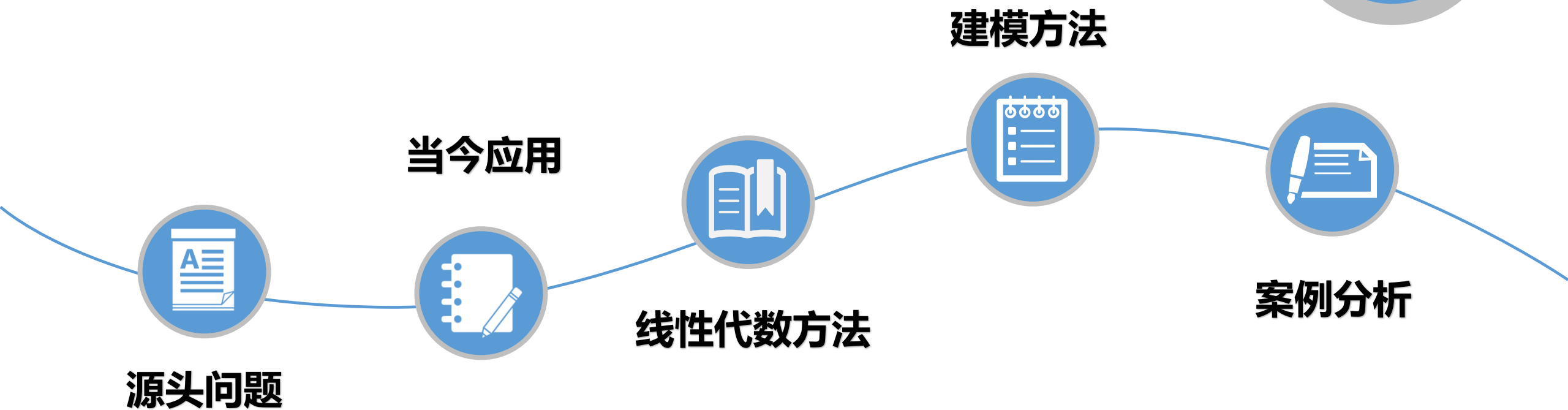


初等代数方法

谭忠





厦门大学
XIAMEN UNIVERSITY

Part 1

源头问题与当今应用

有时候现象或事件中变量之间呈现向量值函数的关系，空间解析几何中熟知的映射

$$\begin{aligned} f: [0, +\infty) \times [0, 2\pi] &\mapsto \mathbf{R}^3 \\ (r, \theta) &\mapsto (x, y, z) \end{aligned}$$

的具体分量形式如下

$$\begin{cases} x = x(r, \theta) = r \cos \theta \\ y = y(r, \theta) = r \sin \theta \\ z = z(r, \theta) = r \end{cases}, (r \in [0, +\infty), \theta \in [0, 2\pi])$$

这是二元三维向量值函数，它是三维空间的一张半圆锥面，这是一元函数的另一种推广：多个因变量 x 和 y 按某种规律随自变量 t 或 (r, θ) 的变化而变化。

一般的, 设 D 是 R^n 上的点集,
 D 到 R^m 的映射

$$f: D \rightarrow R^m$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$z = (z_1, z_2, \dots, z_m)$$

称为 n 元 m 维向量值函数 (或多元函数组)

记为 $z = f(x)$, D 称为 $f(x)$ 的定义域, $\mathfrak{R} = \{z \in R^m | z = f(x), x \in D\}$ 称为 f 的值域。

多元函数是 $m=1$ 的特殊情形。显然, 每个 $z_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 都是 x 的函数 $z_i = f_i(x)$, 它称为 (f) 的第 i 个坐标 (或分量) 函数。

于是, (f) 可以表达为分量形式

$$\begin{cases} z_1 = f_1(\mathbf{x}) \\ z_2 = f_2(\mathbf{x}) \\ \dots \dots \\ z_m = f_m(\mathbf{x}) \end{cases} \quad x \in D$$



它们有的是线性代数方程，比如在投入产出问题中；另一种就是非线性代数方程，往往来自于几何中的曲线、曲面的方程以及其他领域。下面，我们分两部分介绍：一部分是线性代数方法；另一部分是初等几何方法。

4.1.1 源头问题与当今应用

线性代数中有几个最基本的概念：线性方程组、行列式、矩阵、二次型。大量的科学技术问题，最终往往归结为解线性方程组。大约4000年前，巴比伦人能求解两个未知数的线性方程组。公元前200年，中国出版的“九章算术”表明已经能够求解 3×3 的方程组了。

4.1.1 源头问题与当今应用

简单方程 $Ax + B = 0$ 是一个古老的问题，莱布尼兹、拉格朗日、凯利 (Cayley) 和欧拉都有贡献。

十九世纪，高斯提出了消去法，

1848，J. J. Sylvester 提出的 “矩阵” 概念，

1855 年亚瑟凯莱引进了矩阵乘法和矩阵代数。

4.1.1 源头问题与当今应用

但在很长一段时间里，许多线性代数的兴趣被放缓，直到第二次世界大战结束带来了计算机的发展，才使得线性代数向前更迅速、更有效的发展。

4.1.1 源头问题与当今应用

最著名的例子是哈佛大学的列昂惕夫教授。1949 年，他用计算机算出了由美国统计局的 25 万条经济数据所组成的 42 个未知数的 42 个方程的方程组，这些模型通常都是用线性方程组来描述的，被称为列昂惕夫 “投入 - 产出” 模型。列昂惕夫因此获得了 1973 年的诺贝尔经济学奖

