Санкт-Петербургский Национальный Исследовательский
Университет Информационных Технологий, Механики и Оптики

Факультет инфокоммуникационных технологий

Лабораторная работа № 1

Вариант - 5

Выполнили:

Азатжонова М. А.

Маркозубова А. К.

Санкт-Петербург,

2024

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Задание №1

Задание:

Для функции в соответствии с вариантом на заданном отрезке:

1. Построить интерполяционный полином (можно в форме Лагранжа, можно в форме Ньютона), число узлов интерполяции для всех вариантов 5; проверить выполнение условий интерполяции

2. Оценить сверху погрешность интерполяции

3. Оценить фактическую погрешность интерполяции и ее максимальное значение

Решение:

1. Произведем интерполяцию функции $\sin(|x| + 2.3^x)$ полиномом Лагранжа. Для этого выбираем 5 равномерно распределенных узлов интерполяции на отрезке [-1; 2], значения функции для выбранных узлов представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Значения функции в узлах интерполяции

x	-1	-0.25	0.5	1.25	2
f(x)	0.99957	0.87334	0.90227	-0.80805	0.84513

Используя формулу $L = \sum_{k=0}^{m} = \frac{\omega_k(x)}{\omega_k(x_k)} f(x_k)$, вычисляем интерполяционный полином Лагранжа:

$L(x) = 0.9202824928x^4 - 1.205076215x^3 - 1.636478922x^2 + 0.6017514463x + 1.103636046$

Построим графики функции $\sin(|x|+2.3^x)$ и полученного полинома, чтобы проверить выполнение условий интерполяции, а именно совпадение данных графиков в узлах интерполяции(рисунок 1).

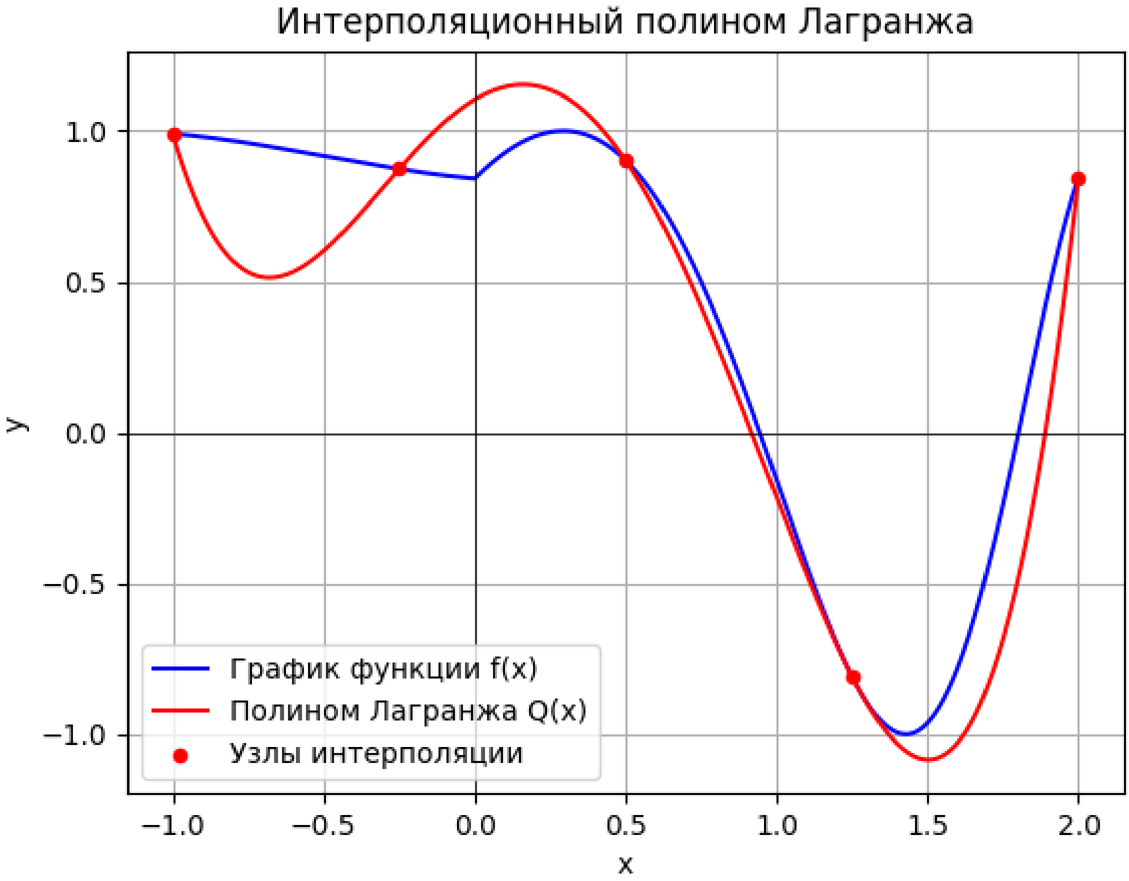

Рисунок 1 — График функции f(x) и полинома Лагранжа Q(x)

2. Далее необходимо оценить сверху погрешность интерполяции: график погрешности R(x) $= f(x) - L(x)$ представлен на рисунке 2. Полагая $M_{m+1} = max|f^{(m+1)}(x)|$, используем функцию $\frac{M_{m+1}}{(m+1)!}|\omega(x)|$, чтобы оценить R(x) сверху. В данной случае необходимо найти максимальное значение пятой производной исходно заданной функции, оно равняется $M_{max} = 6155.52283741691$.

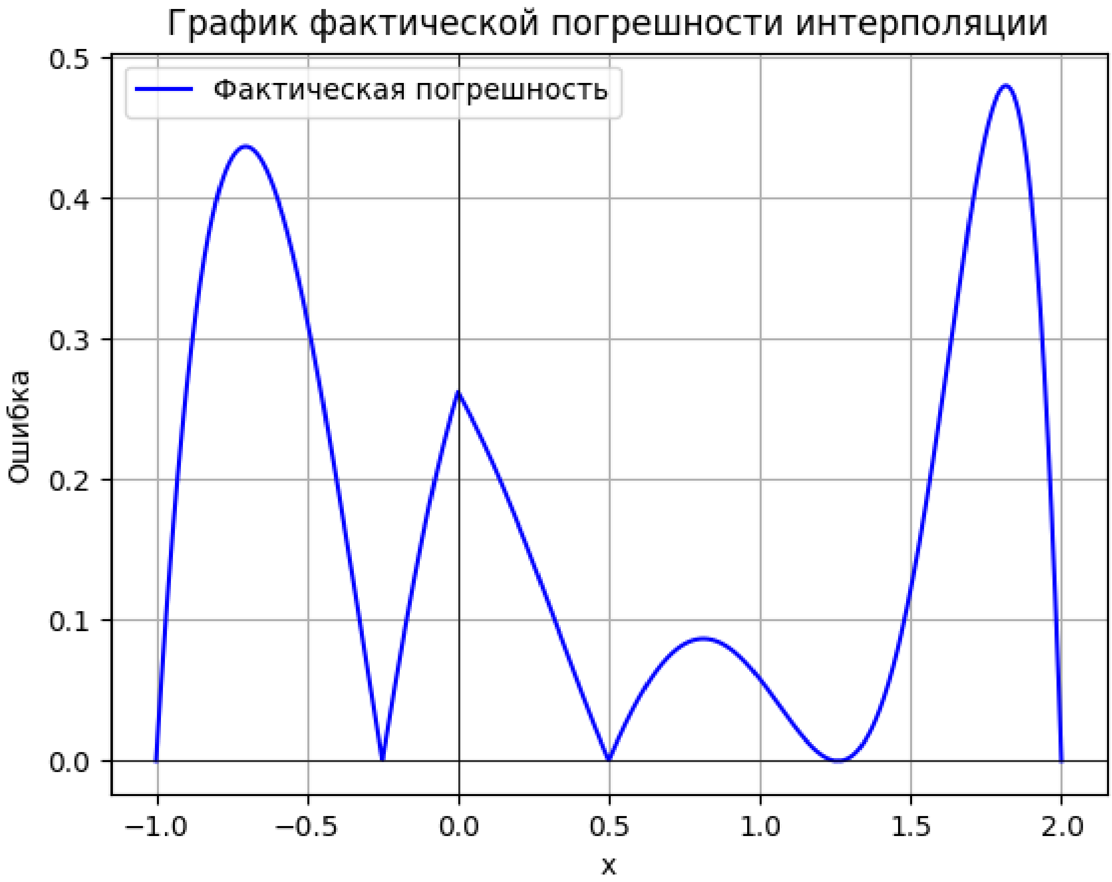

Рисунок 2 — Фактическая погрешность интерполяции

Полагая $M_{m+1} = max|f^{(m+1)}(x)|$, используем функцию $\frac{M_{m+1}}{(m+1)!}|\omega(x)|$, чтобы оценить R(x) сверху. В данной случае необходимо найти максимальное значение пятой производной исходно заданной функции, оно равняется $M_{max} = 6155.52283741691$.

