厦门大学
XIAMEN UNIVERSITY

差分方程方法

谭 忠

数 学 科 学 学 院
SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES

厦门大学
XIAMEN UNIVERSITY

Part 1

源头问题与当今应用

许多事件在发展变化时，其因素都是以等时间间隔为周期变化着的。例如，银行中的定期存款是按所设定的时间等间隔计息、外贸出口额按月统计、国民收入按年或月统计、产品的产量按月统计、股票按几秒计数等等。

注意到这类变量是离散型变量，通常我们希望通过某种机理或数据本身的规律将后面的数据与前面一个或两个数据之间建立定量关系，这种描述离散型变量之间的定量关系就是差分方程模型。

一、源头问题

差分方程是含有取离散值变量的函数及其差分的方程，早期是作为有限差分学的一个部分出现的，并与有限差分学同时发展起来。

十七世纪到十八世纪，伯努利 (Bernoulli)、欧拉 (Euler)、牛顿 (Newton)等分别在研究函数插补法和组合计数问题的同时，建立了差分方程理论．此后，随着数值分析、离散数学以及各种数学物理问题的深入研究，差分方程理论得到了进一步的发展。

近年来，由于计算机的迅速发展，信息科学、工程控制、医学、生物数学、现代物理、社会经济等自然科学和边缘学科所研究处理的很多重要问题，都是由差分方程来描述的，如在种群生态学中，用差分方程来描述种群数量的变化规律：在经济学中用来描述价格和需求，成本与收益等之间的关系等，在控制论中，被称为采样数据控制系统的数学模型也是差分方程。

差分方程也出现在微分方程的离散化研究中．但差分方程并不是微分方程的特例，它具有自身的特殊性和理论体系．因为人们发现在解的振动性或渐近性等方面，微分方程与其有很多本质差别。

二、当今应用

1、一阶线性差分方程问题

例 人口问题： 令 $P_n = P(n)$ 表示某人口群体在时间段 n 开始时的总数，若按年计算，设初始年为 0，试研究人口的变化模型.

例 借款问题： 设 P(0) 是借款，b 是利率 (通常用百分数 i% 表示)，试研究账单上钱的总数变化的模型。

2、二阶线性差分方程问题

有的实际问题可以建立起二阶差分方程，比如 1202 年由比萨的 Leonardo(列奥纳多又称斐波那契)提出 Fibonacci 问题.

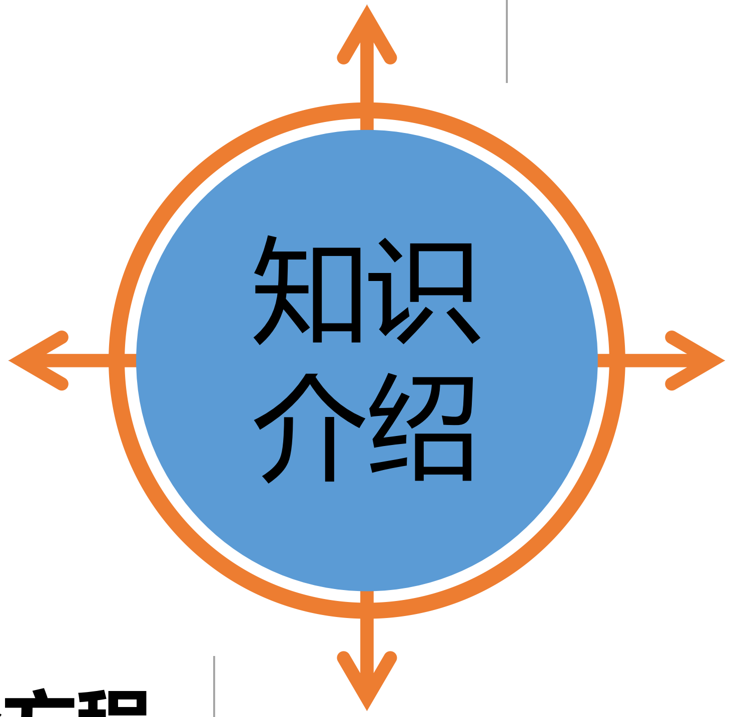
例 Fibonacci 问题： 现有一对家兔，设每对成兔一个月后每月生一对幼兔，而每对幼兔在一个月后变成成兔，如果家兔不死，问在 n 个月后将有多少对家兔?

3、差分方程组的问题

有的实际问题涉及多个变量的情形.

例 凯恩斯（Keynes.J.M）乘数动力学：设 Y_t 表示 t 期国民收入，C_t 为 t 期消费，I_t 为 t 期投资，I_0 为自发（固定）投资，ΔI 为周期固定投资增量。如何确定这些变量之间的量化关系?

Part 2 差分方程的思想与建模方法



01 函数的差分

02 差分方程的阶数

03 齐次线性差分方程

04 非齐次线性差分方程

差分的基本概念与理论

一、函数的差分

设自变量 t 取离散的等间隔整数值:$t = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$，$y_t$ 是 t 的函数，记作 $y_t = f(t)$．显然，y_t 的取值是一个序列，过去学过的数列就是这类特殊的函数．当自变量由 t 改变到 $t + 1$ 时，相应的函数值之差称为函数 $y_t = f(t)$ 在 t 的**一阶差分**，记作 Δy_t，即

$$\Delta y_t = y_{t+1} - y_t = f(t+1) - f(t)$$

由于函数 $y_t = f(t)$ 的函数值是一个序列，按一阶差分的定义，差分就是序列的相邻值之差。

其它定义：

序列 $A = a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots$ 的一阶差分是

$$\Delta a_0 = a_1 - a_0$$
$$\Delta a_1 = a_2 - a_1$$
$$\Delta a_2 = a_3 - a_2$$
$$\Delta a_3 = a_4 - a_3$$

对每个正整数 n，第 n 个一阶差分是

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$$

按一阶差分的定义方式，我们可以定义函数的高阶差分．函数 $y_t = f(t)$ 在 t 的一阶差分的差分为函数在 t 的二阶差分，记作$\Delta^2 y_t$，即

$$\Delta^2 y_t = \Delta(\Delta y_t) = \Delta y_{t+1} - \Delta y_t = (y_{t+2} - y_{t+1}) - (y_{t+1} - y_t)$$
$$= y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t$$

依次定义函数 $y_t = f(t)$ 在 t 的三阶差分为

$$\Delta^3 y_t = \Delta(\Delta^2 y_t) = \Delta^2 y_{t+1} - \Delta^2 y_t = \Delta y_{t+2} - 2\Delta y_{t+1} + \Delta y_t$$
$$= y_{t+3} - 3y_{t+2} + 3y_{t+1} - y_t$$

