Обзор комплексного анализа

Сюй Минчуань

29 августа 2020 г.

Содержание

1 Основные понятия и элементарные функции

1.1 Дифференцируемость функций комплексной переменной. Условия Коши-Римана. Аналитичность. Вопрос 1 Лек.2

Пусть f - функция комплексного переменного, определённая и однозначная на некотором множестве $\mathbf{E}$, и пусть z_0 - какая-либо точка этого множества, являющаяся предельной для него. Если существует предел

$$\lim_{E \ni z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{1}$$

то он называется **производной функции** f по множеству E в точке z_0 и обозначается через $f'(z_0)$. Сама функция f, обладающая производной называется **дифференцируемой** или моногенной по Множеству в точке z_0.
Критерий дифференцируемости Функция f тогда и только тогда дифференцируема в точке z_0, когда её приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta f(z) = A \cdot \Delta z + \alpha(z_0, \Delta z) \cdot \Delta z \tag{2}$$

где A - константа, а $\alpha(z_0, \Delta z)$ бесконечная малая при $z \to z_0$. Если такое представление возможно, то $A = f'(x_0)$.
Условия Коши-Римана Функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, определённая в области $\mathbf{G}$, тогда и только тогда дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ этой области, когда функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в точке (x_0, y_0) и их частные производные в этой точке удовлетворяют соотношениям

$$u'_x = v'_y, \quad u'_y = -v'_x \tag{3}$$

Определение 1 Функция f, дифференцируемая в каждой точке области $\mathbf{G}$, называется дифференцируемой или **аналитической** в этой области.
Определение 2 Если функция f дифференцируема в каждой точке области $\mathbf{G}$, а ее производная непрерывна в этой области, то f называется **аналитической** в $\mathbf{G}$.
Эти определения эквивалентны, для удобства в дальнейшем мы будем использовать Определение 2. Обозначение: $f \in \mathcal{A}(\mathbf{G})$.
Функция f аналитична на всей плоскости $\mathbb{C}$ называется **целыми (аналитическими) функциями**.

1.2 Свойства аналитических функций. Геометрический смысл производной. Вопрос 6 Лек.2

Свойства аналитических функций
1) $f \in \mathcal{A}(\mathbf{G}) \Rightarrow f \in \mathcal{C}(\mathbf{G})$.

2) Пусть $f_1, f_2 \in \mathcal{A}(\mathbf{G})$. Тогда сумма, разность и произведение функций f_1 и f_2 также являются аналитическими функциями в $\mathbf{G}$. Функция $\varphi = \frac{f_1}{f_2}$ аналитична всюду, где $f_2(z) \neq 0$.
3) **Теорема об образе области** Пусть $f \in \mathcal{A}(\mathbf{G})$ и $f \neq const$. Тогда множество $\mathbf{D} = f(\mathbf{G})$ также является областью.
4) **Аналитичность сложной функции** Пусть $f(z) \in \mathcal{A}(G)$ и $f(z) \neq const$. Если в области $\mathbf{D} = f(\mathbf{G})$ определена аналитическая функция $\zeta = g(w)$, $\zeta = g(f(z)) \equiv H(z)$ является аналитической функцией переменной z в области $\mathbf{G}$.
5) **Аналитичность обратной функции** Пусть $f(z) \in \mathcal{A}(G)$ и $f'(z_0) \neq 0$ в некоторой точке $z_0 \in \mathbf{G}$. Положим $w_0 = f(z_0)$. Тогда найдутся окрестность K_ε точки w_0 и функция $z = \varphi(w)$ такие, что:
1. Функция ϕ обратна k f, т.е. $f[\phi(w)] = w \quad \forall w \in K_\varepsilon$,
2. $\phi(w) \in \mathcal{A}(K_\varepsilon)$,
3. производную $\phi'(w_0)$ можно вычислить по хорошо известной формуле $\phi'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$.
6) **Ортогональность линий уровня** Линии уровня разных семейств в каждой точке области $\mathbf{G}$ ортогональны.

Геометрический смысл аргумента производной Число $\arg f'(z_0)$ есть угол поворота всякой гладкой кривой, проведённой через точку z_0, при переходе от плоскости z к плоскости w. Этот поворот происходит под действием функции f.
Локальная конформность Отображение посредством непрерывной функции, сохраняющее углы между кривыми, проходящими через данную точку, называется **конформный в этой точке**.
Глобальная конформность Пусть функция f отображает область $\mathbf{G}$ в $\mathbf{D}$ взаимно однозначно. Если при этом f конформна в каждой точке $z \in \mathbf{G}$, то говорят, что f отображает $\mathbf{G}$ в $\mathbf{D}$ **конформно**.
Достаточное условие локальной конформности Отображение конформно во всех точках z_0, где $f'(z_0) \neq 0$.

1.3 Дробно-линейные функции: инвариантность двойного отношения, круговое свойство. Вопрос 5 Лек.3

$$w = L(z) = \frac{az+b}{cz+d} \tag{4}$$

При этом не должно быть равно нулю число

$$\delta = ad - bc = \det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \tag{5}$$

называемое **определителем** функции L.

