Математические Модели в Физике. Основные результаты

Сюй Минчуань

7 января 2021 г.

Содержание

1 Классификация линейных уравнений в частных производных 2-го порядка 2

2 Задача Штурма-Лиувилля 2

2.1 Определения и теоремы 2

2.2 Типичные задачи Штурма-Лиувилля 2

3 Теорема Стеклова 3

4 Цилиндрические функции 4

4.1 Уравнение Бесселя на $(0, 1)$ 4

4.2 Задача Штурма-Лиувилля для уравнения Бесселя на $[0, R]$ . . 5

4.3 Задача Штурма-Лиувилля для уравнения Бесселя на $[a, b]$ . . 5

5 Сферические функции 6

6 Присоединенные функции Лежандра 6

1 Классификация линейных уравнений в частных производных 2-го порядка

2 Задача Штурма-Лиувилля

2.1 Определения и теоремы

$$\begin{gathered} Ly = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy(x)}{dx}\right) - q(x)y(x) = -\lambda y(x), \quad 0 \le x \le l \\ \alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = 0, \quad \alpha_2 y'(l) + \beta_2 y(l) = 0 \end{gathered} \tag{1}$$

Известны: самосопряженный оператор L в уравнении (1) при $p(x) \in C^1[0,l]; q(x) \in C[0,l]; \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{R}; p(x) > 0 \, \forall x \in [0,l]; \alpha_i^2 + \beta_i^2, i = 1,2; \lambda \in \mathbb{C}$.

Определение Если для $\lambda_1 \exists$ решение $y_1(x) \not\equiv 0$ краевой задачи (1), то λ_1 называется *собственным значением*, а $y_1(x)$ - *собственной функцией*.

Теорема Все собственные значения и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (1) действительны.

Теорема Каждому собственному значению соответствует только одна собственная функция.

Теорема Собственные функции, соответствующие различным собственным значениям являются ортогональными.

Теорема Пусть $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Тогда если λ_1 - собственные значения, а $y_1(x)$ - его собственная функция, то

$$\lambda_1 \ge \min_{0 \le x \le l} q(x). \tag{2}$$

2.2 Типичные задачи Штурма-Лиувилля

1.
$$\left\{ \begin{array}{c} X_n''(x) + \lambda_n X_n(x) = 0, \quad 0 \le x \le l, \\ X_n(0) = 0, \quad X_n(l) = 0, \end{array} \right. \tag{3}$$

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{\pi n x}{l}, \quad \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

2.
$$\left\{ \begin{array}{c} X_n''(x) + \lambda_n X_n(x) = 0, \quad 0 \le x \le l, \\ X_n'(0) = 0, \quad X_n'(l) = 0, \end{array} \right. \tag{5}$$

$$X_0(x) = \sqrt{\frac{1}{l}}, X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \cos\frac{\pi n x}{l}, \quad \lambda_0 = 0, \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, n \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

3.
$$\begin{cases} X_n''(x) + \lambda_n X_n(x) = 0, \quad 0 \le x \le l, \\ X_n(0) = 0, \quad X_n'(l) = 0, \end{cases} \tag{7}$$

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi(n-1/2)x}{l}, \quad , \lambda_n = \left(\frac{\pi(n-1/2)}{l} \right)^2, n \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

4.
$$\begin{cases} X_n''(x) + \lambda_n X_n(x) = 0, \quad 0 \le x \le l, \\ X_n'(0) = 0, \quad X_n(l) = 0, \end{cases} \tag{9}$$

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \frac{\pi(n-1/2)x}{l}, \quad , \lambda_n = \left(\frac{\pi(n-1/2)}{l} \right)^2, n \in \mathbb{N}. \tag{10}$$

5.
$$\begin{cases} X_n''(x) + \lambda_n X_n(x) = 0, \quad 0 \le x \le l, \\ X_n(0) - \alpha X_n'(0) = 0, \quad X_n(l) + \beta X_n'(l) = 0, \end{cases} \tag{11}$$

$$X_n(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda_n} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda_n} x \tag{12}$$

где $\sqrt{\lambda_n}$ - корни уравнении

$$\frac{(\alpha+\beta)\sqrt{\lambda_n}}{\alpha\beta\lambda_n - 1} = \operatorname{tg} \sqrt{\lambda_n} l, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

6.
$$\begin{cases} X_n''(x) + \lambda_n X_n(x) = 0, \quad 0 \le x \le l, \\ X_n(0) = 0, \quad X_n(l) + \beta X_n'(l) = 0, \end{cases} \tag{14}$$

$$X_n(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda_n} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda_n} x \tag{15}$$

где $\sqrt{\lambda_n}$ - корни уравнении $\beta\sqrt{\lambda_n} = \operatorname{tg}\sqrt{\lambda_n} l$, $n \in \mathbb{N}$.

