常微分方程作业解答

1.解：

先将速度单位由千米/小时换算为米/秒，得到假设的行驶速度为 12.5 m/s，加速度，速度，路程的关系如下

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = a \\ v(0) = 12.5 \\ s(0) = 10 \end{cases}$$

解得减速度为 $a = -7.8125\ m/s$，即制动减速度为 7.8125 m/s，记为 a_0。由于肇事司机的制动距离是 21米，在同样的制动减速度下所需的时间为 $t = \sqrt[2]{\frac{2s}{a_0}} = 2.3186\ s$，所以司机的实际行驶速度为 $v = a_0 t = 18.114\ m/s = 65.21\ km/h$

2.解：

由于产品的发展更替，商品的销售速度的变化率随着商品的销售速度的增加而减少，即销售速度的二阶导数小于 0，即销售速度是自然衰减的。

设 $s(t)$ 为 t 时刻的销售速度，M 为该商品的市场容纳量 (即销售速度的上限)，$\lambda > 0$ 为衰减因子常数，由于售出的商品本身又发挥了广告的作用，广告的作用是随时间增加的，$A(t)$ 为 t 时刻的广告投入，P 为响应系数，表示广告投入对销售速度的影响 (广告限度以内)。

根据假设，我们建立数学模型：

$$\frac{ds}{dt} = P \cdot A(t) \cdot (1 - \frac{s(t)}{M}) - \lambda \cdot s(t)$$

上式与 $A(t)$ 成正相关，因此一定时期内广告投入越大，销售速度越快

由于商品市场的饱和性，当销售进行到某一时刻时，无论怎样做广告都无法阻止销售速度的下降，因此我们选择如下广告策略：

$$A(t) = \begin{cases} k \cdot s(t) & 0 \le t \le \tau \\ C & t > \tau \end{cases}$$

其中 C 为广告投入的限度

当 $t \in [0, \tau]$，令

$$P \cdot A(t) \cdot (1 - \frac{s(t)}{M}) - \lambda \cdot s(t) = 0$$

得平衡解

$$s(t_0) = \frac{P \cdot k - \lambda}{P \cdot k} \cdot M$$

记

$$f[s(t)] = P \cdot A(t) \cdot (1 - \frac{s(t)}{M}) - \lambda \cdot s(t)$$

易得

$$f'[s(t)] = P \cdot k - \frac{2P \cdot k \cdot s(t)}{M} - \lambda$$

所以：当 $\lambda < P \cdot k$ 时，$s(t_0)$ 是稳定的平衡解，即 $\lambda < P \cdot k$ 是广告策略中 k 必须满足的条件。由分析可得当 $\lambda < P \cdot k$ 时，$f[s(t)]$ 在 $s(t) = M/2$ 时可取到抛物线顶点。

令稳定解 $s(t_0) = M/2$ 得

$$\lambda = \frac{P \cdot k}{2}$$

以及最大销售量

$$y_m = P \cdot k \cdot \frac{M}{4}$$

由此可知当衰减因子常数 $\lambda = \dfrac{P \cdot k}{2}$ 时可保持较为稳定的销售速度，且使销量最大，最大销量为 $y_m = P \cdot k \cdot \frac{M}{4}$

3.解：

设在 t 时刻狗的体内含有的药量为 $x(t)$，若每单位浓度的药减少速率为定值，则药的总减少率与当前药的含量成正比关系，可得如下微分方程

$$\frac{dx}{dt} = -kx$$

其中 k 为比例系数，解得

$$x(t) = x(0)e^{-kt}$$

又有 $x(5) = x(0)/2$，解得 $k = \frac{ln2}{5}$，所以

$$x(t) = x(0)2^{-\frac{1}{5}t}$$

若使 $x(1) \geq 45\, mg/kg$，则有 $x(0) \geq 45 * 2^{\frac{1}{5}}\, mg/kg$，所以应注射 $y = 50 * 45 * 2^{\frac{1}{5}} = 2584.57\, mg$ 的麻醉药

3.解：

分析：每个氩原子由九个钾原子蜕变而来，可知当氩原子个数为 K 时，最初的钾原子个数为 $10K$，问题转化为：已知衰变到一半的时间，求衰变到十分之一的时间

衰变方程可以设为

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

其中 N 代表体系中钾原子的量，t 为时间，dN/dt 便是体系发生反应的速率，λ 是反应速率常数.

由上述反应速率方程可以获得体系中钾原子的量随时间变化的公式

$$N_t = N_0 e^{-\lambda t}$$

其中 N_0 是初始时刻钾原子的量，N_t 是 t 时刻钾原子的量，可以计算当 $N_t = N_0/2$ 时有

$$\frac{1}{2}N_0 = N_0 e^{-\lambda t_{\frac{1}{2}}}$$

则

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

已知 $t_{\frac{1}{2}} = 1.28 \times 10^9$，代入可以解得 $\lambda = 5.4152 \times 10^{-10}$，同时由 $\frac{N_0}{10} = N_0 e^{-\lambda t_{\frac{1}{10}}}$ 解得

$$t_{\frac{1}{10}} = 4.25 \times 10^9$$