4.1.1 源头问题与当今应用

例题一

某地区有三个重要产业，一个煤矿、一个发电厂和一条地方铁路。开采一元钱的煤，煤矿要支付 0.25 元的电费及 0.25 元的运输费；生产一元钱的电力，发电厂要支付 0.65 元的煤费，0.05 元的电费及 0.05 元的运输费；创收一元钱的运输费，铁路要支付 0.55 元的煤费及 0.10 元的电费。

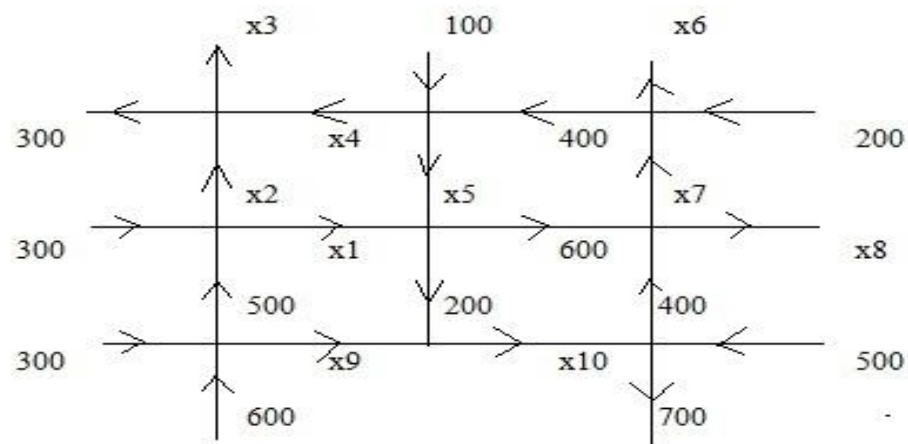
4.1.1 源头问题与当今应用

在某一周内，煤矿接到外地金额为 50000 元的定货，发电厂接到外地金额为 25000 元的定货，外界对地方铁路没有需求。问三个企业在这一周内总产值多少才能满足自身及外界的需求？

另一个应用是在交通流量方面：

4.1.1 源头问题与当今应用

例题二 (交通流量问题)



4.1.1 源头问题与当今应用

图中给出了某城市部分单行街道的交通流量（每小时过车数）

假设：

(1) 全部流入网络的流量等于全部流出网络的流量；



4.1.1 源头问题与当今应用

(2) 全部流入一个节点的流量等于全部流出此节点的流量。

试建立数学模型确定该交通网络未知部分的具体流量。



厦门大学
XIAMEN UNIVERSITY

Part 2

代数思想 与建模方法

4.1.2代数思想与建模方法

现象或事件中变量之间呈现 n 元线性方程组的关系

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

...

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

4.1.2 代数思想与建模方法

在数学建模中，矩阵的使用相当广泛，如数学规划、投入产出、马氏链模型等主要运用矩阵分析来解决问题。自然科学和工程实践中很多问题的解决都归纳为线性方程组的求解和矩阵运算。

Part 3

案例分析

4.1.3 案例分析

案例一、Hill 密码

问题背景：

Hill 密码是运用矩阵论原理的替换密码，由 Hill 在 1929 年发明的，每个字母当作 26 进制数字：

$$A = 0, B = 1, C = 2 \dots$$

4.1.3 案例分析

一串字母当成 n 维向量，跟一个 $n \times n$ 的矩阵相乘得到的结果就是加密后的密文。

Hill 密码是基于矩阵的运算和可逆矩阵，明文被分成大小相同的几个分组，密钥是一个可逆的方阵，如果把密钥矩阵写成 K 。

4.1.3 案例分析

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1m} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{m1} & k_{m2} & \cdots & k_{mm} \end{pmatrix}$$

把明文中的第 i 个分组中的 m 个字符记为 $p_{i1} \cdots p_{im}$,

相应的密文符为 $c_{i1} \cdots c_{im}$

4.1.3 案例分析

加密算法为 $c_{il} = p_{i1}k_{1l} + \cdots + p_{im}k_{ml}$

若已知密钥矩阵为

$$K = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

要对明文 battle on Tuesday 实施加密。那么密文为多少？

4.1.3 案例分析

【问题分析】

首先，我们要先对明文设置对应关系。例如可以在26 个英文字母与数字间建立一一对应关系：

4.1.3 案例分析

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F & G & H & I \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} J & K & L & M & N & O & P & Q \\ 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} R & S & T & U & V & W & X & Y & Z \\ 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{pmatrix}$$

4.1.3 案例分析

【模型构建】

由于明文共15个字符，可以分为5个分组，每个分组有三个字符，即记成这样的形式

$$M = \begin{pmatrix} b & a & t \\ t & l & e \\ o & n & T \\ u & e & s \\ d & a & y \end{pmatrix}$$