Инвариантность двойного отношения

Пусть a, b, c, d - конечные и попарно различные комплексные числа. Их **двойным (или ангармоническим) отношением** называется число

$$(a, b, c, d) = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} \tag{6}$$

Теорема. Двойное отношение есть инвариант дробно-линейного преобразования Пусть $w = L(z)$ - произвольная дробно-линейная функция, a, b, c, d - произвольные конечные и попарно различные числа, A, B, C, D - их образы под действием функции $L(z)$. Утверждается, что

$$(a, b, c, d) = (A, B, C, D) \tag{7}$$

Теорема. Круговое свойство Образ прямой или окружности при дробно-линейном преобразовании есть прямая или окружность.
Замечание Если прямая или окружность (не) проходит через особую точку $\delta = -d/c$ дробно-линейной функции $L(z)$, то ее образ под действием этой функции (не) должен содержать точку $\infty = L(\delta)$ и, следовательно, является прямой (окружностью).

1.4 Сохранение симметрии. Примеры типовых дробно-линейных отображений. Вопрос 7 Лек.4

Говорят, что точки z_1 и z_2 **симметричны относительно окружности** γ, если прямая и всякая окружность, проходящие через z_1 и z_2 ортогональны γ (см. слайд "Симметрия относительно окружности ").
Пусть γ задана уравнением $|z - a| = R$, тогда справедливо

$$z_2 = a + \frac{R^2}{\overline{\overline{z_1 - a}}} \tag{8}$$

Теорема Под действии произвольного дробно-линейного преобразования $w = L(z)$ точки z_1 и z_2, симметричные относительно прямой или окружности γ, переходят в точки w_1 и w_2, симметричные относительно прямой или окружности $\Gamma = L(\gamma)$.

Пример[1] Построить дробно-линейное преобразование $w = L(z)$, преобразующее круг $|z| < R$ в круг $|w| < R$ так, чтобы заданная точка α первого круга перешла в центр $w = 0$ второго круга. Рассмотрим два возможных случая.
1) $\alpha = 0$, тогда решение будет целая линейная функция вида $w = e^{i\phi} z$, где ϕ - произвольное число из $[0, 2\pi)$.
2) $\alpha \neq 0$, тогда решение будет дробно-линейная функция вида $w = R^2 e^{i\phi} \frac{z-\alpha}{R^2 - \bar{\alpha} z}$.

[1] Подробнее объяснение см. стр.70-72

1.5 Функция Жуковского. Вопрос 20

Функция Жуковского

$$w = \lambda(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}), dom\,\lambda = \mathbb{C} \setminus \{0\}, im\,\lambda = \mathbb{C} \tag{9}$$

Функция Жуковского имеет непрерывную производную, и поэтому $\lambda(z)$ аналитична в $dom\,\lambda$, обладает свойством локальной комформности, но не обладает глобальной комформности. Она двулистна[2] в своей области определения. Её областью однолистности является 1) единичный круг $|z| < 1$, 2) область $|z| > 1$, 3) полуплоскость $\operatorname{Im} z < 0$ и 4) полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$.

Типичные преобразования Функции Жуковского

1) Семейство окружностей

$$\gamma_r : z = r(\cos t + i \sin t), t \in [0, 2\pi], r \in (0, 1) \tag{10}$$

переходит в объединение софокусных(точки -1 и 1) эллипсов

$$\Gamma_r : w = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r}) \cos t - i\frac{1}{2}(r - \frac{1}{r}) \sin t, t \in [0, 2\pi], r \in (0, 1) \tag{11}$$

То есть

$$|z| < 1 \xrightarrow[\text{конформно}]{\lambda(z)} \mathbb{C} \setminus \{(u, v) : -1 \le u \le 1, v = 0\} \tag{12}$$

2) Аналогично,

$$\begin{gathered}
\underbrace{\{z : |z| < 1, Imz > 0\}}_{\text{верхняя половина единичного круга}} \xrightarrow[\text{конформно}]{\lambda(z)} Imz < 0 \\
\underbrace{\{z : |z| > 1, Imz < 0\}}_{\text{нижняя полуплоскость кроме верхнего полукруга}} \xrightarrow[\text{конформно}]{\lambda(z)} Imz < 0 \\
\underbrace{\{z : |z| < 1, Imz < 0\}}_{\text{нижняя половина единичного круга}} \xrightarrow[\text{конформно}]{\lambda(z)} Imz > 0 \\
\underbrace{\{z : |z| > 1, Imz > 0\}}_{\text{верхняя полуплоскость кроме верхнего полукруга}} \xrightarrow[\text{конформно}]{\lambda(z)} Imz > 0
\end{gathered} \tag{13}$$

3) $P^+ = Imz > 0, P^- = Imz < 0$ - верхнюю или нижнюю полуплоскость переходит в $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1] \bigcup [1, +\infty)$.
4) Семейство радиусов единичного круга

$$r_\alpha : z = t(\cos \alpha + i \sin \alpha), t \in (0, 1), \alpha \in [0, 2\pi] \tag{14}$$

переходит в софокусных(точки -1 и 1) гипербол

$$R_\alpha : w = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{t}) \cos \alpha - i\frac{1}{2}(t - \frac{1}{t}) \sin \alpha, t \in (0, 1), \alpha \in [0, 2\pi] \tag{15}$$

