Санкт-Петербургский Национальный Исследовательский

Университет Информационных Технологий, Механики и Оптики

Факультет инфокоммуникационных технологий

Лабораторная работа № 2. А

Вариант - 5

Выполнили:

Азатжонова М. А.

Маркозубова А. К.

Санкт-Петербург,

2024

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Задание №1

Задание:

Для функции на заданном отрезке в соответствии с вариантом:

1. Вычислить первую правую разностную производную. Шаг подобрать таким образом, чтобы оценка ошибки не превзошла 0.01(b-a) (при получении оценки ошибки сверху нужно воспользоваться второй разностной производной, вычислить ее можно с постоянным шагом $\frac{(b-a)}{10}$

2. Вычислить первую центральную разностную производную. Шаг подобрать таким образом, чтобы оценка ошибки не превзошла 0.01(b-a) (для оценки ошибки воспользоваться уже третьей разностной производной, вычислить ее можно с постоянным шагом $\frac{(b-a)}{10}$

3. Сравнить результаты, сделать выводы

Решение:

1. Для функции $f(x) = sin(|x| + 2.3^x)$ на отрезке [-1; 2] необходимо найти первую правую разностную производную. Подбор шага, удовлетворяющего условию, начнем с вычисления интерполяционного полинома Лагранжа 2 степени. Узлы интерполяции возьмем с шагом $\frac{(b-a)}{10}$:

Таблица 1 – Значения функции в узлах интерполяции

x	-0.3	0	0.3
f(x)	0.8414709848	0.8814387659	0.9999146451

Вычисляем интерполяционный полином Лагранжа:

$Q = 0.872278116x^2 - 0.271220311x + 3.365883940$

Далее для полученного полинома 2 степени находим вторую производную, которая равняется $second\_diff\_Q = 1.74455624$.

Оценка ошибки сверху правой разностной производной имеет вид: $R \approx \frac{h\_1}{2} * second\_diff\_Q$, где в нашем случае R должен не превышать 0.01(b-a). Выражая из данного неравнства h_1, получаем $h\_1 <= \frac{2*0.01(b-a)}{|second\_diff\_Q|}$. Так как условие нестрогое, возьмем h_1 равное правой части неравнства, то есть $h\_1 = 0.03439270034$.

Вычисляем первую правую разностную производную по формуле $right\_diff = \frac{f(x+h\_1)-f(x)}{h\_1}$, где за шаг берем подобранный h:

$right\_diff = 29.07593734 * sin(|x + 0.3439270034| + 2.3^{x+0.3439270034}) - 29.07593734 * sin(|x| + 2.3^{x})$

Построим график полученной функции(рисунок 1).

