) = +\infty$ лишь на подмножестве множества E меры нуль.

Теорема 9.1 Полная аддитивность интервала Лебега Пусть $E =$

$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k, |E| < +\infty, E_i \cap E_j = \varnothing, i \neq j$, все множества E_k - измеримы. Тогда 1) если $f(x) \geq 0$ и $f(x)$ суммируема на E, то $f(x)$ суммируема на E_k, причем

$$\int_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)dx \tag{2}$$

2) если $f(x) \geq 0$, $f(x)$ суммируема на всех множествах E_k и ряд в формуле 2 сходится, то $f(x)$ суммируема на E и справедливо равенство 2.

Теорема 9.2 Абсолютная непрерывность интергала Лебега Если $f(x) \geq 0$ и суммируема на E, $|E| < +\infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что каково бы ни было измеримое подмножество $e \subset E$ с мерой $|e| < \delta$ справедливо неравенство $\int_e f(x)dx < \varepsilon$.

Теорема 9.3 Если $f(x) \geq 0$, суммируема на E, где $|E| < +\infty$ и $\int_E f(x)dx = 0$, то $f(x) \sim 0$.

Теорема 9.4 Мажорантный признак суммируемости Если $f_1(x) \geq 0$ - измерима на E, $|E| < +\infty$, $f_2(x)$ - суммируема на E и, если всюду на E выполняется неравенство $f_1(x) \leq f_2(x)$, то $f_1(x)$ - суммируема на E и справедлива оценка $\int_E f_1(x)dx \leq \int_E f_2(x)dx$.

4.4 Интеграл Лебега от неограниченной функции любого знака. Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. Лек.8 Вопрос 10

Пусть $|E| < +\infty$, $f(x)$ - измеримая функция на . Введём в рассмотрение две функции $f^+(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x))$ и $f^-(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| - f(x))$, которые также измеримы на E. Справедливы равенства $f^+(x) + f^-(x) = |f(x)|$, $f^+(x) - f^-(x) = f(x)$.

Измеримая функция $f(x)$ называется **суммируемой** на E, $|E| < +\infty$, если на суммируемы обе неотрицательные функции $f^+(x)$ и $f^-(x)$. При этом **интегралом Лебега** от $f(x)$ называется разность $\int_E f(x)dx = \int_E f^+(x)dx - \int_E f^-(x)dx$.
Для интеграла Лебега суммируемость $f(x)$ эквивалентна суммируемости функции $f(x)$.
Во втором утверждении теоремы о полной аддитивности надо требовать сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} |f(x)|dx$. В теореме об абсолютной непрерывности выполняется неравенство $\int_E |f(x)|dx < \varepsilon$.

Совокупность всех суммируемых на измеримом множестве E функций обозначается $L(E) \equiv L_1(E)$. Говорят, что последовательность $f_n(x) \in L(E)$ сходится в $L(E)$ (**сходится в среднем**) к $f(x) \in L(E)$, если $\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n(x) - f(x)|\, dx =$

0.
Имеет место равенства $\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx = \int_E f(x)dx$.
Если $f_n(x)$ сходится в $L(E)$ к $f(x) \in L(E)$, то эта последовательность сходится к $f(x)$ и по мере на E. Обратное утверждение вообще говоря неверно.[9]

Теорема 10.1 Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла Пусть функции $f_n(x)$ почти всюду конечны и измеримы на измеримом множестве E конечной меры и эта последовательность сходится по мере к измеримой и почти всюду конечной функции $f(x)$. Если существует суммируемая на множестве E функция $F(x)$, такая что для всех номеров n и почти всех точек $x \in E$, справедливо неравенство $|f_n(x)| \le F(x)$, то последовательность $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ в среднем т.е. в $L(E)$.

4.5 Теорема Леви и следствие из нее для рядов. Теорема Фату. Теорема Лебега —критерий интегрируемости. Лек.8-9 Вопрос 11

Теорема 11.1 Теорема Леви Пусть $f_n(x)$ - суммируемые на множестве E функции, $|E| < +\infty$, и пусть для любого натурального числа n выполняется неравенство $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ для почти всех $x \in E$. Если существует постоянная M такая, что для любого натурального числа n выполняется неравенство $|\int_E f_n(x)dx| \le M$, то последовательность $f_n(x)$ сходится почти всюду на E к некоторой функции $f(x)$, причем $f(x) \in L(E)$ и $\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx = \int_E f(x)dx$.
Следствие(для функциональных рядов) Если все функции $u_n(x) \ge 0$ почти всюду на E, суммируемы на E и если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\int_E u_n(x)dx$, то почти всюду на E сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, причем сумма $S(x)$ ряда суммируема на E и $\int_E S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_E u_n(x)dx$. Т.е. ряд можно интегрировать почленно.
Здесь в качестве $f_n(x)$ берем частичную сумму $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$.

Теорема 11.2 Теорема Фату Если последовательность $f_n(x)$ измеримых и суммируемых на измеримом множестве E функций, сходится п.в. на E к предельной функции $f(x)$ и если сушествует постоянная A такая, что для всех номеров n выполняется неравенство $\int_E |f_n(x)|\, dx \leqslant A$, то функция $f(x)$ суммируема на E и справедливо неравенство $\int_E |f(x)|dx \leqslant A$.

Теорема 11.3 Теорема Лебега о критерии интегрируемости Для того чтобы ограниченная на измеримом множестве конечной меры E функция $f(x)$ являлась интегрируемой по Лебегу на E необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ была измерима на E.

[9] см. лек.8 стр.2

4.6 Теорема Фубини. Интеграл Лебега для множества бесконечной меры. Лек.9 Вопрос 12

Теорема 12.1 Теорема Фубини Пусть функция $f(x, y)$ интегрируема по Лебегу на прямоугольнике $P = \{(x, y) : a < x < b, c < y < d\}$, тогда для п.в. $y \in (c, d)$ существует интеграл $J(y) = \int_a^b f(x, y)dx$ и для п.в. $x \in (a, b)$ существует интеграл $I(x) = \int_c^d f(x, y)dy$, причем функция $J(y)$ интегрируема на (c, d), а функция $I(x)$ интегрируема на (a, b) и справедливо равенство

$$\iint_P f(x, y)dxdy = \int_c^d J(y)dy = \int_a^b I(x)dx \tag{3}$$

Обратное утверждение вообще говоря неверно.[10]

Пусть измеримое множество E имеет бесконечную меру $|E| = +\infty$. Рассмотрим $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$, где E_n измеримы и $|E_n| < +\infty$. Последовательность $\{E_n\}$ называется **исчерпываюшей** для E. Измеримая функция $f(x)$ на измеримом множестве E бесконечной меры называется **суммируемой** на этом множестве, если она суммируема на любом измеримом подмножестве конечной меры $E_n \subset E$ и существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} \int_{\cup_{k=1}^{n} E_k} f(x)dx = \int_E f(x)dx$, независимо от выбора исчерпываюшей последовательности. Все основные свойства интеграла Лебега сохраняются.

5 Пространство L_p

5.1 Классы $L_p, p > 1$. Неравенства Гельдера и Минковского. Лек.10 Вопрос 15

Пусть E - измеримое множество, число $p \geq 1$. Множество всех измеримых на E функций $f(x)$, для которых функции $|f(x)|^p$ суммируемы на E, называется **пространством** $L_p(E)$. Норма в пространстве $L_p(E)$ вводится по формуле $||f(x)||_{L_p(E)} = ||f(x)||_p = (\int_E |f(x)|^p dx)^{1/p}$.

