8.10 差分作业

答案

1.依照下列利率：1%，2%，5%，7%，9%，13%.按年结算利息，使一笔存款达到本金的两倍，分别计算所用时间。（取三位小数）

解：设r是年利率，$P(n)$为第n年的存款。则可以得到一阶差分关系式：

$$P(n) = P(n-1) + \triangle P(n-1) = P(n-1) + rP(n-1) = (1+r)P(n-1)$$

由此关系式，可以推得

$$P(n) = (1+r)P(n-1) = (1+r)^2 P(n-2) = \cdots (1+r)^n P(0)$$

而题中所需为

$$P(n) = 2P(0)$$

将(3)代入关系式(2)，得到$2 = (1+r)^n$整理得到

$$n = \frac{ln2}{ln(1+r)}$$

对于不同的利率，将不同的r代入其中，使用matlab可以得到结果，如下：

利率	1%	2%	5%	7%	9%	13%
时间	69.661	35.002	14.207	10.245	8.043	5.671

2.分别以r 和2r 计息，钱数在n 年、m 年翻一番，$\frac{n}{m}$是多少？是小于2 还是大于2?

解：设利率为r时本金为P_0, 利率为$2r$时本金为Q_0, 根据题意

$$2P_0 = (1+r)^{n-1}p_0,$$

$$2Q_0 = (1+2r)^{m-1}Q_0.$$

即得

$$(1+r)^{n-1} = (1+2r)^{m-1}.$$

所以

$$n-1 = (m-1)c.$$

其中$c = \frac{\ln(1+2r)}{\ln(1+r)}$. 由上式可化为

$$\frac{n}{m} = c + \frac{1-c}{m}.$$

因为

$$\ln(1+2r) < \ln(1+r)^2 = 2\ln(1+r),$$

所以

$$1 < c < 2.$$

从而有

$$\frac{n}{m} < 2.$$

.

3. 证明Malthus 模型中，P(0)翻一番所花的时间 τ 是$\frac{ln2}{lnk}$。在1990年，世界人口至少是50亿，用Malthus 模型，假设k取1.05，1.03，和1.01，试估计2050 年的人口总数。

解：因为在Malthus模型中，假设人口净增长率r是常数，设P(t)为t时刻的人口，P(0)为初始人口，则有：

$$r = \frac{P(t+\triangle t) - P(t)}{P(t)\triangle t}$$

于是P(t)满足如下微分方程：

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = rP \\ P(0) = P_0 \end{cases}$$

解得：

$$P(t) = P_0 e^{rt}$$

令种群数量翻一番所需的时间为T，则有：$2P_0 = P_0 e^{rT}$。所以，$T = \frac{\ln 2}{r}$，令$\ln k = r$，则有：$T = \frac{\ln 2}{\ln k}$。

现假设k分别取1.05，1.03，和1.01，则$T_1 = 14.2067$，$T_2 = 23.4497$，$T_3 = 69.6607$。应用上述公式，可知到2050年时，人口应分别为933.9591亿、294.5818亿、

4.解方程$x(n+1) = k * x(n) + n$

解：设初值x(0)=x_0，继而有x(1)=k*x(0)=k*x_0

$$\begin{aligned} x(n) &= k * x(n-1) + (n-1) \\ &= k * (k * x(n-2) + (n-2)) + (n-1) \\ &\ldots\ldots \\ &= k^{n-1} * x(1) + 1 * k^{n-2} + 2 * k^{n-3} + ... + (n-1) * k^0 \\ &= k^n * x0 + 1 * k^{n-2} + 2 * k^{n-3} + ... + (n-1) * k^0 \end{aligned}$$

方程得解。