[2]Определения см. стр.75

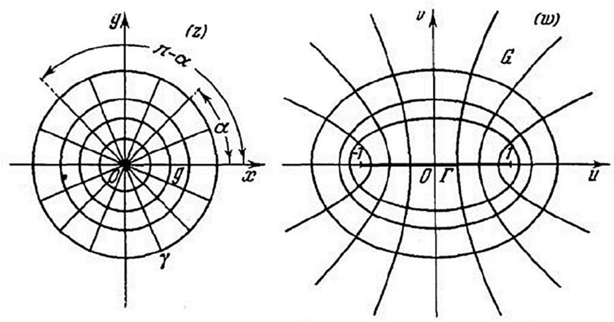

Рис. 1: Конформное действие функции Жуковского в единичном круге

1.6 Показательная функция. Тригонометрические и гиперболические функции. Вопрос 14 Лек.5

Показательная функция Пусть $z = x + iy$, то

$$e^z = e^x(\cos x + i\sin y), dom\, e^z = \mathbb{C}, im\, e^z = \mathbb{C} \setminus \{0\} \tag{16}$$

Эта функция аналитична во всей комплексной плоскости и $2\pi i$ периодична, обладает локальной и глобальной конформности в любой точке плоскости. Всякая горизонтальная полоса $g : \phi_0 < y < \phi_1$ ширины $h = \phi_1 - \phi_0 \leq 1\pi$ является областью однолистности Каждое число w из образа функции имеет прообразы вида $z = \ln|w| + iArg\, w$. Каждое из этих чисел назывется **(натуральным) логарифмом** числа w. Все они расположены на одной и той же вертикальной прямой $x = \ln|w|$, и расстояние между соседними равно $2\pi i$.

Типичные преобразования показательной функции

1) Горизотальная прямая

$$I_\phi : z = t + i\phi, -\infty < t < +\infty, \phi_0 < \phi < \phi_1 \tag{17}$$

переходит в луч

$$L_\phi : w = e^t(\cos\phi + i\sin\phi), -\infty < t < +\infty, \phi_0 < \phi < \phi_1, -\infty < t < +\infty, \phi_0 < \phi < \phi_1 \tag{18}$$

Таким образом, горизотальная полоса g переходит в сектор G раствора h с вершиной в точке $w = 0$. Граничные лучи этого сектора задаются уравнениями $Arg\, w = \phi_0 + 2k\pi$ и $Arg\, w = \phi_1 + 2k\pi$. То есть

$$g \xrightarrow[\text{конформно}]{exp\, z} G \tag{19}$$

2) Вертикальная прямая

$$I_c : z = c + it, -\infty < t < +\infty \tag{20}$$

переходит в окружность

$$\gamma_c : w = e^c(\cos t + i \sin t) \tag{21}$$

Каждому отрезку длины 2π на прямой I_c соответствует один обход γ_c.
3) Прямая, не параллельная вещественной и мнимой осям, отображается экспонентой в логарифмическую спираль (кривую, задаваемую полярным уравнением $\rho = Ce^{k\phi}$, где $C > 0$ и k - константы).

Тригонометрические и гиперболические функции Мы определим таких функции:

$$\begin{gathered}
\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\
\operatorname{ch} z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \operatorname{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \\
\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} \\
\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}
\end{gathered} \tag{22}$$

Первые четыри функции, будучи линейными комбинациями экспонент, являются целыми и наследуют от них периодичность. При этом $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ имеют тот же период $2\pi i$. Тригонометрические функции $\sin z$ и $\cos z$ имеют период 2π. Последние четыри являются аналитическими всюду, где определены и периодичны, причем $\operatorname{th} z$ и $\operatorname{cth} z$ имеют период πi, а $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ - период π.
$\sin z$ и $\cos z$ в нуль не обращаются вне вещественной оси, и они неограничены на плоскости.
Все эти функции могут быть представлены композициями ранее функций: дробно-линейных, функции Жуковского и экспонет.

2 Интегралы по комплексным переменным

2.1 Интегральная теорема Коши и её обобщения. Вопрос 11 Лек.6

Теорема Жордана Всякая замкнутая жорданова кривая Γ делит плоскость $\mathbb{C}$ на две различные области, общей границей которых она является. При этом одна из областей ограничена. Она называется **внутренностью** Γ и обозначается $\operatorname{int} \Gamma$ (от interior). Вторая область не ограничена, называется **внешностью** Γ и обозначается $\operatorname{ext} \Gamma$ (от exterior).
Формула Грина Пусть область D ограничена контуром C, а функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны в замкнутой области D и имеют в D непрерывные частные производные $\frac{\partial Q}{\partial x}$ и $\frac{\partial P}{\partial y}$. Тогда справедлива **формула Гри-**

на

$$\int_{C^+} Pdx + Qdy = \iint_{\bar{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \tag{23}$$

при условии, что двойной интеграл в правой части существует хотя бы как несобственный.

Интегральная теорема Коши Пусть $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \in \mathcal{A}(\mathbf{G})$. Если C - любой контур, принадлежащий области $\mathbf{G}$ вместе со своей внутренннстью, то

$$\oint_C f(z)dz = 0 \tag{24}$$

Следствие Пусть G - односвязная[3] область и $f(z) \in \mathcal{A}(\mathbf{G})$. Тогда равенство 24 имеет место для любого контура $C \subset G$.