Неравенство Гельдера[11]
Если $p > 1$, число q связано с числом p по формуле $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f(x) \in L_p(E)$, $g(x) \in L_q(E)$, то функция $f(x)g(x)$ суммируема на E и справедливо

$$\int_E |f(x)g(x)|dx \leq ||f(x)||_{L_p(E)} ||g(x)||_{L_q(E)} \tag{4}$$

Неравенство Минковского[12]
Если $p \geq 1$, $f(x), g(x) \in L_p(E)$, то функция $|f(x) + g(x)|^p$ суммируема на E

[10] см. лек.9 стр.4
[11] Доказательство см. лек.10 стр.1
[12] Это и непосредственно проверяет справедливость третьего аксиома нормы

и справедливо

$$||f(x)+g(x)||_{L_p(E)} \leq ||f(x)||_{L_p(E)} + ||g(x)||_{L_p(E)} \tag{5}$$

5.2 Полнота пространства L_p. Лек.10 Вопрос 16

Последовательность $\{f_n\}$ элементов нормированного пространства называется **фундаментальной**, если числовая последовательность $||f_m - f_n||$ стремится к нулю при $m, n \to 0$.
Последовательность $\{f_n\}$ элементов нормированного пространства называется **сходящейся**, если в этом пространстве существует элемент f такой, что $\lim_{n\to\infty} ||f_n - f|| = 0$.
Нормированное пространство называется **полным(банаховым)**[13], если любая фундаментальная последовательность в этом пространстве является сходящийся.
Теорема 16.1 Полнота пространства L_p[14] Пространство $L_p(E)$, $|E| < +\infty$, $p \geq 1$, является полным(банаховым) пространством.

5.3 Плотность множества непрерывных функций в L_p. Непрерывность в метрике L_p. Лек.11 Вопрос 17

Измеримая функция $F(x)$ на измеримом множестве называется **простой**[15], если она принимает не более чем счетное число различных значений $f(x) = C_k$, при $x \in E_k$, причем C_k может быть равным $\pm\infty$.
Характеристической функцией множества E называется функция

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, x \in E \\ 0, x \notin E \end{cases} \tag{6}$$

Очевидно, что всякая простая функция $f(x)$ имеет вид $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \chi_{E_n}(x)$,причем в этой сумме при каждом отлично от нуля лишь одно слагаемое.
Ясно, что функция $\chi_E(x)$ измерима тогда и только тогда, когда множество E - измеримо.

[13] Легко доказать что всякая сходящаяся последовательность всегда является фунтаментальной: $||f_n - f|| <= ||f_m - f|| + ||f - f_n||$
Существует пример фун. после-сти, которая не является сходящейся: Пусть $||f||_{C[a,b]} = max|f(x)|$, где $f(x)$ - непрерывная функция на $[a,b]$. Рассмотрим множество многочленов $P_n(x)$, которое является подмножество множества непрерывных функций и обладает тем же нормой. Теорема Вейрштрасса: Для любого ε и $f(x)$ из $C[a,b]$ существует $P_n(x)$: $||f(x) - P_n(x)|| < \varepsilon$. Возьмем последовательность $\{P_n(x)\}$ такое что $\{P_n(x)\} \to f(x)$, и $f(x)$ не является многочленом. Поэтому $\{P_n(x)\}$ фунтаментальна но не сходится.

[14] Интеграл Римана здесь не обеспечивает полнату пространства, так как сущестсует несходящаяся фунтаментальная последовательность.

[15] Пример: $f(x) = sgn(x)$, $f(x) = [x]$
Ещё пример: $E = (0, +\infty)$, $E_k = x : k-1 < x \leq k, k = 1, 2, 3 \ldots$, $f(x) = 1/\sqrt{k}, x \in E_k$. Принадлежности $f(x) \in L_p$: $\int_E |f(x)|^p dx = \sum_{k=1}^{+\infty} |C_k|^p |E_k| = \sum_{k=1}^{+\infty} 1/k^{p/2} \Rightarrow f(x) \in L_p$, при $p > 2$.

Лемма 17.1 Для любой на измеримом множестве E неотрицательной измеримой функции $f(x)$ существует неубывающая последовательность $f_n(x)$ простых неотрицательных функций $f_n(x)$ таких, что $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ в каждой точке x множества E, причем сходимость равномерная на множестве конечных значений функции $f(x)$.
Следствие к Лемме 17.1 Последовательность $\{g_n(x)\}$, в которой функции $g_n(x)$ определяются по формуле $g_n(x) = \begin{cases} f_n(x), f_n(x) \le n, \\ n, f_n(x) > n, \end{cases}$ обладает свойством: $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = f(x)$ для любой точки $x \in E$, $g_n(x) = \sum_{k=1}^{m(n)} C_k \chi_{E_k}(x)$, но равномерной сходимости на $E \setminus E_0$ может и не быть.

Теорема 17.1[16] Пусть E - ограниченное измеримое множество, $p \ge 1$. Тогда пространство непрерывных на E функций $C(E)$ плотно в $L_p(E)$.
Теорема 17.2 Непрерывность в метрике L_p Пусть E - ограниченное измеримое множество, $p \ge 1$. Тогда любая функция $f(x) \in L_p(E)$ непрерывна в метрике L_p, то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что справедливо неравенство $||f(x+h) - f(x)||_p \le \varepsilon$, если $|h| < \delta$, а функция $f(x)$ считается продолженной нулем на все пространство R_n.

6 Метрические и нормированные пространства

6.1 Метрические пространства. Теорема о вложенных шарах. Лек.13-14 Вопрос 13

Множество M называется **метрическим пространством**[17], если каждой паре его элементов x и y поставлено в соответствии неотрицательное число $\rho(x, y)$, удовлетворяющее условиям:
1) $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$ (**аксиома тождества**)
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (**аксиома симметрии**)
3) $\rho(x, z) \le \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (**аксиома треугольника**)

Элемент x метрического пространства V называется **пределом** последовательности элементов $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, если $\rho(x_n, x) \to 0$ при $n \to +\infty$. Последовательность элементов $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ из M называется **фунтаментальной**, если $\rho(x_n, x_m) \to 0$ при $n, m \to +\infty$.
Утверждение 13.1 Если последовательность точек $\{x_n\}$ метрического пространства M сходится к точке $x \in M$, то и любая подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$ сходится к этой же точке.

[16] X - линейное нормированное пространство , $M \subset X$. M - **всюду плотное** множество X, если для любого $\varepsilon > 0$, для любого f из X, существует g из M: $||f - g|| < \varepsilon$.
Пример: множество многочленов, принадлежащее множеству непрерывных функций.
[17] пример см. лек.13 стр.1

Утверждение 13.2 Последовательность точек $\{x_n\}$ метрического пространства M может сходится не более чеи к одному пределу.
Утверждение 13.3 Если последовательность точек $\{x_n\}$ метрического пространства M сходится к точке $x \in M$, то эта последовательность ограничена в том смысле, что числа $\rho(x_n, z)$ ограничены для любой фиксированной точки $z \in M$.

Назовем **шаром(замкнутым шаром)** с центром в точке $a \in M$ и радиусом r совокупность точек пространства M, удовлетворяюших неравенству $\rho(x,a) < r(\rho(x,a) \leq r)$. Будем обозначать такой шар $B(a,r)(\overline{B(a,r)})$.
Назовем **окрестностью** точки любой шар с центром в этой точке. Множество, лежащее целиком внутри некоторого шара, называется **ограниченным**.
Пусть дано множество X метрического пространства M. Точка $a \in M$ называется **предельной точкой** этого множества, если любая окрестность точки a содержит хотя бы одну точку множества $X \setminus \{a\}$, т.е. множество $B(a,r) \cap [X \setminus \{a\}]$ не пусто для любого r.
Множество, полученное присоединением к X всех его предельных точек, называется **замыканием** множества X и обозначается $\overline{X}$.
Множество называется **замкнутым**, если $X = \bar{X}$. Множество X называется **открытым**, если его дополнение $M \setminus X$ замкнуто.
Множество X называется **всюду плотным в пространстве** M[18], если $\bar{X} = M$. Мнохество X называется **нигде не плотным в пространстве** M, если каждый шар этого пространства содержит в себе шар, свободный от точек множества X.