一般地，函数 $y_t = f(t)$ 在 t 的 n 阶差分定义为

$$\Delta^n y_t = \Delta(\Delta^{n-1} y_t) = \Delta^{n-1} y_{t+1} - \Delta^{n-1} y_t$$
$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} y_{t+n-k}$$

上式表明，函数 $y_t = f(t)$ 在 t 的 n 阶差分是该函数的 n + 1 个函数值 y_{t+n}，y_{t+n-1}，···，y_t的线性组合。

例 **设**$y_t = t^2 + 2t - 3$,**求**$\triangle y_t, \Delta^2 y_t$

解:

$$\Delta y_t = y_{t+1} - y_t$$
$$= (t+1)^2 + 2(t+1) - 3 - (t^2 + 2t - 3) = 2t + 3$$
$$\Delta^2 y_t = y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t$$
$$= (t+2)^2 + 2(t+2) - 3 - 2[(t+1)^2 + 2(t+1) - 3] - (t^2 + 2t - 3) = 2$$

二、差分方程的基本概念

定义：含有自变量，未知函数以及未知函数差分的函数方程，称为**差分方程。**

由于差分方程中必须含有未知函数的差分，而自变量与未知函数可以不显含．因此，差分方程也可称为含有未知函数差分的函数方程．

例如 $y_{t+2}-5y_{t+1}+y_t-t=0$ 就是一个差分方程，按函数差分定义，任意阶的差分都可以表示为函数 $y_t = f(t)$ 在不同点的函数值的线性组合．因此，上述差分方程又可表示为

$$\Delta^2 y_t-3\Delta y_t-3y_t-t=0$$

正因如此，差分方程又可定义为：含有自变量和未知函数在多个点的值的函数方程称为差分方程。差分方程中实际所含差分的最高阶数，称为**差分方程的阶数**．或者说，差分方程中未知函数下标的最大差数，称为**差分方程的阶数**．

二阶线性差分方程的一般形式是

$$y_{t+2}+ay_{t+1}+by_t=f(t)$$

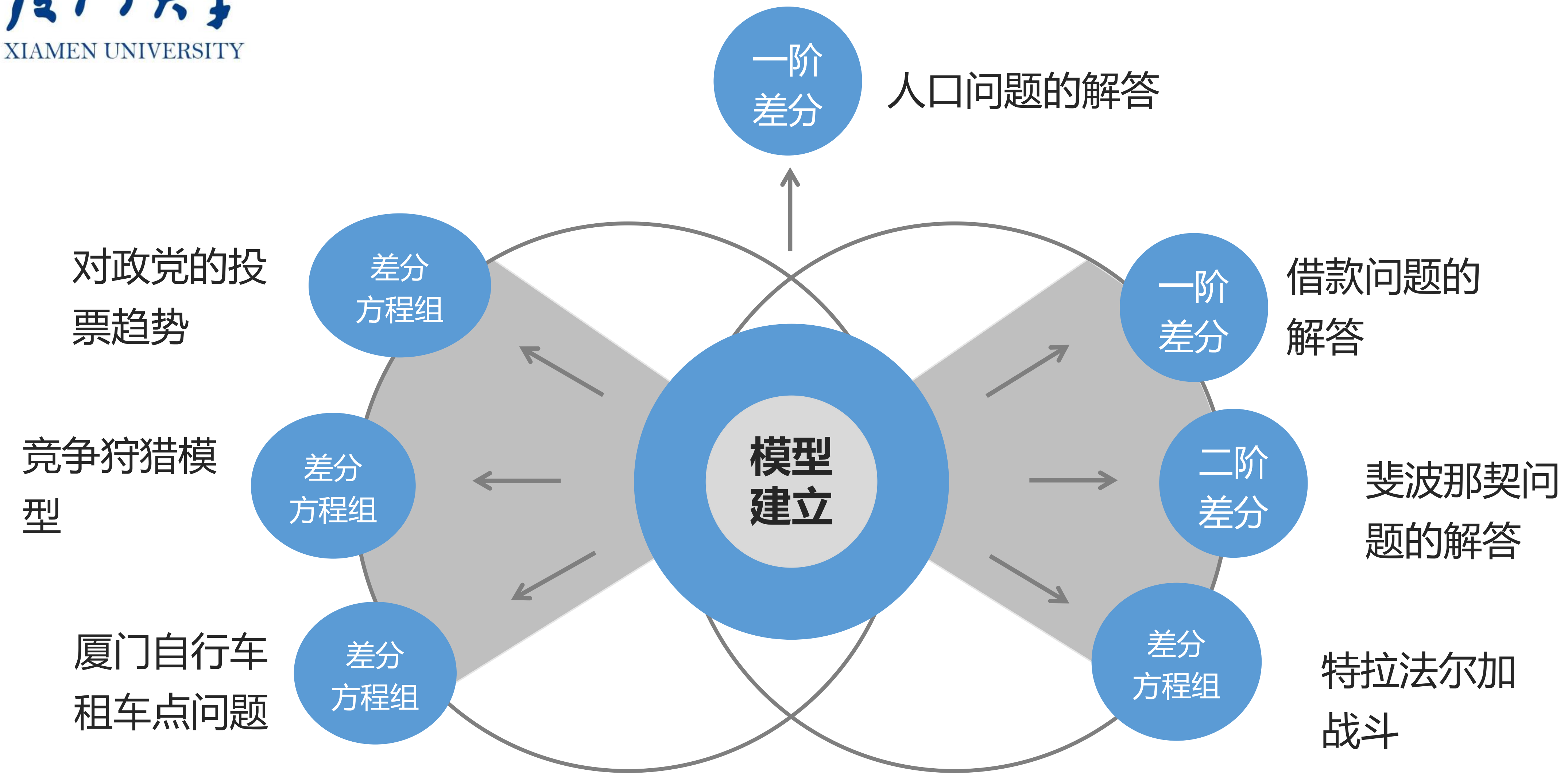
其中 a，b 为给定常数，f(t) 是定义在非负整数集上的已知函数，若序列$\{f(t)\}\equiv\{0\}$，则称方程为**二阶齐次线性差分方程**，若$f(t)\neq 0$，则上式称为**二阶非齐次线性差分方程。**

n 阶差分方程的一般形式可表示为

$$F(t, y_t, \Delta y_t, \Delta^2 y_t, \cdots, \Delta^n y_t) = 0$$

或

$$F(t, y_t, y_{t+1}, \cdots, y_{t+n}) = 0$$


一阶差分
人口问题的解答
差分方程组
对政党的投票趋势
差分方程组
竞争狩猎模型
差分方程组
厦门自行车租车点问题
模型建立
一阶差分
借款问题的解答
二阶差分
斐波那契问题的解答
差分方程组
特拉法尔加战斗