4.1.3 案例分析

根据对应关系，明文矩阵为

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 19 & 11 & 4 \\ 14 & 13 & 19 \\ 20 & 4 & 18 \\ 3 & 0 & 24 \end{pmatrix}$$

4.1.3 案例分析

【模型求解】

所以加密后的矩阵为N

$$N = MK = \begin{pmatrix} 18 & 19 & 20 \\ 11 & 15 & 8 \\ 5 & 6 & 20 \\ 24 & 22 & 16 \\ 21 & 24 & 1 \end{pmatrix}$$

密文为stulpifguywavyb。

4.1.3 案例分析

案例二、交通模型

问题背景： 设某航空公司在四个城市之间有航行情况：

从城市 1 到城市 2、城市 3 有航线；城市 2 到城市 1、城市 3 有航线；

城市 3 到城市 1、城市 4 有航线；城市 4 到城市 2、城市 3 有航线。

试考虑城市间航线到达情况。

4.1.3 案例分析

首先考虑如何来表示城市之间航线的情形。在这里，我们可以用邻接矩阵来表示。 $A = (a_{ij})$

若城市 i 到城市 j 有航线，则 $a_{ij}=1$

否则 $a_{ij}=0$

$(i, j = 1, 2, 3, 4)$

4.1.3 案例分析

由此可得

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.1.3 案例分析

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

表示可以乘坐2次航班到达的城市。



4.1.3案例分析

所以

$$A + A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

表示在2次航线内城市之间可以相互到达。

4.1.3 案例分析

案例三、动物数量按年龄段预测问题

问题背景：某农场饲养的某种动物所能达到的最大年龄为 15 岁，将其分成三个年龄组：第一组，0 ~ 5 岁；第二组，6 ~ 10 岁；第三组，11 ~ 15 岁。

动物从第二年龄组起开始繁殖后代，经过长期统计，

4.1.3 案例分析

第二组和第三组的繁殖率分别为 4 和 3。第一年龄组和第二年龄组的动物能顺利进入下一个年龄组的存活率分别为 0.5 和 0.25。假设农场现有三个年龄段的动物各 1000 头，问 15 年后农场三个年龄段的动物各有多少头？

4.1.3 案例分析

【问题分析】

因年龄分组为 5 岁一段，故将时间周期也取为 5 年。

15 年后就经过了 3 个时间周期。

设 x_i^k 表示第 k 个时间周期的第 i 组年龄阶段动物的数量
($k=1,2,3$; $i=1,2,3$)

4.1.3 案例分析

因为某一时间周期第二年龄组和第三年龄组动物的数量是由上一时间周期上一年龄组存活下来动物的数量，
所以有

$$x_2^k = \frac{1}{2} x_1^{k-1}, x_3^k = \frac{1}{4} x_2^{k-1} (k = 1, 2, 3)$$

4.1.3 案例分析

又因为某一时间周期，第一年龄组动物的数量是由上一时间周期各年龄组出生的动物的数量，所以有

$$x_1^k = 4x_2^{k-1} + 3x_3^{k-1} (k = 1, 2, 3)$$

4.1.3 案例分析

【模型构建】

于是我们得到递推关系式

$$\begin{cases} x_1^k = 4x_2^{k-1} + 3x_3^{k-1} \\ x_2^k = \frac{1}{2}x_1^{k-1} \\ x_3^k = \frac{1}{4}x_2^{k-1} \end{cases}$$

4.1.3 案例分析

用矩阵表示

$$\begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{k-1} \\ x_2^{k-1} \\ x_3^{k-1} \end{pmatrix}$$

4.1.3 案例分析

则 $x^k = Lx^{k-1}$

其中

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}, x^0 = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

4.1.3 案例分析

则有

$$x^1 = Lx^0 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 700 \\ 500 \\ 250 \end{pmatrix}$$

4.1.3 案例分析

$$\begin{aligned}x^2 = Lx^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 700 \\ 500 \\ 250 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2750 \\ 3500 \\ 125 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

4.1.3 案例分析

$$\begin{aligned}x^3 &= Lx^2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2750 \\ 3500 \\ 125 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 14375 \\ 1375 \\ 875 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

4.1.3案例分析

结果分析

15年后，农场饲养的动物总数将达到16625头，其中 0 ~ 5岁的有 14375 头，占 86.47%，6 ~ 10岁的有 1375 头，占 8.27%，11 ~ 15 岁的有 875 头，占 5.226%。

15 年间，动物总增长 $16625 - 3000 = 13625$ 头，总增长率为 $13625 / 3000 = 454.16\%$ 。

4.1.3 案例分析

案例四、配方问题

问题背景：一种佐料由四种原料A、B、C、D混合而成．这种佐料现有两种规格，这两种规格的佐料中，四种原料的比例分别为 $2:3:1:1$ 和 $1:2:1:2$ ．现在需要四种原料的比例为 $4:7:3:5$ 的第三种规格的佐料。问：第三种规格的佐料能否由前两种规格的佐料按一定比例配制而成？