Обобщённая теорема Коши Пусть $\mathbf{G}$ - область, ограниченная контуром C. Если функция $f(z) \in \mathcal{A}(\mathrm{G})$ сохраняет непрерывность на границе области, то

$$\oint_C f(z)dz = 0 \tag{25}$$

Составным контуром называется объединение $C = C_0 \cup C_1 \cup \cdots \cup C_n$ обычных (**простых**) контуров такое, что:
1) Контур C_0, называемый **внешним**, содержит внутри себя все остальные (**внутренние**) контуры $C_1, \ldots, C_n$.
2) Каждый из контуров $C_1, \ldots, C_n$ лежит во внешности любого другого внутреннего контура.

Теорема о составном контуре Пусть G - область, ограниченная составным контуром $C = C_0 \cup C_1 \cup \cdots \cup C_n$. Если функция $f(z) \in A(G)$ сохраняет непрерывность на границе области, то

$$\oint_{C^+} f(z)dz = \oint_{C_0^+} f(z)dz + \oint_{C_1^-} f(z)dz + \cdots + \oint_{C_n^-} f(z)dz = 0 \tag{26}$$

Чаще всего используется такая формулировка:

$$\oint_{C^+} f(z)dz = \oint_{C_0^+} f(z)dz + \cdots + \oint_{C_n^+} f(z)dz \tag{27}$$

2.2 Неопределённый интеграл и теорема о первообразной. Вопрос 21 Лек.7

Пусть $f \in \mathcal{C}(\mathbf{G})$. Функция $\Phi \in \mathcal{A}(\mathbf{G})$ называется **первообразной** функции f в этой области, если $\Phi'(z) = f(z)$. Совокупнсть первообразных функции f в данной области называется её **неопределенным интегралом** в этой области.

Теорема о первообразной[4] Пусть $f \in \mathcal{C}(\mathbf{G})$, и пусть для f имеет место C -

[3]Это существенное условие, см. стр.112

[4]Теорема об эквивалентности трех высказывания см. стр. 122-123

свойство[5] в **G**. Последнее корректно определяет интеграл $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ как функцию только от верхнего предела z. Тогда:
(A) $F \in \mathcal{A}(G)$
(B) $F'(z)=f(z)\forall z \in \mathbf{G}$

Формула Коши Пусть $f \in \mathcal{A}(\mathbf{G})$, контур $L \subset \mathbf{G}$, подобласть $\mathbf{D} \subset \mathbf{G}$ ограничена контуром L. Тогда для всякой точки $z_0 \in \mathbf{D}$ справедлива **формула Коши**.

$$f\left(z_0\right)=\frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)dz}{z-z_0} \tag{28}$$

Формула среднего значения Пусть **G** - круг радиуса R с центром в точке z_0, $f \in \mathcal{A}(\mathbf{G})$ и f сохраняет непрерывность на границе области $\partial G=L$. Принимая для L параметризацию $z=z_0+Re^{i\phi}$, получаем по формуле Коши

$$f\left(z_0\right)=\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f\left(z_0+Re^{i\phi}\right)}{Re^{i\phi}} iRe^{i\phi}d\phi=\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0+Re^{i\phi}\right)d\phi \tag{29}$$

2.3 Дифференцирование интеграла по параметру. Бесконечная дифференцируемость аналитических функций. Вопрос 8 Лек.8

Мы будем в дальнейшем рассматривать комплексные интегралы вида

$$F(z)=\int_L \phi(z,\zeta)d\zeta \tag{30}$$

при следующих предположениях:
(1) L - кривая на плоскости переменного $\zeta=\xi+i\eta$, а z изменяется в некоторой области **G** на плоскости переменного $z=x+iy$.
(2) При любом фиксированном значении $\zeta \in L$ функция $\phi(z,\zeta)$ - аналитическая в области **G**.
(3) Функции $\phi(z,\zeta)$ и $\phi'_z(z,\zeta)$ непрерывны по совокупности переменных z и ζ.

Теорема об интеграле с параметром Пусть выполнены предположения (1)-(3). Тогда:
1) интеграл $F(z) \in\in \mathcal{A}(\mathbf{G})$;
2) производную $F'(z)$ можно вычислить по правилу Лейбница:

$$F'(z)=\int_L \phi'_z(z,\zeta)d\zeta \tag{31}$$

Теорема о бесконечной дифференцируемости аналитической функции Пусть $f \in \mathcal{A}(\mathbf{G})$. Тогда в каждой точке $z \in \mathbf{G}$ функция f имеет производные всех порядков. Если контур L принадлежит **G** вместе со своей

[5] $\oint_L f(z)dz=0$, где $L \subset \mathbf{G}$. см. стр.123

внутренностью и z - внутренняя точка этого контура, то производная $f^{(n)}(z)$ может быть вычислена по формуле

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta \tag{32}$$

Следствие Производная аналитической функции сама является аналитической функцией.

2.4 Теоремы Морера и Лиувилля. Основная теорема высшей алгебры. Вопрос 15 Лек.8

Теорема Морера Пусть $f \in \mathcal{C}(\mathbf{G})$ и f обладает -свойством в области $\mathbf{G}$. Тогда, в действительности, $f \in \mathcal{A}(\mathbf{G})$.
Теорема Лиувилля Целая функция f, ограниченная во всей комплексной плоскости, есть константа.
Основная теорема высшей алгебры Всякий многочлен $P(z)$ положительной степени n имеет хотя бы один корень.