应用差分方程思想建模

一、一阶差分方程方法模型的建立

例　人口问题的解答：令 $P_n = P(n)$ 表示某人口群体在时间段 n 开始时的总数，若按年计算，设初始年为 0，令增量

$$\Delta P(n) = P(n+1) - P(n) \text{（或记为 } \Delta P_n = P_{n+1} - P_n \text{ 以下略）}$$

Malthus 提出：增量是出生人口数减去死亡人口数，因此设 b 表示出生率与死亡率之差，得到

$$\Delta P(n) = bP(n)$$

于是 $P(n+1)=P(n)+\Delta P(n)=P(n)+bP(n)=kP(n)$

其中 k = 1 + b. 这就是 Malthus 人口模型. 用迭代法求解该差分方程，得

$$P(n+1)=kP(n)=k(kP(n-1))=k^2P(n-1)=\cdots\cdots$$
$$=k^{n+1}P(0)$$

Malthus 模型在 1840 年由比利时人口统计学家 Verhulst 修改为

$$\Delta P(n)=bP(n)-c(P(n))^2$$

他认为个体的存活机会依赖自身应付同其他竞争冲突的能力。

其中竞争项 $-c(P(n))^2$ 说明，单位时间内两个成员相遇次数的统计平均值与 P^2 成正比，从而得到

$$P(n+1)=kP(n)-c(P(n))^2 \qquad (5.2.2)$$

其中 c 为竞争冲突常数.

(5.2.2)是非线性差分方程，求解 (5.2.2)的方法之一是把它修改成容易处理的形式，即以$P(n)P(n+1)$ 代替 $(P(n))^2$ 得

$$P(n+1)=kP(n)-cP(n)P(n+1), \qquad (5.2.3)$$

于是

$$P(n+1)=\frac{kP(n)}{1+cP(n)}$$

方程 (5.2.3)可通过代换化为线性方程．事实上，分别以 P(n + 1)P(n) 除 (5.2.3)的两边并整理得

$$\frac{1}{P(n+1)}=\frac{1}{k}\frac{1}{P(n)}+\frac{c}{k}$$

（设人口总数$P(n\neq 0)$）令$q(n)=\frac{1}{P(n)}$得

$$q(n+1)=\frac{1}{k}q(n)+\frac{c}{k}$$

可求得

$$q(n+1)=\frac{c}{b}+\left(q(0)-\frac{c}{b}\right)k^{-(n+1)}$$

若 b > 0，则 k = 1 + b > 1，当 n → ∞ 时, $k^{-(n+1)}\to 0$, 因此 $q(n+1)\to\frac{c}{b}$．从而 $P(n)\to P_m=\frac{b}{c}=$ 常数．这就是该模型的最大可准许人口，它不依赖于初始人口总数 P(0)．若 P(0) = P_m，则总人口不变；若 P(0) > P_m，则总人口不断下降地趋于极限值 P_m；若 P(0) < P_m，则不断增长地趋于 P_m(见图 5.1).

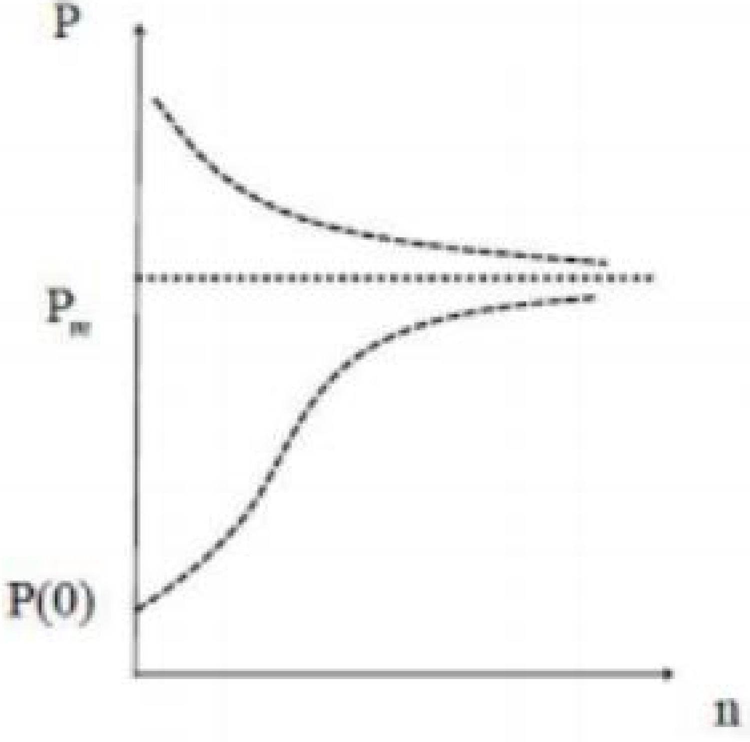


图 5.1

例　借款问题的解答 设 $P(0)$ 是借款，在每个固定的时间段（如每年或每月）的末尾得偿还的固定金额为 R（如把房子作为抵押），那么 $P(n+1)$ 就是第 $n+1$ 时间段开始时欠款的总数，它等于 $P(n)$ 加上利息减去偿还，即

$$P(n+1) = kP(n) - R$$

该式当 $R = 0$ 时化为基本方程（5.2.1），令 $b = k - 1$，其增量表达式为

$$\Delta P(n) = bP(n) - R, \tag{5.2.7}$$

可见，当$P(n) > \frac{R}{b}$时欠款增长，$P(n) < \frac{R}{b}$时欠款减少，若对某 m 有$P(m) = \frac{R}{b}$，则$P(n) \equiv \frac{R}{b}$.

若还款是波动的（如借方时运的改善），即 R = R(n), 便有

$$P(n+1) = kP(n) - R(n)$$

为一阶线性差分方程，由迭代法求解，得

$$P(n+1) = k^{n+1}P(0) - \sum_{r=0}^{n} k^r R(n-r)$$

特别地，取 R(n − r) ≡ R，得（5.2.7）的解为

$$P(n+1) = k^{n+1}P(0) - R\sum_{r=0}^{n} k^r$$

$$= k^{n+1}P(0) - R\frac{k^{n+1}-1}{k-1} = k^{n+1}P(0) - (k^{n+1}-1)\frac{R}{b}$$

即

$$P(n+1) = \frac{R}{b} - k^{n+1}\left(\frac{R}{b} - P(0)\right) \tag{5.2.8}$$

这再次说明，若$P_0=\frac{R}{b}$，则欠款保持$\frac{R}{b}$. 否则，便由 bP(0) > R 或 bP(0) < R，欠款将不断增加或不断减少.