3. Сравним фактическую погрешность интерполяции и ее максимальное значение, построив графики их функции в одной системе координат. В результате построения можно заметить, насколько верхняя оценка погрешности больше, чем фактическая(рисунок 3).

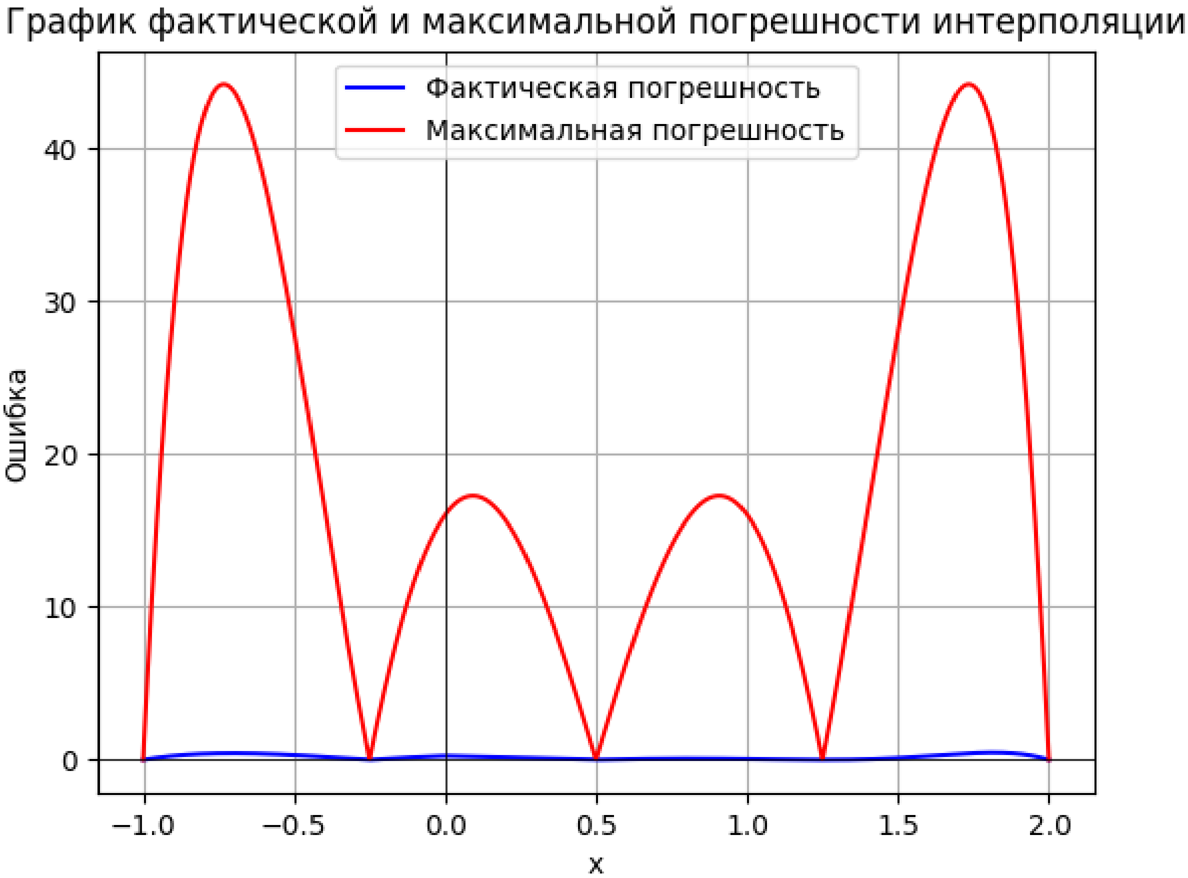

Рисунок 3 — Сравнение фактической и максимальной погрешностей

Задание №2

Задание:

Для функции в соответствии с вариантом на заданном отрезке:

1. Построить интерполяционный полином (можно в форме Лагранжа, можно в форме Ньютона) степени 3,4,5,6, причем узлами интерполяции являются корни полинома Чебышева

2. Построить графики фактической погрешности интерполяции и найти ее максимальное значение (можно по графикам, можно с помощью встроенных библиотек)

3. Построить график максимального значения погрешности интерполяции в зависимости от степени построенного интерполяционного полинома

Решение:

Данное задание выполняется с опорой на формулы, код, представленные в задании 1.

а) Найдем узлы интерполяции для построения интерполяционного полинома 3 степени. Для этого по формуле $\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot cos(\frac{\pi(2i-1)}{2m+2})$ вычислим корни полинома Чебышева 4 степени. Для найденных узлов определим значения функции от них (таблица 2).

Таблица 2 – Значения функции в узлах интерполяции

x	1.88581	1.07403	-0.07402	-0.88581
f(x)	0.40111	-0.36971	0.84907	0.97868

Опираясь на задание 1, вычисляем, что интерполяционный полином в форме Лагранжа выглядит следующим образом:

$L(x) = 0.53628786720651x^3 - 0.521450862619819x^2 - 1.11909348628562x + 0.769308550687022$

Проверим выполнение условий интерполяции, построив графики функции $\sin(|x| + 2.3^x)$ и полученного полинома(рисунок 4).

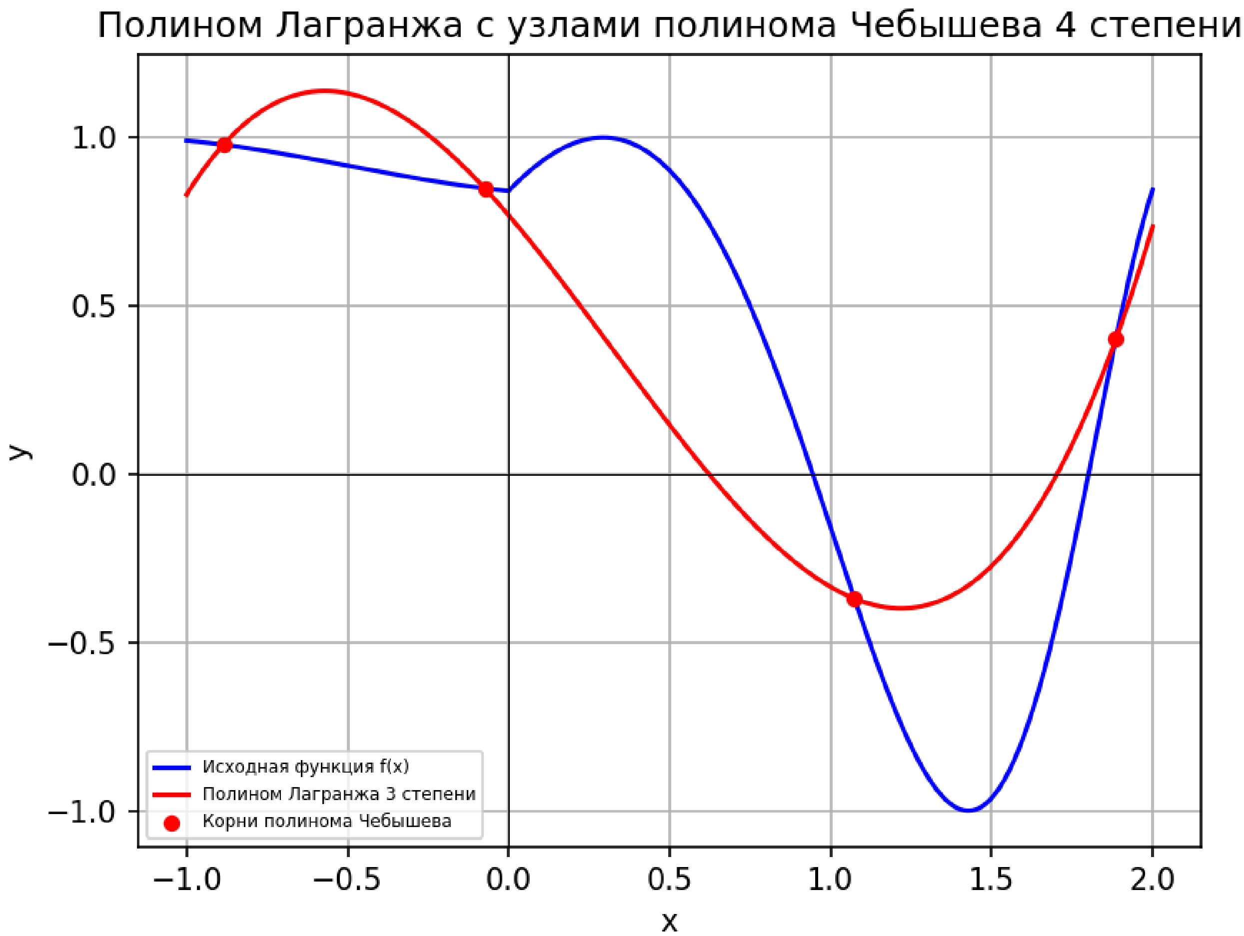

Рисунок 4 — Полином Лагранжа с узлами полинома Чебышева 4 степени

Построенный график фактической погрешности интерполяции полиномом 3 степени представлен на рисунке 5.

