

变分法建模作业

1.求泛函 $J[y(x)] = \int_a^b \frac{1}{2}(-4y'^2 + y''^2)$, 满足条件 $y(0)=y(\frac{\pi}{4}), z'(0) = -1, z'(\frac{\pi}{4}) = 1$ 的极值曲线.

2.设质点以速度 $v = x$ 从 $A(x_0, y_0)$ 沿曲线 $y = y(x)$ 移动到 $B(x_1, y_1)$,求曲线 $y = y(x)$ 为何形状时质点移动时间最少?

3.求泛函 $J[y(x), z(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y'^2 + z'^2 + 2yz)dx$ 满足条件 $y(0) = 0, y(\frac{\pi}{2}) = -1, z(0) = 0, z'(\frac{\pi}{2}) = 1$ 的极值曲线.

4.受控系统为

$$\dot{x}(t) = u(t), x(0) = 1$$

性能指标为

$$J(u) = ax^2(t_f) + \int_0^{t_f} [u^2(t) + 1]dt$$

其中, $a > 1$ 为常数, 求当 t_f 自由时的最优控制 $u^*(t)$ 及最优轨线 $x^*(t)$.

5.考虑一个简单的经纪机构, 其资金储备 $K(t)$ 为唯一的生产因素. 令 $F(K)$ 为该经纪机构的产出速率 (当 K 为资本储备时). 假定 $F(0) = 0, F(K) > 0, F'(K) > 0$, 以及当 $K > 0$ 时 $F'' < 0$. 后一条件是指减少的边际资金生产率. 这个产出既可以被消费也可以用来再投资, 作为进一步的资金积累. 令 $C(t)$ 为分配给消费者的产出量, $I(t) = F(K(t)) - C(t)$ 为投资量, δ 为订场的资本贬值率, $u(C(t))$ 为消费的社会受益, ρ 表示社会会扣率, T 表示有限时间范围, 并假定 $u'(0) = \infty$.

(1)建立资金储备状态方程.

(2)建立一个选举任期 T 年的政府最优资金积累模型.