

二手房估价的二叉树期权定价模型

陆恬依

(南京财经大学应用数学学院 江苏 南京 210046)

摘要:随着我国房地产项目的飞速崛起,二手房交易在房屋买卖中也日益兴盛,对买卖房屋进行准确估价成了在二手房交易市场上最为重要的一部分。但是,由于二手房交易市场十分复杂,如果人们无法在市场上确定二手房的估价,则二手房交易就会面临困境。因此,如何对想要出售的房屋进行准确定价、使所定价格符合市场价格体系定位,并且又能使交易双方各自达到利益最大化,成了二手房交易市场上最值得思考的问题之一。南京作为一个中等规模的城市,在最近几年,二手房交易量在楼市的总交易量中占比越来越高,因此可以以南京市二手房交易为实验对象,通过建立二叉树模型综合考虑地理位置、配套设施、楼层等诸多因素,最后,再从求解结果、决策问题、设计方法和完善不确定性等方面综合二手房估价二叉树实物期权定价模型的先进性。

关键词:二手房;估价;二叉树模型;期权定价;实物期权

中图分类号: F224.9

文献标识码: A

文章编号: 1008-4428(2020)49-0056-04

Binomial tree option pricing model of second-hand house valuation

Lu Tianyi

(College of Applied Mathematics, Nanjing University of Finances and Economics, Nanjing, Jiangsu 210046)

Abstract: With the rapid rise of real estate projects in our country, the second-hand housing transaction is also increasingly prosperous in the housing transaction. Accurate evaluation of the houses sold has become the most important part in the second-hand housing transaction market. However, due to the complexity of the second-hand housing market, if people can not determine the valuation of the second-hand housing in the market, the second-hand housing transaction will be in troubles. Therefore, how to accurately price the house to be sold, make the price in line with the market price system positioning, and make two sides of the transaction maximize their own interests, has become one of the most worthy of consideration in the second-hand housing market. As a medium-sized city, in recent years, the trading volume of second-hand houses accounts for more and more in the total trading volume of the real estate market in Nanjing. Therefore, we can take the trading volume of second-hand houses in Nanjing as the experimental object by establishing a binary tree model to comprehensively consider many factors, such as geographical location, supporting facilities, floors etc. Finally, the advanced nature of the binary tree real option pricing model of second-hand housing valuation is summarized from the results, decision-making problems, designing methods and uncertainty.

Key words: second-hand housing; evaluation; binary tree model; option pricing; real option

一、引言

二手房交易是指在房管所等部门完成备案手续,并完成初始登记和一般登记,然后进行再次过户的房屋。二手房估价是在考虑了房屋的一系列周边环境,例如房屋自身情况、装修程度、周围设施、所处楼层等估计出的符合实际情况的大致价格。

二手房市场在内地的起步和发展是大家有目共睹的,从2008年起,二手房在我国各大城市的交易日益频繁,二手房

市场也因此空前繁荣,许多城市房屋市场中二手房的年交易量逐年递增,在整个房屋市场交易量中的占比也越来越高。同时,随着经济的不断发展,人们生活水平的不断提高,社会对房屋的需求量和满意度都会相应提升,因此二手房评估也逐渐进入人们眼帘,获得了广泛的关注。人们在选择二手房时,不仅会考虑房屋的自身情况,例如装修和家具,还会放于整个房区周边的设施和教育资源,由于二手房交易相对复杂,影响因素较多、涉及的法律程序也相对复杂,因此,在对

作者简介: 陆恬依,女,江苏苏州人,南京财经大学硕士研究生,研究方向: 金融数学。

— 56 —

二手房进行评估时,要选择一个能充分考虑其不确定性的定价模型来对其进行估价。

目前被广泛应用于实物期权的模型可分为 Black-Scholes 模型和二叉树模型两种,其中 B-S 期权定价模型大多以欧式期权作为研究对象,而二叉树期权定价大多以美式期权为主。二手房交易市场中,期权持有者可以在期权到期前任一时间节点来决定是继续持有或是售出,属于一种典型的美式期权,因此在现有的房屋交易市场中,一般都选择能够解决美式期权问题的二叉树期权定价模型作为房屋买卖参考的模型。二叉树实物期权定价模型是由 John Cox、Stephen A. Ross 和 Mark Rubinstein 在 1979 年《金融经济学杂志》上提出的,即在给定时间间隔内,每个时期的标的资产价格运动会有上升和下降两种可能。在这种规定下,运用二叉树模型就可以模拟该期权在有效期内可能发生的变化轨迹,于是就可以通过逆梯度运算得到之前任一节点的价格。

