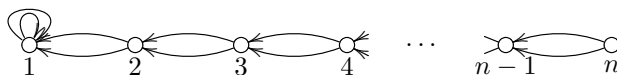


## ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ 2

**Задача 1. (3 балла).** Найдите вероятность того, что случайный граф  $G_2^n$  Боллобаша–Риордана совпадет с графом на рисунке:

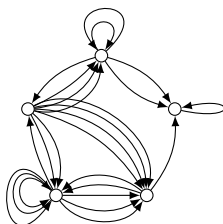


**Задача 2. (3 балла).** Рассмотрим отрезок  $[0, 1]$  и случайные величины  $\xi_1, \dots, \xi_{2n}$  – независимые и равномерно распределённые на этом отрезке. Соединим дугами пары точек  $\xi_{2i-1}, \xi_{2i}$ . Получится случайная диаграмма, похожая на случайную хордовую диаграмму. Верно ли, что на самом деле построенная модель эквивалентна модели случайной хордовой диаграммы?

**Задача 3. (1 балл).** С помощью теорем из лекций докажите, что для любого унициклического графа среднее число его копий в случайном графе Боллобаша–Риордана  $G_m^n$  стремится к бесконечности при  $n \rightarrow \infty$ .

**Задача 4. (2 балла).** Будет ли модель Бакли–Остгуса ассортативной при каких-нибудь значениях параметра  $a$ ? дисассортативной? Ответ необходимо обосновать.

**Задача 5. (1 балл).** Найдите все ненулевые значения величины  $X_n(d_1, d_2)$  для графа на рисунке:



**Задача 6. (2 балла).** Рассмотрим следующую модель случайного графа. В каждый момент времени добавляем одну вершину и  $m$  ребер. Начинаем с вершины 0 без ребер, но с весом, равным  $m$ . Вершина 1 ставит  $m$  ссылок на 0. Вес вершины 0 становится  $2m$ , вес вершины 1 становится  $m$ . Дальнейшие вершины ставят  $m$  ссылок независимо, каждую с вероятностью, пропорциональной весам существующих вершин:

$$P(n+1 \rightarrow i) = \frac{\text{indeg } i + m}{2mn + m}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Докажите, что модель определена корректно, и укажите, при каких значениях  $A, B$  эта модель укладывается в  $PA$ -класс.

**Задача 7. (4 балла).** Напишите код для генерации графа  $H_{a,n}^m$  в модели Бакли–Остгуса на любом языке программирования. Сгенерируйте граф в этой модели на  $n = 5000$  вершинах при  $m = 2$  и  $a = 0.27$ . Постройте на одном графике в обычных и логарифмических координатах распределение степеней вершин в полученном графе и теоретическую оценку этого распределения из соответствующей теоремы из лекций.

Оптимизируйте реализацию случайной генерации графа  $H_{a,n}^m$  таким образом, чтобы при  $n = 10000$ ,  $a = 0.27$  и  $m = 5$  граф генерировался за разумное время (не более минуты).

**Задача 8. (3 балла).** В файле `graph.txt` находится граф, построенный в соответствии с моделью Боллобаша–Боргса–Риордана–Чайес со следующими значениями параметров модели:  $\alpha = \beta = 0.5$ ,  $\gamma = \delta_{out} = 0$ . Значение  $\delta_{in}$  неизвестно. Порядок ребер и номера вершин в файле соответствуют порядку, в котором они реально появлялись. Первое число в строчке – это начало ребра, второе – конец. Начальный граф – треугольник  $[(0, 1), (1, 2), (2, 0)]$ . Постройте зависимость логарифма вероятности данного графа при данных значениях параметров (правдоподобия графа) от  $\delta_{in}$  и найдите оптимальное значение, при котором появление такого графа наиболее правдоподобно.

**Задача 9. (6 баллов).** Рассмотрим следующую модель генерации неориентированных графов. Граф  $G^{(0)}$  состоит из двух вершин, соединенных ребром. Для всех  $t$ ,  $t \geq 1$ , граф  $G^{(t)}$  получается из графа  $G^{(t-1)}$  добавлением новой вершины, соединенной с обоими концами случайного ребра, выбранного равновероятно из множества всех ребер. Таким образом, граф  $G^{(1)}$  – это треугольник, граф  $G^{(2)}$  состоит из 4 вершин и 5 ребер и т. д.

- Установите эмпирически, чему равна доля вершин степени 2 в графе  $G^{(t)}$  в пределе при  $t \rightarrow \infty$ .
- Найдите теоретическое значение этого предела и докажите, что он именно такой.
- Докажите математически, что распределение степеней вершин в таком графе подчиняется степенному закону.