3 Ряды аналитических функций

3.1 Равномерно и нормально сходящиеся ряды аналитических функций. Теоремы Вейерштрасса. Вопрос 19 Лек.9

Говорят, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится **нормально** в области $\mathbf{G}$ (к функции f), если этот ряд сходится равномерно (к f) на каждом компакте $\mathbf{K} \subset \mathbf{G}$.
Первая Теорема Вейерштрасса Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$, где $u_n(z) \in \mathcal{A}(\mathbf{G}), n = 1, 2, \ldots$, сходится нормально в области $\mathbf{G}$ к функции f. Тогда:
1) Сумма ряда $f \in \mathcal{A}(\mathbf{G})$.
2) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ можно почленно дифференцировать любое число раз, т.е.

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(z) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad z \in \mathbf{G} \tag{33}$$

3) Все ряды (33) сходятся нормально в области $\mathbf{G}$.
Вторая Теорема Вейерштрасса Пусть функции $u_n(z), n = 1, 2, \ldots$ - аналитические в области $\mathbf{G}$, ограниченной контуром Γ (простым или составным). Если эти функции сохраняют непрерывность на граничном контуре Γ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится равномерно на Γ, то он сходится равномерно и в замкнутой области $\overline{\mathbf{G}} = \mathbf{G} \cup \Gamma$.

3.2 Аналитичность суммы степенного ряда. Теорема Тейлора. Вопрос 16 Лек.9

Степенные ряды

$$\sum_0^\infty c_n(z-z_0)^n \tag{34}$$

Положим

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}} \tag{35}$$

Теорема Коши-Адамара
1) Если $R = 0$, то ряд (34) сходится лишь в точке z_0.
2) Если $R > 0$ (возможен случай $R = \infty$, то ряд (34) сходится абсолютно при $|z - z_0| < R$ и расходится при $|z - z_0| > R$.

Число R называется **радиусом сходимости**.
Круг $K_R : |z - z_0| < R$ **- кругом сходимости ряда (34)**.
Формула для числа R называется **формулой Коши-Адамара**.
Ряд (34) сходится нормально в круге K_R.
Сумма $f(z)$ ряда (34) аналитична в его круге сходимости K_R.
Равенство $f(z) = \sum_0^\infty c_n(z-z_0)^n$ можно почленно дифференцировать любое число раз, что дает

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^\infty c_n n(n-1)\dots(n-k+1)\,(z-z_0)^{n-k} \tag{36}$$

Все продифференцированные ряды имеют тот же радиус сходимости, что и исходный ряд (34).
Коэффициенты сходящегося степенного ряда однозначно определяются его суммой $f(z)$.
Пологая $z = z_0$, получим

$$c_0 = f(z_0), c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}, k = 1, 2, \dots \tag{37}$$

Степенной ряд, коэффициенты которого выражаются формулами (37) для некоторой аналитической функции $f(z)$, называется **рядом Тейлора** этой функции.
Теорема Тейлора Пусть $f \in \mathcal{A}(\mathbf{G})$ и $z_0 \in \mathbf{G}$ - точка, находящаяся на расстоянии r от границы Γ области $\mathbf{G}$. Тогда в круге $\mathbf{K}_r : |z - z_0| < r$ функция f может быть представлена рядом по степеням $z - z_0$, причем это представление единственно.

3.3 Теорема единственности и её следствия. Вопрос 17 Лек.10

Пусть в рассматриваемой области **G** выделено бесконечное подмножество **E**, имеющее конечную предельную точку[6] z_0. Эта точка не обязана принадлежать самому подмножеству **E**, но должна принадлежать области **G**.
Первая формулировка Может существовать не более одной функции $f \in \mathcal{A}(\mathbf{G})$, принимающей заданные значения на подмножестве **E**.
Вторая формулировка Если функция $\varphi \in \mathcal{A}(\mathbf{G})$ обращается в нуль на подмножестве **E**, то $\varphi \equiv 0$ в области **G**.
Эти две формулировки эквивалентны.

Точки, в которых аналитическая функция $f(z)$ принимает заданное значение A, будем называть A**-точками** этой функции.
Если в A-точке z_0 производные функции $f(z)$ порядков $1, 2, \ldots, k-1$ равны нулю, но $f^k(z_0) \neq 0$, то говорят, что **порядок** или **кратность** этой точки равны k.
Если $k = 1$, то A-точку называют **простой**, а в противном случае - **кратной**. При $A = 0$ будем вместо 0-точек говорить о **нулях функции** $f(z)$.
Следствие 1. Пусть функция $f(z)$ - аналитическая в области **G** и при этом отличная от константы. Тогда, каково бы ни было число A, всякий компакт $F \subset G$ может содержать лишь конечное множество A-точек этой функции.
Замечание В неограниченной области или на незамкнутом множестве аналитическая функция, отличная от константы, может иметь бесконечное множество A-точек.
Следствие 2. Пусть на $(a, b) \subset \mathbb{R}$ определена функция $\varphi(x)$ вещественной переменной x и пусть для области $\mathbf{G} \subset \mathbb{C}$ справедливо включение $(a, b) \subset G$. В таком случае существует не более одной функции, аналитической в **G** и совпадающей с $\varphi(x)$ для $x \in (a, b)$.
Если такая функция $f(z)$ действительно существует, то о ней говорят как об **аналитическом продолжении** функции $\varphi(x)$ с интервала (a, b) в область **G**.

Теорема единственности часто используется для доказательства сохранения свойства вещественной функции при продолжении на комплексную плоскость, или доказательства несуществования аналитической функции с заданным свойством.