Если в метрическом пространстве M каждая фунтаментальная последовательность сходится к некоторому пределу, являющемуся элементом того же пространства, то пространство M называется **полным**.
Пусть $p \geq 1$ и дано множество числовых последовательностей $x = \{\xi_i\}$ таких, что $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < \infty$. Это множество обозначается l_p. Метрика для элементов $x = \{\xi_i\}$ и $y = \{\eta_i\}$ вводится по формуле $\rho(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \eta_i|^p\right)^{1/p}$.
Утверждение 13.4 Пространство $l_p, p \geq 1$ является полным.

Теорема 13.1 Теорема о вложенных шарах Пусть дана в полном метрическом пространстве M последовательность замкнутых шаров, вложенных друг в друга(т.е. таких, что каждый последующий шар содержится в предыдущем), радиусы которых стремятся к нулю[19]. Тогда существует и причем единственная точка, принадлежащая всем этим шарам.

[18]пример см. лек.13 стр.2
[19]Это условие существенно, см. лек.14 стр.2

6.2 Теорема Бэра о категориях. Принцип сжимающих отображений. Лек.14-15 Вопрос 14

Множество M называется **множеством 1-ой категории**, если оно может быть представлено в виде суммы не более чем счетного числа нигде неплотных множеств.
Множество, неявляющееся множеством 1-ой категории, называется **множеством 2-ой категории**[20].

Теорема 14.1 Теорема Бэра о категориях Полное метрическое пространство есть множество 2-ой категории.

Теорема 14.2 Принцип сжимающих отображений[21] Пусть в полном метрическое пространстве M задан оператор A, переводящий элементы пространства M в элементы этого же пространства. Пусть, кроме того, $\rho(A(x), A(y)) \leq \alpha\rho(x, y)$, где $\alpha \in [0, 1)$[22]. Тогда существует и притом единственная точка x_0 такая, что $Ax_0 = x_0$. Эта точка называется **неподвижной точкой** оператора A, а сам оператор называется **оператором сжатия**.

6.3 Линейные нормированные пространства. Теорема Рисса. Лек.15 Вопрос 18

Пусть X - линейное пространство над полем действительных или комплексных чисел. Это пространство X называется **линейным нормированным пространством**, если каждому элементу $x \in X$ поставлено в соответствии действительное число $||x||$, называемое **нормой** этого элемента, причем выполнены следующие аксиомы:
1) $||x|| \geq 0, ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
2) $||\lambda x|| = \lambda||x||$,
3) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$
для любых элементов $x, y \in X$и любого числа λ из поля.

Последовательность элементов $\{x_n\}$ линейного нормированного пространства X называется **фунтаментальной**, если $||x_n - x_m|| \to 0$ при $n, m \to 0$.

---

[20]Пример множества 1-ой категории: множество всех рациональных чисел - одна точка - нигде не плотное множество. Пример множества 2-ой категории: множество всех иррациональных чисел: Если было бы 1-ая категории то и вся прямая будет 1-ой ка-ри(сдедует из "объединение счетных множество - счетное множество"), а это не так, так как Теорема о категориях.

[21]Пример существенности условия полноты: $M = (0, 1)$,$\rho(x, y) = |x - y|$, $Ax = x/2$. Не существует неподвижная точка, так как $Ax = x, x = 0 \notin M$.
Пример существенности условия сжатия: $M = (-\infty, +\infty)$, $\rho(x, y) = |x - y|$, $Ax = x + pi/2 - arctgx$, $|Ax - Ay| = |(x - y) - (arctgx - arctgy)| < |x - y|$. (так как при $x > y, (x - y) > (arctgx - arctgy) > 0$, при $y > x$, $(x - y) < (arctgx - arctgy) < 0), \rho(Ax, Ay) \leq \rho(x, y)$ т.е. $\alpha = 1$. но $x = x + \pi/2 - arctgx$, $arctgx = \pi/2$ не имеет решение.

[22]Условие сжимаемости зависит от выбора метрик см. лек.15 стр.3

Последовательность элементов $\{x_n\}$ линейного нормированного пространства X называется **сходящейся к элементу** $x \in X$, если $||x_n - x|| \to 0$ при $n \to 0$.
Линейное нормированное пространство X называется **полным(банаховым)**, если любая его фунтаментальная последовательность является сходящейся.
Линейное многообразие[23] L линейного нормированного пространства X называется **подпространством**, если множество L замкнуто относительно сходимости по норме.
Из третьего аксиома нормы вытекает что, если$x_n \to x$, то $||x_n|| \to ||x||$.

Теорема 15.1 Теорема Рисса Пусть L - подпространство линейного нормированного пространства X, $L \neq X$. Тогда для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ существует элемент $y \in X \setminus L, ||y|| = 1$ и такой, что $||x - y|| > 1 - \varepsilon$ для всех $x \in L$.

7 Линейные операторы

7.1 Линейные операторы и их свойства. Теорема о полноте пространства линейных ограниченных операторов. Лек.16 Вопрос 19

Пусть X и Y -линейные нормированные пространства над полем действительных или полем комплексных чисел.
Отображение $A : X \to Y (y = Ax)$, то есть оператор A, определяемый на X с областью значений в Y, называется **линейным оператором**, если для любых элементов $x_1, x_2 \in X$ и любого числа λ справедливы равенства
а) $A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2)$,
б) $A(\lambda x_1) = \lambda A(x_1)$

Оператор $A : X \to Y$ **непрерывен** в точке $x_0 \in X$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ сходящейся к x_0, соответствующая последовательность образов $\{Ax_n\}$ сходится к элементу Ax_0, то есть для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ и такое, что как только выполняется неравенство $||x_n - x_0||_X < \delta$ будет выполняться неравенство $||Ax_n - Ax_0||_Y < \varepsilon$.
Теорема 19.1 Линейный оператор A непрерывен на всем пространстве X тогда и только тогда, когда A - непрерывен в одной точке $x_0 \in X$.

Оператор A называется **ограниченным**, если существует постоянная M такая, что оценка $||Ax|| \leq M||x||$ выполняется для всех $x_0 \in X$.
Теорема 19.2 Для того чтобы линейный оператор A был непрерывен необходимо и достаточно, чтобы A был ограничен.

Наименьшая из постоянных M, удовлетворяющих условию $||Ax|| \leq M||x||$

[23]В этом курсе под линейным многообразием понимаем как линейное пространство внутри другого более широкого линейного пространства.

для линейного ограниченного оператора A называется **нормой оператора** A и обозначается $||A||$. Другими словами $||A|| = \sup_{x\neq 0} \frac{||Ax||}{||x||}$.
Норму линейного ограниченного оператора A можно вычислить по формуле $||A|| = \sup_{||x||\leq 1} ||Ax||$.

