偏微分方程解答

1.解：

(a) 设整个杆上单位时间产生的总热能为 Δ_E，则

$$\frac{d\Delta_E}{dx} = Q(x) \Rightarrow \Delta_E = \int_0^L Q(x)dx = \int_0^L K_0 x dx = \frac{K_0 L^2}{2}$$

(b) 设从 $x=0$ 和 $x=L$ 在单位时间内流出的热量分别为 ΔQ_0 和 ΔQ_L，杆的质量密度为 ρ，比热容为 c。因为杆均匀，则可认为 ρ, c, K_0 为常值，有

$$\Delta Q_0 = Q(0) - (\phi(0) + \frac{\partial e}{\partial t}|_{x=0}),\quad \Delta Q_L = Q(L) - (\phi(L) + \frac{\partial e}{\partial t}|_{x=L})$$

因为 $u|_{x=0} = u|_{x=L} = 0$，则 $\frac{\partial e}{\partial t}|_{x=0} = \frac{\partial e}{\partial t}|_{x=0} = 0$，而 $Q(x) = K_0 x$，所以

$$\Delta Q_0 = -\phi(0), \Delta Q_L = K_0 L - \phi(L)$$

因为

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} + Q = -\frac{\partial \phi}{\partial x} + K_0 x, \qquad (x,t) \in (0,L) \times (0,+\infty) \tag{$*$}$$

同时 $\phi = -K_0 \frac{\partial u}{\partial x}$, $e = \rho c u$，代入得

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} = K_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + K_0 x$$

即

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\rho c}{K_0}\frac{\partial u}{\partial t} = -x, & (x,t) \in (0,L) \times (0,+\infty) \\ u(0,t) = u(L,0) = 0, & t \in (0,+\infty) \end{cases}$$

所以

$$u = \frac{1}{6}x(L-x)(x+L) \Rightarrow \phi = -K_0 \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{K_0 x^2}{2} - \frac{K_0 L^2}{6}$$

所以

$$\Delta Q_0 = -\phi(0) = \frac{K_0 L^2}{6},\ \Delta Q_L = K_0 L - \phi(L) = K_0 L - \frac{K_0 L^2}{3}$$

(c) 以整根杆为对象考虑，由于杆处于平衡温度，则杆的内能不变，故杆的总吸热等于总放热，即

$$\Delta E = \Delta Q_0 + \Delta Q_L = K_0 L - \frac{K_0 L^2}{6}$$

2.解：

(a) 设 $u(x,y,z,t)$ 表示一种污染物的浓度，一个曲面 S，它所围的区域设为 R，由于扩散在 t 到 $t+\Delta t$ 这段时间内，通过 S 流入 R 的总量为

$$M_1 = \int_t^{t+\Delta t} \iint_S a^2 \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + b^2 \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + c^2 \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma \, dSdt$$

其中 a^2, b^2, c^2 为沿 x, y, z 方向的扩散系数，由 $Gauss$ 公式，则 M_1 可化为

$$M_1 = \int\limits_t^{t+\Delta t} \iiint_R a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} \cos\alpha + b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} \cos\beta + c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial^2 z} \cos\gamma \, dxdydzdt$$

(b) 菲克第一定律：在单位时间内通过垂直于扩散方向的单位截面积的扩散物质流量（称为扩散通量 $Diffusion\,flux$，用 J 表示）与该截面处的浓度梯度（$Concentration\,gradient$）成正比，也就是说浓度梯度越大，扩散通量越大。这就是菲克第一定律，它的数学表达式如下

$$J = -D\frac{du}{dx}$$

菲克第一定律只适应于 J 和 u 不随时间变化——稳态扩散（$Steady-state\,diffusion$）的场合。对于稳态扩散也可以描述为：在扩散过程中，各处的扩散组元的浓度 u 只随距离 x 变化，而不随时间 t 变化，每一时刻从前边扩散来多少原子，就向后边扩散走多少原子，没有盈亏，所以浓度不随时间变化。实际上，大多数扩散过程都是在非稳态条件下进行的。非稳态扩散（$Nonsteady-state\,diffusion$）的特点是：在扩散过程中，$J$ 随时间和距离变化。通过各处的扩散通量 J 随着距离 x 变化，而稳态扩散的扩散通量则处处相等，不随时间而发生变化。对于非稳态扩散，就要应用菲克第二定律了，但题目这样假设是为了后面推导的简便。设在一段时间内，R 内污染物的总量减少为

$$M_2 = \int\limits_t^{t+\Delta t} \iiint_R k^2 u \, dxdydzdt$$

由菲克定律

$$\begin{aligned} J = M1 - M2 &= \iiint_R u(x,y,z,t+\Delta t) - u(x,y,z,t) \, dxdydz \\ &= \int\limits_t^{t+\Delta t} \iiint_R \left[a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} \cos\alpha + b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} \cos\beta + c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial^2 z} \cos\gamma - k^2 u\right] dxdydzdt \end{aligned}$$

