Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Университет МГУ-ППИ в Шэньчжэне
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Регуляризующие алгоритмы в неустойчивых равновесных задачах

Выпускная квалификационная работа

Студент: Сюй Минчуань
Научный руководитель: к.ф-м.н., доцент ВМК МГУ
Будак Борис Александрович

Шэньчжэнь
7 июня 2021 г.

Кратое введение о равновесном программировании

Рассматривается задача **равновесного программирования**: найти точку v_* из условий

$$\begin{aligned} &v_* \in \mathbf{W} \subseteq \mathbb{R}^n, \quad \Phi(v_*,v_*) \leqslant \Phi(v_*,w), \quad w \in \mathbf{W}, \\ &\mathbf{W} = \{w \in \mathbf{W_0} : g_i(w) \leqslant 0, i = \overline{1,m}, g_i(w) = 0, i = \overline{m+1,s}\}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\mathbf{W_0}$ - множество из $\mathbb{R}^n$ (обычно имеет простой вид, возможно $\mathbf{W_0} = \mathbb{R}^n$).

Типичные равновесные задачи:

Задача математического программирования.
Задача поиска седловых точек.
Задача поиска равновесия по Нэшу.

Существующие методы к решению равновесной задачи

- **Градиентный метод прогнозного типа.**
  Применяется в случае $\mathbf{W} = \mathbb{R}^n$.
  Схема метода: начальное приближение $v_0 \in \mathbf{W}$ - задано;
  $$\begin{cases} u_k = v_k - \alpha_k \nabla_w \Phi(v_k, v_k), \\ v_{k+1} = v_k - \alpha_k \nabla_w \Phi(u_k, u_k), \end{cases}$$
  где $k = 0,1,2,\ldots$, параметры $\alpha_k > 0$.
- Экстраградиентный метод
- Метод линеаризации
- Проксимальный метод
- Непрерывные варианты методов
- Метод стрельбы
- ...

Перечислимые выше методы уже хорошо изучены. Отметим, что проблема **неустойчивости** задачи существенна, для которой требуются изменения в методах.

Неустойчивость к возмущению данных

Допустим, что

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\delta\to 0}\left|\Phi^{\delta}(v,w)-\Phi(v,w)\right|=0;\\
&\lim_{\delta\to 0}\left\|\nabla_w^{\delta}\Phi(v,w)-\nabla_w\Phi(v,w)\right\|=0.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Однако подход к использованию метода с приближенными данными из (2) не всегда дает возможность получить приближенное решение задачи.

Исследования данной тематики могут найти в работах Антипин А.С., Васильев Ф.П., Шпирко С.В., Будак Б.А. и др.

Основные методы регуляризации

- **Метод стабилизации:** Введем функцию Тихонова:
  $t_\delta(v,w) = \Phi_\delta(v,w) + \alpha\Omega(w), \quad w \in \mathbf{W_0}, \alpha > 0.$
  Будем искать точку, удовлетворяющую условиям
  $v_\delta \in \mathbf{W_0}, \quad t_\delta(v_\delta,v_\delta) \leqslant t_\delta(v_\delta,w) + \varepsilon, \forall w \in \mathbf{W_0}, \varepsilon > 0.$
  Точки, выполняющие данные условия, сходятся к исходному решению при подобном выборе параметров.
  Сочетание с штрафной функцией:
  Вместо сложного множества $\mathbf{W}$ работаем на более простом множестве $\mathbf{W_0}$ (возможно $\mathbf{W_0} = \mathbb{R}^n$), добавив штрафное слагаемое $AP_\delta(w)$ в тихоновскую функцию.
- Метод невязки.
- Метод квазирешений.

Некоторые **предварительные** рассуждения:

- Допустим, что для некоторой точки $v_* \in \mathbf{W}_*$ *существуют* постоянные $v > 0, c_i \geqslant 0$ такие, что

$$\Phi(v_*,v_*) \leqslant \Phi(v_*,w) + \sum_{i=1}^{s} c_i [g_i^+(w)]^v, \quad \forall w \in \mathbf{W_0} \tag{3}$$

- *Достаточное условие* для непустоты $\mathbf{W}_{*\delta}$.

$$\begin{aligned} &BA^{-v/(p-v)} + \delta\|v_*\|^2(3+A) + 2(\delta + A\delta) \leqslant 1/2\varepsilon(\delta), \\ &\alpha\|v_* - w\|^2 + \|w\|^2(\delta + A\delta) \leqslant 1/2\varepsilon(\delta), \forall w \in \mathbf{W_0}, \delta > 0 \end{aligned} \tag{4}$$

где $v_* \in \mathbf{W}_*$ взята из условия (3), B - константа определенного вида.

