Санкт-Петербургский Национальный Исследовательский
Университет Информационных Технологий, Механики и Оптики

Факультет инфокоммуникационных технологий

Лабораторная работа № 3

Вариант - 5

Выполнили:

Азатжонова М. А.

Маркозубова А. К.

Санкт-Петербург,

2024

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Задание **3**

Задание №1 .... **4**

Задание №2 .... **7**

Вывод **9**

Приложение **10**

Задание

Для функции в соответствии с вариантом на заданном отрезке:

1. Для функции построить приближение по критерию минимизации расстояния:

$$\rho = \|f - g\|_2^2 \to \min_{\alpha}$$

где f – функция, g – приближение, α – коэффициенты приближения:

$$g = \alpha_0\varphi_0 + \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \cdots + \alpha_m\varphi_m$$

где φ – базисные функции.

В качестве базисных функций воспользуйтесь степенями аргумента x:

$$\{x^0, x^1, x^2, \ldots, x^m\},$$

старшую степень m подберите экспериментально, таким образом, чтобы обеспечить ошибку

$$\varepsilon = \int_a^b (f - g)^2 dx \leq 0.1(b - a).$$

2. Теперь постройте приближение со старшей степенью m из предыдущего пункта, но в качестве базисных функций воспользуйтесь полиномами Чебышева либо Лежандра (на выбор) (ортогональность обеспечивается весовыми функциями!):

$$\{T_0, T_1, \ldots, T_m\}.$$

Задание №1

Решение:

Для функции $\sin(|x| + 2.3^x)$ попробуем построить приближение, выбрав в качестве базисных функций набор:

$$\{x^0, x^1, x^2, \ldots, x^m\}.$$

После подбора степени, оптимальной для данной задачи, остановимся на $m = 4$. Минимизация расстояния между исходной функцией f и её приближением g выполняется по следующему критерию:

$$\rho^2 = \|f - g\|_2^2 \to \min_{\alpha},$$

где

$$\rho^2 = (f - g, f - g).$$

Для минимизации расстояния необходимо вычислить производную по коэффициентам α_i, приравнять её к нулю и упростить выражение. В результате получится следующее уравнение:

$$\alpha_0(\varphi_0, \varphi_i) + \alpha_1(\varphi_1, \varphi_i) + \cdots + \alpha_m(\varphi_m, \varphi_i) = (\varphi_i, f),$$

где α_i — это неизвестные коэффициенты, которые нужно найти.

Задавая значения индекса i от 0 до m, формируем систему линейных уравнений. Матрица коэффициентов состоит из скалярных произведений базисных функций между собой, а правая часть уравнения — вектор скалярных произведений функции f с базисными функциями. Интегрирование выполняется на отрезке $[-1; 2]$. После вычисления мы получаем матрицу S размера

$(m+1) \times (m+1)$ и вектор c размера $m+1$. Решая систему уравнений, получаем вектор коэффициентов α как произведение $S^{-1} \cdot c$.

Итоговое приближение g формируется как линейная комбинация базисных функций с найденными коэффициентами α.

В данном случае выражение для g записывается в виде:

$$g = 1.058165657302 - 0.9075712894616x - 0.966380516765x^2 + 0.603042294288x^3.$$