若 R > bP(0)，令 P(n + 1) = 0，由（5.2.8）通过解 n 便可求得还清一笔抵押贷款所需的时间。

二、二阶线性差分方程模型的建立

二阶线性差分方程的一般形式是

$$y_{t+2} + ay_{t+1} + by_t = f(t) \quad (5.2.9)$$

其中 a，b 为给定常数，f(t) 是定义在非负整数集上的已知函数，所谓解（5.2.9），就是对一切n = 0, 1, 2, · · ·，求序列 y = $\{y_t\}$.

例　Fibonacci 问题的解答 设 P(n) 是第 n 个月家兔的对数，a(n) 为其中成兔对数，b(n)为幼兔对数，则

$$P(n) = a(n) + b(n)$$

到下个月，原先的幼兔变成成兔，因而成兔数量变为

$$a(n+1) = a(n) + b(n),$$

$a(n)$ 对成兔又生 $a(n)$ 对幼兔，因此

$$b(n+1) = a(n).$$

于是

$$P(n+2) = a(n+2) + b(n+2)$$

$$= a(n+1) + b(n+1) + a(n+1) = P(n+1) + P(n)$$

称方程

$$\mathbf{P(n+2)=P(n+1)+P(n)} \qquad (5.2.10)$$

为 Fibonacci 方程， 这是一个二阶线性差分方程．已知 P(0) = 1 = P(1). 由（5.2.10）得P(2) = 2, P(3) = 3, P(4) = 5, P(5) = 8, ... 为有名的 Fibonacci 数列。

三、差分方程组模型的建立

例　考察两支部队交战的简单模型

设在 n 个时间单位后两支部队的人数是 $x(n)$ 和 $y(n)$．x每个士兵在每个时间间隔打死打伤 y军 a 个士兵类似地，设 y 军的每个士兵在单位时间间隔打死打伤 x 军 b 人．于是 y 军的改变量

$$\Delta y(n) = y(n+1) - y(n) = -ax(n),$$

类似地，设 y 军的每个士兵在单位时间间隔打死打伤 x 军 b 人，于是

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n) = -by(n).$$

便得到如下的差分方程组

$$x(n+1) = x(n) - by(n),$$

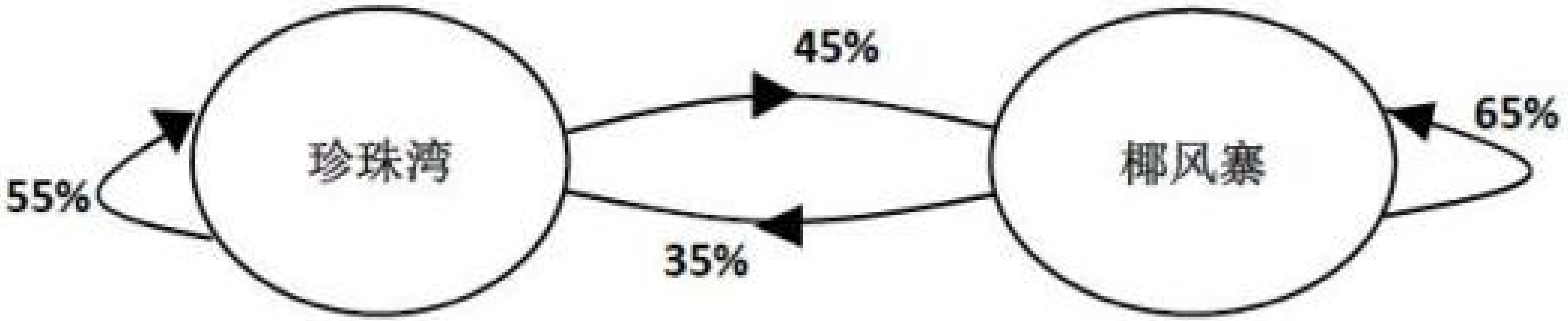
$$y(n+1) = y(n) - ax(n).$$

例　厦门椰风寨游乐中心在环岛路的椰风寨和珍珠湾（厦门大学海韵园边）都有自行车租车点。

游乐中心是专门为满足在环岛路上开展旅游活动的游客开设的．因此，游客可以在一个租车点租车而在另一个租车点还车，游客可能在两个租车点都有游玩计划.

该公司想确定对这种方便的借还车方式的收费应该为多少．因为自行车可以在两个点归还，每个点就要有足够的车辆以满足用车需要．如果置放的车辆不够了，那么要从珍珠湾运送多少自行车到椰风寨或者要从椰风寨运送多少自行车到珍珠湾呢?对这些问题的回答将有助于该公司计算出它的期望成本．

在分析了历史记录数据后，确定约有 60%在珍珠湾出租的自行车还到了珍珠湾，另外40%的车辆还到了椰风寨．在椰风寨游乐中心出租的自行车中，有 70%的仍旧还到了椰风寨，另外 30%的自行车还到了珍珠湾，如图 5.2。


45%
55%
珍珠湾
椰风寨
65%
35%

模型构建

设 n 表示营业天数．定义

O_n = 第 n 天营业结束时在珍珠湾的车辆数

T_n = 第 n 天营业结束时在椰风寨的车辆数

因此，第 n + 1 天应该是

$$\mathbf{O_{n+1} = 0.6O_n + 0.3T_n}$$

$$\mathbf{T_{n+1} = 0.4O_n + 0.7T_n}$$

例　特拉法尔加 (Trafalgar)战斗

在 1805 年的特拉法尔加 (Trafalgar)战斗中，由拿破仑指挥的法国、西班牙海军联军和由海军上将纳尔逊指挥的英国海军作战．一开始，法西联军有 33 艘战舰，而英军有 27 艘战舰. 在一次遭遇战中每方的战舰损失都是对方战舰的 10%．分数值是有意义的，表示有一艘或多艘战舰不能全力以赴地参加战斗．