Совокупность[24] всех линейных ограниченных операторов, отображающих линейное нормированное пространство X в линейное нормированное пространство Y, образует линейное пространство $L(X \to Y)$. Если A и B - линейные ограниченные операторы, то равенство $(A+B)x = Ax + Bx$ определяет **сумму операторов**, а $(\lambda A)x = \lambda Ax$ - **умножение оператора** на число. **Нулем** этого пространства является оператор $0x = 0$ для любого $x \in X$. В $L(X \to Y)$ можно ввести норму[25] $||A|| = sup_{||x||\leq 1}||Ax||$. Таким образом $L(X \to Y)$ - линейное нормированное пространство. Если линейный ограниченный оператор действует из линейного нормированного пространства X на числовую прямую $\mathbb{R}_1$, то такой оператор называется **линейным функционалом** $f(x)$. Совокупность всех линейных функционалов, действующих из X называется **сопряженным пространством** к X и обозначается $X^* = L(X \to \mathbb{R}_1)$. Норма линейного функционала вычисляется по формуле $||f|| = \sup_{||x||\leq 1} |f(x)|$.

Теорема 19.3 Если X - линейное нормированное пространство, а Y - банахово пространство (полное линейное нормированное пространство), то пространство $L(X \to Y)$ также будет полным, то есть банаховым.
Следствие к Теореме 19.3 Пространство X^*, сопряженное к линейному нормированному пространству X - банахово.

7.2 Теорема Банаха-Штейнгауза (принцип равномерной ограниченности) и следствие из нее. Пример применения теоремы в теории рядов Фурье. Лек.17 Вопрос 20

Теорема 20.1 Теорема Банаха-Штейнгауза (принцип равномерной ограниченности) Пусть X и Y - банаховы пространства. Если $A_n \in L(X \to Y)$ и последовательность $\{||A_n(x)||\}$ ограничена для любого элемента x из пространства X, то найдется постоянная C такая, что $||A_n|| < C$, то есть числовая последовательность $\{||A_n||\}$ ограничена.
Следствие к Теореме 20.1 Пусть X и Y - банаховы пространства, $A_n \in L(X \to Y)$, существует последовательность $\{x_n\}$ такая, что $||x_n|| < 1$ и $\lim_{n\to\infty} ||A_n x_n|| = \infty$. Тогда существует $x_0 \in X$, $||x_0|| < 1$ и $\overline{\lim}_{n\to\infty}||A_n x_0|| =$

[24]**Замечание 1.** Множество $E \to E$ всевозможных линейных операторов образует некоммутативное кольцо. см. лек.19 стр.3
Замечание 2. Пусть X и Y банаховы пространства с нормами $||x||_X$ и $||y||_Y$. Определим в пространстве $X \times Y$ функцию $||(x,y)|| = ||x||_X + ||y||_Y$. Это функция является нормой в пространстве $X \times Y$, а пространство $X \times Y$ является банаховым. см. лек.19 стр.4
[25]Справедливость аксиомов см. лек.16 стр.3

∞.

Используя теорему Банаха-Штейнгауза в теории рядов Фурье, мы можем доказать существование непрерывной периодической функции, для которой ряд Фурье расходиться.[26]

8 Обратный оператор

8.1 Обратный оператор. Достаточные условия существования обратного оператора. Лек.18 Вопрос 21

Линейный оператор C называется **левым обратным** для линейного оператора A, если $CA = I$, где I - тождественный оператор.
Линейный оператор B называется **правым обратным** для линейного оператора A, если $AB = I$, где I - тождественный оператор.
Если $B = C$, то говорят, что оператор A имеет **обратный оператор**, который обозначают A^{-1}. Если A^{-1} существует, то по определению $A^{-1}A = AA^{-1} = I$.

С понятием обратного оператора связаны вопросы о существовании и единственности решения операторных уравнений вида $Ax = y$, где y - известный элемент пространства E, а - искомый элемент того же пространства. Если существует левый оператор C, то если существует решение оно обязательно единственно, но решение может быть не существовать. Если существует правый оператор B, то обязательно существует решение, но оно может быть неединственно.

Другое определение обратного оператора Пусть оператор A действует из множества X на множество Y, $R(A) \subset Y$- область значений оператора A. Если для любого элемента $y \in R(A)$ уравнение $Ax = y$ имеет единственное решение, то говорят, что оператор A имеет обратный оператор A^{-1}.
Если A -линейный оператор, то и A^{-1} - линейный оператор.

Теорема 21.1 Достаточные условия существования обратного оператора Пусть A - линейный оператор, действующий из линейного нормированного пространства X в линейное нормированное пространство Y, причем существует постоянная $m > 0$ такая, что $||Ax|| \geq m||x||$ для всех $x \in X$. Тогда существует A^{-1} - линейный ограниченный оператор.
Теорема 21.2 Теорема Неймана Пусть A -линейный ограниченный оператор, отображающий банахово пространство X на себя и $||A|| \leq q < 1$ Тогда оператор $I - A$ имеет обратный линейный ограниченный оператор $(I - A)^{-1}$.
Замечание Пусть $A, B \in L(X \to X)$. Тогда определен оператор $AB \in$

[26]см. лек.17 стр.2

$L(X \to X)$ по формуле $ABx = A(Bx)$, причем $||AB|| \le ||A||||B||$.
Теорема 21.3 Пусть оператор $A \in L(X \to X)$, где X -банахово пространство, имеет обратный оператор A^{-1} и существует линейный ограниченный оператор ΔA такой, что $||\Delta A|| \le \frac{1}{||A^{-1}||}$. Тогда оператор $B = A + \Delta A$, то есть возмущение оператора A, имеет обратный оператор B^{-1}, причем

$$||B^{-1} - A^{-1}|| \le \frac{||\Delta A||||A^{-1}||^2}{1 - ||\Delta A||||A^{-1}||} \tag{7}$$

8.2 Теорема Банаха об обратном операторе. Лек.18 Вопрос 22

Теорема 22.1 Теорема Банаха об обратном операторе[27] Если линейный ограниченный оператор A отображает банахово пространство X на банахово пространство Y взаимно однозначно, то существует линейный ограниченный оператор A^{-1}, обратный к оператору A, отображающий Y на X.

9 Линейные функционалы

9.1 Теорема Хана-Банаха о продолжении линейного непрерывного функционала в линейном нормированном пространстве. Лек.19-20, 24 Вопрос 23

Теорема 23.1 Пусть X и Y - банаховы пространства, $A : X \to Y$ - линейный оператор. Тогда следующие утверждения равносильны:
1) A непрерывен,
2) Если $\{x_n\}$ - последовательность элементов из X, такая что $x_n \to x$ и $Ax_n \to y$, то $Ax = y$.

Теорема 23.2 Теорема Хана-Банаха Любой линейный функционал $f(x)$, определённый на линейном многообразии $L \subset X$ линейного нормированного пространства X, можно продолжить на всё пространство X с сохранением нормы, то есть существует линейный функционал $F(x)$, определённый на всём X и такой, что $F(x) = f(x)$ для любой точки $x \in L$, $||F||_X = ||f||_L$.

Пространство X называется **сепарабельным**[28], если в этом пространстве существует счётное всюду плотное множество элементов $x_1, x_2, \ldots \in X$.

[27] Доказательство см. лек.18
[28] Пример: $C[a, b]$. Так как существует множество многочленов с рациональными коэффициентами, которое является счетным множеством.
Но $C(a, b)$ - это не сепарабельное: пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots), \alpha_i \in \{0, 1\}$. $f_\alpha(x) = 1/2^m \Rightarrow$ $||f_\alpha(x) - f_\beta(x)|| \ge 1$.