4.1.3 案例分析

【问题分析】

- (1) 假设四种原料混合在一起时不发生化学变化。
- (2) 假设四种原料的比例是按重量计算的。
- (3) 假设前两种规格的佐料分装成袋，比如说第一种规格的佐料每袋净重 7 克 (其中 A、B、C、D 四种原料分别为 2 克, 3 克, 1 克, 1 克), 第二种规格的佐料每袋净重 6 克 (其中 A、B、C、D 四种原料分别为 1 克, 2 克, 1 克, 2 克)。

4.1.3 案例分析

【模型构建】

根据已知数据和上述假设, 可以进一步假设将 x 袋第一种规格的佐料与 y 袋第二种规格的佐料混合在一起, 得到的混合物中 A、B、C、D 四种原料分别为 4 克, 7 克, 3 克, 5 克. 则有以下线性方程

4.1.3 案例分析

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x + 2y = 7 \\ x + y = 3 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

4.1.3 案例分析

【模型求解】

上述线性方程组的增广矩阵

$$(A, b) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4.1.3 案例分析

可见 $x = 1, y = 2$ 是解

又因为第一种规格的佐料每袋净重 7 克，第二种规格的佐料每袋净重 6 克。所以第三种规格的佐料能由前两种规格的佐料按 7:12 的比例配制而成。

4.1.3 案例分析

【模型应用】

(1) 若令 $\alpha_1 = (2, 3, 1, 1)^T$, $\alpha_2 = (1, 2, 1, 2)^T$, $\beta = (4, 7, 5, 3)^T$

则原问题等价于线性方程组 $Ax = \beta$ 是否有解, 也等价于 β 能否由 α_1, α_2 线性表示。

4.1.3 案例分析

(2) 若四种原料的比例是按体积计算的，则最好先将体积比转换为重量比，然后再按上述方法处理。

(3) 上面的模型假设中的第三个假设只是起到简化运算的作用。如果直接设 x 克第一种规格的佐料与 y 克第二种规格的佐料混合得第三种规格的佐料，则有以下表

4.1.3 案例分析

	A	B	C	D
第一种	$\frac{2}{7}x$	$\frac{3}{7}x$	$\frac{1}{7}x$	$\frac{1}{7}x$
第二种	$\frac{1}{6}y$	$\frac{2}{6}y$	$\frac{1}{6}y$	$\frac{2}{6}y$
第三种	$\frac{4}{19}(x+y)$	$\frac{7}{19}(x+y)$	$\frac{3}{19}(x+y)$	$\frac{5}{19}(x+y)$

因而有如下的线性方程组

4.1.3 案例分析

$$\begin{cases} \frac{2}{7}x + \frac{1}{6}y = \frac{4}{19}(x + y) \\ \frac{3}{7}x + \frac{2}{6}y = \frac{7}{19}(x + y) \\ \frac{1}{7}x + \frac{1}{6}y = \frac{3}{19}(x + y) \\ \frac{1}{7}x + \frac{2}{6}y = \frac{5}{19}(x + y) \end{cases}$$

4.1.3 案例分析

【模型检验】

求解上述方程组，得到 $x = 7, y = 12$

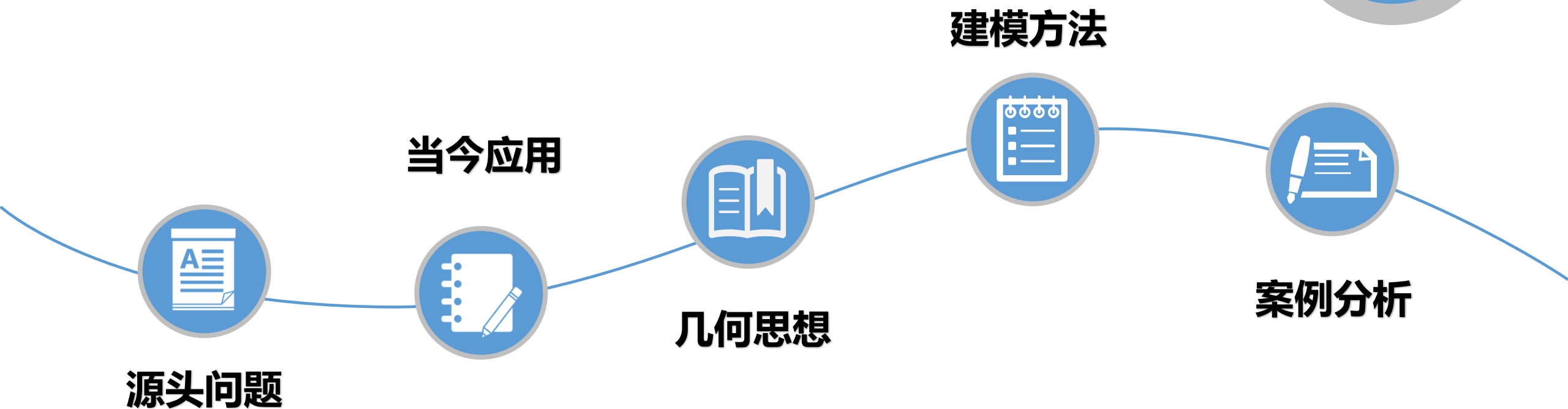
可见模型假设中的第三个假设不影响解的正确性。

感谢大家!