Основная цель: Применение нового стабилизатора

Часть 1. Метод стабилизации с новым стабилизатором $-\alpha_k\|v-w\|^2$

Некоторые **предварительные** рассуждения:

- *Кососимметричность* функции:
$\Phi(w,w) - \Phi(w,v) - \Phi(v,w) + \Phi(v,v) \geqslant 0, \quad \forall w,v \in \mathbf{W_0}.$
- Пусть приближения $\Phi_\delta(v,w), P_\delta(w)$ для функций $\Phi(v,w), P(w)$ таковы, что

$$\begin{aligned} &\left|\Phi_\delta(v,w) - \Phi(v,w)\right| \leqslant \delta\left(1 + \|v\|^2 + \|w\|^2\right), \quad v,w \in \mathbf{W_0}, \delta > 0, \\ &\left|P_\delta(w) - P(w)\right| \leqslant \delta\left(1 + \|w\|^2\right), \quad w \in \mathbf{W_0}, \delta > 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Результат 1: Теорема о сходимости метода стабилизации

Пусть выполнены следующие условия

1) W_0 - замкнутое ограниченное множество, функции $g_i(w)$,$|g_i(w)|$,$\Phi(w,w)$ полунепрерывны снизу на $\mathbf{W_0}$; $\Phi(v,w)$ полунепрерывна сверху по v на $\mathbf{W_0}$ $\forall w \in W_0$; $\mathbf{W}_* \neq \emptyset$; для некоторой $v_* \in \mathbf{W}_*$ выполнено условие (3); $\Phi(v,w)$ кососимметрична на $\mathbf{W_0}$;

2) $\Omega(v,w) = -\alpha_k\|v-w\|^2$ - *стабилизатор* задачи, $P(w)$ - штрафная функция при $p \geqslant v$;

3) приближения $\Phi_\delta(v,w)$,$P_\delta(w)$ функций $\Phi(v,w)$,$P(w)$ удовлетворяют условиям (5);

4) параметры $\alpha = \alpha(\delta) > 0$, $A = A(\delta) > 0$, $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$,$\delta > 0$, удовлетворяют условиям (4) и, кроме того $\lim\limits_{\delta\to 0} \alpha(\delta) = 0, \lim\limits_{\delta\to 0} A(\delta) = 0, \lim\limits_{\delta\to 0} \varepsilon(\delta) = 0, \lim\limits_{\delta\to 0} \delta A(\delta) = 0, \sup\limits_{\delta>0} \frac{3\delta+\delta A(\delta)}{\alpha(\delta)} < +\infty, \sup\limits_{\delta>0} \frac{\varepsilon(\delta)}{\alpha(\delta)} < +\infty.$

Тогда $\mathbf{W}_{*\delta} \neq \emptyset, \forall\delta > 0$, и $\lim\limits_{\delta\to 0} \rho(v_\delta,\mathbf{W}_*) = 0$, $\lim\limits_{\delta\to 0} \rho(\Phi(v_\delta,v_\delta),\Phi_*) = 0$. где $\Phi_* = \{y|y = \Phi(v,v), v \in \mathbf{W}_*\}$, причем сходимость *равномерная* относительно выбора $\Phi_\delta(v,w)$,$P_\delta(w)$ и точки v_δ из $\mathbf{W}_{*\delta}$.

Основная цель: Применение нового стабилизатора

Часть 2. Экстраградиентный метод с новым стабилизатором $-\alpha_k\|v-w\|^2$

Было предложена

Теорема о выпуклости и замкнутости $\mathbf{W}_*$

Пусть $\mathbf{W_0}$ - выпуклое замкнутое множество из $\mathbb{E}^n$, функция $\Phi(v,w), g_i(w)$ при $i=\overline{1,m+s}$ обладают определенными особенностями. Пусть $\mathbf{W}_*\neq\emptyset$. **Тогда** $\mathbf{W}_*$ - выпукло, замкнуто и задача имеет *единственное* нормальное решение.

Введем функцию Тихонова
$T_k(v,w)=\Phi(v,w)+A_kP(w)-\alpha_k\|v-w\|^2$, где
$v,w\in\mathbf{W_0},A_k>0,\alpha_k>0,k=0,1,\ldots.$
Пусть вместо точных $\nabla_w\Phi(v,w),\nabla_wP(w)$ известны приближения $\{\nabla^k_w\Phi(v,w)\},\{\nabla^k_wP(w)\}$ такие, что

$$\begin{aligned}&\|\nabla^k_w\Phi(v,w)-\nabla_w\Phi(v,w)\|\leqslant\delta_k(1+\|v\|+\|w\|),\quad\forall v,w\in\mathbf{W_0},\\&\|\nabla^k_wP(w)-\nabla_wP(w)\|\leqslant\delta_k(1+\|w\|),\quad\forall w\in\mathbf{W_0},\delta_k>0,k=0,1,\ldots\end{aligned}\qquad(6)$$