Следствие 1.[29] Пусть X -линейное нормированное пространство, $x_0 \in X, x_0 \neq 0$. Тогда в X существует линейный функционал такой, что $||f|| = 1, f(x_0) = ||x_0||$.
Следствие 2. Пусть X -линейное нормированное пространство, $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$. Тогда в X существует линейный функционал такой, что $f(x_1) \neq f(x_2)$.
Следствие 3. Теорема 23.3 Пусть $\{x_n\}$ - последовательность элементов из банахова пространства X такая, что последовательность $\{f(x_n)\}$ ограничена для любого функционала $f(x) \in X^*$. Тогда существует постоянная $M > 0$ и такая, что $||x_n|| \leq M$, то есть последовательность $\{x_n\}$ ограничена в X.
Следствие 4. Теорема 23.4 Пусть X -банахово пространство, $f_n \in X^*$, числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ ограничена для любого элемента x, тогда $||f_n|| \leq M$.
Следствие 5. Теорема 23.5 из лек.24 Пусть в линейном нормированном пространстве E задано линейное многообразие G и элемент $y_0 \in E \setminus G$, находящейся на расстоянии $d > 0$ от $G (d = \inf_{x \in G} ||y_0 - x||)$. Тогда существует линейный функционал $f(x)$, определенный всюду на E и такой, что
1) $f(x) = 0$ для $x \in G$
2) $f(y_0) = 1$
3) $||f|| = 1/d$

9.2 Общий вид линейного функционала в конкретных пространствах. Лек.20 Вопрос 24

1. Если $X = \mathbb{R}^n$ - конечномерное и $e_1, e_2, \ldots, e_n$ - ортонормированный базис, то $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$. Тогда любой линейный функционал $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i f_i$ однозначно определяется числами $f_i = f(e_i), i = \overline{1, n}$.

2. Если $X = l_p, p > 1$ - бесконечномерное пространство элементов $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ таких, что $||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p\right)^{1/p} < +\infty$. Пусть $e_1, e_2, \ldots$- ортонормированный базис, тогда $x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i$, $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i c_i$, причём $||f|| = ||c||_q, l_p^{**} = l_q^* = l_p$.

3. Если $X = L_p(E), p > 1, |E| < +\infty$, Можно показать, что $f(x) = \int_E x(t)\alpha(t)dt, x(t) \in L_p(E), \alpha(t) \in L_p(E)$ - однозначно определяемая функция по функционалу $f(x)$, причём $||f|| = ||\alpha(t)||_{L_p(E)}, L_p^{**} = L_q^* = L_p$.

4. Если $X = C[0,1]$, то любой линейный функционал $f(x)$ на $C[0,1]$ имеет вид $f(x) = \int_0^1 x(t)dh(t)$, где $x(t) \in C[0,1]$, $h(t)$ - фиксированная функ-

[29]Это следствие доказывает существование в любом линейном нормированном пространстве X нетривиальных линейных функционалов, то есть $f(x) \equiv 0$. С другой стороны из следствия 1 вытекает, что если для некоторого элемента $x_0 \in X$ выполнено равенство $f(x_0) = 0$ для всех $f(x) \in X^*$, то $x_0 = 0$.

ция с ограниченным изменением: $||f|| = \sup_T \sum_{i=1}^{n} |h(t_i - h(t_{i-1}))|$, где точная верхняя грань берётся по всевозможным разбиениям $T = \{t_i\}, 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$.

9.3 Слабая сходимость. Связь между сильной и слабой сходимостью. Критерий сильной сходимости. Лек.20-21,24 Вопрос 25

Последовательность $\{x_n\}$ элементов линейного нормированного пространства X называется **слабо сходящейся** к элементу $x_0 \in X$, если для любого линейного функционала $f(x) \in X^*$ числовая последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к $f(x_0)$.
В силу замечания к следствию 1 из теоремы Хана-Банаха слабый предел единственен.
Из теоремы 23.3 вытекает ограниченность слабо сходящейся последовательности.

Сильная сходимость влечёт за собой слабую сходимость, так как $|f(x_n) - f(x_0)| \leq ||f|| ||x_n - x_0||$. Обратное неверно. См. лек.20 стр.5
Теорема 25.1 Критерий сильной сходимости Последовательность $\{x_n\}$ линейного нормированного пространства X сходится сильно тогда и только тогда, когда последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится равномерно в единичном шаре $||f|| \leq 1, f \in X^*$.

Некоторые выводы о слабой сходимости и непрерывности функционала
Теорема 25.2 Если последовательность элементов $\{x_n\}$ банахова пространства X сходится слабо, то последовательность норм этих элементов $\{||x_n||\}$ ограничена.
Теорема 25.3 Линейный функционал непрерывен в линейном нормированном пространстве тогда и только тогда, когда его ядро замкнуто.
Теорема 25.4 Линейный функционал, непринимающий в некотором шаре линейного нормированного пространства хотя бы одно значение, непрерывен.
Теорема 25.5 из лек.24 В конечномерном пространстве сильная сходимость совпадает со слабой.
Теорема 25.6 из лек.24 Если последовательность $\{x_n\}$ слабо сходится к x_0, то существует последовательность линейных комбинаций $\{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i\}$, сильно сходящаяся к x_0.

10 Гильбертовы пространства

10.1 Определение гильбертова пространства и его основные свойства. Теорема об элементе с наименьшей нормой. Лек.22 Вопрос 26

Гильбертовым пространством H называется множество элементов $x, y, z, \dots$ со свойствами:
1) H - линейное пространство над полем действительных (комплексных) чисел;
2) каждой паре $x, y \in H$ поставлено в соответствие действительное (комплексное) число (x, y), называемое **скалярным произведением** и удовлетворяющее условиям:
а) $(x, y) = \overline{(y, x)}$,
б) $(x + z, y) = (x, y) + (z, y)$,
в) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}(\lambda \in \mathbb{C})$,
г) $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$,
$||x|| = \sqrt{(x, x)}$ - норма элемента x в H;
3) H -полное в метрике $\rho(x, y) = ||x - y||$, то есть является банаховым пространством;
4) H -бесконечномерное, то есть для любого натурального числа n существует n линейно независимых элементов.
Примеры
1. Комплексное пространство l_2 - гильбертово пространство со скалярным произведением $(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \overline{\eta_i}$, где $x = (\xi_1, \xi_2, \dots), y = (\eta_1, \eta_2, \dots)$.
2. Пространство $L_2(E)$ - гильбертово пространство со скалярным произведением $(x, y) = \int_E x(t)\overline{y(t)}dt$.
Свойства гильбертова пространства(скалярного произведения)
1. $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$.
2. $(x, \lambda y) = \overline{\lambda}(x, y)$.
3. $|(x, y)| \leq ||x||||y||$ - неравенство Коши-Буняковского.
4. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$- неравенство треугольника.
5. $||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$ - равенство параллелограмма[30].

Теорема 26.1 Теорема об элементе с наименьшей нормой Замкнутое выпуклое[31] множество W в гильбертовом пространстве H содержит элемент с наименьшей нормой, и причем только один.

[30] Если равенство параллелограмма не выполняется, то пространство не гильбертово. Это необходимое условие. Если X - банахово пространство, и выполняется равенство параллелограмма, то вводя скалярное произведение $(x, y) = 1/4(||x + y||^2 + ||x - y||^2)$ получим H.

[31] Множество W выпуклое, если $\frac{1}{2}(x_1 + x_2) \in W$, для любого $x_1, x_2 \in W$.

10.2 Теорема Леви об ортогональной проекции. Разложение гильбертова пространства на прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения. Лек.22 Вопрос 27

Два элемента $x, y \in H$ называются **ортогональными**($x \perp y$), если $(x, y) = 0$; говорят, что элемент $x \in H$ **ортогонален множеству** $L \subset H$, если $x \perp y$ для любого $y \in L$.
Теорема 27.1 Теорема Леви об ортогональной проекции Пусть L - подпространство H. Каждый вектор $x \in H$ допускает единственное представление $x = y + z, y \in L, z \perp L$ причем элемент y осуществляет наилучшее приближение вектора x в подпространстве L, то есть $||x - y|| = \min_{u \in L} ||x - u||$.