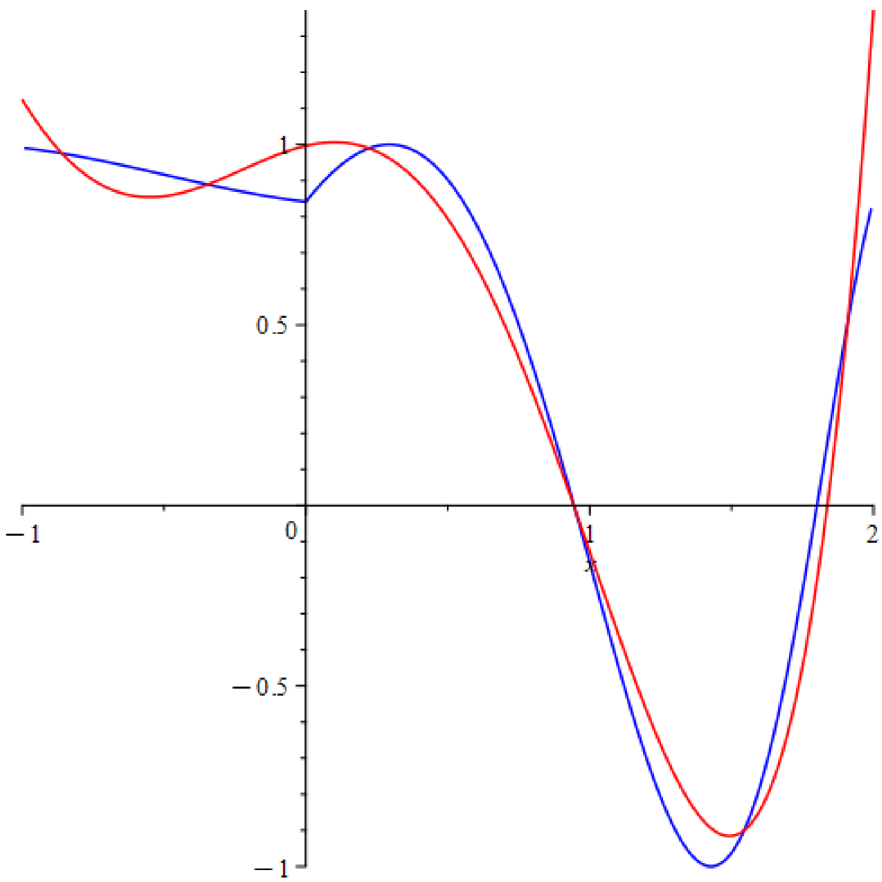


Рисунок 1 — График функции $f(x)$ и её приближения $g(x)$

Вычислим ошибку по формуле:

$$\varepsilon = \int_{-1}^{2} (f - g)^2 \, dx.$$

$$\varepsilon = 0.04724667338,$$

что меньше, чем $0.1(b-a)=0.3$, как и требовалось в задании.

Попробуем также взять $m=3$, чтобы убедиться, что ранее нами было выбрано минимальное m, удовлетворяющее условию задачи. В таком случае:

$$\varepsilon = 0.3476837069 > 0.1(b-a),$$

а значит, минимальным m, удовлетворяющим условию задачи, всё же будет $m=4$.

Задание №2

Решение: Выполним аналогичное построение приближения, но вместо степенных базисных функций будем использовать полиномы Чебышева:

$$\{T_0, T_1, \ldots, T_m\}.$$

Так как исходная функция определена на интервале $[-1; 2]$, преобразуем переменную следующим образом:

$$x = \frac{2t - (a+b)}{b-a}, \quad x \in [-1; 1], \quad t \in [a; b].$$

Полиномы Чебышева от переменной x будем использовать в качестве базиса, а для обеспечения их ортогональности применим весовую функцию:

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Применение ортогонального базиса позволяет построить матрицу S, где ненулевыми являются только элементы на диагонали. Вектор c, полученный аналогично первому пункту, используется для вычисления коэффициентов α приближения. Для каждого α_i формула принимает вид:

$$\alpha_i = \frac{\int_a^b p(\varphi_i, f)\, dt}{\int_a^b p(\varphi_i, \varphi_i)\, dt}.$$

Собрав все коэффициенты α, выразим приближенную функцию g в виде линейной комбинации базисных полиномов:

$$g = 0.888465724 - 0.000117149t + 0.17385435t^2 - 0.03062243t^3 - 0.096533276t^4.$$