Результат 2: “Промежуточная” теорема

Пусть выпольнены условия предыдущей теоремы; $\nabla_w\Phi(v,w)$,$\nabla_w g_i(w)$ на $\mathbf{W_0}$, функции $T_k(v,w)$ - выпуклы, выполнено условие (3)(v_* - нормальное решение); параметры удовлетворяют: $p \geqslant v$,$p > 1$,$\alpha_k > 0$,$A_k > 0$,$\alpha_k \to 0$, и $A_k \to +\infty$,$\alpha_k A_k^{v/(p-v)} \to +\infty$. **Тогда** z_k, являющиеся *точками равновесия* функции Тихонова, существуют однозначно $\forall k$, и

$$\boldsymbol{\lim_{k\to\infty}\|z_k - v_*\| = 0}, \lim_{k\to\infty} A_k P(z_k) = 0, \|z_k\| \leqslant R_k \leqslant \sup_{k\geqslant 0} R_k = R,$$

$$\|z_k - z_m\| \leqslant \frac{|A_m - A_k|R_1}{2\alpha_k}, \forall k,m = 0,1,\ldots, R_1,R_2,\ldots - \text{ постоянные.}$$

Предлагаемый в данной работе **регуляризующий экстраградиентный метод**:

$$u_k = \mathrm{Pr}_{\mathbf{W_0}}(v_k - \beta_k[\nabla_w^k \Phi(v_k,v_k) + A_k \nabla_w^k P(v_k)]),$$
$$v_{k+1} = \mathrm{Pr}_{\mathbf{W_0}}(v_k - \beta_k[\nabla_w^k \Phi(v_k,u_k) + A_k \nabla_w^k P(u_k) - 2\alpha_k(v_k - u_k)])$$

Пусть для параметров выполнены условия:

$$\alpha_k > 0, A_{k+1} \geqslant A_k > 0, \beta_k > 0, \delta_k > 0, \lim_{k\to\infty} \beta_k = 0, \lim_{k\to\infty} \delta_k = 0,$$
$$\sup_{k\geqslant 0} \beta_k(1 + A_k) < \frac{1}{L}, \lim_{k\to\infty} \frac{\delta_k + \delta_k A_k}{\alpha_k} = 0, \lim_{k\to\infty} \frac{A_{k+1} - A_k}{\alpha_k^2 \beta_k} = 0. \tag{7}$$

Результат 3: Сходимость регуляризованного метода

Пусть выполнены все условия предыдущей теоремы, и пусть $\nabla_w\Phi(v,w)$,$\nabla_w P(w)$ удовлетворяют условию Липлица. Пусть также выполнено модифицированное условие Липшица вида:

$$\|\nabla_w\Phi(v,w)-\nabla_w\Phi(w,w)\| \leqslant L\|v-w\|, \forall v,w \in \mathbf{W_0}, L = \text{const} > 0. \quad (8)$$

Вместо точных $\nabla_w\Phi(v,w)$,$\nabla_w P(w)$ известны их приближения $\{\nabla^k_w\Phi(v,w)\}$,$\{\nabla^k_w P(w)\}$, удовлетворяющие условиям (6). Параметры $\{\alpha_k\}$,$\{\beta_k\}$,$\{\delta_k\}$,$\{A_k\}$ метода удовлетворяют условиям (7).

Тогда последовательность $\{v_k\}$, порожденная методом при любом выборе начального приближения $v_0 \in \mathbf{W_0}$, сходится к нормальному решению v_* задачи, причем сходимость равномерна относительно выбора $\{\nabla^k_w\Phi(v,w)\}$,$\{\nabla^k_w P(w)\}$ из (6).

Результат 4: Тестирование на примерах

В основном, надо попробовать сдедать программу, обеспечивающую нахождение точки равновесия.

Тестовые примеры:

$$\Phi(v,w) = vw, \mathbf{W} = \{w \in \mathbb{E}^1 : |w| \leqslant 1\}, \mathbf{W}_* = \{0\}.$$

$$\Phi(v,w) = vw^2, \mathbf{W} = \{w \in \mathbb{E}^1 : |w| \leqslant 1\}, \mathbf{W}_* = \{0, -1\}.$$

Вычислительный процесс сходится к реальному решению исходной задачи с нужной точностью.

Заключение

- Постановка равновесного программирования, примеры
- Существующие методы решения
- Неустойчивость задачи и методы регуляризации
- Применение нового стабилизатора
    - Метод стабилизации для неустойчивых равновесных задач с использованием нового стабилизатора
    - Регуляризованный экстраградиентный метод с использованием нового стабилизатора
    - Численная проверка

Спасибо за внимания!