Элементы, ортогональные к L, образуют подпространство, которое называется **ортогональным дополнением**[32] к L и обозначается $L^{\perp}$.
Так как любой элемент $x \in H$ равен $x = y + z, y \in L, z \perp L$, то говорят, что пространство H **разлагается в прямую сумму** подпространств L и $L^{\perp}$. Записывают этот факт в виде $H = L \oplus L^{\perp}$.
Элемент y называется **ортогональной проекцией** элемента x на подпространство L.
Оператор P, действующий по закону $y = Px$, то есть каждому элементу $x \in H$ ставящий в соответствие его проекцию y, называется **оператором ортогонального проецирования** или **ортопроектором**. Нетрудно проверить, что ${L^{\perp}}^{\perp} = L$.

10.3 Теорема Рисса-Фреше об общем представлении линейного функционала в гильбертовом пространстве. Лек.23 Вопрос 28

Рассмотрим линейный ограниченный оператор, действующий из гильбертова пространства H на комплексную плоскость $\mathbb{C}$. Этот оператор мы также будем называть **линейным функционалом**. Обозначим через $\ker f = x \in H : f(x) = 0$ - множество, называемое **ядром** функционала $f(x)$. Очевидно, что $\ker f$ -подпространство H.
Лемма 28.1 Для любого нетривиального $f(x)$ в H, $\dim (\ker f)^{\perp} = 1$.
Теорема 28.1 Теорема Рисса-Фреше Любой линейный функционал $f(x)$ в гильбертовом пространстве H представим в виде скалярного произведения $f(x) = (x, y)$, где элемент y однозначно определяется по функционалу $f(x)$, причем $||f|| = ||y||$.
Лемма 28.2 Для того, чтобы линейное многообразие M было всюду плотно в H, необходимо и достаточно, чтобы в H не существовало элемента,

[32] Предел последовательности элементов, ортогональных подпространству L, ортогонален L.

отличного от нуля и ортогонального M.

10.4 Ортонормированные системы. Ортогонализация по Шмидту. Неравенство Бесселя. Полнота и замкнутость ортонормированной системы. Слабая сходимость ортонормированной системы к нулю. Лек.23 Вопрос 29

Система $\{e_n\}$ элементов гильбертова пространства H называется **ортонормированной**, если $(e_i, e_j) = \sigma_{ij}$, где σ_{ij} - символ Кронекера.
Бесконечная система элементов линейного пространства называется **линейно независимой**, если любая конечная подсистема этой системы - линейно независима.
Лемма 29.1 Ортогонализация по Шмидту Любую систему $\{h_n\}$ линейно независимых элементов можно сделать ортонормированной с помощью процесса ортогонализации Шмидта.

Если совокупность степеней $1, t, t^2, \dots$ ортогонализировать в пространстве $L_{2,\rho}(a, b)$ с весом $\rho(t)$, то есть в пространстве со скалярным произведением

$$(x(t), y(t)) = \int_a^b \rho(t)x(t)y(t)dt \tag{8}$$

мы придем к системе полиномов.
При $\rho(t) \equiv 1, a = -1, b = 1$ получим **полиномы Лежандра**,
При $\rho(t) = e^{-t^2}, a = -\infty, b = \infty$ получим **полиномы Чебышева-Эрмита**,
При $\rho(t) = e^{-t}, a = 0, b = \infty$ получим **полиномы Чебышева-Лагерра**.

Пусть $L \subset H$ -подпространство, порожденное ортонормированной системой $\{e_n\}$ и $x \in L$. **Равенство Пасерваля** $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 = ||x||^2, c_i = (x, e_i)$.
Пусть теперь x -любой элемент из H. **Неравенство Бесселя** $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 \leq ||x||^2, c_i = (x, e_i)$.

Ортонормированная в H система $\{e_n\}$ называется **полной**, если в H не существует никакого элемента кроме нуля, ортогонального каждому члену e_n системы $\{e_n\}$.
Система $\{e_n\}$ называется **замкнутой**, если подпространство L, порожденное этой системой, совпадает с H.
Ряд Фурье по замкнутой системе, построенный для любого элемента $x \in H$ сходится к нему сильно, то есть по норме, и выполняется равенство Парсеваля $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 = ||x||^2, c_i = (x, e_i)$.
Замкнутая ортонормированная система называется **ортонормированным базисом** в гильбертовом пространстве H.

Два полезные утверждения

1. В гильбертовом пространстве H полнота и замкнутость ортонормированной системы совпадают.
2. Любая ортонормированная система $\{e_n\}$ в гильбертовом пространстве слабо сходится к нулю.

Ещё полезные понятия
Носителем функции $h(x)$ называется замыкание множества точек, в которых она отлична от нуля, т.е. supp $h = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$.
Назовем функцию $g(x)$ из $L_1(a,b)$ **обобщенной производной функции** $f(x)$ из $L_1(a,b)$, если она удовлетворяет равенству

$$\int_a^b f(x)h'(x)dx = -\int_a^b g(x)h(x)dx \tag{9}$$

для любой бесконечно дифференцируемой на сегменте $[a,b]$ функции $h(x)$ с носителем supp h, принадлежащим интервалу (a,b).

Определим пространство $W_2^1(a,b)$ как множество всех функций из $L_2(a,b)$, у которых обобщенные производные так же принадлежат классу $L_2(a,b)$. Норма в этом пространстве вводится по формуле

$$||u(x)||_{W_2^1} = \sqrt{(}\int_a^b u^2(x)dx + \int_a^b [u'(x)]^2 dx) \tag{10}$$

Это пространство гильбертово и называется **пространством Соболева**. Его можно получить как пополнение по этой норме множества бесконечно дифференцируемых на сегменте $[a,b]$ функций.
Если рассматривать пополнение по этой норме множества бесконечно дифференцируемых на сегменте $[a,b]$ функций с носителем из интервала $(,b)$, то получается пространство, которое обозначается как $\overset{0}{W}{}_2^1$.

10.5 Теорема о существовании ортонормированного базиса в сепарабельном гильбертовом пространстве. Теорема об изоморфизме и изометрии всех сепарабельных гильбертовых пространств над одним полем. Лек.25 Вопрос 30

Теорема 30.1 Теорема о существовании ортонормированного базиса в сепарабельном гильбертовом пространстве[33] В любом сепарабельном гильбертовом пространстве существует ортонормированный базис, то есть полная ортонормированная система.
Теорема 30.2 Теорема об изоморфизме и изометрии всех сепарабельных гильбертовых пространств над одним полем. Любое ком-

[33]Следующая теорема существенно для доказательство этой теоремы: Всякое конечномерное подпространство в линейном нормированном пространстве замкнуто. см. лек.27 стр.1

плексное (вещественное) сепарабельное гильбертово пространство изоморфно и изометрично комплексному (вещественному) пространству l_2, то есть все комплексные (вещественные) сепарабельные гильбертовы пространства изоморфны и изометричны между собой.

10.6 Теорема Рисса-Фишера. Теорема о слабой компактности сепарабельного гильбертова пространства. Лек.25 Вопрос 31

Теорема 31.1 Теорема Рисса-Фишера Пространства $L_2(E)$ и l_2 изоморфны и изометричны, причём $\int_E |f(x)|^2 dx = \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2$, где $c_i = \int_E f(x)\overline{e_i(x)}dx = (f, e_i)$.
Теорема 31.2 Теорема о слабой компактности сепарабельного гильбертова пространства В сепарабельном гильбертовом пространстве H ограниченная последовательность $\{x_n\}$ содержит слабо сходящуюся подпоследовательность.