此外,运用二叉树模型可以将实物期权可能面对的各种不确定性因素纳入考察范围,即考察不确定性因素是否会带来一定投资价值或影响此实物期权的自身价值。综上所述,由于现有对于传统房屋估价的方法具有局限性,因此,为了使实物期权的定价模型能更好地对不确定性因素进行考察,从而使得估计结果更符合实际情况,需要运用二叉树期权定价模型来更合理地对实物模型进行估算。文章暂不考虑北上广等处于经济发展第一线的城市,选取经济发展较快且地理位置佳的江苏省省会城市——南京市栖霞区作为二手房成交实例,构建二叉树实物期权进行研究,并验证实物期权模型与实际成交结果是否一致,或判断挂牌价格能否充分体现待售房屋的实际价格,为后阶段的二手房交易市场构建更合理且更能满足大众的评估模型。

二、二手房评估定价二叉树模型的构建

(一) 二手房评估定价模型的基本假设

为了能更直接地建立二手房评估定价二叉树模型,首先进行以下假设:

假设 1: 不确定性假设。待售房屋周边的环境是不断变化的,并且这些不确定性会对房屋的价值产生一定影响,例如房屋朝向、周边环境、交通便捷程度等。

假设 2: 风险中性假设。房屋买卖双方一致认为收益与风险并存,对风险既不要求补偿也不要求退还,此时的期望预期收益率为无风险利率。

假设 3: 完全竞争市场。在交易过程中信息透明并具有完全性,资源自由流动,当房屋持有人发出某一决策时,可以立即执行。

由于二叉树期权定价模型是一种基于离散时期的期权定价方法,即在给定时间间隔内,标的资产的价值会发生上升或下降两种可能的波动,因此可以根据变动幅度构建资产变化图,通过在风险中性假设下计算未来现金流的现值,来预估在无风险利率折现情况下期权的现值。即期望获得的二手房交易折现率 = 房价上升概率 × 房价上升时的收益率 + 房价下降概率 × 房价下降时的收益率。

标的资产即房屋价格服从几何布朗运动,假设资产初始价值为 S_0 , 时间间隔为 t , 该资产可能发生两种变化: 以比率 u 上升至 S_u 、以比率 d 下降至 S_d 。并且在前文假设 2 中假设房屋持有人的风险偏好都是风险中性的,所以利用无风险利率作贴现率计算未来的期权价值:

$$f = [pf_u + (1-p)f_d]e^{-rT}$$

其中 u 为上行比率, d 为下行比率, p 为风险中性概率, r 为无风险利率, f_u 为在上行比率为 u 时预估的未来期权价值, f_d 同理, T 为到期日, e 为以 e 为底的指数函数。

同时,通过方差的基本公式 $\text{Var}(V_0) = E(V_0^2) - [E(V_0)]^2$ 可得到:

$$\sigma^2 \Delta t = pu^2 + (1-p)d^2 - [pu + (1-p)d]^2$$

其中 σ 为标的资产价值的波动率。

由 Cox、Ross 和 Rubinstein 给出的关于 p 、 u 、 d 的第三个条件: $u = \frac{1}{d}$ 。

可解得: $p = (e^{r\Delta t} - d) / (u - d)$; $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$; $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$ 。

即在相等的充分小的 Δt 时间间隔内, u 、 p 、 d 均为常数,只与 Δt 、 r 、 σ 有关,与开始时标的资产价格 S_0 无关。

因此可得出关于二叉树的单期定价模型为:

$$f = [pS_0u + (1-p)S_0d] / e^{r\Delta t}$$

在房屋的二叉树期权定价模型中,可以选取交易成交日作为决策时间节点,但在实际应用过程中,由于资产价值运动是多步的,因此可以在每个时间节点假设一个单期的二叉树模型,最后再将多个单期二叉树模型整合成为多期二叉树模型。