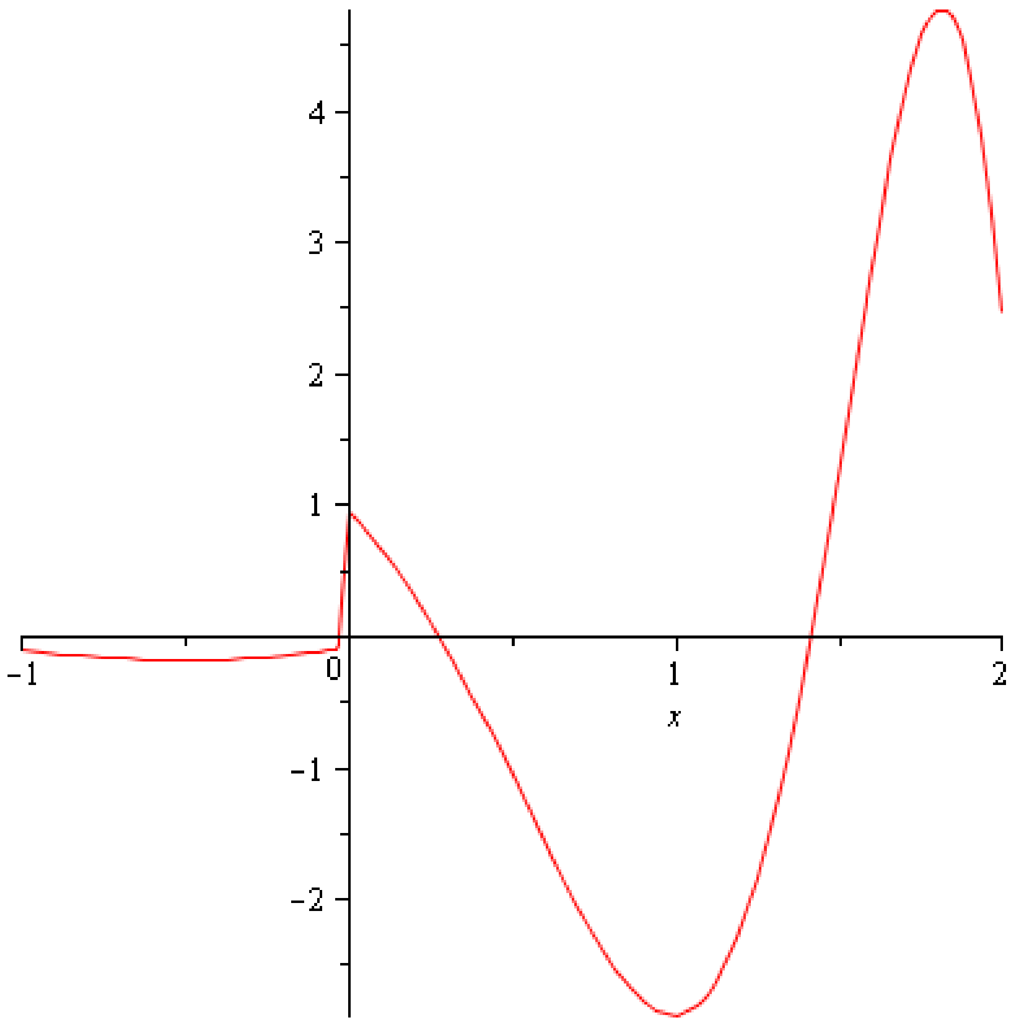


Рисунок 1 — Первая правая разностная производная

2. Аналогично с пунктом 1 начнем подбор удовлетворяющего условию шага для вычисления первой центральной разностной производной с вычисления интерполяционного полинома Лагранжа 3 степени. Шаг для узлов интерполяции $\frac{(b-a)}{10}$:

Таблица 1 – Значения функции в узлах интерполяции

x	-0.3	0	0.3	0.6
f(x)	0.8414709848	0.8814387659	0.9999146451	0.7791389135

Полученный интерполяционный полином Лагранжа 3 степени имеет следующий вид:

$Q = -7.13124484x^3 + 2.20457156x^2 + 1.036731633x + 1.682941969$

А его третья производная равняется $third\_diff\_Q = -42.78746908$.

Формула для оценки ошибки сверху правой разностной производной имеет вид: $R \approx \frac{h\_2^2}{6} * third\_diff\_Q$, где по условию R должен не превышать 0.01(b-a). Выразим из данного неравнства h_2: $h\_2 <= sqrt\frac{6*0.01(b-a)}{|third\_diff\_Q|}$. Знак неравенства нестрогое, поэтому за h_2 можем взять значение равное правой части неравнства, то есть $h\_2 = 0.06486015070$.

Первая центральная разностная производная вычисляется как $central\_diff = \frac{f(x+h\_2)-f(x-h\_2)}{2h\_2}$:

$central\_diff = 7.708893590sin(|x + 0.6486015070| + 2.3^{x+0.6486015070}) - 7.708893590sin(|x - 0.6486015070| + 2.3^{x-0.6486015070})$

График вычисленной производной представлен на рисунке 2.