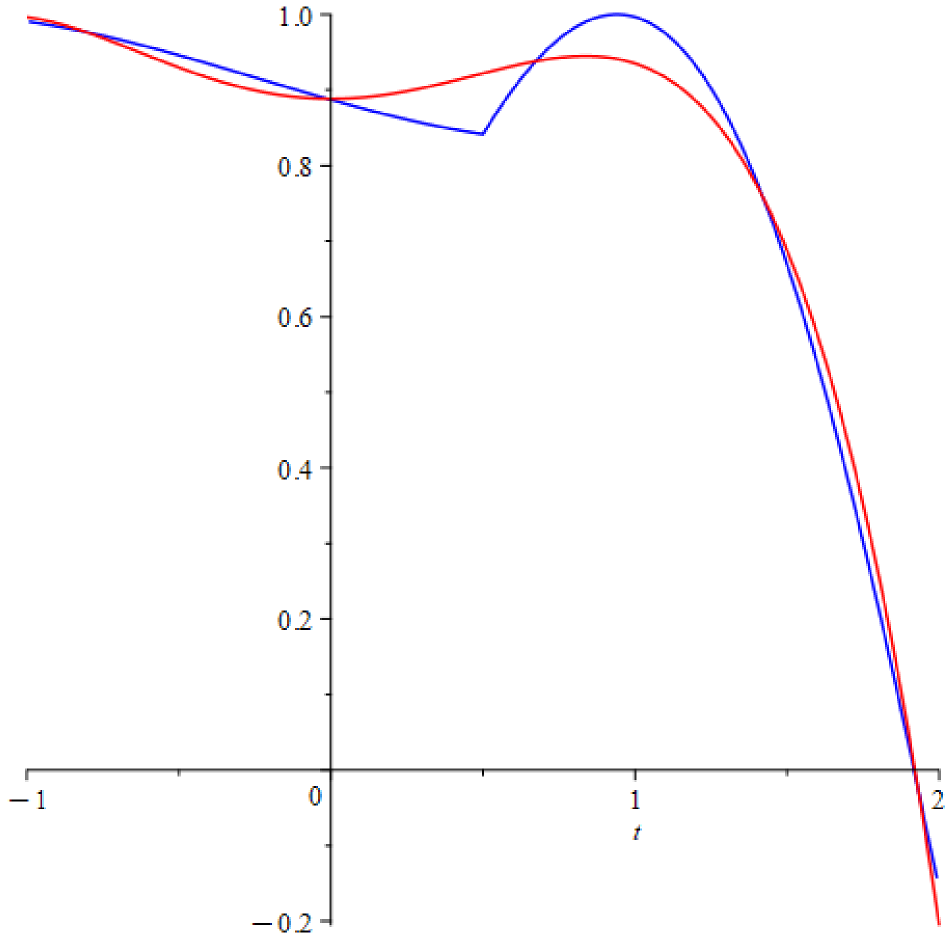


Рисунок 2 — График функции $f(x)$ и её приближения $g(x)$

Проверим, насколько точно приближение, рассчитав ошибку по формуле:

$$\varepsilon = \int_{-1}^{2} (f-g)^2 \, dt.$$

В данном случае:

$$\varepsilon = 0.003681593537,$$

что показывает более высокую точность по сравнению с предыдущим методом.

Вывод

В ходе выполнения данной работы мы исследовали процесс приближения функций по критерию минимизации расстояния. Для построения приближения были использованы два подхода: в качестве базисных функций применялись степени аргумента x и полиномы Чебышева. Проведённый анализ включал вычисление коэффициентов приближения, построение аппроксимации функции на заданном интервале и оценку ошибки.

Результаты показали, что использование полиномов Чебышева позволяет добиться значительно меньшей ошибки аппроксимации по сравнению с использованием степенных базисных функций. Это объясняется равномерным распределением узлов, свойственным полиномам Чебышева, и их ортогональностью, обеспеченной весовой функцией. Благодаря этим свойствам полиномы Чебышева лучше приближают функцию даже при ограниченном числе базисных функций.

Кроме того, использование ортогональных базисов, таких как полиномы Чебышева, упрощает вычисления, поскольку матрица системы приобретает диагональный вид, что снижает вычислительные затраты. Это особенно важно при работе с функциями на широких интервалах или с высокой степенью точности.