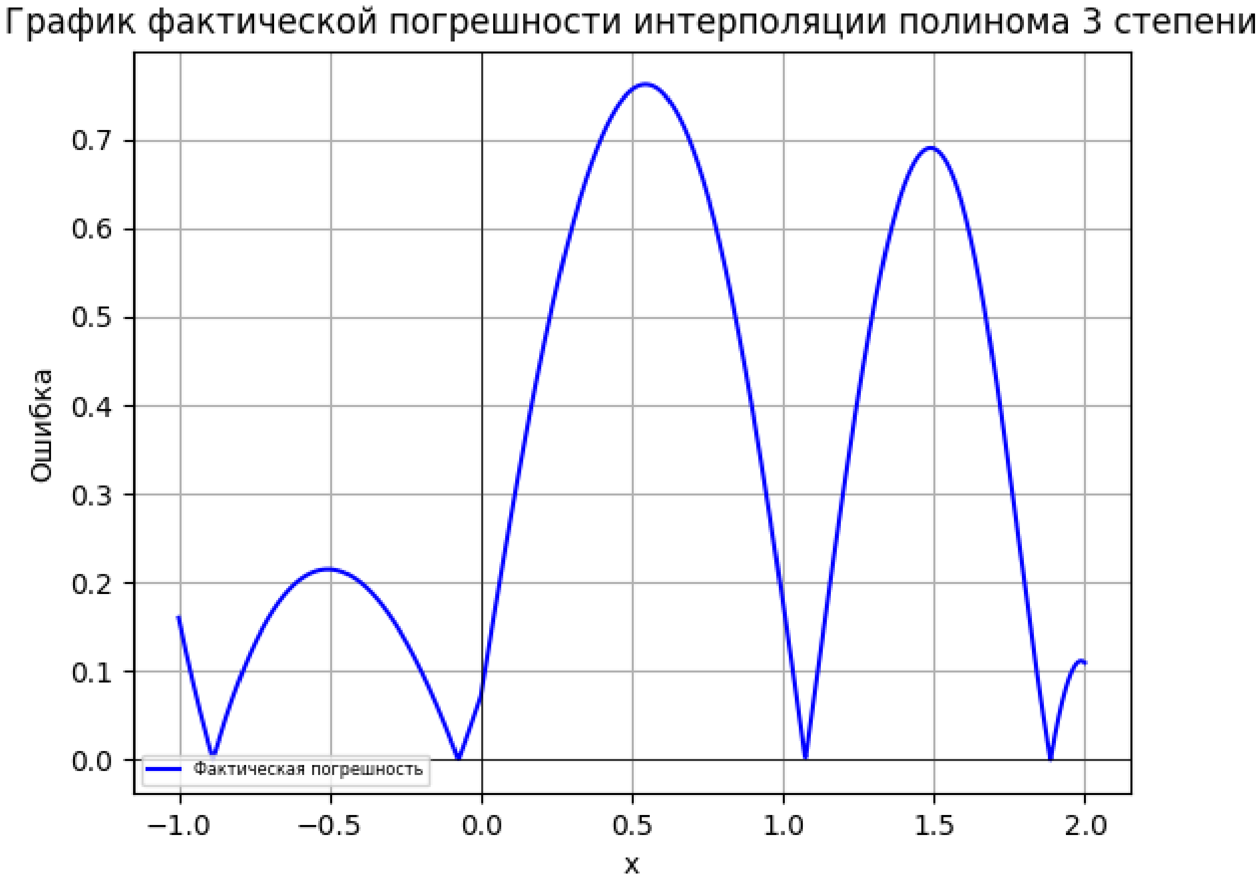

Рисунок 5 — Фактическая погрешность интерполяции(степень 3)

Вычисляем максимальное значение погрешности интерполяции для 3 степени: $M_{max} = 450$.

Строим график максимальной погрешности интерполяции и далее производим ее сравнение с фактической погрешностью. Данный график представлен на рисунке 6.

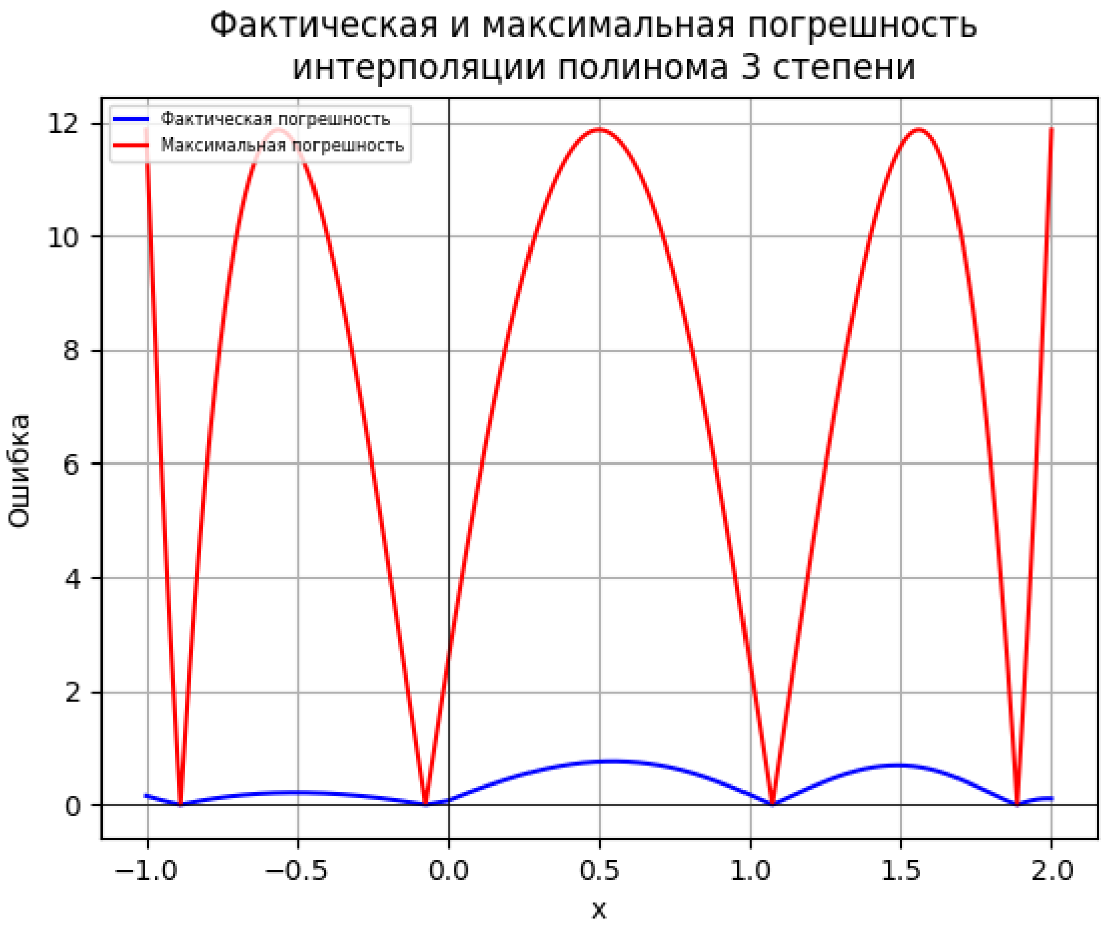

Рисунок 6 — Сравнение фактической и максимальной погрешности (степень 3)

б) Для построения интерполяционного полинома 4 степени, вычислим корни полинома Чебышева 5 степени, чтобы найти узлы интерполяции, и затем определим значения функции от них (Таблица 3).

Таблица 3 – Значения функции в узлах интерполяции

x	1.92658	1.38167	0.50000	-0.38167	-0.92658
f(x)	0.58072	-0.98559	0.90227	0.89541	0.98348

Полученный интерполяционный полином имеет следующий вид:

$L(x) = 0.921979496603335x^4 - 1.10809894718978x^3 - 1.65623081009395x^2$
$+ 0.387572405701746x + 1.20343531701397$

Построим графики исходной функции $\sin(|x| + 2.3^x)$ и полученного полинома(рисунок 7).