7.
$$\begin{cases} \Phi_n''(\varphi) + \mu_n \Phi_n(\varphi) = 0, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ \Phi_n(0) = \Phi_n(2\pi), \quad \Phi_n'(0) = \Phi_n'(2\pi), \end{cases} \tag{16}$$

$$\Phi_n(\varphi) \in \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}; \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(n\varphi); \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(n\varphi) \right\}. \tag{17}$$

$$\sqrt{\mu_n} = n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{18}$$

3 Теорема Стеклова

Теорема Если $f(x) \in C^2[0,l]$ и удовлетворяет краевым условиям задачи (1), то ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n y_n(x)$ сходится равномерно на $[0,l]$ к функции $f(x)$, то есть

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n y_n(x), \quad 0 \le x \le l. \tag{19}$$

где $\{y_n(x)\}$ - ортонормированная система функций, $f_n = (f, y_n)/\|y_n\|^2$ - коэффициент Фурье. (Если система уже ортонормированная, то не нужно деление на квадрат нормы собственной функции.)

4 Цилиндрические функции

4.1 Уравнение Бесселя на $(0, 1)$

$$x^2 Z''(x) + xZ'(x) + (x^2 - v^2)Z(x) = 0 \tag{20}$$

Определение Всякое решение уравнения Бесселя называется *цилиндрическиой функцией.*

Определение Функция

$$J_v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+v+1)k!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+v} \tag{21}$$

называется *функцией Бесселя порядка* v и является на $(0, 1)$ решением уравнения (20).

Определение *Функция Неймана*

$$N_v(x) = \frac{1}{\sin(\pi v)}[J_v(x)\cos(\pi v) - J_{-v}(x)], \quad v \notin \mathbb{Z}; \tag{22}$$

$$N_n(x) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_v(x)}{\partial v} - (-1)^n \frac{\partial J_{-v}(x)}{\partial v}\right]_{v=n}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{23}$$

Теорема Фундаментальную систему решений (ФСР) уравнеия Бесселя (20) образует пара функций $\{J_v(x), N_v(x)\}$, и в случае, когда $x \notin \mathbb{Z}: \quad \{J_v(x), J_{-v}(x)\}$. При $n \in \mathbb{Z}: \quad J_{-n}(x) = (-1)^n J_n$

Следствие Общее решение уравнеия Бесселя (20) задается формулой

$$Z_v(x) = C_1 J_v(x) + C_2 N_v(x), \quad v \in \mathbb{R}, \tag{24}$$

или

$$Z_v(x) = C_3 J_v(x) + C_4 J_{-v}(x), \quad v \notin \mathbb{Z}. \tag{25}$$

Рекуррентные формулы цилиндрических функций

$$\begin{gathered} Z'_v(x) = Z_{v-1}(x) - \frac{v}{x} Z_v(x), \\ Z'_v(x) = -Z'_{v+1}(x) + \frac{v}{x} Z_v(x). \end{gathered} \tag{26}$$

Для $v = n \in \mathbb{Z}$ верно

$$Z_{-n}(x) = (-1)^n Z_n(x), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{27}$$

4.2 Задача Штурма-Лиувилля для уравнения Бесселя на $[0, R]$

Определение *Задачей Штурма-Лиувилля для уравнения Бесселя на* $[0, R]$ называется задача

$$\left\{\begin{array}{c} -\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{v^2}{r}u = \lambda r u, \quad r \in (0, R), v \geq 0; \\ |u(+0)| <= \infty; \\ \alpha u(R) + \beta u'(R) = 0, \quad \alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta > 0. \end{array}\right. \tag{28}$$

Надо найти λ и функци $0 \not\equiv u(r) \in C^2[0, R]$; $\frac{L_v(u)}{\sqrt{r}} \in L_2(0, R)$. λ - *собственные значения*, $u(r)$ - *собственные функции.*
Теорема Все собственные значения задачи Штурма-Лиувилля неотрицательны и кратности 1. Кроме того, число $\lambda = 0$ есть собственное значение тогда и только тогда, когда $v = \alpha = 0$, и ему соответствует собственная функция $u(r) = \text{const}$.

Теорема Все положительные собственные значения задачи Штурма-Лиувилля и соответствующие им собственные функции имеют вид

$$\lambda_k^{(v)} = \left[\frac{\mu_k^{(v)}}{R}\right]^2, \quad J_v\left(\frac{\mu_k^{(v)} r}{R}\right), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{29}$$

где $\mu_k^{(v)}$ - положительные корни уравнения

$$\alpha R J_v(\mu) + \beta \mu J_v'(\mu) = 0. \tag{30}$$

4.3 Задача Штурма-Лиувилля для уравнения Бесселя на $[a, b]$

Теорема(Аналог теоремы Стеклова) Пусть $\{Z_k\}_{k=1}^{\infty}$ - ортогональная система собственных функций задачи Штурма-Лиувилля. Тогда, $\forall f(x) \in C^2[a, b]$, удовлетворяющей краевым условиям, $\exists \{c_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k Z_k(x), \tag{31}$$

причем ряд сходится к $f(x)$ абсолютно и равномерно на $[a, b]$, а для c_k верно

$$c_k = \frac{(f, Z_k)}{\|Z_k\|^2} = \frac{\int_a^b x f(x) Z_k(x) dx}{\int_a^b x Z_k^2(x) dx} \tag{32}$$

продолжение следует.....