11 Сопряженный оператор

11.1 Сопряженный оператор. Теорема о сопряженном операторе. Теорема о прямой сумме замыкания образа линейного ограниченного оператора и ядра сопряженного. Лек.26-27 Вопрос 32

Пусть A -линейный оператор, действующий из линейного нормированного пространства X в линейное нормированное пространство Y, или $y = Ax$. Если $\phi(y)$ - любой линейный функционал, определённый на Y, то $f = \phi(Ax)$ - линейный функционал, определенный на X: $|f(x)| = |\phi(Ax)| \le ||\phi||||A||||x||$. Таким образом любому линейному функционалу $\phi \in Y^*$ ставится в соответствие линейный функционал $f \in X^*$, то есть построен оператор, определённый на Y^* со значениями в X^*. Этот оператор обозначим A^* и назовём **сопряжённым**[34]: $f = A^*\phi$. Если $f(x) = (f, x)$, то $(A^*\phi, x) = (\phi, Ax)$.
Другое определение (обобщенное) Оператор A^* **сопряжён** к линейному непрерывному оператору A, действующему в гильбертовом пространстве H, если для любых элементов $x, y \in H$ выполняется равенство $(Ax, y) = (x, A^*y)$.
Линейный ограниченный оператор называется **самосопряженным(или эрмитовым)** оператором, если $A^* = A$.
Свойства самосопряженного оператора: 1) $||A|| = \max(|\inf_{||x||=1}(Ax, x)|, |\sup_{||x||=1}(Ax, x)|) = \sup_{||x||=1} |(Ax, x)|$. 2) если для самосопряженного операторов A и B для всех $x \in H$ выполняется $(Ax, x) = (Bx, x)$ то $A = B$.

[34]Он обладает теми же свойствами сопряженного оператора в лин. алгебре. см. лек.26 стр.3

Теорема 32.1 Теорема о сопряженном операторе Пусть $A \in L(X \to Y)$. Тогда существует $A^* \in L(Y^* \to X^*)$, то есть A^* - линейный ограниченный оператор, причём $||A|| = ||A^*||$.

Пусть $A \in L(H \to H)$. Обозначим $ImA = \{y \in H : y = Ax\}$ - **образ** оператора A, $KerA = \{x \in H : Ax = 0\}$ - **ядро** оператора . Если A -ограничен, то $KerA$ - подпространство.

Теорема 32.2 Если $A \in L(H \to H)$, H - гильбертово пространство, то $H = \overline{ImA} \oplus KerA^*$.

Пусть A - оператор, действующий из конечномерного пространства $\mathbb{R}_n$ в конечномерное пространство $\mathbb{R}_m$ и определяемый матрицей $\{a_{ij}\}$. Сопряженный оператор задается матрицей, транспонированной по отношению к матрице A[35].
Последовательности $\{x_n\}$ и $\{z_n\}$ называются **биортогональными**, если

$$(z_n, x_m) = \begin{cases} 1, n = m \\ 0, n \neq m \end{cases} \tag{11}$$

В самосопряженном случае обе биортогональные последовательности совпадают. $y = \sum_{n=1}^{\infty}(z_n, y)x_n$ - этот ряд называется **рядом Фурье по соответствующим биортогональным последовательностям**.

12 Вполне непрерывные и компактные операторы

12.1 Вполне непрерывные и компактные операторы. Свойства вполне непрерывного оператора. Лек.28 Вопрос 33

Множество M метрического пространства X называется **предкомпактным (относительно компактным)**, если любая последовательность его элементов содержит фундаментальную подпоследовательность.
Оператор, действующий из одного метрического пространства в другое называется **компактным**, если он всякое ограниченное множество переводит в предкомпактное.
Линейный оператор A, действующий из линейного нормированного пространства X в линейное нормированное пространство Y называется **вполне непрерывным**, если он слабо сходящуюся последовательность переводит в сильно сходящуюся.
Ряд утверждений. Разбор см. лек.28 стр.2

[35] см. лек.26 стр.2

1) Предкомпактное множество ограничено
2) Любое ограниченное множество в конечномерном пространстве является предкомпактным
3) Единичная сфера в бесконечномерном пространстве -множество ограниченное, но не предкомпактное
4) Любой ограниченный оператор переводит ограниченное множество в ограниченное и предкомпактное в предкомпактное.
5) Вполне непрерывный оператор является ограниченным
6) Любой ограниченный оператор в конечномерном пространстве - компактным.
7) В бесконечномерном пространстве единичный (тождественный) оператор -ограничен, но не компактен

Теорема 33.1 Критерий предкомпактности в $C(E)$ Для того, чтобы множество K было предкомпактным в $C(E)$ необходимо и достаточно выполнение условий:
1) множество K - равномерно ограничено в $C(E)$, то есть существует постоянная M такая, что $||x(t)||_{C(E)} \leq M$ для любой функции $x(t) \in K$;
2) множество K - равностепенно непрерывно в $C(E)$, то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ и такое, что как только $|h| < \delta$, $x, x+h \in E$, будет выполняться неравенство $||x(t+h) - x(t)||_{C(E)} \leq \varepsilon$ для любой функции $x(t) \in K$;
Теорема 33.2 Критерий предкомпактности в $L_p(E)$ Для того чтобы множество $K \subset L_p(E)$, $p \geq 1$, $|E| < +\infty$, было предкомпактно $L_p(E)$ необходимо и достаточно, чтобы это множество было равномерно ограничено в $L_p(E)$ и равностепенно непрерывно в $L_p(E)$.
Лемма 33.1 Пусть X -банахово пространство. Если последовательность элементов $x_n \in X$ сходится слабо к элементу $x_0 \in X$ и предкомпактна, то $x_n \to x_0$ сильно.
Теорема 33.3 Пусть X и Y -банаховы пространства. Любой компактный оператор A, действующий из X в Y, переводит всякую слабо сходящуюся последовательность в X в сильно сходящуюся в Y.
Теорема 33.4 Свойство вполне непрерывного оператора Если A - вполне непрерывный оператор, действующий из гильбертова пространства H в H, то оператор A^* также вполне непрерывен.

13 Теоремы Фредгольма

13.1 Первая теорема Фредгольма о разрешимости уравнения $Lx = f$, где $L = I - A$, I - тождественный оператор, A - вполне непрерывный. Лек.29 Вопрос 34

Пусть имеется интегральное уравнение $x(t) = \int_E K(t,s)x(s)ds + f(t), |E| < +\infty, f(x) \in L_2(E), K(t,s) \in L_2(E \times E)$. Рассмотрим теорию уравнений

$(I-A)x = f$, где I -тождественный оператор, A -вполне непрерывный оператор, действующий из H в $H, f \in H$. Обозначим $L = I - A$, тогда имеем $Lx = f$.
Лемма 34.1 Многообразие ImL -замкнуто, где $ImL = \{y \in H : y = Lx\}$.
Лемма 34.2 $H = \ker L \oplus ImL^*, H = \ker L^* \oplus ImL$.
Теорема 34.1 Первая теорема Фредгольма Уравнение $Lx = f$ разрешимо тогда и только тогда, когда $f \perp \ker L^*$, то есть элемент f ортогонален любому решению уравнения $L^*y = 0$.