厦门大学
XIAMEN UNIVERSITY

初等几何方法





厦门大学
XIAMEN UNIVERSITY

Part 1

源头问题与当今应用

4.2.1 源头问题与当今应用

“几何” 来源于希腊文，原意是土地测量，在几何学发展的历史中，欧几里得的《几何原本》起了重大的历史作用。人们对《几何原本》中在逻辑结果方面存在的一些漏洞、破绽的发现，正是推动几何学不断向前发展的契机。最后提出了希尔伯特公理体系。



4.2.1 源头问题与当今应用

2014年国赛 B 题：创意平板折叠桌

某公司生产一种可折叠的桌子，桌面呈圆形，桌腿随着铰链的活动可以平摊成一张平板。

如下图所示

4.2.1 源头问题与当今应用





4.2.1 源头问题与当今应用

桌腿由若干根木条组成，分成两组，每组各用一根钢筋将木条连接，钢筋两端分别固定在桌腿各组最外侧的两根木条上，并且沿木条有空槽以保证滑动的自由度（见右图）。



4.2.1 源头问题与当今应用

桌子外形由直纹曲面构成，造型美观，可以想象折叠桌的动态变化过程。

试建立数学模型讨论下述问题

给定长方形平板尺寸为 $120\text{cm} \times 50\text{cm} \times 3\text{cm}$ ，每根木条宽 2.5cm ，连接桌腿木条的钢筋固定在桌腿最外侧木条的中心位置，折叠后桌子的高度为 53 cm 。

4.2.1 源头问题与当今应用

试建立模型描述此折叠桌的动态变化过程，在此基础上给出此折叠桌的设计加工参数（例如桌腿木条开槽的长度等）和桌脚边缘线的数学描述。





厦门大学
XIAMEN UNIVERSITY

Part 2

几何思想 与建模方法

4.2.2 几何思想与建模方法

在许多实际问题中，我们可以借助几何方法作为辅助手段来解决问题。这些几何知识是平面几何、立体几何、空间解析几何。在空间坐标系中，这往往建立的是平面或空间中的曲线和曲面的方程，它们都是非线性代数方程模型。下面我们将对几个案例进行分析，介绍几何方法的具体应用。

Part 3

案例分析

4.2.3 案例分析

案例一、步长问题

问题背景：人在行走时所做的功等于抬高人体重心所需的势能与两腿运动所需的动能之和。在给定速度时，以动作最小（即消耗能量最小）为原则。问走路步长选择多大为合适？

4.2.3 案例分析

【问题分析】

若考虑人体复杂的生理结构，则因素过于复杂而无法建立合理模型。因此首先必须对人体进行合理的简化。

依据经验，可判断影响步长的主要因素有

- (1) 腿长 h ;
- (2) 体重 M .

4.2.3 案例分析

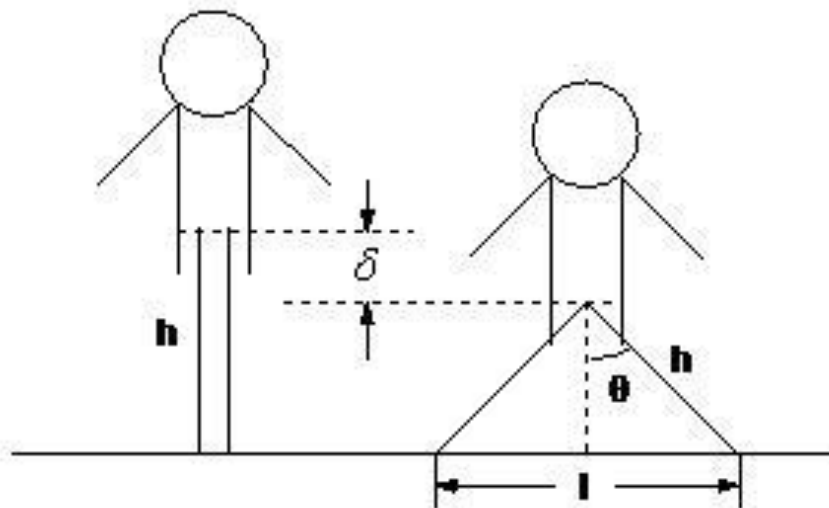
【问题假设】

- (1) 假设人体只由躯体和下肢两部分组成，且下肢看作长为 h 、质量 M 为的均匀杆；
- (2) 设躯体以匀速 v 前进；
- (3) 设走路步长为 l 。

4.2.3 案例分析

【模型构建】

如图所示





4.2.3 案例分析 重心升高

$$\begin{aligned}\delta &= h - h \cos \theta \\ &= h - h \left(1 - \frac{l^2}{4h^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\approx \frac{l^2}{8h}\end{aligned}$$

(当 $\frac{l}{h}$ 较小时)