[6]Если предельной точки не существует, то может иметь различные аналитические функции, значения которых совпадают на бесконечном множестве точек. Пример см. стр.178

4 Ряды Лорана и изолированные точки

4.1 Ряды Лорана. Теорема Лорана. Вопрос 4 Лек.11

Пусть $f \in \mathcal{A}(\mathrm{K})$, где **K - проколотая окрестность** точки z_0, т.е. множество вида $0 < |z - z_0| < R$.
Рядом Лорана называется ряд вида

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{38}$$

Представим его как сумму двух рядов

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} \tag{39}$$

Будем называть эти ряды **ряд** I и **ряд** II. Говорят, что ряд (38) сходится в точке z, если в этой точке сходятся оба ряда I и II.
Для сходящегося ряда Лорана (38) типичной областью сходимости является круговое кольцо с центром в точке z_0. Радиусы его граничных окружностей могут быть вычислены по коэффициентам ряда с помощью формулы Коши-Адамара.
Замечание о единственности Пусть ряд (38) сходится в кольце $D : R_2 < |z - z_0| < R_1$ к функции $f(z)$. Коэффициенты этого ряда однозначно определяются его суммой $f(z)$.
Теорема Лорана Функция f, аналитическая в кольце $D : R_2 < |z - z_0| < R_1$, может быть представлена рядом Лорана по степеням $z - z_0$, причем это представление единственно.

4.2 Классификация изолированных особых точек. Устранимая особая точка. Полюс. Вопрос 18 Лек.11

Пусть $D : 0 < |z - z_0| < R$ - проколотая окрестность точки z_0 и $f \in \mathcal{A}(\mathbf{D})$. В этом случае говорят, что z_0 является для f **изолированной особой точкой**.
Для этого имеются три возможности[7]:
1) Ряд (38) не содержит членов с отрицательными степенями $z - z_0$, т.е. является степенным рядом. В этом случае z_0 называют **устранимой особой точкой** функции f.
2) Ряд (38) содержит конечное число членов с отрицательными степенями $z - z_0$. В этом случае z_0 называют **полюсом** функции f.

[7]Здесь не надо рассмотреть члены с неотрицательными членами. Суть этой классфикации заключается в том что мы основываем на поведение функции при предельном переходе от z до z_0, и каждому случаю соответствует одна классификация про члены с отрицательными членами.

3) Ряд (38) содержит бесконечное число членов с отрицательными степенями $z - z_0$. В этом случае z_0 называют **существенно особой точкой** функции f.
Часть членов с отрицательными степенями называется **главной частью** этого ряда. Члены с неотрицательными степенями образуют **правильную часть** этого ряда.

Теорема для устранимой особой точки Следующие три высказывания эквивалентны:
(A) z_0 - устранимая особая точка функции f.
(B) существует **конечный** предел $\lim_{z \to z_0} f(z)$.
(c) функция f ограничена в некоторой окрестности точки z_0.

В окрестности полюса z_0 согласно определению полюса, лорановское разложение возле точки z_0 имеет вид

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1 (z - z_0) + \cdots \tag{40}$$

где $c_{-m} \neq 0$.
Число m называется **порядком** или **кратностью** полюса z_0.
Теорема для полюса Изолированная особая точка z_0 функции f тогда и только тогда является полюсом этой функции, когда $f \to \infty$ при $z \to z_0$.
Теорема Точка z_0 тогда и только тогда является полюсом порядка m функции f когда z_0 есть нуль порядка m для функции $g(z) = \frac{1}{f(z)}$, доопределенной соотношением $g(z_0) = 0$.

4.3 Существенно особая точка. Теорема Сохоцкого. Теорема Пикара (без доказательства). Вопрос 13 Лек.11-12

Теорема Сохоцкого-Казорати-Вейерштрасса Пусть z_0 - существенно особая точка функции f. Тогда для любого числа A, конечного или бесконечного, найдется последовательность точек z_n такая[8], что $z_n \to z_0$ и $f(z_n) \to A$.
Для заданного числа A последовательность z_n, описываемую этой формулировкой, будем называть **-последовательностью Сохоцкого**.
Большая теорема Пикара Пусть z_0 - существенно особая точка функции $f(z)$. Тогда для любого конечного числа A, за возможным исключением одного значения $A = A_0$ существует последовательность A-точек функции $f(z)$, сходящаяся к z_0.

Особенность в бесконечной удаленной точке
Пусть функция $f(z)$ - аналитическая в окрестности D бесконечно удаленной

[8]Это и показывает что в точке z_0 не существует предела.

точки: $D:|z|>R$. Сопоставим f вспомогательную функцию $g(\zeta)=f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$, определённую в окрестности $0<|\zeta|<\frac{1}{R}$ точки $\zeta_0=0$.
Точка $z_0=\infty$ является для f **устранимой особенностью**, **полюсом** или **существенно особой точкой**, если $\zeta_0=0$ есть соответственно устранимая особенность, полюс или существенно особая точка для функции $g(\zeta)$.
1) $z_0=\infty$ тогда и только тогда является устранимой особой точкой функции f, когда существует конечный предел $\lim_{z\to\infty} f(z)$, или, что равносильно, когда f ограничена в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки.
2) $z_0=\infty$ тогда и только тогда является полюсом функции f, когда $\lim_{z\to\infty} f(z)=\infty$.
3) $z_0=\infty$ тогда и только тогда является существенно особой точкой функции f, когда не существует ни конечного, ни бесконечного предела $\lim_{z\to\infty} f(z)$.