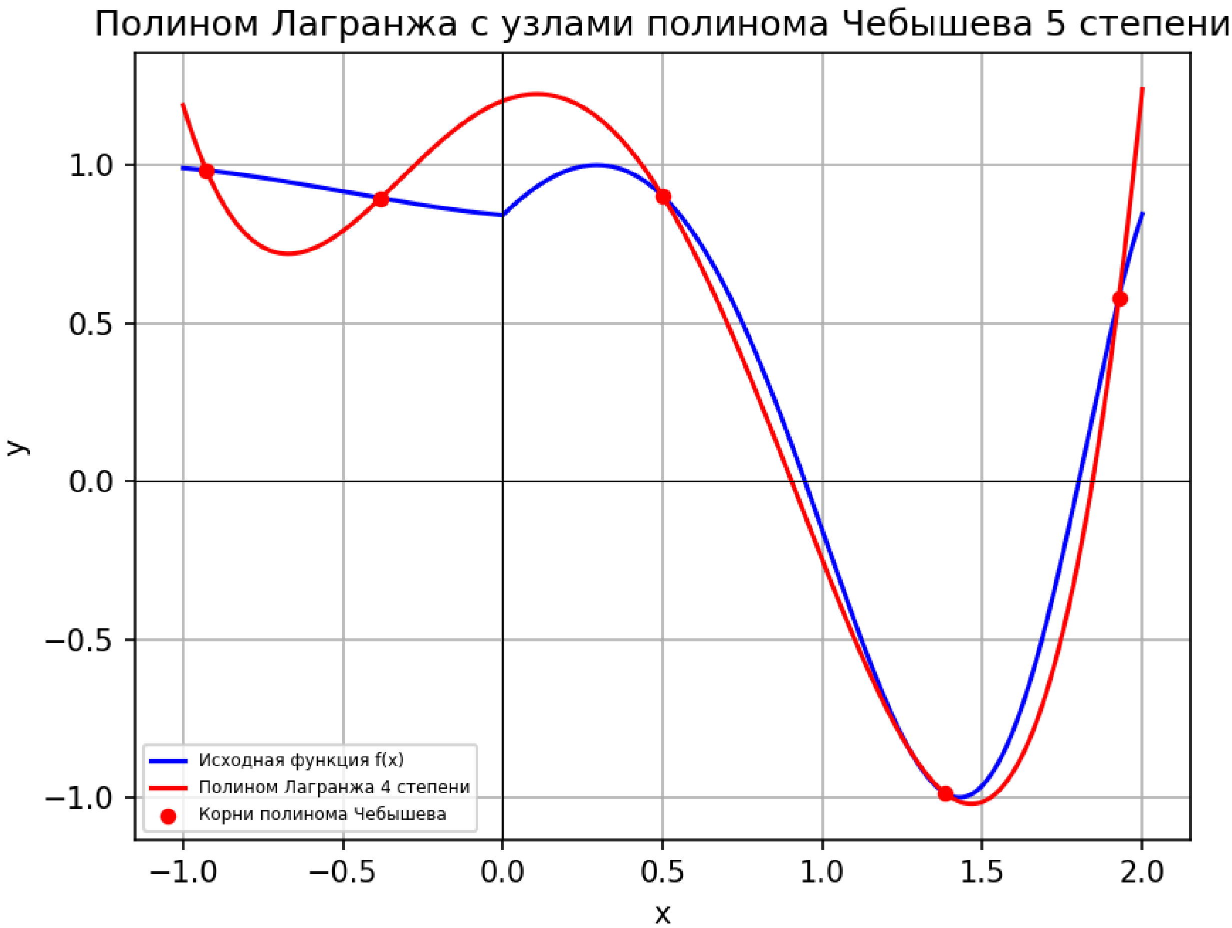

Рисунок 7 — Полином Лагранжа с узлами полинома Чебышева 5 степени

График фактической погрешности интерполяции построен на рисунке 8.

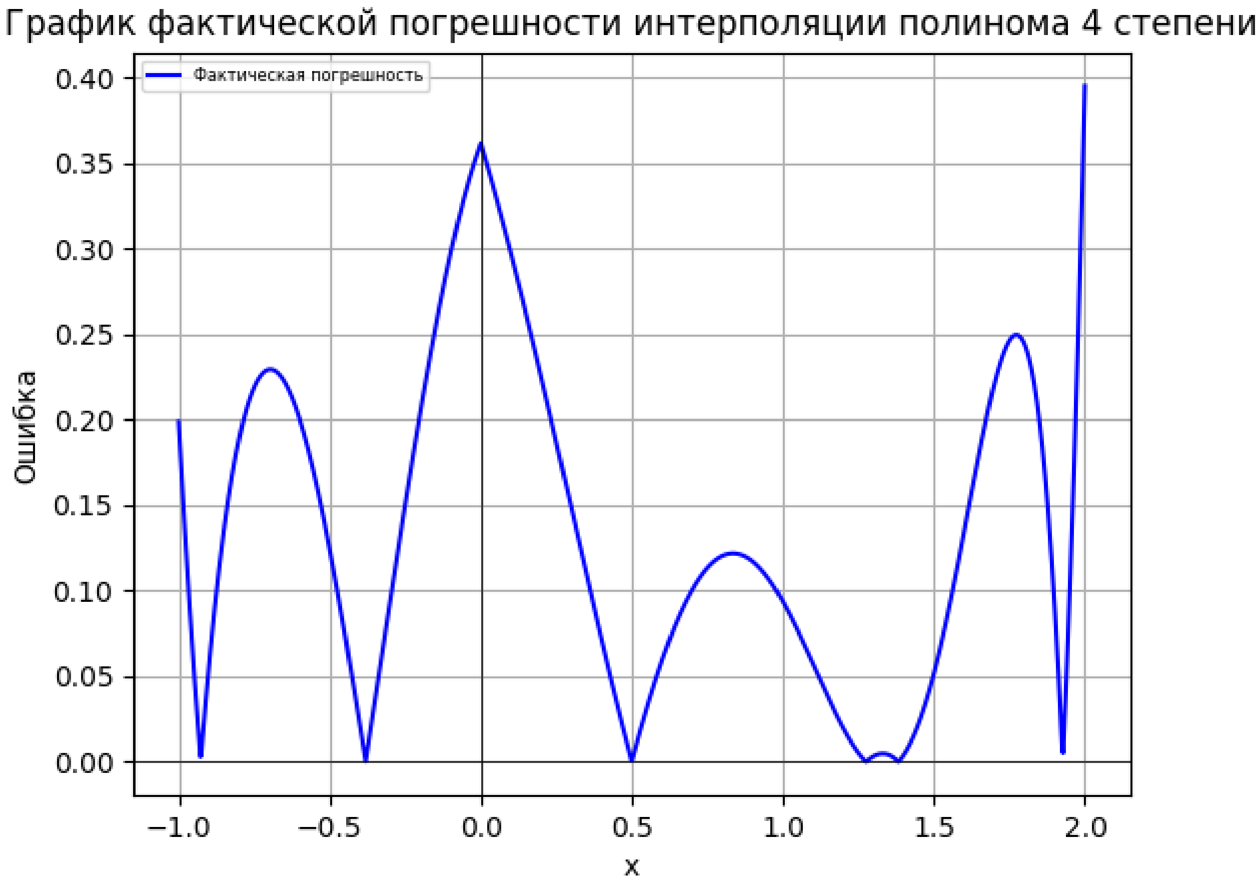

Рисунок 8 — Фактическая погрешность интерполяции(степени 4)

Максимальное значение погрешности интерполяции для 4 степени равняется $M_{max} = 6155.52283741691$.

В сравнении с максимальным значением погрешности(рисунок 9) фактическая погрешность довольно мала.

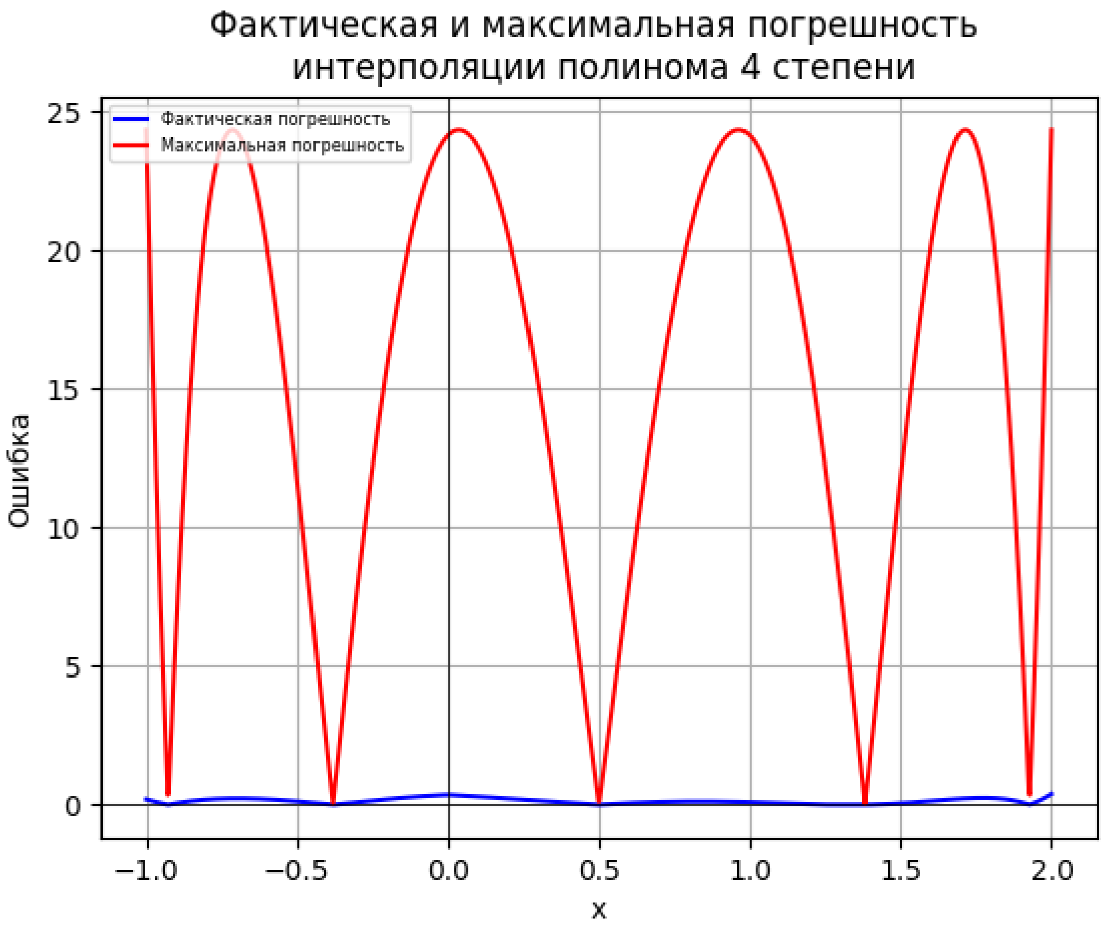

Рисунок 9 — Сравнение фактической и максимальной погрешности (степень 4)