4.2.3 案例分析

腿的转动惯量 $I = \frac{mh^2}{3}$

角速度 $w = \frac{v}{h}$

单位时间的步数为 $\frac{v}{l}$

所以单位时间行走所需的动能为

$$W_{\varepsilon} = \frac{1}{2} I w^2 \frac{v}{l} = \frac{mv^3}{6l}$$

4.2.3案例分析

单位时间内使身体重心升高所做的功为

$$W_{\delta} = mg\delta \frac{v}{l} = \frac{Mglv}{8h}$$

所以单位时间行走所做需的总功为

$$W = W_{\varepsilon} + W_{\delta} = \frac{mv^3}{6l} + \frac{Mglv}{8h}$$

4.2.3 案例分析

令 $n = \frac{v}{l}$, 得

$$W = v^2 \left(\frac{m}{6} n + \frac{Mg}{8h} \frac{1}{n} \right)$$

于是当 v 一定时,

$$n = \sqrt{\frac{3Mg}{4mh}} \quad \text{可使 } W \text{ 最小, 由 } l = \frac{v}{n} \quad , \quad \text{得 } l = \sqrt{\frac{4hm}{3Mg}} v$$

4.2.3 案例分析

案例二、车灯线光源设计问题

问题背景： 安装在汽车头部的车灯的形状为一旋转抛物面，车灯的对称轴水平地指向正前方，其开口半径 36 毫米，深度 21.6 毫米。经过车灯的焦点，在与对称轴相垂直的水平方向，对称地放置一定长度的均匀分布的线光源。要求在某一设计规范标准下确定线光源的长度。

4.2.3 案例分析

该设计规范在简化后可描述如下：

在焦点 F 正前方 25 米处的 A 点放置一测试屏，屏与 FA 垂直，用以测试车灯的反射光。在屏上过 A 点引出一条与地面相平行的直线，在该直线 A 点的同侧取 B 点和 C 点，使 $AC=2AB=2.6$ 米。要求 C 点的光强度不小于某一额定值（可取为 1 个单位）， B 点的光强度不小于该额定值的两倍（只须考虑一次反射）。

4.2.3 案例分析

问题：在满足该设计规范的前提下，计算线光源长度，使线光源的功率最小。

【问题分析】

线光源任意一点发出的光，可直接照射在光屏上，也可以经过灯罩（旋转抛物面）一次反射（不考虑二次反射）后，间接照射在光屏上。

4.2.3 案例分析

线光源上不同位置的点发射的光线投射到抛物面上，反射后能够到达指定点的投射点的集合（称为有效投射点的集合）是不同的。因为线光源过焦点对称水平放置，线光源上点的位置分布仅与长度有关。因此，在满足设计规范要求的条件下，寻求线光源功率最小，线光源长度是决定因素，而弄清线光源上各点有效投射点的情况，则是解决问题的一个关键所在。

4.2.3 案例分析

【问题假设】

- (1) 不考虑光的二次反射;
- (2) 不考虑光的折射;
- (3) 不考虑光的干涉和衍射;

4.2.3 案例分析

- (4) 光在传播过程中不吸收新的能量，仅考虑光的扩散；
- (5) 光在同一连续均匀介质中 (例如空气) 传播；
- (6) 灯丝为理想线光源，没有横向尺寸，不考虑灯管遮光；
- (7) 入射光发生完全镜面反射，旋转抛物面不吸收能量。