5 Теория вычетов и их приложения

5.1 Теоремы о вычетах и полной сумме вычетов. Вычет относительно полюса. Вопрос 12 Лек.13

Пусть z_0 - изолированная особая точка функции f. В некоторой проколотой окрестности D этой точки f представима рядом Лорана

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\left(z-z_0\right)^n \tag{41}$$

Вычетом f относительно точки z_0 (или в точке z_0) называется коэффициент c_{-1} этого ряда. Для этого числа будем использовать символ

$$\operatorname{res}\left[f(z), z_0\right] \tag{42}$$

Пусть $\gamma:\left|z-z_0\right|=\rho$ - окружность, проведённая в $\mathbf{D}$. Тогда вычет c_{-1} может быть записан как интеграл

$$\operatorname{res}\left[f(z), z_0\right]=\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma^{+}} f(z) dz \tag{43}$$

Это выражение получена в доказательстве Теоремы Лорана.
Теорема о вычетах Пусть контур Γ проходит в области $\mathbf{G}$ и содержит внутри изолированные особые точки $z_1, z_2, \ldots, z_n$ функции f. Тогда

$$\oint_{\Gamma+} f(z) dz=2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}\left[f(z), z_k\right] \tag{44}$$

Формулы для вычисления вычета относительно полюса
1) Для простого полюса: $c_{-1}=\operatorname{res}\left[f(z), z_0\right]=\lim_{z\to z_0}\left[f(z)\left(z-z_0\right)\right]$. Если f

представлена в виде $f(z) = \frac{\phi(z)}{\psi(z)}$, где $\phi(z_0) \neq 0$, то $c_{-1} = \text{res}[f(z), z_0] = \frac{\phi(z_0)}{\psi'(z_0)}$.
2) Для полюса произвольного порядка m:

$$c_{-1} = \text{res}\left[f(z), z_0\right] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}\left[f(z)\left(z-z_0\right)^m\right]}{dz^{m-1}} \tag{45}$$

Пусть $f \in \mathcal{A}(\mathbf{D})$, $D : |z| > R$. В этом случае ∞ рассматривают как изолированную особую точку функции f. В кольце $\mathbf{D}$ функция f представляется рядом Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \tag{46}$$

Вычетом f относительно точки ∞ называется взятый со знаком минус коэффициент c_{-1} этого ряда.
Интегральное представление этого вычета таково:

$$\text{res}[f(z), \infty] = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma^-} f(z) dz \tag{47}$$

Здесь γ - произвольная окружность вида $|z| = \rho$, где $\rho > R$.

Теорема о полной сумме вычетов Пусть функция f имеет в $\mathbb{C}$ лишь конечное число особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Положим $z_0 = \infty$. Тогда

$$\sum_{k=0}^{n} \text{res}\left[f(z), z_k\right] = 0 \tag{48}$$

5.2 Вычисление интегралов с помощью вычетов. Лемма Жордана. Вопрос 10 Лек.13

Вычисление интегралов с помощью вычетов
1) Интегралы вида $\int_0^{2\pi} R(\cos\phi, \sin\phi) d\phi$.
Замена $z = e^{i\phi}$. Так как

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \\ \sin\varphi &= \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \quad dz = ie^{i\varphi} d\varphi \\ d\varphi &= \frac{dz}{iz} \end{aligned} \tag{49}$$

то результатом этой замены является интеграл

$$\frac{1}{i} \oint_{|z|=1} R\left[\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right] \frac{dz}{z} \tag{50}$$

Затем можно использовать теоремы связанные с вычетом.

2) Интегралы вида $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$
Предположим, что подынтегральная функция f аналитически продолжена в верхнюю или нижнюю полуплоскость комплексной плоскости. Для определенности, пусть это будет верхняя полуплоскость $\pi_+ : \operatorname{Im} z > 0$. Ее замыкание действительной осью будем обозначать через $\bar{\pi}_+$.
Теорема для интеграла 2-ого вида Пусть функция f, распространенная с действительной оси в верхнюю полуплоскость, удовлетворяет следующим условиям:
(1) f имеет в π_+ конечное число особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$ и непрерывна в точках действительной оси;
(2) для всех достаточно больших z, находящихся в $\bar{\pi}_+$, выполняется оценка

$$|f(z)| \leqslant \frac{M(z)}{|z|} \tag{51}$$

Здесь $M(z)$ - неотрицательная функция комплексного переменного z, стремящаяся к нулю при $z \to \infty$ и остающемся в замкнутой верхней полуплоскости.
Тогда интеграл $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ существует хотя бы в смысле главного значения и

$$(v \cdot p \cdot) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}\left[f(z), z_k\right] \tag{52}$$

3) Интегралы вида $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x)dx$
Лемма Жордана Пусть функция f, непрерывная в замкнутой области $|z| \geqslant R_0, \operatorname{lm} z \geqslant 0$ стремится к нулю при $z \to \infty$ и остающемся в полуплоскости $\bar{\pi}_+$. Тогда для всех $a > 0$ интеграл

$$J = \int_{\gamma_R} e^{iaz} f(z)dz \tag{53}$$

стремится к нулю при $R \to \infty$. Здесь γ_R - полуокружность $|z| = R, \operatorname{lm} z \geqslant 0$.
Теорема для интеграла 3-его вида Пусть функция f, распространенная с действительной оси в верхнюю полуплоскость, удовлетворяет условию 1 теоремы для интеграла 2-ого вида и стремится к нулю при $z \to \infty$ и остающемся в замкнутой верхней полуплоскости. Тогда для всех $a > 0$ интеграл $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x)dx$ существует хотя 6ы в смысле главного значения

$$(v \cdot p.) \int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}\left[e^{iaz} f(z), z_k\right] \tag{54}$$

5.3 Логарифмический вычет. Принцип аргумента. Теорема Руше. Вопрос 9 Лек.14

Два дополнительных ограничения:
1) Особые точки функции f в области **G** могут быть только полюсами.