5 Сферические функции

Определение *Уравнение Лежандра*:

$$\frac{d}{x}\left[(1-x^2)\frac{dy(x)}{x}\right]+\lambda y(x)=0, \quad x\in(-1,1). \tag{33}$$

Теорема Ограниченная функция $y(x)\not\equiv 0$ есть решение уравнении (33).

1. $\lambda = n(n+1)$, где $n=0,1,2,\dots;$
2. функция $y(x)$ является полиномом степени n, называемым *полиномом Лежандра*, и может быть найдена по *формуле Родрига*:

$$y(x)=P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]. \tag{34}$$

Рекурретные формулы и полезные соотношения, связвнные с полиномом Лежандра, а также первые несколько полиномов.

Теорема Ортогональность и норма полиномов Лежандра

$$(P_k(x),P_n(x)) =\equiv \int_{-1}^{1}P_k(t)P_n(t)dt=\begin{cases}0, & k\neq n;\\ \frac{2}{2k+1}, & k=n.\end{cases} \tag{35}$$

Теорема Разложение в ряд по полиномам Лежандра от косинусов Пусть $f(\theta)\in C^2[0,\theta]$. Тогда $f(\theta)$ разложима в следующий ряд Фурье

$$f(\theta)=\sum_{k=0}^{\infty}f_kP_k(\cos\theta), \quad f_k=\frac{2k+1}{2}\int_0^{\pi}f(\theta)P_k(\cos\theta)\sin\theta d\theta, \quad \theta\in[0,\pi]. \tag{36}$$

При этом ряд (36) сходится к $f(\theta)$ *равномерно* на всем сегменте $[0,\pi]$.

6 Присоединенные функции Лежандра

Будем рассматривать задачу

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dy(x)}{dx}\right]+\left(\lambda-\frac{m^2}{1-x^2}\right)y(x)=0, \quad x\in(-1,1). \tag{37}$$

Теорема Пусть ограниченная функция $y(x)\not\equiv 0$ есть решение уравнения (37). Тогда

1. $\lambda=n(n+1), n=0,1,\dots,\infty$
2. функция $y(x)$, называемая *присоединенной функцией Лежандра порядка* k, может быть найдена по формуле:

$$y(x)=P_n^m(x)=\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\cdot\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}, \quad m=0,1,\dots,n. \tag{38}$$

3. при этом $P_n^{(0)}(x) \equiv P_n(x)$ - полиномы Лежандра, $P_n^m(x) \equiv, m > n$.

Определение Функции

$$P_n^m(\cos\theta)\cos k\varphi, \quad P_n^m(\cos\theta)\sin k\varphi, \quad m = 0, 1, \ldots, \infty, n = 0, 1, \ldots, \infty. \quad (39)$$

называется *сферическими гармониками.*

Теорема Ортогональность и норма присоединенных функций Лежандра

$$(P_k^m(x), P_n^m(x)) =\equiv \int_{-1}^{1} P_k^m(t) P_n^m(t) dt = \begin{cases} 0, \quad k \neq n; \\ \frac{2}{2k+1} \cdot \frac{(k+m)!}{(k-m)!}, \quad k = n. \end{cases} \quad (40)$$

Теорема Разложение в ряд по сферическим гармоникам Пусть $g(\theta, \varphi) \in C^2, \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi], g(\theta, \varphi + 2\pi) = g(\theta, \varphi)$. Тогда $g(\theta, \varphi)$ разложима в следующий ряд Фурье

$$\begin{aligned} g(\theta, \varphi) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\alpha_{k0}}{2} P_k(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{k} P_k^m(\cos\theta)(\alpha_{km}\cos(m\varphi) + \beta_{km}\sin(m\varphi)) \right], \\ \alpha_{km} &= \frac{2k+1}{2\pi} \cdot \frac{(k-m)!}{(k+m)!} \int_0^{2\pi} d\varphi \cos(m\varphi) \int_0^{\pi} g(\theta, \varphi) P_k^m(\cos\theta) \sin\theta d\theta, \\ \beta_{km} &= \frac{2k+1}{2\pi} \cdot \frac{(k-m)!}{(k+m)!} \int_0^{2\pi} d\varphi \sin(m\varphi) \int_0^{\pi} g(\theta, \varphi) P_k^m(\cos\theta) \sin\theta d\theta, \end{aligned} \quad (41)$$

При этом ряд сходится к $g(\theta, \varphi)$ *абсолютно и равномерно* на $\theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]$.