多期二叉树模型中囊括了很多输入量,最基本的输入量包括有: 标的资产的现值 S_0 , 期权执行价格 X , 现金流的波动率 σ , 期权有效期 T , 无风险利率 r 和单期时间的长度 $\Delta t = \frac{T}{n}$ 。

构建多时期二叉树的方法如下:

第一步: 如图 1 所示创建标的资产的二叉树网格图,其中 u 为上行比率, d 为下行比率, p 为风险中性概率:

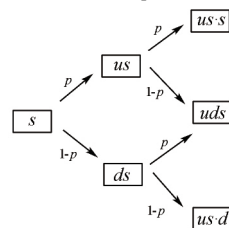


图 1 二叉树实物期权模型计算网格图

第二步: 根据假设的未来价值来计算最终的实物期权价值,计算网格图中每个节点的值:

$$f_{ij} = (i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, i+1)$$

第三步: 计算第 n 期终端对应节点的数值,比较执行期权成本和对应该执行价格的数值,选择较大的一个保留。

$$f_{ni} = \max\{S_0 d^{i-1} u^{n-i+1} - X, 0\} \quad (j=1, 2, 3, \dots, i+1)$$

推导至 n 期,可得二叉树第 n 期定价模型为:

$$f_n = \sum_{j=0}^n [C_n^j p^j (1-p)^{n-j} \max(0, S_0 u^j d^{n-j} - X)] / (e^{r\Delta t})^n$$

X 为第 n 期标的资产的投资支出, $S_0 u^j d^{n-j} - X$ 为标的资产的执行价值。

其中,由于二手房持有者拥有的不仅仅是房屋本身价值,还拥有未来对房屋进行处理的权利,传统方法中只考虑到了确定性因素对房产执行价格的影响,没有考虑到不确定性对未来的房屋价值变化带来的影响,甚至忽略了不确定性,这种情况的发生会直接导致房屋部分价值的丢失,使得二手房持有者损失这部分的经济利益。故对二手房估价的定价模型进行更正:

$$V = V_0 + f_n$$

其中 V 表示等待交易的二手房的成交价格, V_0 表示传统预估方法下二手房的估计价格, f_n 是传统预估方法容易忽略的不确定性下的实物期权价值。

可以通过计算传统方法预估得到二手房的房屋价值,再利用实物期权模型求解不确定性下该二手房的价值,最后再将两者相加,得到二手房应得的交易价格。

(二) 参数的选择

由于在实物期权定价模型中选择的参数与以往金融期权定价模型中的参数含义不同,因此对以下变量进行修正。

1. 房屋现值 S_0

房屋现值指的是在综合考虑了楼层、房型、区位因素等影响因子后得到的评估大致价格且此价格已结合南京市二手房交易市场实际情况。

2. 执行价格 X

期权的执行价格指的是房地产投资此房屋时的开发成本。

3. 期权有效期 T

期权有效期指的是期权持有者能够凭自己意愿支配期权的有效时间段。由于我国住宅用地的有效期是 70 年,因此在下文的计算中将 70 减去已经使用的年限即为剩余的期权有效期。

4. 无风险利率 r_0

无风险利率指的是期权持有者在无风险利率中可以得到的报酬率。由于文中采用的实物期权是房屋,因此可以采用央行的定期存款利率作为无风险利率的参考。

5. 房屋价值波动率 σ

房屋价值的波动率取决于当地房地产价格波动的标准差,可以采取南京市 2010~2015 年房地产价格起伏的波动率来进行代替,再根据约翰·霍尔的计算公式,可得:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

(三) 房屋单价不确定因子分析

在下文关于二手房评估的实证研究中,除了要把握好评估基准,更要具体考虑如下因素:

1. 房屋自身因素

房屋自身除了上文中提及的楼层因素,还要考虑房屋竣工后即进入折旧期,假设理论折旧期为 50 年,则年折旧率为 2%,并且旧房屋由于户型落后,例如小厨小房小卫等户型,应相应扣除 10%。

2. 环境因素

上文仅考虑了城市经济发展对房屋单价带来的影响,然而房屋外部环境因素的影响因子不仅仅由所处城市经济发展有关,还与自然有关。比如在同一地段,旧房的周边环境一般都会略逊于新开发的住宅区,结合其房屋平面布局、房型、装修标准以及施工质量,旧房屋对比新房屋都是要大打折扣的。除此以外还要考虑其地区居民结构、小区配套设施、有无物业管理等等,这些都会给房屋的单价造成较大影响,在此假设若无物业管理或非独立封闭小区,房屋单价应各下降 5%,邻近省市重点中小学的学区房房屋单价可考虑增加 15%。

3. 心理因素

如若不考虑资金因素和地区因素,人们在选择同等地段的房屋时,应偏好于新房屋而非旧房,此类心理因素落差大约在 8%。

4. 特殊因素

特殊因素即由于房地产市场是一个不完全市场,价格变动较大,其价格往往会受到一些特殊行为的影响,例如当二手房持有者急于脱手或者买卖双方不了解房屋具体信息时,房屋交易单价会出现一定的偏差,此因素难以给出一个统一的比例,只能视具体情况而定。

三、实证分析

(一) 数据来源和案例样本

以国家计委、国家土地管理局关于土地价格评估收费的通知文件以及《资产评估收费管理办法》作为政策依据,同时为了数据更符合南京市栖霞区二手房交易市场的实际背景,搜集了有关南京市二手房评估交易注意事项等区域文件,为了给研究提供正确的理论支持和数据支撑,以下案例计算过程中所采用的数据均来自安居客二手房交易网站、中国指数研究院的最新数据。此外,考虑到资料的完整性、数据公开

性和项目开展进度等因素,选择江苏省南京市栖霞区某一房屋作为案例具体数据来进行研究。

1. 评估对象地理位置概况

估价对象所在区域周边有多个公交车站,附近配套有南京市栖霞区仙林医院、九霄梦天地等,周边设施齐全,毗邻南京地铁二号线,位属南京市仙林大学城,周边中小学密集,交通便利(东方天郡,位于南京市栖霞区)。房屋具体情况如表 1 所示。

表 1 南京市栖霞区东方天郡小区二手房交易价格

	建筑面积/ m^2	所属楼层	房本年限	有无电梯	配套设施	房屋单价/元
1 号房屋	111	中	满五年	有	地铁、学校、商场、医院	42342
2 号房屋	115	高	满五年	有	地铁、学校、商场、医院	34322
3 号房屋	110	高	满五年	有	地铁、学校、商场、医院	37945
4 号房屋	74	中	满五年	有	地铁、学校、商场、医院	41892
5 号房屋	74	中	满五年	有	地铁、学校、商场、医院	41211
6 号房屋	75	低	满五年	有	地铁、学校、商场、医院	33578
7 号房屋	75	低	满五年	有	地铁、学校、商场、医院	36536

数据来源:安居客二手房交易网站。

2. 评估对象建筑物概况

估价对象为 2008 年建造的普通商品房住宅,实木地板、精装修、采光好视野好,设施齐全,房型坐南朝北,土地剩余使用年限为 59 年,建筑面积为 110 平方米。根据对房屋自身因素、环境因素、买卖双方心理因素、特殊因素的考虑,对其进行估价。

首先根据大多数购买二手房人的心理,楼层过低会导致房屋潮湿阴暗没有阳光,噪声大,而高层上下楼不方便、雨天可能会漏水,因此,在没有其他因素影响的情况下,中间楼层相比较高层低层来说价格会更高一些,从表 1 中也可以看出这一点。

因此,如何定一个令买卖双方都满意的价格也成了二手房市场交易中较为重要的一个问题。例如,在二手房进行估价时,由于没有很好地采用科学的量化方法,仅凭估价人员的经验判断打分,从而使得估价结果的可信度、科学性和客观性都受到了很大的影响。因此,为了可以科学地对二手房进行估价,必须合理地考虑影响因子和比较因素,从而减少修正的随意性。