Таким образом, было подтверждено, что выбор подходящих базисных функций играет ключевую роль в точности аппроксимации. Полиномы Чебышева показали себя более эффективными для задач данного типа, что делает их предпочтительным выбором для построения приближений сложных функций.

Приложение

Ниже представлен полный код программы, написанный в программе Maple 13.0, который был написан для выполнения данной лабораторной работы.

> $with(plots):$

> $with(LinearAlgebra):$

>

> $f := \sin\left(|x| + 2.3^x\right)$

$$f := \sin\left(|x| + 2.3^x\right) \tag{1}$$

>

> $a := -1:$

> $b := 2:$

> $m := 3:$

> $basis := \langle seq(x^k, k = 0..m)\rangle$

$$basis := \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} \tag{2}$$

> $S := Matrix(m+1, m+1):$

> $c := Vector(m+1):$

> **for** i **from** 1 **to** $m+1$ **by** 1 **do**
 $c[i] := int(f \cdot basis[i], x = a..b, numeric):$
for j **from** i **to** $m+1$ **by** 1 **do**
 $S[i, j] := int(basis[i] \cdot basis[j],\ x = a..b, numeric):$
 $S[j, i] := S[i, j]:$
 end do:
 end do:

> S

$$\begin{bmatrix} 3. & 1.500000000 & 3. & 3.750000000 \\ 1.500000000 & 3. & 3.750000000 & 6.600000000 \\ 3. & 3.750000000 & 6.600000000 & 10.50000000 \\ 3.750000000 & 6.600000000 & 10.50000000 & 18.42857143 \end{bmatrix} \tag{3}$$

> c

$$\begin{bmatrix} 1.175407091 \\ -0.7793131780 \\ -0.2750626842 \\ -1.055636726 \end{bmatrix} \tag{4}$$

> $\alpha := S^{-1} \cdot c$

$$\alpha := \begin{bmatrix} 1.05816565730283840 \\ -0.907571289461681308 \\ -0.966380516765316112 \\ 0.603042294287988168 \end{bmatrix} \tag{5}$$