模型构建

将战斗过程分成阶段，令 n 表示战斗过程中遭遇战的第 n 阶段，设 B_n 为第 n 阶段英军的战舰数，F_n 为第 n 阶段法西联军的战舰数．于是在第 n 阶段的遭遇战后，各方剩余的战舰数为

$$B_{n+1} = B_n - 0.1F_n$$

$$F_{n+1} = F_n - 0.1B_n$$

例　竞争猎兽模型—斑点猫头鹰和隼

一种斑点猫头鹰在其栖息地 (该栖息地也支持隼的生存)为生存而斗争．还假定在没有其他种群存在的情形下，每个单独的种群都可以无限地增长，即在一个时间区间里 (例如，一天)其种群量的变化与该时间区间开始时的种群量成正比，如果 O_n 表示斑点猫头鹰在第 n 天结束时的种群量，而 H_n 表示与之竞争的隼的种群量，那么

$$\Delta O_n = k_1 O_n \text{ 而 } \Delta H_n = k_2 H_n$$

这里 k_1 和 k_2 是增长率，都是正常数．第二个种群的存在是为了降低另一个种群的增长率，反之亦然。

假设这种增长率的减少大约和两个种群之间的可能的相互作用的次数成比例．所以，一个子模型就是假设这种增长率的减少与 O_n 和 H_n 的乘积成比例．这样模型为如下方程组

$$\Delta O_n = k_1 O_n - k_3 O_n H_n$$

$$\Delta H_n = k_2 H_n - k_4 O_n H_n$$

即

$$O_{n+1} = (1 + k_1) O_n - k_3 O_n H_n$$

$$H_{n+1} = (1 + k_2) H_n - k_4 O_n H_n$$

其中$k_1,\dots,k_4$ 都是正常数。

差分方程模型的求解

一、线性差分方程的基本定理

若把一个函数 $y_t = f(t)$ 代入差分方程中，使其成为恒等式，则称 $y_t = f(t)$ **为差分方程的解。**含有任意常数的个数与差分方程的阶数一致的解，称为**差分方程的通解**；给任意常数以确定值的解，称为**差分方程的特解。**

用以确定通解中任意常数的条件称为**初始条件**：一阶差分方程的初始条件为一个，一般是$y_0 = a_0$(常数)；二阶差分方程的初始条件为两个，一般是 $y_0 = a_0$，$y_1 = a_1$(a_0，a_1 是常数)；依此类推。

现在我们来讨论线性差分方程解的基本定理，将以二阶线性差分方程为例，任意阶线性差分方程都有类似结论．

二阶线性差分方程的一般形式

$$y_{t+2}+a(t)y_{t+1}+b(t)y_t=f(t)$$

其中 a(t)，b(t)，f(t) 均为 t 的已知函数，且$b(t)\neq 0$

定理 1 若函数 $y_1(t)$，$y_2(t)$ 是二阶齐次线性差分方程的解，则

$$y(t)=C_1y_1(t)+C_2y_2(t)$$

也是该二阶齐次线性差分方程的解，其中 C_1、C_2 是任意常数。

定理 2(二阶齐次线性差分方程解的结构定理) 若函数 $y_1(t)$，$y_2(t)$ 是二阶齐次线性差分方程的线性无关特解，则

$$y_C(t) = C_1y_1(t) + C_2y_2(t)$$

是该方程的通解，其中 C_1、C_2 是任意常数。

定理 3(非齐次线性差分方程解的结构定理) 若 $y*$ (t) 是二阶非齐次线性差分方程的一个特解，y_C (t) 是齐次线性差分方程的通解，则非齐次线性差分方程的通解为

$$\mathrm{y}(\mathrm{t}) = y_C(\mathrm{t}) + \mathrm{y}^*(\mathrm{t})$$

定理 4(解的叠加原理) 若函数$y_1^*(t), y_2^*(t)$分别是二阶非齐次线性差分方程

$$y_{t+2} + a(t)y_{t+1} + b(t)y_t = f_1(t)$$

和

$$y_{t+2} + a(t)y_{t+1} + b(t)y_t = f_2(t)$$

的特解．则$y_1^*(t) + y_2^*(t)$是差分方程

$$y_{t+2} + a(t)y_{t+1} + b(t)y_t = f_1(t) + f_2(t)$$

的特解。

二、一阶常系数线性差分方程的解法

一阶常系数线性差分方程的一般形式为

$$y_{t+1} + ay_t = f(t)$$

其中常数$a \neq 0$，f(t)为t的已知函数，当$f(t) \neq 0$时，上式称为一阶**非齐次**差分方程；当f(t)=0时，$y_{t+1} + ay_t = 0$称为与一阶非齐次线性差分方程对应的一阶**齐次**差分方程。

1.求齐次线性差分方程的通解

为了求出一阶齐次差分方程的通解，只要求出其一非零的特解即可。注意到一阶齐次差分方程的特点，y_{t+1} 是 y_t 的常数倍，而函数

$$\lambda^{t+1} = \lambda \cdot \lambda^t$$

恰满足这个特点.

不妨设方程有形如下式的特解

$$y_t = \lambda^t$$

其中 λ 是非零待定常数．将其代入一阶齐次差分方程中，有

$$\lambda^{t+1} + a\lambda^t = 0$$

即$\lambda^t(\lambda + a) = 0$

由于$\lambda^t \neq 0$，因此

$$y_t = \lambda^t$$

是一阶齐次差分方程的解的充要条件是

$$\lambda + a = 0$$

所以 λ = −a 时，一阶齐次差分方程的非零特解为

$$y_t = (-a)^t$$

从而一阶齐次差分方程通解为

$$y_C = C(-a)^t$$

C 为任意常数。称一次代数方程

$$\lambda + a = 0$$

为**差分方程的特征方程**；特征方程的根为**特征根**或**特征值。**

由上述分析，求出一阶齐次差分方程的通解的步骤:

第一步：先写出其特征方程

第二步：求出特征根

第三步：求出其特解

第四步：求出其通解

2.求一阶非齐次线性差分方程的特解和通解

下面仅就函数 f(t) 为几种常见形式用**待定系数法**求非齐次线性差分方程的特解．根据 f(t)的形式，确定特解的形式，比较方程两端的系数，可得到特解 y* (t).

情形1 非齐次项 f(t) 形如

$$f(t)=\rho^t P_m(t)(\rho>0)$$

这里 $P_m(t)$ 是形如

$$A_m t^m + A_{m-1} t^{m-1} + \cdots + A_1 t + A_0$$

的 m 次多项式，A_m，A_{m-1}，· · ·，A_0 是已知常数.

(1) 如果 ρ 不是特征根，那么待定特解的形式为

$$y^*(t) = \rho^t Q_m(t)$$

这里 $Q_m(t)$ 是形如

$$B_m t^m + B_{m-1} t^{m-1} + \cdots + B_1 t + B_0$$

的待定的 m 次多项式，B_m，B_{m-1}，· · ·，B_0 是待定系数。

例 求差分方程 $y_{t+1}+y_t=2^t$ 的通解.