(c)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} \cos\alpha + b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} \cos\beta + c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial^2 z} \cos\gamma - k^2 u$$

3.解：

(1) 模型假设：

假设一：导弹与敌舰的速率恒定。

假设二：导弹飞行的轨迹切线方向始终指向敌舰。

假设三：导弹飞行的轨迹和敌舰行驶的高度始终在同一平面内。

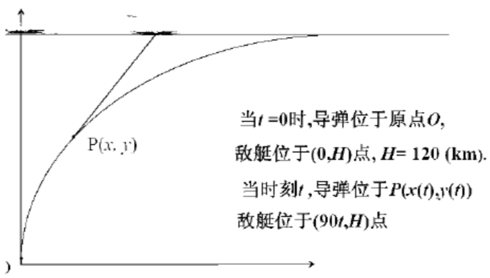
假设四：导弹与敌舰的长度可以忽略，均可看成物理质点。

假设五：外界对导弹和敌舰的运动没有影响。

(2) 记 (x, y) 为坐标位置，t 为经历的时间，v_e 为敌舰的速度，v_w 为导弹的飞行速度，H 为敌舰最初点与导弹的距离

(3) 建模

设坐标系如下，取导弹基地为原点 $O(0,0)$，x 轴指向正东方，y 轴指向正北方



当 $t=0$ 时，导弹位于 O，敌舰位于点 $(0,H)$（$H=120\,km$），设导弹 t 时刻的位置为 $P(x(t),y(t))$，则

$$(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2=v_w^2 \qquad (1)$$

其中 $v_w=450\,(km/h)$

另外在 t 时刻，敌舰的位置应该为 $M(V_et,H)$，其中 $v_e=90(km/h)$。由于导弹轨迹的切线方向必须指向敌舰，即直线 PM 的方向就是导弹轨迹上点 P 的切线方向，故有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{H-y}{v_et-x} \qquad (2)$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dx}{dt}(\frac{H-y}{v_et-x}) \qquad (3)$$

方程 (3) 的初始条件为

$$x(0)=0,\ y(0)=0 \qquad (4)$$

则

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=\frac{v_w}{\sqrt{1+(\frac{H-y}{v_et-x})^2}} \\ \frac{dy}{dt}=\frac{v_w}{\sqrt{1+(\frac{v_et-x}{H-y})^2}} \\ x(0)=0, \quad y(0)=0 \end{cases}$$

构成了一个关于时间变量 t 的一阶微分方程组。

由 (2) 得

$$\frac{dx}{dy}(H-y)=v_et-x$$

两边对 t 求导得

$$\frac{d^2xdy}{dy^2dt}(H-y)+\frac{dx}{dy}(-\frac{dy}{dt})=v_e-\frac{dx}{dt}$$

即有

$$\frac{d^2xdy}{dy^2dt}(H-y)=v_e$$

把 (1) 写为 $\frac{dy}{dt}=\frac{v_w}{\sqrt{(\frac{dx}{dy})^2+1}}$ 代入上式，就得到轨迹方程，这是一个二阶非线性微分方程，加上初值条件，则

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dy^2}\frac{(H-y)}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+1}}=\frac{v_e}{v_w} \\ x\big|_{y=0}=0 \\ \frac{dx}{dy}\Big|_{y=0}=0 \end{cases}$$

即导弹轨迹的数学模型。

4.解：

模型假设：

1) l_1 为烟草长，l_2 为过滤嘴长，$l=l_1+l_2$，毒物量 M 均匀分布，密度 $w_0=M/l_1$

2) 点燃处毒物随烟雾进入空气和沿香烟穿行的数量比是 $a':a,\ a'+a=1$

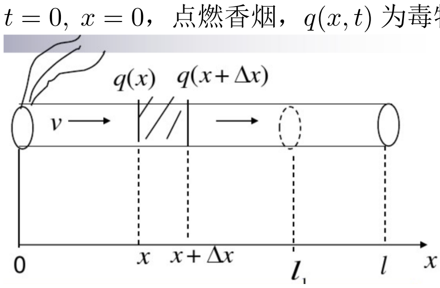
3) 未点燃的烟草和过滤嘴对随烟雾穿行的毒物的（单位时间）吸收率分别是 b 和 β