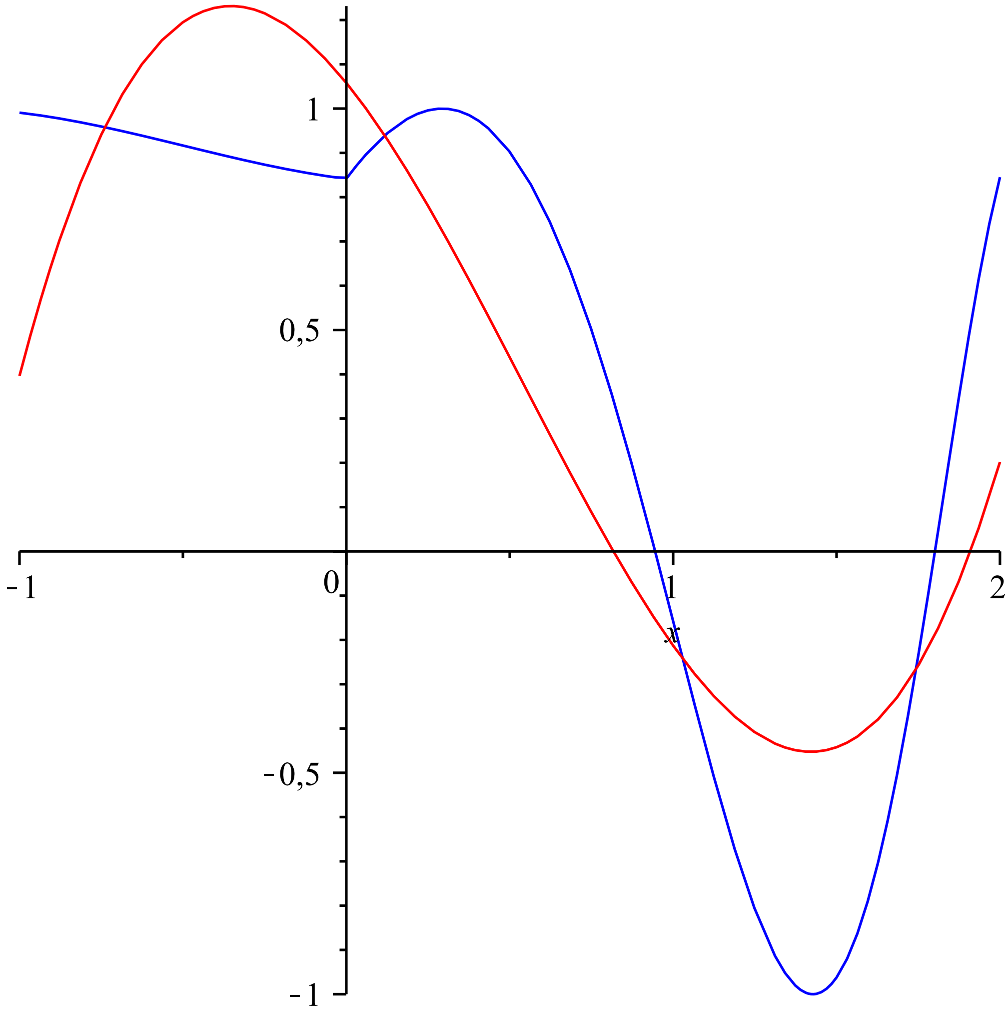
> $g := \alpha \cdot basis$

$$g := 1.058165657 - 0.907571289461681308\, x - 0.966380516765316112\, x^2 + 0.603042294287988168\, x^3 \quad \mathbf{(6)}$$

> $plot\_f := plot(f, x = a..b, color = blue)$:

> $plot\_g := plot(g, x = a..b, color = red)$:

> $display(plot\_f, plot\_g)$



>

> $err := int\left((f - g)^2, x = a..b, numeric\right)$

$$err := 0.3476837069 \quad \mathbf{(7)}$$

> $\lim := 0.1 \cdot (b - a)$

$$\lim := 0.3 \quad \mathbf{(8)}$$

>

> $with(plots):$

> $with(orthopoly):$

>

> $f := \sin\left(|x| + 2.3^x\right):$

>

> $a := -1:$

> $b := 2:$

> $m := 4:$

> $x := \dfrac{2 \cdot t - (a+b)}{b-a}:$

> $p := \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}:$

> $basis := \langle seq(T(k,x), k=0..m)\rangle$

$$basis := \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{3}t - \frac{1}{3} \\ -1 + 2\left(\frac{2}{3}t - \frac{1}{3}\right)^2 \\ 4\left(\frac{2}{3}t - \frac{1}{3}\right)^3 - 2t + 1 \\ 1 + 8\left(\frac{2}{3}t - \frac{1}{3}\right)^4 - 8\left(\frac{2}{3}t - \frac{1}{3}\right)^2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

> $\alpha := Vector(m+1):$

> **for** i **from** 1 **to** $m+1$ **by** 1 **do**
$\alpha[i] := \dfrac{int(p \cdot f \cdot basis[i], t=a..b, numeric)}{int(p \cdot basis[i] \cdot basis[i], t=a..b, numeric)}$
end do

$$\alpha_1 := 0.7197580986$$
$$\alpha_2 := -0.4124571342$$
$$\alpha_3 := -0.2633389690$$
$$\alpha_4 := -0.1887375814$$
$$\alpha_5 := -0.06108746418 \tag{2}$$