解 特征方程为 λ + 1 = 0，特征根 λ = −1．齐次差分方程的通解为

$$y_C=C(-1)^t$$

由于$f(t)=2^t=\rho^t P_0(t),\rho=2$不是特征根。因此设非齐次差分方程特解形式为

$$y^*(t)=\rho^t Q_m(t)$$

将其代入已知方程，有$y^*(t)=B2^t$

解得$B=\frac{1}{3}$，所以$y^*(t)=\frac{1}{3}2^t$.于是，所求通解为

$$y_t=y_C+y^*(t)=C(-1)^t+\frac{1}{3}2^t$$

C为任意常数。

(2)如果 ρ 是特征根，那么待定特解的形式为

$$\rho^t t Q_m(t)$$

这里 $Q_m(t)$ 是形如

$$B_m t^m + B_{m-1} t^{m-1} + \cdots + B_1 t + B_0$$

的待定的 m 次多项式，B_m，B_{m-1}，· · ·，B_0 是待定系数。

例 求差分方程$y_{t+1}-y_t=3+2t$的通解.

解 特征方程为 λ – 1 = 0，特征根 λ = 1．齐次差分方程的通解为

$$y_C=C$$

由于$f(t)=3+2t=\rho^tP_1(t),\rho=1$是特征根．因此非齐次差分方程的特解为

$$y^*(t)=t(B_0+B_1t)$$

将其代入已知差分方程得

$$B_0+B_1+2B_1t=3+2t$$

比较该方程的两端关于 t 的同次幂的系数，可解得

$B_0 = 2$，$B_1 = 1$．故$y^*(t) = 2t + t^2$.

于是，所求通解为

$$y_t = y_C + y^* = C + 2t + t^2$$

C 为任意常数。

例 求差分方程$3y_t - 3y_{t-1} = t3^t + 1$的通解。

解 已知方程改写为$3y_{t+1} - 3y_t = (t+1)3^{t+1} + 1$,即

$$y_{t+1} - y_t = (t+1)3^t + \frac{1}{3}.$$

求解如下两个方程

$$y_{t+1} - y_t = (t+1)3^t$$
$$y_{t+1} - y_t = \frac{1}{3}$$

对第一个方程：$\lambda=1,\ f(t)=(t+1)3^t=\rho^t P_1(t),\rho=3$ 不是特征根。

设特解为$\lambda=1,\ f(t)=(t+1)3^t=\rho^t P_1(t),\rho=3$ 将其代入第一个方程有

$$3^{t+1}[B_0+B_1(t+1)]-3^t(B_0+B_1t)=3^t(t+1)$$

可以解得

$$B_0=\frac{1}{4},\ B_1=\frac{1}{2}.\ \text{故}\ y_1^*(t)=3^t\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}t\right)$$

对第二个方程：特征根 $\lambda=1, f(t)=\frac{1}{3}=\rho^t P_0(t), \rho=1$ 是特征根，

设特解为$y_2^*(t)=B_t$. 将其代入第二个方程解得$B=\frac{1}{3}$. 于是，

$y_2^*(t)=\frac{1}{3}t$.

因此，齐次差分方程的通解为 $y_C(t)=C$．所求通解为

$$y_t=y_c+y_1^*+y_2^*=C+3^t\left(\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}t$$

C为任意常数。

情形2 非齐次项 f(t) 形如

$$f(t)=\rho^t(a\cos\theta t+b\sin\theta t)(\theta>0)$$

令

$$\delta=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$$

(1)如果 δ 不是特征根，那么待定特解的形式为

$$\boldsymbol{\rho^t(A\cos\theta t+B\sin\theta t)}$$

A，B 是待定系数．将待定特解的形式代入差分方程，求出待定系数即可．

(2)如果 δ 是特征根，那么待定特解的形式为

$$\rho^{t}t(A\cos\theta t+B\sin\theta t)$$

A，B 是待定系数．将待定特解的形式代入差分方程，求出待定系数即可．

例 求差分方程$y_{t+1}-3y_t=\sin\frac{\pi}{2}t$的通解。

解 解:因特征根 λ = 3，齐次差分方程的通解 $y_C = C3^t$.

$$f(t)=\sin\frac{\pi}{2}t=\rho^t(a\cos\theta t+b\sin\theta t)$$

a = 0，b = 1，ρ = 1，$\theta=\frac{\pi}{2}$. 令

$$\delta=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)=i$$

因为 δ = i 不是特征根，设特解

$$y^*(t) = A\cos\frac{\pi}{2}t + B\sin\frac{\pi}{2}t$$

将其代入原方程有

$$A\cos\frac{\pi}{2}(t+1) + B\sin\frac{\pi}{2}(t+1) - 3\left(A\cos\frac{\pi}{2}t + B\sin\frac{\pi}{2}t\right) = \sin\frac{\pi}{2}t$$

因为$\cos\frac{\pi}{2}(t+1) = -\sin\frac{\pi}{2}t, \sin\frac{\pi}{2}(t+1) = \cos\frac{\pi}{2}t$,将其代入上式，并

整理得$(B-3A)\cos\frac{\pi}{2}t - (A+3B)\sin\frac{\pi}{2}t = \sin\frac{\pi}{2}t$

比较上式两端的系数，解得$A=-\frac{1}{10}, B=-\frac{3}{10}$. 故非齐次差分方程的特解$y^*(t)=-\frac{1}{10}\cos\frac{\pi}{2}t-\frac{3}{10}\sin\frac{\pi}{2}t$

于是，所求通解为

$$y_t=y_C+y^*=C3^t-\frac{1}{10}\cos\frac{\pi}{2}t-\frac{3}{10}\sin\frac{\pi}{2}t$$

其中C为任意常数。

三、二阶常系数线性差分方程的解法

二阶常系数线性差分方程的一般形式为

$$y_{t+2} + ay_{t+1} + by_t = f(t)$$

其中 a，b 为已知常数，且$b \neq 0$，f(t) 为已知函数．与上述方程相对应的二阶齐次线性差分方程为

$$y_{t+2} + ay_{t+1} + by_t = 0.$$

1. 求齐次线性差分方程的通解

为了求出二阶齐次差分方程的通解，首先要求出两个线性无关的特解．与一阶齐次差分方程同样分析，设二阶齐次差分方程有特解

$$y_t = \lambda^t$$

其中 λ 是非零待定常数．将其代入二阶齐次差分方程式有

$$\lambda^t(\lambda^2 + a\lambda + b) = 0$$

因为$\lambda^t \neq 0, y_t = \lambda^t$ 是二阶齐次差分方程的解的充要条件是

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

称上述二次代数方程为差分方程 (齐次)或 (非齐次)的**特征方程**，对应的根称为**特征根。**

（1）特征方程有相异实根 λ_1 与 λ_2

此时，齐次差分方程有两个特解$y_1(t) = \lambda_1^t$ 和 $y_2(t) = \lambda_2^t$，且它们线性无关．于是，其通解为$Y_C(t) = C_1\lambda_1^t + C_2\lambda_2^t$