(二) 实证研究

二叉树实物期权模型计算路线:

确定模型并且输入参数——计算模型中的因子——对期权模型进行求解。

1. 确定实物期权模型并且输入参数

(1) 标的资产的现值 S_0 。二手房的价值评估标准应适当参考当地房地产现行的市场价格。通过安居客二手房交易网站选择了与所选等待交易的房屋条件相类似的三个交易实例进行对比,通过对交易时间、房屋所处楼层、房屋内部设施的修正,即可以得到对所选等待交易房屋的有效房屋单价的大致修正结果。

经过计算,实例“东方天郡 1 号房屋”,房屋面积 111 平方米,所处楼层 8 层,实际售出价格为 42342 元/平方米,“东方天郡 2 号房屋”,房屋面积 115 平方米,所处楼层 16 层,实际售出价格为 34322 元/平方米,“东方天郡 3 号房屋”,房屋面积 74 平方米,所处楼层 9 层,实际售出价格为 41892 元/平方米。根据安居客所给数据进行整合可得出以下结论:

$$\text{实例的修正单价} = \text{比较实例成交价格} \times \frac{\text{正常市场价格}}{\text{实际成交价格}} \times \frac{\text{估价时点价格}}{\text{成交日期价格}} \times \frac{\text{估价对象状况价格}}{\text{实例状况价格}}$$

经过计算可得,东方天郡1号房屋修正后价格为41101元/平方米;东方天郡2号房屋修正后价格为30187元/平方米;东方天郡3号房屋修正后价格为33906元/平方米,待售二手房实际现值 S_0 为3923480元。

(2) 执行价格 X 。执行价格即房地产在出资开发此地区时所花费的成本现值,实例中的 X 取值为1670790,该数据来自东方天郡售楼处。

(3) 期权剩余有效期 T 。该小区建成日期为2008年,到估算节点2019年为止已使用11年,按照房屋70年产权计算,实例中待售房屋的剩余有效期 T 为59年。

(4) 无风险利率 r 。可选择5年期国债作为无风险利率的参考标准,故取 r 为4.27%。

(5) 波动率 σ 。根据整理房天下二手房交易网站出具的南京市栖霞区仙林2019年1月至12月的二手房交易均价走势图(图2),可知栖霞仙林12月二手房参考均价为32493元/平方米,环比1月下降1.58%,同比2018年同期上涨1.32%。

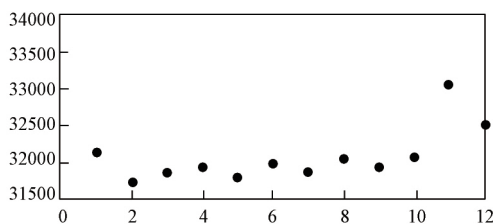


图2 2019年1月至12月仙林二手房价格走势

数据来源:房天下二手房交易 App。

根据约翰·霍尔的波动率公式计算可得:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = 36.8\%$$

因此表2总结了上述二叉树实物期权模型中的参数取值。

表2 实物期权参数取值表

参数名称	参数符号	数据取值
标的资产现值	S_0	3923480
执行价格	X	1670790
期权剩余有效期	T	59
无风险利率	r	4.27%
波动率	σ	36.8%

2. 模型计算结果

为提高计算效率和计算结果的准确性,运用matlab编程的方法对数值进行求解,计算其1000期,经过编程运算,得到不确定性下的价值 f_n 为2082910,因此可得出实例中待售二手房的大致估价 $V = V_0 + f_n = 3923480 + 2082910 = 6006390$ 。

(三) 该二手房实际成交价格与实物期权法的结果对比

经过实际成交金额可得,房屋持有人最终获得了4173950元,而根据上述模型计算出的估计值大约为6006390元,其中误差率为43.9%,通过对比实际成交价格与模型估计值,可以很明显地发现运用实物期权模型法考虑的房屋价值比实际成交价值高出43.9%,也可以充分说明南京市栖霞区二手房实际交易价格与房屋市值有较大差距,实际交易价格并没有充分体现该房屋实际价值。