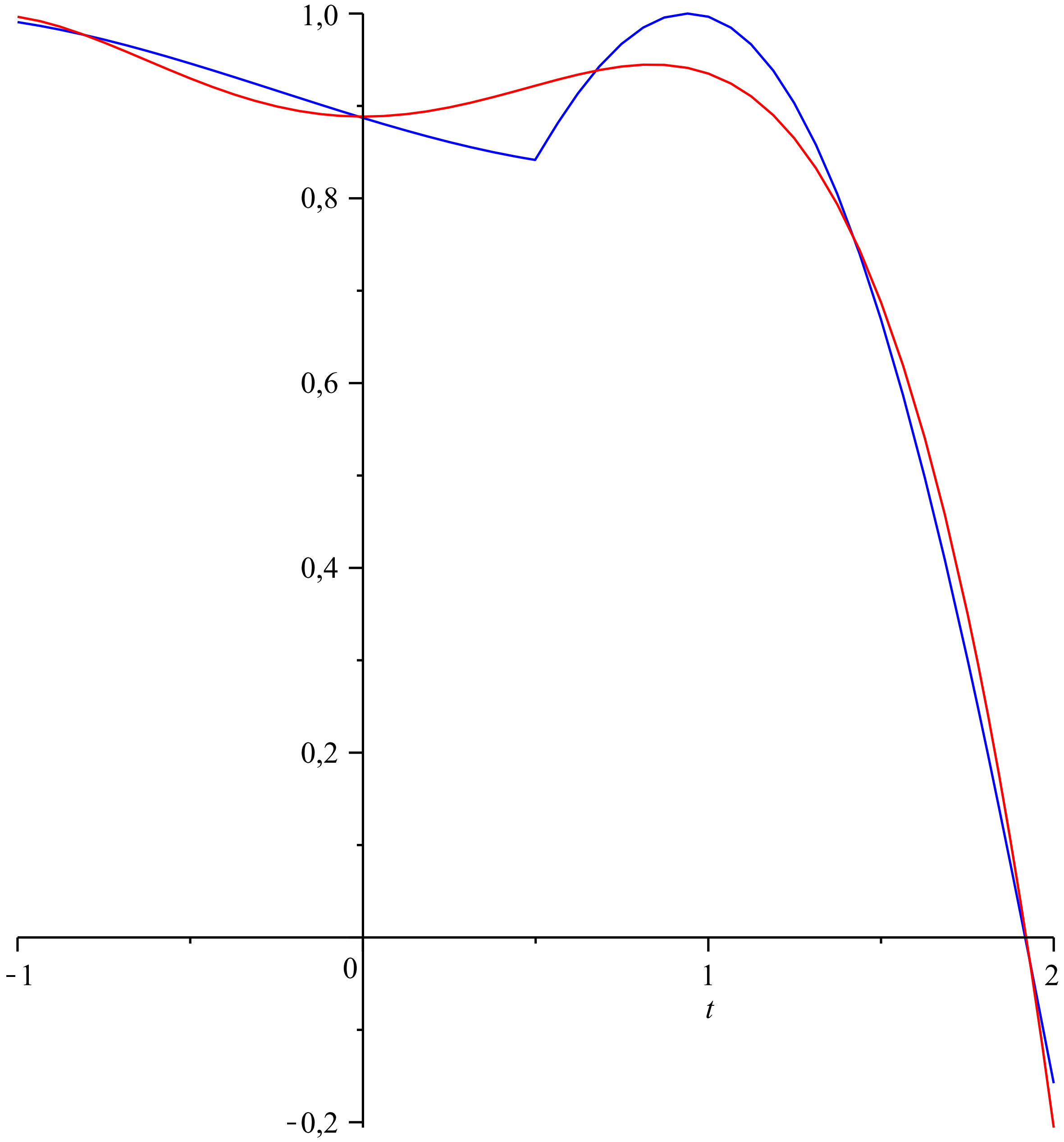
> $g := expand(\alpha \cdot basis)$

$$g := 0.8884657241 - 0.00011714967\,t + 0.1738543520\,t^2 - 0.0306224320\,t^3 - 0.09653327672\,t^4 \tag{3}$$

> $plot\_f := plot(f, t=a..b, color=blue):$

> $plot\_g := plot(g, t = a..b, color = red)$:

> $display(\ plot\_f, plot\_g)$



>

> $err := int(\ (f - g)^2, t = a..b, numeric)$

$$err := 0.003681593537 \tag{4}$$

>