в) Построим интерполяционный полином 5 степени, найдем корни полинома Чебышева 6 степени, и затем вычислим значения исходной функции от них(таблица 4).

Таблица 4 – Значения функции в узлах интерполяции

x	1.94888	1.56066	0.88822	0.11177	0.927452	-0.94888
f(x)	0.67075	-0.86922	0.15716	0.93538	-0.56066	0.98588

Интерполяционный полином в форме Лагранжа, кторый мы получили, выглдит следующим образом:

$L(x) = 0.30705028847838x^5 - 0.0742314838869981x^4 - 0.851471860765376x^3 - 0.41064800922712x^2 + 0.0161861910447114x + 0.939898257948443$

Графики интерполяционного полинома и исходной функции изображены на рисунке 10

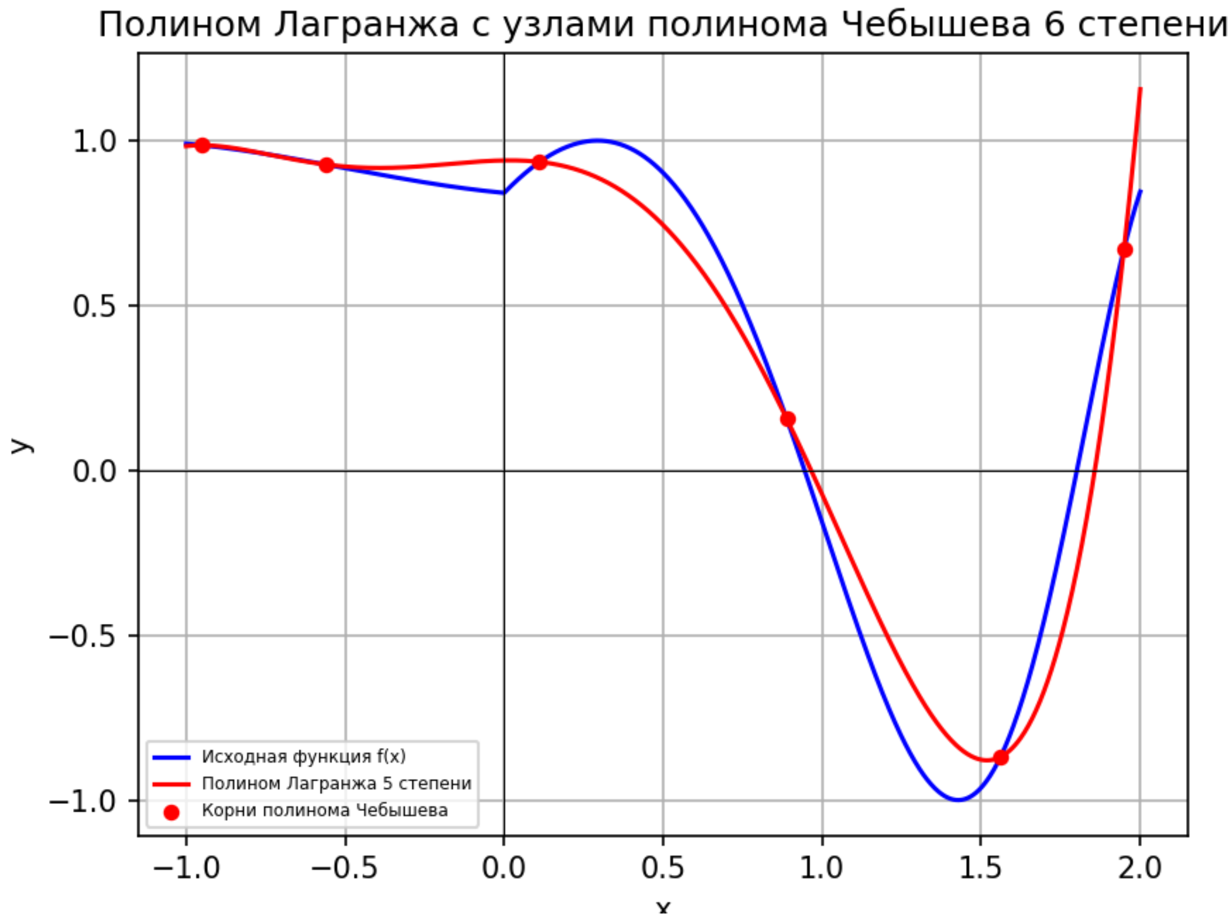

Рисунок 10 — Полином Лагранжа с узлами полинома Чебышева 6 степени

На рисунке 11 представлен график фактической погрешности интерполяции.

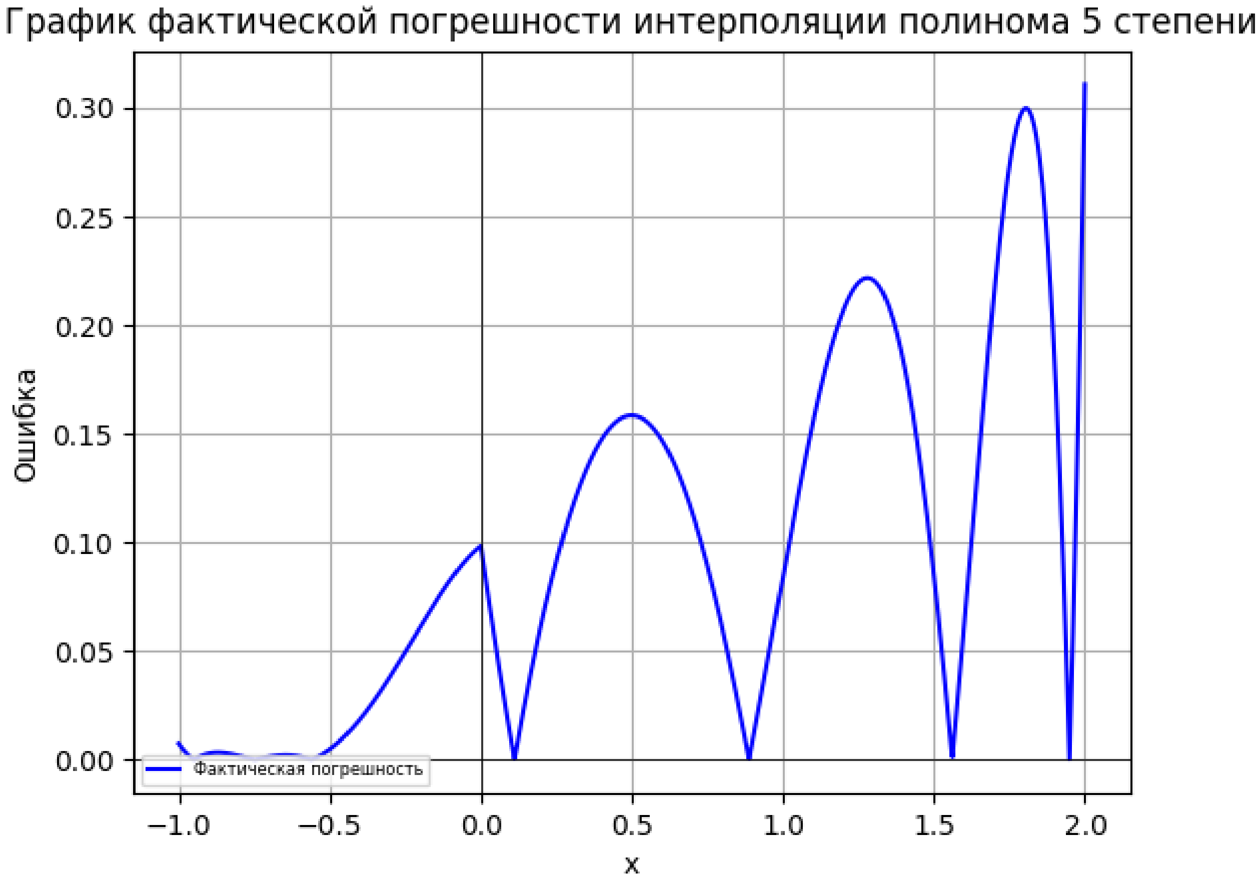

Рисунок 11 — Фактическая погрешность интерполяции (степень 5)

Вычисляем максимальное значение погрешности для 5 степени, оно равняется $M_{max} = 27656.158752801$.