4) 烟雾沿香烟穿行速度是常数 v，香烟燃烧速度是常数 u，$v\gg u$

5) 吸一支烟毒物进入人体总量为 Q

模型建立：

$t=0,\ x=0$，点燃香烟，$q(x,t)$ 为毒物流量，$w(x,t)$ 为毒物密度，$w(x,0)=w_0$，如图



$$Q=\int_0^T q(l,t)dt,\ T=l_1/u$$

1) 求 $q(x,0)=q(x)$

$$q(x)-q(x+\Delta x)=\begin{cases} bq(x)\Delta\tau,\ 0\le x\le l_1, \\ \beta q(x)\Delta\tau,\ l_1\le x\le l, \end{cases}$$

其中 $\Delta\tau=\frac{\Delta x}{v}$，则

$$\frac{dq}{dx}=\begin{cases} -\frac{b}{v}q(x),\ 0\le x\le l_1 \\ -\frac{\beta}{v}q(x),\ l_1\le x\le l \end{cases}$$

由于 $q(0)=aH_0,\ H_0=uw_0$，所以求出 $q(x)$

$$q(x)=\begin{cases} aH_0e^{-\frac{bx}{v}}, & 0\le x\le l_1 \\ aH_0e^{-\frac{bl_1}{v}}e^{-\frac{\beta(x-l_1)}{v}}, & l_1\le x\le l \end{cases}$$

2) 求$q(l,t)$

在 t 时刻，香烟燃至 $x=ut$, $H(t)=uw(ut,t)$，由

$$q(x,t)=\begin{cases} aH(t)e^{-\frac{b(x-ut)}{v}}, & ut\le x\le l_1 \\ aH(t)e^{-\frac{b(l_1-ut)}{v}}e^{-\frac{\beta(x-l_1)}{v}}, & l_1\le x\le l \end{cases}$$

我们得到

$$q(l,t)=auw(ut,t)e^{-\frac{b(l_1-ut)}{v}}e^{-\frac{\beta l_2}{v}}$$

3) 求$w(ut,t)$

因为

$$w(x,t+\Delta t)-w(x,t)=b\frac{q(x,t)}{v}\Delta t$$

且

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t}=\frac{b}{v}auw(ut,t)e^{-\frac{b(x-ut)}{v}} \\ w(x,0)=w_0 \end{cases}$$

所以我们有

$$w(ut,t)=\frac{w_0}{a'}\left(1-ae^{-\frac{a'but}{v}}\right),\quad a'=1-a$$

4) 最后计算吸入人体中毒物总量 Q

由

$$\begin{aligned} w(ut,t)&=\tfrac{w_0}{a'}\left(1-ae^{-\frac{a'bu}{v}}\right) \\ q(l,t)&=auw(ut,t)e^{-\frac{b(l_1-ut)}{v}}e^{-\frac{\beta l_2}{v}} \end{aligned}$$

则

$$q(l,t)=\frac{auw_0}{a'}e^{-\frac{bl_1}{v}}e^{-\frac{\beta l_2}{v}}\left(e^{-\frac{but}{v}}-ae^{-\frac{abut}{v}}\right)$$

所以 Q 的表达式为

$$Q=\int_0^{l_1/u}q(l,t)dt=\frac{aw_0v}{a'b}e^{-\frac{\beta l_2}{v}}\left(1-e^{-\frac{a'bl_1}{v}}\right)$$

解得 Q 为

$$Q=aMe^{-\frac{\beta l_2}{v}}\varphi(r)\text{，其中 }r=\frac{a'bl_1}{v},\ \varphi(r)=\frac{1-e^{-r}}{r}$$

结果分析：

1) Q 与 a,M 成正比，aM 是毒物集中在 $x=l$ 处的吸入量。

2) $e^{-\frac{\beta l_2}{v}}$ 为过滤嘴因素，b, l_2 为负指数作用，$aMe^{-\frac{\beta l_2}{v}}$ 是毒物集中在 $x=l_1$ 的吸入量。

3) $\varphi(r)$ 为烟草的吸收作用，$r=\frac{a'bl_1}{v}\ll 1$，$\varphi(r)\doteq 1-r/2$

$$Q\doteq aMe^{-\frac{\beta l_2}{v}}(1-\frac{a'bl_1}{2v})\text{，其中 }b,\ l_1\text{ 为线性作用}$$

4) 与另一支不带过滤嘴的香烟比较，w_0, b, a, v, l 均相同，吸至 $x=l_1$ 扔掉

带过滤嘴：

$$Q_1=\frac{aw_0v}{a'b}e^{-\frac{\beta l_2}{v}}\left(1-e^{-\frac{a\cdot bl_1}{v}}\right)$$

不带过滤嘴：

$$Q_1=\frac{aw_0v}{a'b}e^{-\frac{bl_2}{v}}\left(1-e^{-\frac{a\cdot bl_1}{v}}\right)$$

$$\frac{Q_1}{Q_2}=e^{-\frac{(\beta-b)l_2}{v}}\text{，提高 }\beta-b\text{ 与加长 }l_2\text{，效果相同}$$