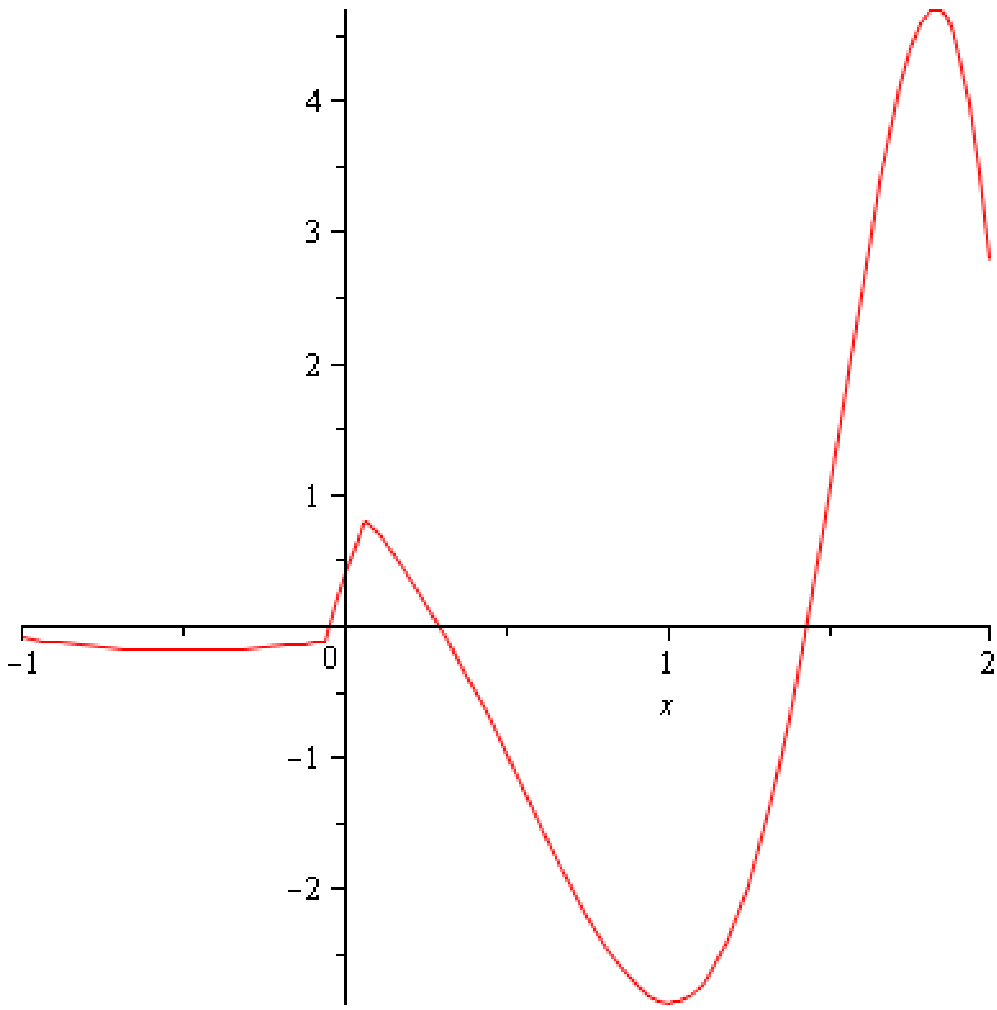


Рисунок 2 — Первая центральная разностная производная

3. Анализ результатов и выводы:

Центральная разностная производная вычисляется симметрично относительно точки x, используя значения функции f(x+h) и f(xh). Это симметричное расположение точек обеспечивает точность центральной разностной производной, которая предоставляет более точную аппроксимацию первой производной функции на отрезке, так как её ошибка уменьшается быстрее — с квадратом шага $O(h^2)$. Это позволяет использовать больший шаг для достижения заданной точности, что упрощает расчёты и снижает вычислительные затраты.

Правая же разностная производная, напротив, использует только одно смещенное значение функции f(x+h), что снижает её точность по сравнению с центральной. Её ошибка уменьшается линейно $O(h)$ с уменьшением шага. Для достижения той же точности, что и центральная разностная производная, требуется значительно меньший шаг, что может увеличить объём вычислений и в некоторых случаях сделать метод менее эффективным.