Для сравнения построим график максимальной погрешности интерполяции в одной системе координат с фактической погрешностью(рисунок 12).

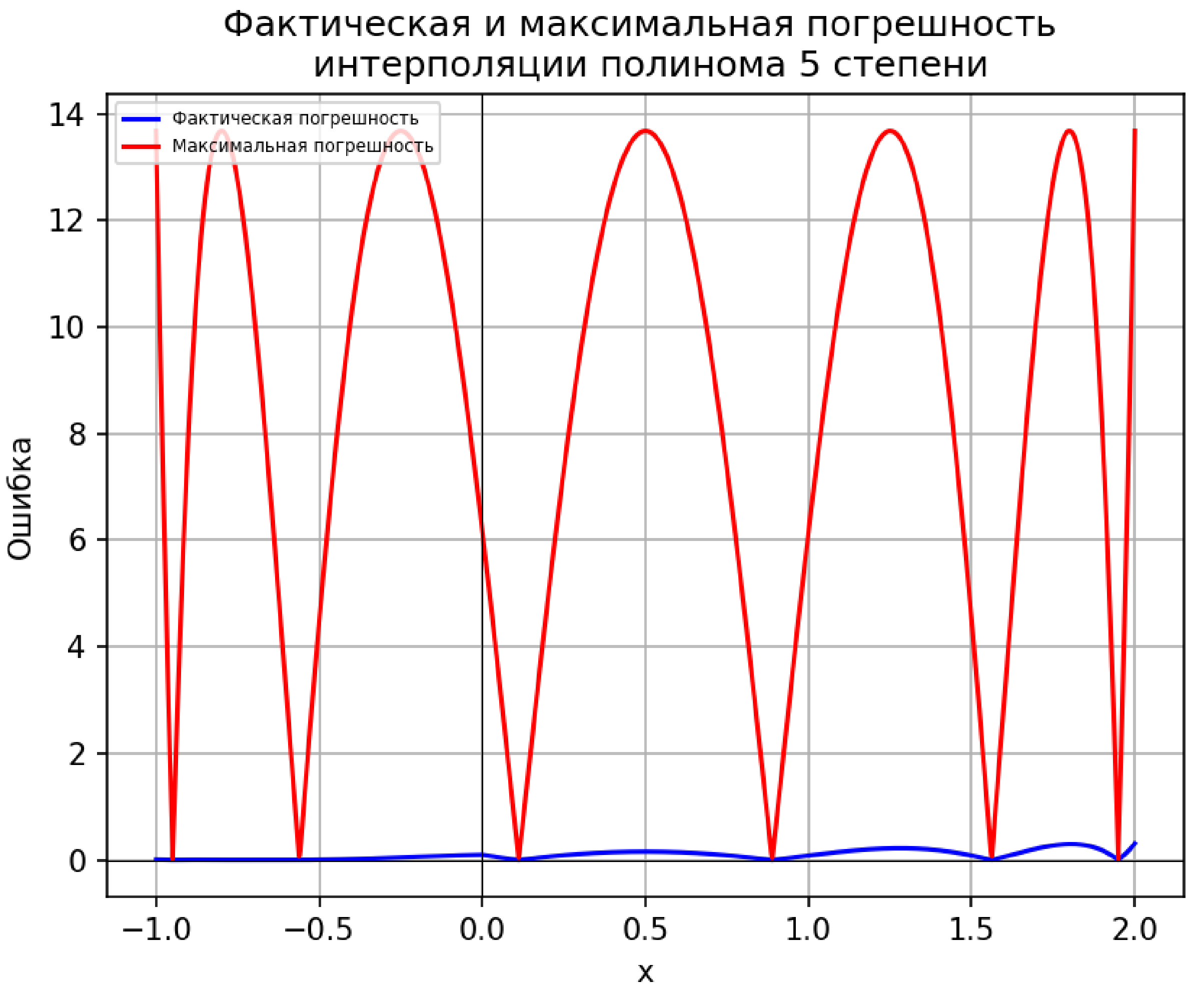

Рисунок 12 — Сравнение фактической и максимальной погрешности (степень 5)

г) Для построения интерполяционного полинома 6 степени найдем узлы интерполяции, вычислив корни полинома Чебышева 7 степени. Определим значения заданной функции $\sin(|x| + 2.3^x)$ от них (таблица 5).

Таблица 5 – Значения функции в узлах интерполяции

x	1.96239	1.67274	1.15082	0.50000	-0.1508	-0.6727	0.96239
f(x)	0.72157	-0.5501	-0.5786	0.90227	0.85872	0.94699	0.98726

Вычислим интерполяционный полином в форме Лагранжа: $L(x) = -0.415094872575017x^6 + 1.37803998180237x^5 + 0.211299834705098x^4 - 2.57917824975009x^3 - 0.396093673578593x^2 + 0.637689481316888x + 0.955066994718903$

Графики интерполяционного полинома и исходной функции представлены на рисунке 13.

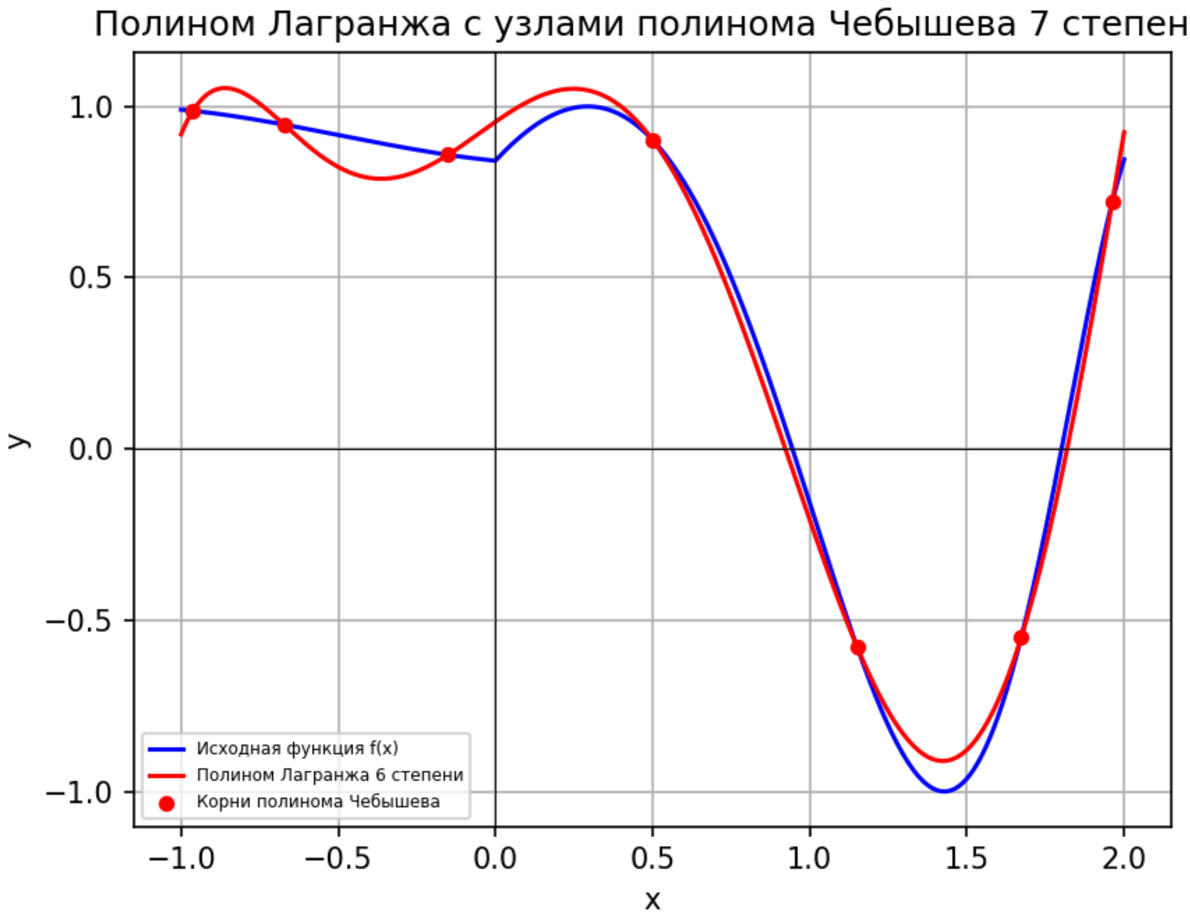

Рисунок 13 — Полином Лагранжа с узлами полинома Чебышева 7 степени

График фактической погрешности интерполяции - на рисунке 14.