4.2.3 案例分析

【模型构建】

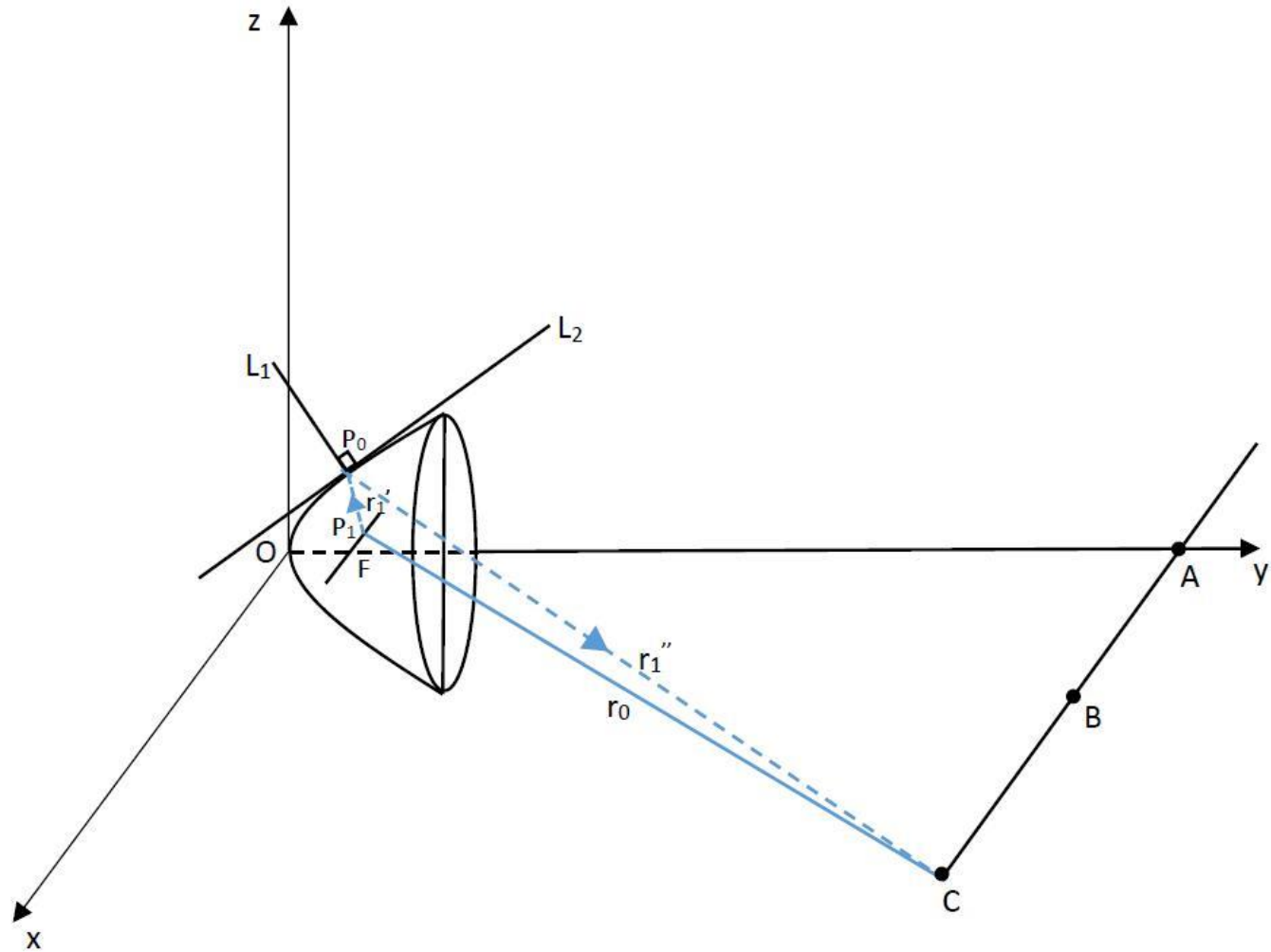
如下图所示，按照右手螺旋准则建立空间直角坐标系（单位：mm）

在xoy平面内，这个旋转抛物面是由上开口抛物线 $x^2 = 2py$

以 y 为轴旋转得到的，



4.2.3案例分析



4.2.3 案例分析

而 $x = 36, y = 21.6$ 在这个曲线上,

故得 $p = 30$

旋转抛物面的方程为

$$x^2 + z^2 = 60y$$

4.2.3 案例分析

这样焦点的坐标为

$$F(0,15,0)$$

$$A(0,25015,0)$$

$$B(1300,25015,0)$$

$$C(2600,25015,0)$$

4.2.3 案例分析

线光源上的点坐标为 $P_1(x_1, 15, 0)$

记其对称点为 $P_2(x_2, y_2, z_2)$

旋转面方程记为 $F(x, y, z) = x^2 - 60y + z^2 = 0$

从而在 (x_0, y_0, z_0) 的法向量为 $(F_x, F_y, F_z) = (2x_0, -60, 2z_0)$

即法线: $\vec{L}_1 = \{2x_0, -60, 2z_0\}$

4.2.3 案例分析

因此，切平面的方程

$$2x_0(x - x_0) - 60(y - y_0) + 2z_0(z - z_0) = 0$$

P_1P_2 的中点 $P_m(x_m, y_m, z_m)$

满足切平面方程，即

$$2x_0\left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_0\right) - 60\left(\frac{y_1 + y_2}{2} - y_0\right) + 2z_0\left(\frac{z_2}{2} - z_0\right) = 0$$

4.2.3 案例分析

入射光线:

$$\overrightarrow{P_1P_0} = \{x_0 - x_1, y_0 - 15, z_0\}$$

反射光线:

$$\overrightarrow{P_0C} = \{2600 - x_0, 25015 - y_0, -z_0\}$$



4.2.3案例分析

回顾反射定律

- (1)光反射时,反射光线、入射光线、法线都在同一平面内。
- (2)光反射时,反射光线、入射光线分居法线两侧。
- (3)光反射时,反射角等于入射角。

4.2.3 案例分析

入射光线 P_1P_0 、法线 L_1 ,反射光线 P_0C 在同一平面 α 内

则三向量的混合积为零, 即

$$\det \begin{pmatrix} x_0 - x_1 & y_0 - 15 & z_0 \\ 2x_0 & -60 & 2z_0 \\ 2600 - x_0 & 25015 - y_0 & -z_0 \end{pmatrix} = 0$$

4.2.3 案例分析

整理得

$$[(24985 - y_0)x_1 + 2600y_0 + 39000]z_0 = 0$$

又由于 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 在抛物面上, 满足 $x_0^2 + z_0^2 = 60y_0$