C_1, C_2为任意常数。

（2）特征方程有同根$\lambda_1^t=\lambda_2^t$

这时$\lambda_1^t=\lambda_2^t=-\frac{1}{2}a$，齐次差分方程有一个特解

$$y_1(t)=\left(-\frac{1}{2}a\right)^t.$$

直接验证可知$y_2(t)=t\left(-\frac{1}{2}a\right)^t$也是齐次差分方程的特解。显然，$y_1(t)$ 与 $y_2(t)$ 线性无关．于是，齐次差分方程的通解为

$$y_C(t)=(C_1+C_2t)\left(-\frac{1}{2}a\right)^t$$

C_1,C_2 为任意常数.

（3）特征方程有共轭复根$\alpha \pm i\beta$

此时，直接验证可知，齐次差分方程有两个线性无关的特解

$$y_1(t) = r^t\cos\omega t$$
$$y_2(t) = r^t\sin\omega t$$

其中 $\alpha = -\frac{a}{2}, \beta = \sqrt{b-\frac{a^2}{4}}, r = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \sqrt{b}$

ω由

$$\tan\omega = \frac{\beta}{\alpha} = -\frac{1}{a}\sqrt{4b - a^2}$$

确定，ω ∈ (0, π).

于是，齐次差分方程的通解为$y_C(t) = r^t(C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t)$，$C_1, C_2$ 为任意常数.

例　Fibonacci 问题的解答续：求解 Fibonacci 方程（5.2.10）.

解 特征方程

$$u^2 - u - 1 = 0$$

有根$s_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, s_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

它们的近似值是$s_1 \cong 1.61803399, s_2 \cong -0.61833989$

(一般地，称数 s_1 为黄金分割)．于是，所求通解为

$$y_C(t) = C_1 s_1^t + C_2 s_2^t$$

C_1, C_2 为任意常数.

例　求差分方程$y_{t+2}-6y_{t+1}+9y_t=0$的通解。

解 特征方程是$\lambda^2-6\lambda+9=0$

特征根为二重根

$$\lambda_1=\lambda_2=3$$

于是，所求通解为$y_C(t)=(C_1+C_2t)3^t$

C_1,C_2为任意常数.

例 求差分方程$y_{t+2}-4y_{t+1}+16y_t=0$满足初值条件$y_0=1$，$y_1=2+2\sqrt{3}$的特解。

解 特征方程是

$$\lambda^2-4\lambda+16=0$$

它有一对共轭复根$\lambda_{1,2}=2\pm 2\sqrt{3}i$

计算$r=\sqrt{16}=4$

由$\tan\omega=\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{1}{a}\sqrt{4b-a^2}$

得

$$\omega=\frac{\pi}{3}$$

于是原方程的通解为$y_C(t)=4^r\left(C_1\cos\frac{\pi}{3}t+C_2\sin\frac{\pi}{3}t\right)$

将初值条件$y_0=1,y_1=2+2\sqrt{3}$代入上式解得 $C_1=1$，$C_2=1$．于是所求特解为

$$y(t)=4^r\left(\cos\frac{\pi}{3}t+\sin\frac{\pi}{3}t\right).$$

2.求非齐次线性差分方程的特解和通解

利用待定系数法可求出 f(t) 的几种常见形式的非齐次差分方程的特解.

情形1：非齐次项 f(t) 形如

$$f(t)=\rho^t P_m(t)(\rho>0)$$

这里 $P_m(t)$ 是形如

$$A_m t^m+A_{m-1}t^{m-1}+\cdots+A_1 t+A_0$$

的 m 次多项式，A_m，A_{m-1}，· · ·，A_0 是已知常数。

(1) 如果 ρ 不是特征根，那么待定特解的形式为

$$y^*(t) = \rho^t Q_m(t)$$

这里 $Q_m(t)$ 是形如

$$B_m t^m + B_{m-1} t^{m-1} + \cdots + B_1 t + B_0$$

的待定的 m 次多项式，B_m，B_{m-1}，$\cdots$，B_0 是待定系数。

(2) 如果 ρ 是单特征根，那么待定特解的形式为

$$\rho^t t Q_m(t)$$

这里 $Q_m(t)$ 是形如

$$B_m t^m + B_{m-1} t^{m-1} + \cdots + B_1 t + B_0$$

的待定的 m 次多项式，B_m，B_{m-1}，· · ·，B_0 是待定系数。

(3)如果 ρ 是二重特征根，那么待定特解的形式为

$$\rho^t t^2 Q_m(t)$$

这里 $Q_m(t)$ 是形如

$$B_m t^m + B_{m-1} t^{m-1} + \cdots + B_1 t + B_0$$

的待定的 m 次多项式，B_m，B_{m-1}，· · ·，B_0 是待定系数。

例 求差分方程$y_{t+2}-y_{t+1}-6y_t=3^t(2t+1)$的通解。

解 特征根为$\lambda_1=-2,\ \lambda_2=3.$

$$f(t)=3^t(2t+1)=\rho^tP_1(t)$$

其中 m = 1，ρ = 3.

