1 Langrange 插值

问题：用线性插值和抛物线插值方法求 $\sqrt{115}$

解答：（线性插值）取 $x_0=100$，$y_0=10$，$x_1=121$，$y_1=11$, 可得

$$L_1(xx)=\frac{x-121}{100-121}\times 10+\frac{x-100}{121-100}\times 11$$

于是

$$\sqrt{115}\approx\frac{115-121}{100-121}\times 10+\frac{115-100}{121-100}\times 11=10.7143$$

(抛物线插值) 如果对线性插值的精度有一定的质疑，可以增加一个插值节点 $x_2=144$，$y_2=12$, 可得

$$\begin{aligned}L_2(115)=&\frac{(115-121)(115-114)}{(100-121)(100-144)}\times 10+\frac{(115-100)(115-144)}{(121-100)(121-144)}\times 11\\&+\frac{(115-100)(115-121)}{(144-100)(144-121)}\times 12=10.7228\end{aligned}$$

$\sqrt{115}$ 的精确值是 10.723805，可见线性插值有 3 位有效数字，而抛物线插值有四位有效数字。

2 Newton 插值

已知函数 $f(x)=shx$ 的函数值如表所示，构造 4 次 Newton 插值多项式并计算 $f(0.596)=sh0.596$ 的值。

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0.40	0.55	0.65	0.80	0.90	1.05
$f(x_k)$	0.41075	0.57815	0.69675	0.88811	1.02652	1.25386

通过 MATLAB 计算得到的结果为:

k	x_k	$f[x_k]$	$f[x_{0k}]$	$f[x_{01k}]$	$f[x_{012k}]$	$f[x_{0123k}]$	$f[x_{01234k}]$
0	0.4000	0.4108					
1	0.5500	0.5782	1.1160				
2	0.6500	0.6967	1.1440	0.2800			
3	0.8000	0.8881	1.1934	0.3096	0.1973		
4	0.9000	1.0265	1.2315	0.3301	0.2005	0.0312	
5	1.0500	1.2539	1.2971	0.3622	0.2055	0.0325	0.0085

计算结果：

$$N_4(x) = 0.4108 + 1.116(x-0.4) + 0.2800(x-0.4)(x-0.55)$$

$$+0.1973(x-0.4)(x-0.55)(x-0.65)+0.0312(x-0.4)(x-0.55)(x-0.65)(x-0.8)$$

$$sh0.596 = N_4(0.596) \approx 0.6319$$

3 Hermite 插值

问题：设 $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$，$x_0 = \frac{1}{4}$,$x_1 = \frac{9}{4}$, 试求 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{4}, \frac{9}{4}]$ 上的 3 次 Hermite 插值多项式 $H(x)$

解答：通过 MATLAB 计算可得最终的插值多项式为：

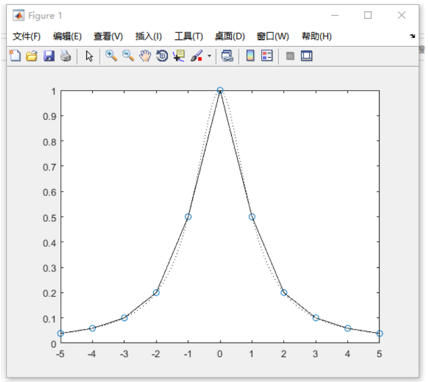
$$H(x) = -\frac{x^3}{16} + \frac{39x^2}{64} + \frac{117x}{256} - \frac{27}{1024}$$

4 分段线性插值

问题:$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, x \in [-5,5]$,取等距节点 $x_k = -5+k(k=0,1,2,\ldots,10)$，试构造分段线性插值函数。

解答:首先差值多项式的表达式应该为 $P(x) = I_n(x) = \sum_{i=0}^{10} f(x_i)l_i(x)$，下面我们画出函数 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 的图像以及插值函数的图像：

```
x = -5:0.1:5;
a = f(x);
plot(x,a,'b--');
hold on;
x = -5:1:5;
a = f(x);
plot(x,a,'bo',x,a);
hold off;
function a = f(x)
a = 1./(1+x.^2);
end
```



从上图可以看出，分段线性插值函数的图像光滑性要差一点，但是逼近函数的效果不错。

5 三次样条插值

问题：已知 $y = f(x)$ 在节点 $x = -1, 0, 1$ 处的函数值 $y = -1, 0, 1$ 及在端点的导数值 $y_0' = f'(-1) = 0$,$y_1' = f'(1) = -1$，求区间 [-1,1] 步长 0.25 的各点的函数值。

解答：我们可以通过 spline 函数或 csape 函数执行，如图所示：

```
x = -1:0.25:1;
pp = csape([-1 0 1],[-1 0 1],'complete',[0,-1]);
y = ppval(pp,x);
plot(x,y)
%%
x = -1:0.25:1;
pp = spline([-1 0 1],[0,[-1 0 1],-1]);
y = ppval(pp,x);
plot(x,y)
```

最终的结果图像为：

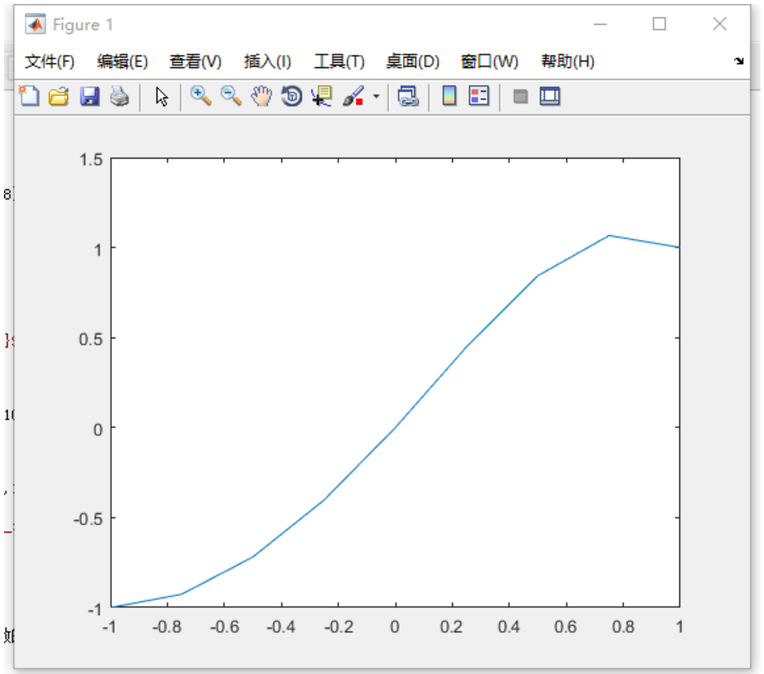


Figure 1
文件(F) 编辑(E) 查看(V) 插入(I) 工具(T) 桌面(D) 窗口(W) 帮助(H)
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1 -0.8 -0.6 -0.4 -0.2 0 0.2 0.4 0.6 0.8 1