13.2 Вторая теорема (альтернатива Фредгольма). Лек.29 Вопрос 35

Для любого натурального числа k положим $H^k = ImL^k$, в частности, $H^0 = H = ImL^0$, где $L_0 = I, H^1 = ImL$ и так далее. По лемме 34.1 все H^k -замкнуты и очевидно $H \supset H^1 \supset H^2 \supset \ldots$, причем $L(H^k) = H^{k+1}$.
Лемма 35.1 Существует номер j такой, что $H_{k+1} = H_k$ при всех $k \geq j$.
Лемма 35.2 Если $\ker L = 0, ImL = H$. Если $\ker L^* = 0$, то $ImL^* = H$.
Лемма 35.3 Если $ImL = H$, то $\ker L = 0$.
Теорема 35.1 Вторая теорема Фредгольма (альтернатива Фредгольма) Либо уравнение $Lx = f$ имеет единственное решение при любой правой части $f \in H$, либо уравнение $Lx = 0$ имеет ненулевое решение.

13.3 Третья теорема Фредгольма Лек.29 Вопрос 36

Теорема 36.1 Третья теорема Фредгольма Однородные уравнения $Lx = 0$ и $L^*y = 0$ имеют одно и то же и при том конечное число линейно независимых решений.

14 Элементы спектральной теории

14.1 Спектральная теория в бесконечномерных пространствах. Понятие о точечном, непрерывном и остаточном спектре. Теоремы о непустоте спектра, его замкнутости и ограниченности. Теорема Гильберта-Шмидта. Лек.30-32 Вопрос 37

Пусть X -линейное нормированное пространство над полем комплексных чисел. Оператор A есть линейный оператор, действующий из X в X.
Резольвентное множество $\rho(A)$ оператора A есть множество комплексных чисел λ, для которых существует $(\lambda I - A)^{-1}$ - ограниченный оператор, определенный на всем X.
Спектром $\sigma(A)$ оператора A называется дополнение к множеству $\rho(A)$ на

комплексной плоскости, то есть $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.
Операторнозначная функция $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ определенная на множестве $\rho(A)$, называется **резольвентой** оператора A, а $\lambda \in \rho(A)$ называется **регулярным значением** оператора A.
Таким образом[36], λ - регулярно, если:
1) $\ker(\lambda I - A) = \{0\}$
2) $Im(\lambda I - A) = X$
3) $||\lambda I - A||^{-1} < +\infty$
В конечномерном пространстве либо $\ker(\lambda I - A) \neq \{0\}$, то есть λ - собственное значение, либо λ - регулярное значение.
В бесконечномерном пространстве возможно, что $\ker(\lambda I - A) = \{0\}$, но обратный оператор действует не на всем пространстве[37]. Кроме того оператор $(\lambda I - A)^{-1}$ может быть и неограничен.
В случае $Im(\lambda I - A) = X$ и X - банахово по теореме Банаха мы имеем существование ограниченного оператора $(\lambda I - A)^{-1}$, то есть условие 3 выполняется автоматически.

Комплексное число λ называется **собственным значением оператора** A, если $\ker(\lambda I - A) \neq \{0\}$, а любой не равный нулю элемент $x \in \ker(\lambda I - A)$ называется **собственным элементом**, отвечающим собственному значению λ.
Совокупность чисел λ, не являющихся собственными значениями, для которых $\overline{Im(\lambda I - A)}$ является собственным подпространством с X, называется **остаточным спектром**.
Совокупность чисел λ из спектра, не являющихся собственными значениями и не принадлежащих остаточному спектру($\overline{Im(\lambda I - A)} = X$), называется **непрерывным спектром**.

Теорема 37.1 Пусть X - банахово. Резольвентное множество $\rho(A)$ - открыто.
Следствие 1. Замкнутость спектра. Спектр $\sigma(A)$ замкнуто.
Следствие 2. Если $d(\lambda)$ - расстояние от $\lambda \in \rho(A)$ до спектра $\sigma(A)$, то $||R(\lambda, A)|| \geq 1/d(\lambda)$, то есть $||R(\lambda, A)|| \to +\infty$ при стремлении d к нулю.
Теорема 37.2 Непустота и ограниченность спектра Пусть X - банахово. Спектр $\sigma(A)$ - ограниченное и непустое множество, $\sup_\lambda |\sigma(A)| = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{||A^n||} \leq ||A||$.

[36]Эти 3 условия эквивалентны вышесказанному определению:
1) "Существует $(\lambda I - A)^{-1}$"$\Leftrightarrow$ $\ker(\lambda I - A) = \{0\}$. Так как 1. необходимость: допустим $\ker(\lambda I - A) \neq \{0\}$, тогда $(\lambda I - A)x = 0$ имеет два разных решения и означает что не существует $(\lambda I - A)^{-1}$. 2. достаточность: пусть $\ker(\lambda I - A) = \{0\}$, и предположим $\forall y, \exists x_1, x_2 : (\lambda I - A)x_1 = y, (\lambda I - A)x_2 = y$, тогда $(\lambda I - A)(x_1 - x_2) = 0$ и $x_1 = x_2$, то есть $\forall y$ уравнение $(\lambda I - A)x = y$ однозначно разрешимо.
2) "Определенный на всем X"$\Leftrightarrow$ $Im(\lambda I - A) = X$,
3) "Ограниченный оператор"$\Leftrightarrow$ $||\lambda I - A||^{-1} < +\infty$.
[37]пример см. лек.30. стр.1

Другие выводы

Лемма 37.1 Тождество Гильберта Для любых $\lambda, \mu \in \rho(A)$ справедливо равенства $R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A)$.

Теорема 37.3 Пусть X - бесконечномерное банахово пространство и A - вполне непрерывный оператор, действующий в нем. Тогда $0 \in \sigma(A)$, то есть 0 не является регулярным значением.

Теорема 37.4 Пусть H - гильбертово пространство и A - вполне непрерывный оператор, действующий в нем. Тогда если $\lambda \in \sigma(A), \lambda \neq 0$, то λ является собственным значением конечной кратности.

Теорема 37.5 Пусть H - гильбертово пространство и A - вполне непрерывный оператор, действующий в нем. Тогда точка 0 - единственная возможная предельная точка $\sigma(A)$.

Теорема 37.6 Пусть H - гильбертово пространство и $A = A^*$ - самосопряженный непрерывный оператор, действующий в нем. Тогда $||A|| = \sup_{||x||=1} |(Ax, x)|$.

$A^{**} = A$. Если A - произвольный ограниченный оператор в гильбертом пространстве, то $A_1 = \frac{A+A^*}{2}, A_1 = \frac{A-A^*}{2i}$ - самосопряженные операторы. То есть, $A = A_1 + iA_2$ есть линейная комбинация самосопряженных операторов.

Теорема 37.7 Если $A \in L(H \to H)$, то $A = A^*$ тогда и только тогда, когда $Im(Ax, x) \equiv 0$.

Пусть $A = A^* : H \to H$, H - гильбертово пространство, $Ax = \lambda x, x \neq 0$. Тогда λ - действительное число и собственные элементы, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны. Обозначим $m(A) = \inf_{||x||=1}(Ax, x), M(A) = \sup_{||x||=1}(Ax, x)$.

Теорема 37.8 Если $A = A^*$ и вполне непрерывный, то $\sigma(A) \subset [m(A), M(A)]$.

Теорема 37.9 Если $A = A^*$ действует в сепарабельном гильбертом пространстве H и вполне непрерывный, то существует собственное значение λ оператора A такой, что $|\lambda| = ||A||$.

Теорема 37.10 Теорема Гильберта-Шмидта Если $A = A^*$ и вполне непрерывный в сепарабельном гильбертовом пространстве H, то тогда любой элемент $x \in ImA$ представим в виде

$$x = \sum_{\lambda_k \neq 0} (x, e_k)e_k. \tag{12}$$

и этот ряд Фурье по ортонормированной системе $\{e_k\}$ собственных элементов оператора A сильно сходится к x.