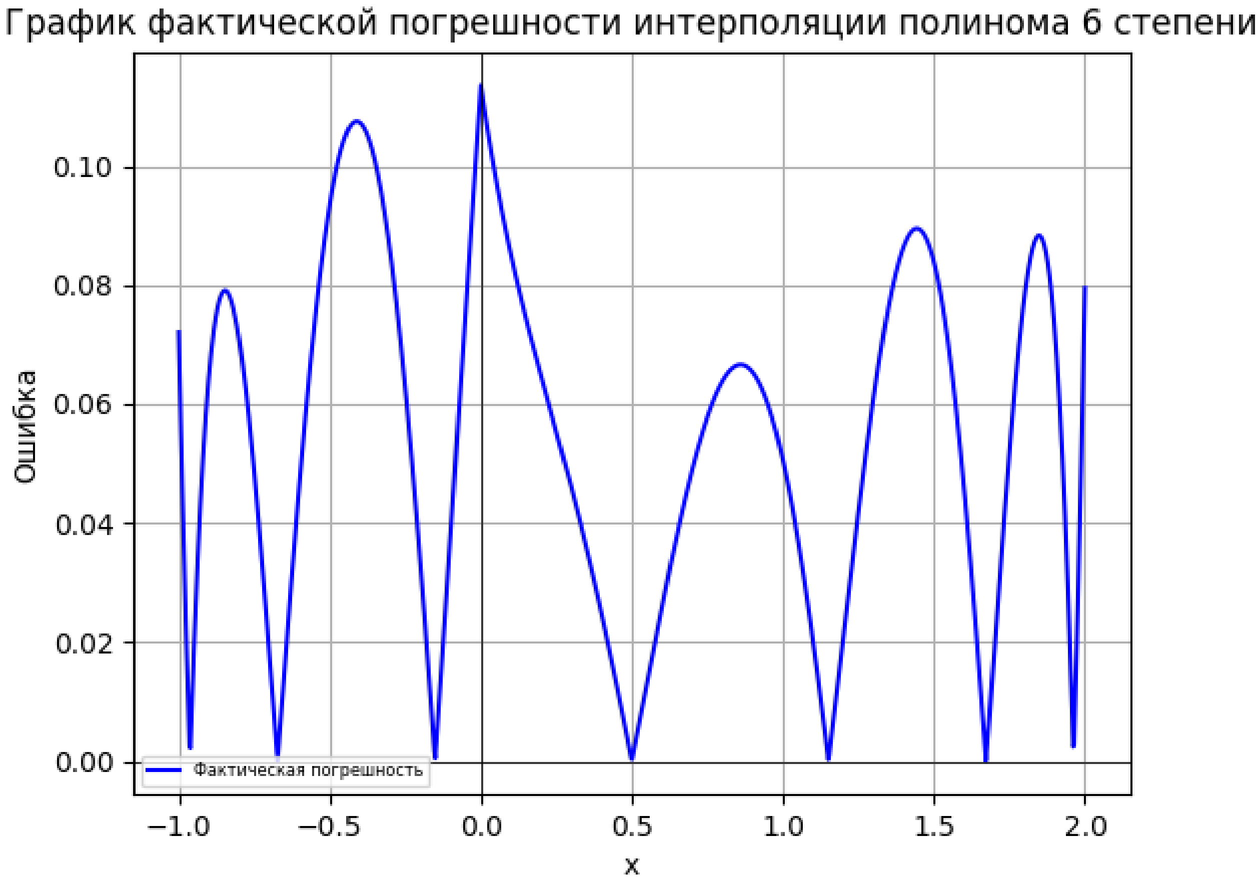

Рисунок 14 — Фактическая погрешность интерполяции (степень 6)

Вычислим максимальное значение погрешности интерполяции полиномом 6 степени: $M_{max} = 118972.014113545$.

Построим график максимальной погрешности и сравним с фактической погрешностью, потроив их в единой системе координат (рисунок 15).

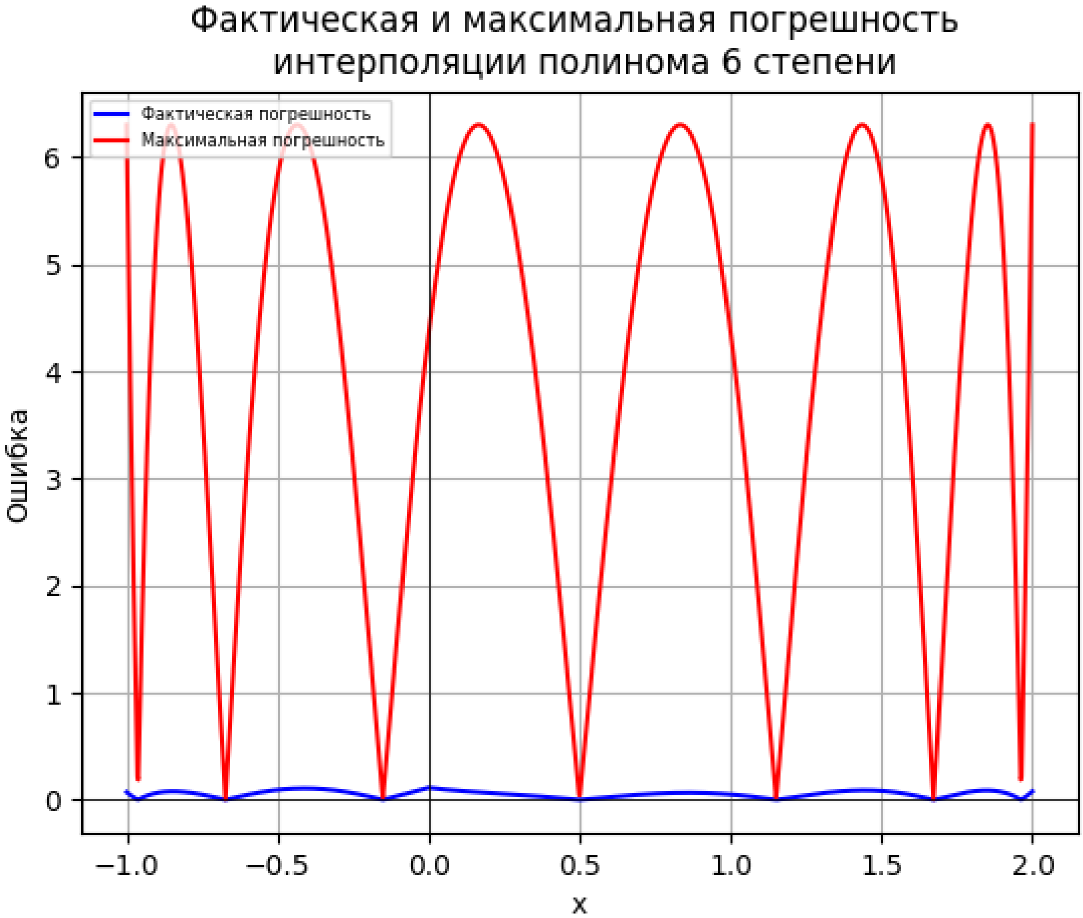

Рисунок 15 — Сравнение фактической и максимальной погрешности (степень 6)

Вывод

В ходе лабораторной работы была исследована интерполяция функций с помощью полиномов с использованием различных методов выбора узлов. Основным инструментом исследования стала интерполяционная формула Лагранжа, которая позволяет построить полином, проходящий через заданные точки (узлы).

Было рассмотрено влияние выбора узлов на точность аппроксимации. При равномерном распределении узлов интерполяционного полинома, наблюдается значительное увеличение погрешности с ростом степени полинома. Это связано с тем, что производные интерполируемой функции на некоторых участках могут расти быстрее, что приводит к возрастанию "волнообразности" интерполяционного полинома.

В качестве альтернативы, были использованы корни полиномов Чебышева для выбора узлов. Это позволило существенно снизить максимальную погрешность интерполяции, особенно в областях, где функция имеет большой градиент.

Полученные результаты подтверждают, что выбор узлов является важным фактором при интерполяции. Использование корней полиномов Чебышева демонстрирует значительное улучшение точности по сравнению с равномерным распределением узлов.

Важно помнить, что интерполяция с помощью полиномов может быть неэффективной за пределами интервала, заданного узлами. Это связано с тем, что поведение функции вне заданного интервала может существенно отличаться от интерполяционного полинома. Таким образом, необходимо тщательно выбирать как степень полинома, так и количество узлов, учитывая характер интерполируемой функции и интервал, на котором проводится интерполяция.