Для обеих разностных производных погрешность была оценена на основе второй и третьей производных интерполяционного полинома Лагранжа. В правой разностной производной оценка погрешности основана на второй производной полинома Лагранжа второй степени. Погрешность прямо пропорциональна значению шага h и второй производной функции. Для центральной разностной производной, напротив, использовалась оценка на основе третьей производной (через полином Лагранжа степени 3), что обеспечивает меньшую погрешность и позволяет нам увеличить шаг для достижения аналогичной точности.

Результаты показывают, что центральная разностная производная предпочтительнее в задачах, где важно снизить погрешность, а вычислительные затраты не являются критичным фактором. Если же требуется более быстрая оценка производной с меньшими требованиями к точности, правая разностная производная может оказаться полезной.

Приложение

Ниже представлен полный код программы, написанный в программе Maple 13.0, который был написан для выполнения данной лабораторной работы.

> $with(plots)$:

> $with(LinearAlgebra)$:

>

> $f(x) := \sin\left(\mathrm{abs}(x) + 2.3^x\right)$:

>

> $a := -1$:

> $b := 2$:

> $x0 = 0$:

> $h\_const := \dfrac{(b-a)}{10}$:

> $m := 2$:

> $x[1] := 0$:

> $y[1] := evalf(f(x[1]))$

$$y_1 := 0.8414709848 \tag{1}$$

> $x[0] := x[1] - h\_const$:

> $y[0] := evalf(f(x[0]))$

$$y_0 := 0.8814387659 \tag{2}$$

> $x[2] := x[1] + h\_const$:

> $y[2] := evalf(f(x[2]))$

$$y_2 := 0.9999146451 \tag{3}$$

>

> $Q := 0$:

> **for** k **from** 0 **to** m **do**
  $q := 1$:
  for i **from** 0 **to** m **do**
  if $i \neq k$ **then** $q := q \cdot \left(\dfrac{(x - x[i])}{(x[k]) - x[i]}\right)$:**end if**:
  end do:
  $Q := Q + q \cdot y[k]$:
  end do:

> $expand(Q)$

$$0.872278116\, x^2 - 0.271220311\, x + 3.365883940 \tag{4}$$

>

> $second\_diff\_Q := diff(Q, x\$2)$

$$second\_diff\_Q := 1.74455624 \tag{5}$$

> $h\_1 := \dfrac{2 \cdot 0.01 \cdot (b-a)}{\mathrm{abs}(second\_diff\_Q)}$

$$h\_1 := 0.03439270034 \tag{6}$$

>

>

>

> $right\_diff := (f(x + h\_1) - f(x)) / h\_1$

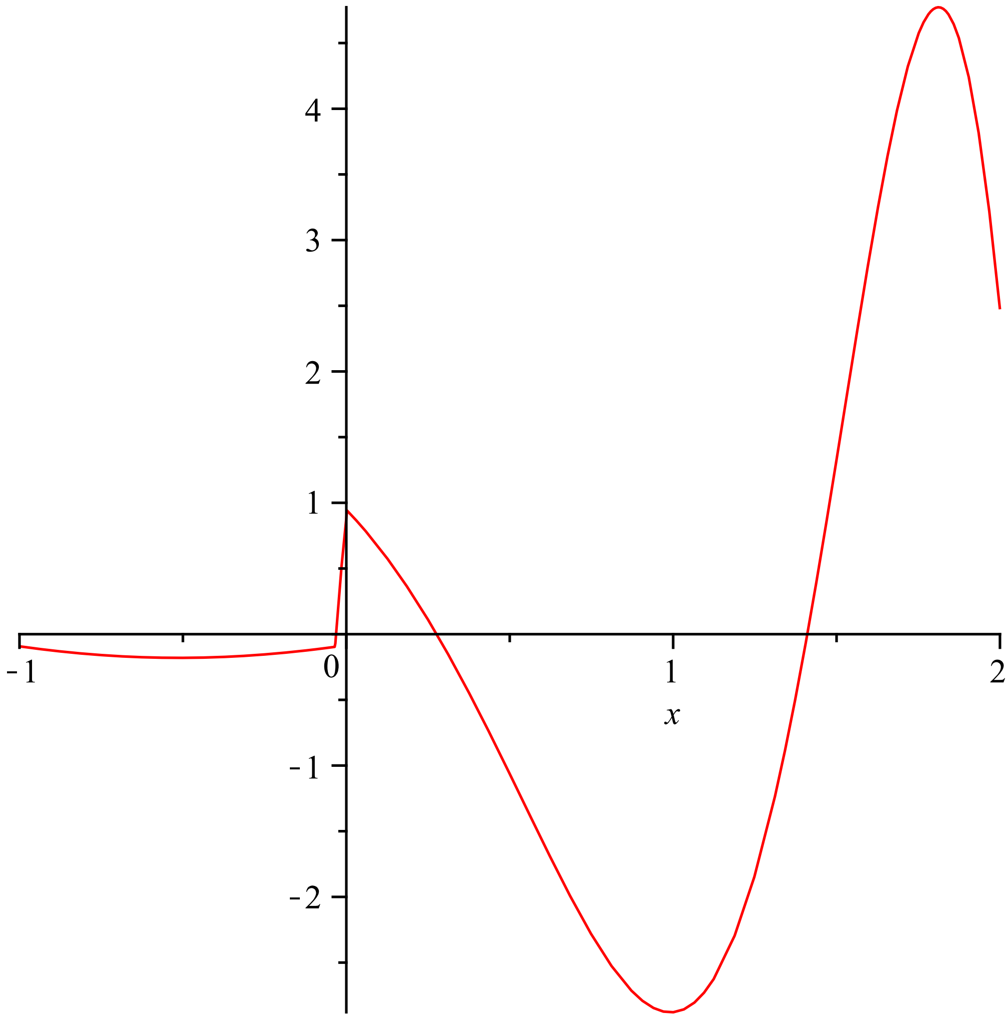
$$right\_diff := 29.07593734 \sin\left(|x + 0.03439270034| + 2.3^{x + 0.03439270034}\right) \tag{7}$$

$$-29.07593734\sin\left(|x|+2.3^{x}\right)$$

>

>

> plot(right_diff, x = a .. b, color = red)



>

>

> m := 3 :

> x[1] := 0 :

> y[1] := evalf(f(x[1]))

$$y_1 := 0.8414709848 \tag{8}$$

> x[0] := x[1] − h_const :

> y[0] := evalf(f(x[0]))

$$y_0 := 0.8814387659 \tag{9}$$

> x[2] := x[1] + h_const :

> y[2] := evalf(f(x[2]))

$$y_2 := 0.9999146451 \tag{10}$$

>

> $x[3] := x[1] + 2 \cdot h\_const$:

> $y[3] := evalf(f(x[3]))$

$$y_3 := 0.7791389135 \qquad (11)$$

>

> $Q := 0$:

> **for** k **from** 0 **to** m **by** 1 **do**
$q := 1$:
for i **from** 0 **to** m **by** 1 **do**
if $i \neq k$ **then** $q := q \cdot \left(\frac{(x - x[i])}{(x[k]) - x[i]} \right)$:**end if**:
end do:
$Q := Q + q \cdot y[k]$:
end :

> $expand(Q)$

$$-7.13124484\, x^3 + 2.20457156\, x^2 + 1.036731633\, x + 1.682941969 \qquad (12)$$