四、总结

随着我国房地产行业的飞速发展,二手房交易在房屋买卖中日益兴盛,对二手房进行准确估价也随即成了二手房交

易市场上尤为重要的一部分。对广大二手房持有者来说,拥有二手房就相当于拥有了一项实物期权,也就是一个再次投资的机会。二手房持有者可以自行决定选择行使期权或放弃期权,在行使期权时,持有者需要付出一定的执行成本,也就意味着拥有这项实物期权的同时,获利与风险并存。因此,在建模时,目的就是为了降低持有者的风险指数,使他们在履行相应法律条款的情况下,给予此实物期权一个更好的估价,使其交易数目与实际的期权价值相匹配。使得持有方不会以低于市场价的价格出售期权,同时也能保证期权购买方在期权市场上的权利。实物期权模型作为对传统评估方法的发展,可以弥补传统评估方法不能灵活反映未来变化的缺陷,同时也将房地产市场可能出现的不确定性纳入考量范围。

南京市作为江苏省省会城市,近年来二手房交易在楼市总交易中呈现上升趋势,因此,在上文中,主要以南京市栖霞区某二手待售房屋为例,检验了其标价和实际价值的误差率,由于仅考虑了房屋所处楼层和区位因素、房屋土地有效期等对房屋单价的影响,而实际生活中影响房屋单价的因素还包括房屋内部装修、装修程度、朝向、是否学区房以及二手房持有者售出欲望等等,因此从得到的最终误差率可以发现,文章的考虑因素依旧是不够完善的。例如,房屋装修问题是二手房在交易市场有关买卖双方争执较为频繁的一个问题,卖方因房屋已经装修或装修较为高档,希望在售出房屋标价时可以将装修费用作为房屋成本一同加入卖价;而买方认为,该房屋装修样式不符合自己的需求,因此不同意将房屋价格包含房屋装修费用。在此情况下,无法运用二叉树模型将此房屋进行估价,而应该使用在实际操作中较为普遍的房地产价格评估的替代原则及最高最佳使用原则进行灵活处理。并且对于在同一城市的不同住宅,由于城乡发展水平并不完全相同,因此房屋单价也会因此产生差异,文章仅考虑了取平均值,没有考虑将住宅市场细分为高档、中高档、低档住宅市场。

总之,由于传统方式缺陷的不断暴露、对待售房屋无法进行准确的价格评估在交易市场中产生了较多纠纷,引起了学术界的广泛关注,因此更多学者选择利用实物期权的理论方法对传统方法加以改进。尤其对于文章没有涉及的有关北京、上海、深圳等一线城市而言,城市化进程的加快更增加了房屋区位因素等方面的不确定性。因此在二手房的交易市场中,各大评估公司应该在采用传统方式的基础上,考虑不确定因素对其造成的影响,将不确定性因素纳入价格评估的考察范围,以满足买卖双方的诉求,从而推动我国城市化进程向更好更快的方向发展。

参考文献:

- [1]高文林.二手房评估的影响因素及方法选择[J].中国房地产,2012(8).
- [2]邵辉,张宇.论议二手房价格评估[J].市场论坛,2008(3).
- [3]谢正航.二叉树模型和B-S模型对可转债定价有效性的比较[D].杭州:浙江大学,2019.
- [4]夏君恩,魏星,王玲玲.城市房屋拆迁补偿的二叉树期权定价模型[J].科技和产业,2018(8).
- [5]BLACK F, SCHOLES M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. Jour Polit Eco, 1973, 81: 637-659.
- [6]刘倬君.基于二叉树模型的实物期权法在专利权价值评估中的应用研究[D].保定:河北大学,2018.
- [7]陈言凤.基于Hedonic模型的二手房价格评估系统的设计与实现[D].马鞍山:安徽工业大学,2019.
- [8]MERTON ROBERT C. The theory of rational option pricing[J]. Bell Journal of Economics and Management Science, 1973(4).