$$-36 \leq x_0 \leq 36$$

$$-36 \leq z_0 \leq 36$$

$$0 \leq y_0 \leq 21.6$$

4.2.3 案例分析

因此, (1) 当 $z_0 \neq 0$, 从而

$$[(24985 - y_0)x_1 + 2600y_0 + 39000] = 0 \text{ 时}$$

$$\text{得到 } y_0 = \frac{24985x_1 + 39000}{x_1 - 26000}$$

$$\text{由 } 0 \leq y_0 \leq 21.6$$

$$\text{求得 } -3.81 \leq x_1 \leq -1.56$$

4.2.3 案例分析

即仅在线光源上满足 $-3.81 \leq x_1 \leq -1.56$ 的点发出的光经过抛物面上 $z_0 \neq 0$ 的点反射后可经过C点。

(2) 当 $z_0 = 0$ 时, 反射点位于 $z_0 = 0$ 平面截旋转抛物面所得的抛物线上。

4.2.3 案例分析

以上分析仅是反射光线过 C 点的必要条件，但给出了线光源上点的初步划分，大大缩小了讨论的范围。

为保证区域划分的准确性，需要再通过计算机变步长搜索的方法。

4.2.3 案例分析

下面，利用虚像 P_2 、反射点 P_0 、光屏上的点C三点共线的条件，以 x_1 为变量分别表示出 x_0, y_0, z_0

再利用 Matlab 对 x_1 进行变步长搜索，找出有效投射点

集合的变化规律，具体步骤如下：

4.2.3 案例分析

由平面解析几何知识，平面内垂直于同一条直线的两条直线互相平行，显然 $P_1P_2 // L_1$ ，即 $\overrightarrow{P_1P_2} \times \vec{L}_1 = 0$

得到
$$\det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - 15 & z_2 \\ 2x_0 & -60 & 2z_0 \\ i & j & k \end{pmatrix} = 0$$

4.2.3 案例分析

即

$$\begin{aligned} & [(15 - y_2)z_0 - 30z_2]i \\ & - [(x_1 - x_2)z_0 + z_2x_0]j \\ & + [-30(x_1 - x_2) - (15 - y_2)x_0]k = 0 \end{aligned}$$

4.2.3 案例分析

得到

$$\begin{cases} x_2 = \frac{-x_1 x_0^2 + 900x_1 + x_1^2 z_0^2 + 2x_0^3 + 900x_0 + 2x_0 z_0^2 - 60x_0 y_0}{x_0^2 + 900 + z_0^2} \\ y_2 = \frac{15(4x_0 x_1 - 3x_0^2 - 900 + 120y_0 - 3z_0^2)}{x_0^2 + 900 + z_0^2} \\ z_2 = \frac{2z_0(x_2 + 450 + z_0^2 - x_0 x_1 - 30y_0)}{x_0^2 + 900 + z_0^2} \end{cases}$$

4.2.3 案例分析

反射光线能经过C点的充分必要条件是 P_0, P_2, C 三点共线,
因为

$$\overrightarrow{P_2 P_0} = \{x_0 - x_2, y_0 - y_2, z_0 - z_2\}$$

$$\overrightarrow{P_0 C} = \{2600 - x_0, 25015 - y_0, -z_0\}$$

4.2.3 案例分析

得

$$\begin{cases} -z_0(y_0 - y_2) - (z_0 - z_2)(25015 - y_0) = 0 \\ (x_0 - x_2)z_0 + (z_0 - z_2)(2600 - x_0) = 0 \\ (x_0 - x_2) + (25015 - y_0) - (y_0 - y_2)(2600 - x_0) = 0 \end{cases}$$

4.2.3 案例分析

将得到的 x_2, y_2, z_2 代入上式可得到 x_1 与 $P(x_0, y_0, z_0)$ 的方程组。从而，对于任一给定的 x_1 ，求出 P_0 ，可以得到以 x_1 为变量表达的 $P(x_0, y_0, z_0)$ 的值，根据 P_0 值的有效个数，便可确定有效投射点的个数，从而校验线光源区段划分的正确性。

4.2.3 案例分析

即线光源有如下划分：

- (1) 当 $x_1 > -1.56$ 时，没有反射线经过C点；
- (2) 当 $x_1 = -1.56$ 时，有2条反射线经过C点；
- (3) 当 $-3.81 \leq x_1 \leq -1.56$ 时，有4条反射线经过C点；

4.2.3 案例分析

(4) 当 $x_1 < -3.81$ 时, 有2条反射线经过C点。

同理当反射光线经过B点时亦可进行相同分析, 划分如下:

(1) 当 $x_1 > -0.78$ 时, 没有反射光线经过B点;

(2) 当 $-1.9 < x_1 < -0.78$ 时, 有4条反射光经过B点;

4.2.3 案例分析

(3) 当 $x_1 < -1.9$ 时, 有2条反射光经过B点。

很显然, 以上对线光源的分段对应着不同的积分域,

欲求 B、C 点的光强度, 只需对点光源的功率分段积分求和即可。

4.2.3 案例分析

记线光源的功率 W ，线光源长度 $2a$

设从线光源上任意一点经过反射或直射到达指定点的总光线条数为 k ，根据光照强度与光强成正比，与距离的平方成反比，光通量 $F = W \times \text{光效}$ （其中光效为定值）

光强 $I = \frac{F}{4\pi}$ ， $E = \frac{I}{r^2}$ ，则可建立以下模型：

4.2.3 案例分析

$$\min W = W(a), \text{ s.t.}$$

$$\begin{cases} E_B = \int_{-a \leq x \leq a} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{W}{4\pi\gamma_i^2 2a} dx \geq 2 \\ E_C = \int_{-a \leq x \leq a} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{W}{4\pi\gamma_i^2 2a} dx \geq 1 \end{cases}$$

4.2.3 案例分析

小结：此题运用到了立体几何、解析几何、大量物理知识，尤其以几何为主。可见，几何方法在本题中的作用还是十分重要的，它与其它模型相辅相成，共同构成数学建模的核心。

感谢大家!