2) Все контуры, рассматриваемые в дальнейшем, не проходят не только через полюсы, но и черезнули функции f.
Внутри контура Γ, проведённого в области $\mathbf{G}$, число нулей функции f конечно.
Фиксируем контур $\Gamma \subset \mathbf{G}$. Положим:
$z_1, \ldots, z_p$ - полюсы функции f внутри Γ.
$\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ - их кратности;
$\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ - нули функции f внутри Γ.
$\beta_1, \ldots, \beta_n$ - их кратности. Определим величины

$$N_f(\Gamma) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k, \quad P_f(\Gamma) = \sum_{m=1}^{p} \alpha_m \tag{55}$$

и назовем их соответственно **полным числом нулей** и **полным числом полюсов** функции f внутри контура Γ.

Теорема о логарифмическом вычете

$$N_f(\Gamma) - P_f(\Gamma) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz \tag{56}$$

Логарифмическим вычетом функции f относительно контура Γ называется интеграл в правой части формулы (56). Функция $\varphi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ в логарифмическом вычете называется **логарифмической производной функции** f.

Обобщение формулы Ньютона-Лейбница на случай многозначной первообразной функции Фиксируем какую-либо точку z_0 на контуре Γ и какое-либо значение $F_1(z_0)$ функции $F(z)$ в этой точке. Совершаем обход контура, следя за непрерывным изменением первообразной при этом обходе. Пусть F_2 - (z_0) значение $F(z)$, с которым мы вернемся в точку z_0 по завершении обхода. Тогда

$$\oint_\Gamma \varphi(z) dz = F_2(z_0) - F_1(z_0) \tag{57}$$

В случае логарифмического вычета

$$F(z) = \ln f(z) = \ln |f(z)| + i \operatorname{Arg} f(z) \tag{58}$$

поэтому числа $F_1(z_0)$ и $F_2(z_0)$ могут различаться только значениями, которые мы приписываем аргументу f в начале обхода и по его окончании. Обозначим эти аргументы через ϕ_1 и ϕ_2, а разность $\phi_2 - \phi_1$ назовем **приращением аргумента** функции f при обходе точкой z контура Γ и будем обозначать символом $\operatorname{Var}_\Gamma \operatorname{Arg} f(z)$.
Принцип аргумента

$$N_f(\Gamma) - P_f(\Gamma) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Var}_\Gamma \operatorname{Arg} f(z) \tag{59}$$

Когда точка z обходит контур Γ, соответствующая ей точка $w = f(z)$ описывает некоторую замкнутую кривую Δ на плоскости w. Будем интерпретировать w как вектор с началом в точке $w_0 = 0$, и пусть ν есть количество полных оборотов вокруг w_0, которые этот вектор совершит, пока z обходит Γ. Каждый оборот засчитываем за $+1$ или -1 В зависимости от того, совершается ли он в положительном или отрицательном направлении. Тогда приращение аргумента функции f получаемое при обходе Γ, выразится числом $2\pi\nu$. К новой формулировке теоремы о логарифмическом вычете приходим

$$N_f(\Gamma) - P_f(\Gamma) = \nu \tag{60}$$

Теорема Руше Пусть $f, \varphi \in \mathcal{A}(\mathbf{G})$, и пусть контур Γ принадлежит области $\mathbf{G}$ вместе со своей внутренностью. Если в точках этого контура выполняется неравенство

$$|f(z)| > |\varphi(z)| \tag{61}$$

то функция $F(z) = f(z) + \varphi(z)$ имеет внутри Γ столько же нулей, сколько их имеет функция f.
Основная теорема алгебры Всякий многочлен $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$ степени $n \geqslant 1$ имеет в $\mathbb{C}$ ровно n корней (с учетом их кратностей).

6 Теорема об образе области

6.1 Теорема об образе области. Принципы максимума и минимума модуля аналитической функции. Вопрос 2 Лек.15

Теорема об образе области Пусть $f \in \mathcal{A}(\mathbf{G})$ и $f \neq const$. Тогда множество $\mathbf{D} = f(\mathbf{G})$ также является областью.
Принцип максимума Пусть $f \in \mathcal{A}(\mathbf{G})$ и $f \neq const$. Тогда ни в одной точке из $\mathbf{G}$ модуль этой функции не может достигать максимума. Если $\mathbf{G}$ - ограниченная область и f сохраняет непр ррывность на ее границе, то максимум модуля достигается на ∂G.
Принцип минимума Пусть $f \in \mathcal{A}(\mathbf{G})$ и $f \neq const$. Пусть кроме того, $f(z) \neq 0, \forall z \in \mathbf{G}$. Тогда ни в одной точке из $\mathbf{G}$ модуль этой функции не может достигать минимума.