Приложение

Ниже представлен полный код программы, написанный на языке программирования Python, который был использован для выполнения данной лабораторной работы.

```python
import numpy as np
import sympy as sp
import matplotlib.pyplot as plt
from math import factorial

sin = sp.sin
x = sp.symbols('x')

def f(x):
    return sin(abs(x) + 2.3**x)

a = -1
b = 2
m = 4

x_yzel = [-1.0, -0.25, 0.5, 1.25, 2.0]
y_yzel = [f(x) for x in x_yzel]

def Polynom_Lagrange(x, x_yzel, y_yzel, m):
    Q = 0
    for k in range(m + 1):
        q = 1
        for i in range(m + 1):
            if i != k:
                q *= (x - x_yzel[i]) / (x_yzel[k] - x_yzel[i])
        Q += q * y_yzel[k]
    return Q

Q = Polynom_Lagrange(x, x_yzel, y_yzel, m)
Q_expanded = sp.expand(Q)
Q_expanded_numeric = Q_expanded.evalf(10)



def Grafhic_Polinom_Lagrange(x, x_yzel, y_yzel, m):
    x_vals = np.linspace(a, b, 1000)
    f_numeric = sp.lambdify(x, f(x), "numpy")
    Q_numeric = sp.lambdify(x, Q_expanded, "numpy")
    plt.plot(x_vals, f_numeric(x_vals), label='График функции f(x)', color='blue')
    plt.plot(x_vals, Q_numeric(x_vals), label='Полином Лагранжа Q(x)', color='red', linestyle='-')
    plt.scatter(x_yzel, [float(yi) for yi in y_yzel], color='red', zorder=5, s=20, label='Узлы интерполяции')
    plt.axhline(0, color='black', linewidth=0.5)
    plt.axvline(0, color='black', linewidth=0.5)
    plt.grid(True)
    plt.xlabel('x')
    plt.ylabel('y')
    plt.title('Интерполяционный полином Лагранжа')
    plt.legend()
    plt.show()

def Maximum_Error(x_i, M_max, m, x_yzel):
    w_x = np.ones_like(x_i)
    for x_k in x_yzel:
        w_x *= (x_i - x_k)
    max_error_vals = (np.abs(M_max) / factorial(m + 1)) * np.abs(w_x)
    return max_error_vals

M_max = 6155.52283741691

def Factical_Error(x_vals):
    f_numeric = sp.lambdify(x, f(x), "numpy")
    Q_expanded = sp.expand(Q)
    Q_numeric = sp.lambdify(x, Q_expanded, "numpy")
    return np.abs(f_numeric(x_vals) - Q_numeric(x_vals))
```

```
def Grafhici_Factical_and_Maximum_Errors(a, b, m, M_max, x_yzel, y_yzel):
    Q = Polynom_Lagrange(x, x_yzel, y_yzel, m)
    x_vals = np.linspace(a, b, 1000)
    error_vals = Factical_Error(x_vals)
    max_error_vals = Maximum_Error(x_vals, M_max, m, x_yzel)
    plt.plot(x_vals, error_vals, label='Фактическая погрешность', color='blue')
    plt.axhline(0, color='black', linewidth=0.5)
    plt.axvline(0, color='black', linewidth=0.5)
    plt.grid(True)
    plt.xlabel('x')
    plt.ylabel('Ошибка')
    plt.title('График фактической погрешности интерполяции')
    plt.legend()
    plt.show()
    plt.plot(x_vals, error_vals, label='Фактическая погрешность', color='blue')
    plt.plot(x_vals, max_error_vals, label='Максимальная погрешность', color='red')
    plt.axhline(0, color='black', linewidth=0.5)
    plt.axvline(0, color='black', linewidth=0.5)
    plt.grid(True)
    plt.xlabel('x')
    plt.ylabel('Ошибка')
    plt.title('График фактической и максимальной погрешности интерполяции')
    plt.legend()
    plt.show()

print("Полином Лагранжа с равномерными узлами: ", Q_expanded_numeric)
print("Значение M_max", M_max)
Grafhic_Polinom_Lagrange(x, x_yzel, y_yzel, m)
Grafhici_Factical_and_Maximum_Errors(a, b, m, M_max, x_yzel, y_yzel)
for i, (x_val, y_val) in enumerate(zip(x_yzel, y_yzel), start=0):
    print(y_val)
```

```python
import numpy as np
import sympy as sp
import matplotlib.pyplot as plt
from math import pi, factorial

x = sp.symbols('x')

a = -1
b = 2

M_max_values = {3: 450, 4: 6155.52283741691, 5: 27656.1587528010, 6: 118972.014113545}

def f_sym(x):
    return sp.sin(abs(x) + 2.3 ** x)

def f_num(x):
    return np.sin(np.abs(x) + 2.3 ** x)

def Polynom_Lagrange(x, x_yzel, y_yzel, m):
    Q = 0
    for k in range(m + 1):
        q = 1
        for i in range(m + 1):
            if i != k:
                q *= (x - x_yzel[i]) / (x_yzel[k] - x_yzel[i])
        Q += q * y_yzel[k]
    return Q

for m in range(3, 7):
    def Find_Chebyshev_Yzlu(a, b, m):
        x_yzel_cheb = []
        y_znach_v_yzle = []
        for i in range(1, m + 2):
            x_cheb = ((a + b) / 2) + ((b - a) / 2) * np.cos((pi * (2 * i - 1)) / (2 * (m + 1)))
            x_yzel_cheb.append(x_cheb)
            y_znach_v_yzle.append(f_num(x_cheb))
        return x_yzel_cheb, y_znach_v_yzle

    def Graphic_Polinoma_Cheb(a, b, x_yzel_cheb, y_znach_v_yzle, m):
        polinom = Polynom_Lagrange(x, x_yzel_cheb, y_znach_v_yzle, m)
        polinom_expanded = sp.expand(polinom)
        polinom_str = str(polinom_expanded).replace('**', '^')
        print(polinom_str)
        x_vals = np.linspace(a, b, 1000)
        polinom_numeric = sp.lambdify(x, polinom_expanded, "numpy")
        plt.plot(x_vals, f_num(x_vals), label='Исходная функция f(x)', color='blue')
        plt.plot(x_vals, polinom_numeric(x_vals), label=f'Полином Лагранжа {m} степени', color='red')
        plt.scatter(x_yzel_cheb, y_znach_v_yzle, color='red', zorder=5, s=20, label='Узлы Чебышева')
        plt.axhline(0, color='black', linewidth=0.5)
        plt.axvline(0, color='black', linewidth=0.5)
        plt.grid(True)
        plt.xlabel('x')
        plt.ylabel('y')
        plt.legend(loc='lower left', fontsize='xx-small')
        plt.title(f'Полином Лагранжа с узлами Чебышева {m} степени')
        plt.show()

    def Maximum_Error(x_vals, M_max, m, x_yzel):
        w_x = np.ones_like(x_vals)
        for x_k in x_yzel:
            w_x *= (x_vals - x_k)
        max_error_vals = (np.abs(M_max) / factorial(m + 1)) * np.abs(w_x)
        return max_error_vals

    def Factical_Error(x_vals, x_yzel_cheb, y_znach_v_yzle, m):
        Q = Polynom_Lagrange(x, x_yzel_cheb, y_znach_v_yzle, m)
        Q_numeric = sp.lambdify(x, Q, "numpy")
        return np.abs(f_num(x_vals) - Q_numeric(x_vals))
```

```python
def Grafhici_Fctical_and_Maximum_Errors(a, b, m, M_max, x_yzel, y_yzel):
    x_vals = np.linspace(a, b, 1000)
    error_vals = Factical_Error(x_vals, x_yzel, y_yzel, m)
    max_error_vals = Maximum_Error(x_vals, M_max, m, x_yzel)
    plt.plot(x_vals, error_vals, label='Фактическая погрешность', color='blue')
    plt.axhline(0, color='black', linewidth=0.5)
    plt.axvline(0, color='black', linewidth=0.5)
    plt.grid(True)
    plt.xlabel('x')
    plt.ylabel('Ошибка')
    plt.title(f'График фактической погрешности интерполяции полинома {m} степени')
    plt.legend(loc='lower left', fontsize='xx-small')
    plt.show()
    plt.plot(x_vals, error_vals, label='Фактическая погрешность', color='blue')
    plt.plot(x_vals, max_error_vals, label='Максимальная погрешность', color='red')
    plt.axhline(0, color='black', linewidth=0.5)
    plt.axvline(0, color='black', linewidth=0.5)
    plt.grid(True)
    plt.xlabel('x')
    plt.ylabel('Ошибка')
    plt.legend(loc='upper left', fontsize='xx-small')
    plt.title(f'Фактическая и максимальная погрешность \n интерполяции полинома {m} степени')
    plt.show()

x_yzel_cheb, y_znach_v_yzle = Find_Chebyshev_Yzlu(a, b, m)
print(f"Узлы Чебышева и значения функции для полинома {m} степени:")
for i, (x_val, y_val) in enumerate(zip(x_yzel_cheb, y_znach_v_yzle), start=0):
    print(f"x_{i} = {x_val:.10f}, f(x_{i}) = {y_val:.10f}")

print(f"Интерполяционный полином {m} степени:")
Graphic_Polinoma_Cheb(a, b, x_yzel_cheb, y_znach_v_yzle, m)


M_max = M_max_values[m]
print(f"Значение M_max для полинома {m} степени:", M_max)
Grafhici_Fctical_and_Maximum_Errors(a, b, m, M_max, x_yzel_cheb, y_znach_v_yzle)
```