>

> $third\_diff\_Q := diff(Q, x\$3)$

$$third\_diff\_Q := -42.78746908 \qquad (13)$$

> $h\_2 := \text{sqrt}\left(\frac{6 \cdot 0.01 \cdot (b - a)}{\text{abs}(third\_diff\_Q)} \right)$

$$h\_2 := 0.06486015070 \qquad (14)$$

>

>

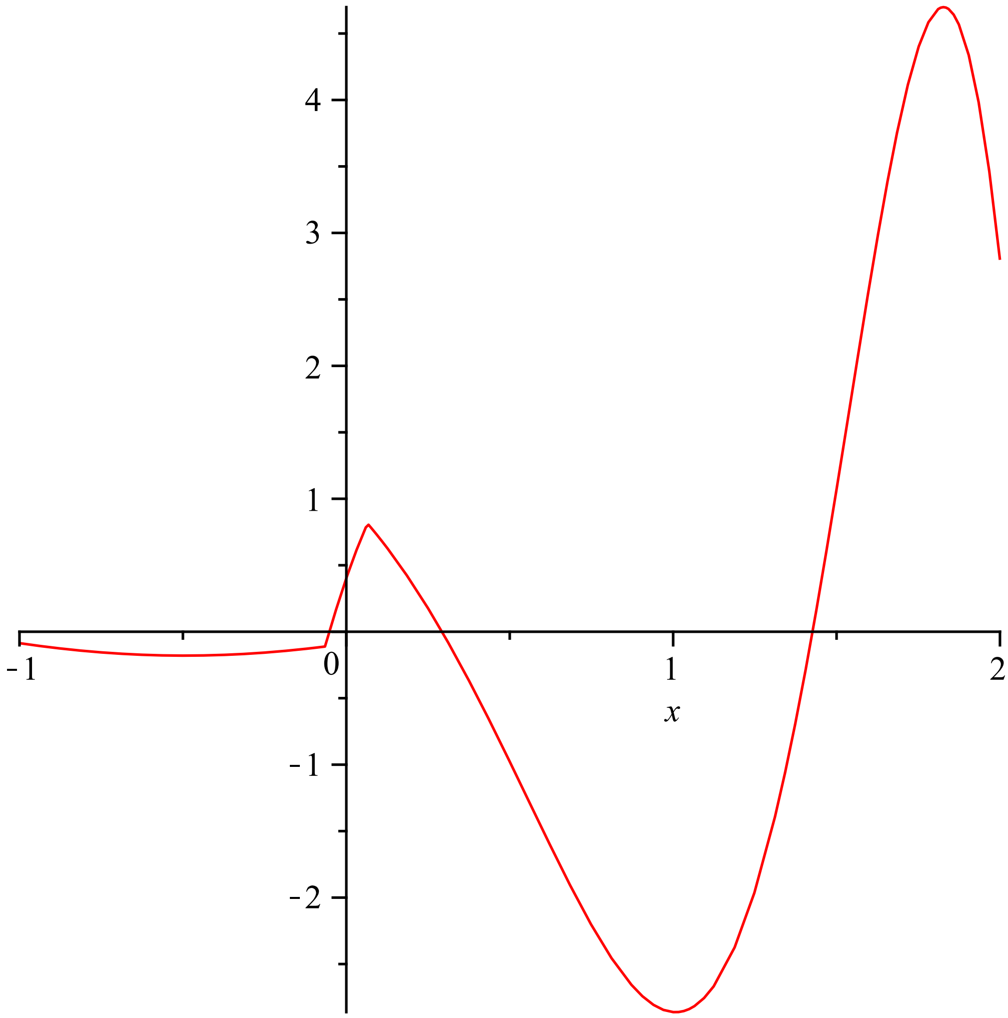
(15)

> $central\_diff := (f(x + h\_2) - f(x - h\_2)) / (2 \cdot h\_2)$

$$central\_diff := 7.708893590 \sin\left(|x + 0.06486015070| + 2.3^{x + 0.06486015070}\right) - 7.708893590 \sin\left(|x - 0.06486015070| + 2.3^{x - 0.06486015070}\right) \qquad (16)$$

>

> $plot(central\_diff, x = a .. b, color = red)$


4
3
2
1
-1
0
1
2
x
-1
-2

\>

\>