因 ρ = 3 是单根，故设特解为

$$y^*(t)=3^tt(B_0+B_1t)$$

将其代入差分方程解得 $B_0 =-\frac{2}{25}, B_1 = \frac{1}{15}$, 因此特解为

$$y^*(t) = 3^t t\left(\frac{1}{15}t - \frac{2}{25}\right).$$

所求通解为

$$y_t = y_C + y^*$$
$$C_1(-2)^t + C_2 3^t + 3^t t\left(\frac{1}{15}t - \frac{2}{25}\right)$$

C_1，C_2为任意常数。

例 求差分方程 $y_{t+2}-6y_{t+1}+9y_t=3^t$的通解

解 特征根为 $\lambda_1=\lambda_2=3$

$$f(t)=3^t=\rho^t P_0(t)$$

其中 $m=0$，$\rho=3$．因 $\rho=3$ 为二重根，应设特解为

$$y^*(t)=Bt^2 3^t$$

将其代入差分方程得$B=\frac{1}{18}$特解为

$$y^*(t)=\frac{1}{18}t^2 3^t$$

通解为

$$y_t = y_C + y^* = (C_1 + C_2 t)3^t + \frac{1}{18}t^2 3^t$$

C_1, C_2为任意常数

例 求差分方程$y_{t+2}-3y_{t+1}+3y_t=5$满足初值条件 $y_0=5$, $y_1=8$ 的特解。

解 特征根为$\lambda_{1,2}=\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i.$

因为$r=\sqrt{3}$, 由 $\tan\omega=\frac{\sqrt{3}}{3}$, 得 $\omega=\frac{\pi}{3}$. 所以齐次差分方程的通解为

$$y_C(t)=(\sqrt{3})^t\left(C_1\cos\frac{\pi}{6}t+C_2\sin\frac{\pi}{6}t\right)$$

$f(t)=5=\rho^t P_0(t)$ 其中 $m=0,\rho=1$.因 ρ = 1 不是特征根，故设特解 y* (t) = B .

将其代入差分方程得 B – 3B + 3B = 5，从而 B = 5．于是所求特解 y* (t) = 5.

因此原方程通解为

$$y(t)=(\sqrt{3})^t\left(C_1\cos\frac{\pi}{6}t+C_2\sin\frac{\pi}{6}t\right)+5.$$

将 $y_0=5$，$y_1=8$ 分别代入上式，解得 $C_1=0$，$C_2=2\sqrt{3}$．故所求特解为

$$y^*(t)=2(\sqrt{3})^{t+1}\sin\frac{\pi}{6}t+5.$$

情形2 非齐次项 f(t) 形如

$$f(t)=\rho^t(a\cos\theta t+b\sin\theta t)(\theta>0)$$

令$\delta=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$.

（1）如果 δ 不是特征根，那么待定特解的形式为

$$\rho^t(A\cos\theta t+B\sin\theta t)$$

A，B 是待定系数．将待定特解的形式代入差分方程，求出待定系数即可。

（2）如果 δ 是单特征根，那么待定特解的形式为

$$\rho^t t(A\cos\theta t + B\sin\theta t)$$

A，B 是待定系数．将待定特解的形式代入差分方程，求出待定系数即可。

（3）如果 δ 是 2 重特征根，那么待定特解的形式为

$$\rho^t t^2(A\cos\theta t + B\sin\theta t)$$

A，B 是待定系数．将待定特解的形式代入差分方程，求出待定系数即可。

Part 3 案例分析

案例一： 商品价格的预测 –蛛网模型

问题背景：讨论单一的商品市场．设 $P(t)$ 表示 t 时刻的价格，$D(t)$ 是 t 时刻的需求量，$S(t)$ 是 t 时刻的供给量，则

$$D(t) = D(P(t))$$

$$S(t) = S(P(t))$$

其中 $D(P)$ 是价格的单调减函数，$S(P)$ 是价格的单调增函数．试分析均衡价格．

问题分析

D(P) 与 S(P) 的交点为 $P=\overline{P}$ 称为均衡价格，即：

$\overline{P}$ 是 S(P) = D(P) 时价格 P 的解．但是，供给在时间上往往滞后，例如

$$\mathbf{D(t) = D(P(t)),}$$

$$\mathbf{S(t) = S(P(t-1))}$$

因此，t 时期的价格 P(t) 不仅影响本期的需求量 D(t)，而且影响生产者在下一期愿意提供给市场的产量 S(t + 1)，而下一期的市场提供量 S(t + 1) 又影响下一期的价格 P(t + 1)，下一期的价格 P(t + 1) 再影响下一期的需求量 D(t + 1)，· · ·，市场总是这样在不断地自我调节，直至市场的供求趋于均衡，即

$$P(0) \to S(1) \to D(1) \to P(1) \to S(2) \to \cdots \to \overline{P}$$

在坐标系中画出这个过程，其形状犹如蛛网 (如图 5.5)，因而叫蛛网模型．图中 S(P) 为供给曲线，D(P) 为需求曲线，两曲线的交点 E 即为供求平衡点，此点处的价格 P 即是均衡价格。

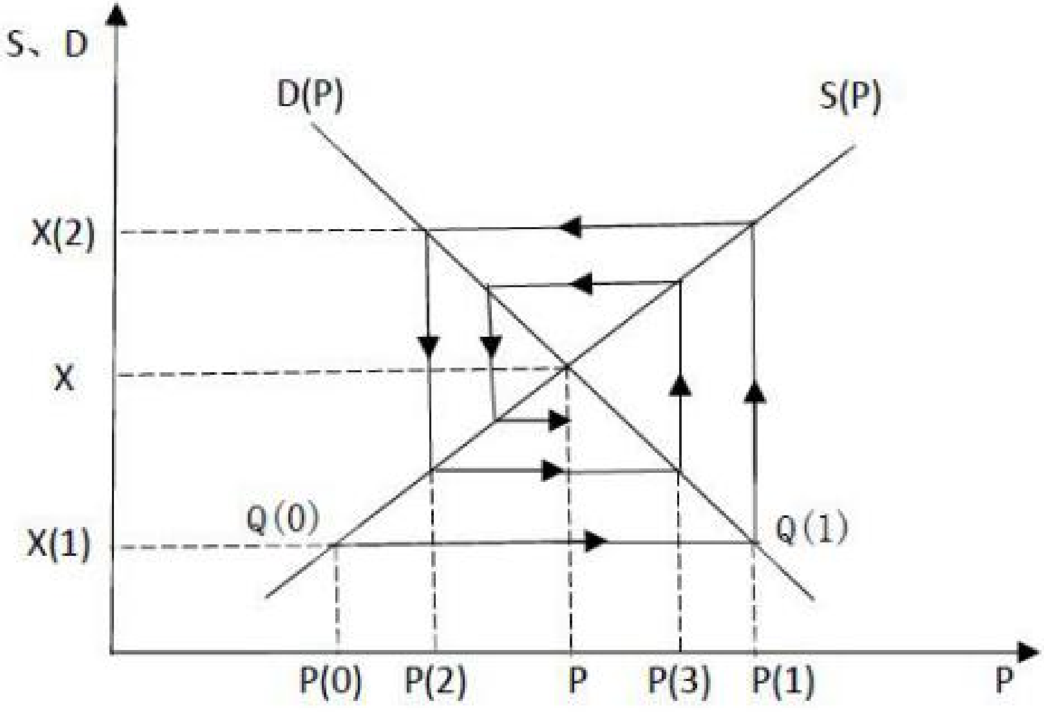
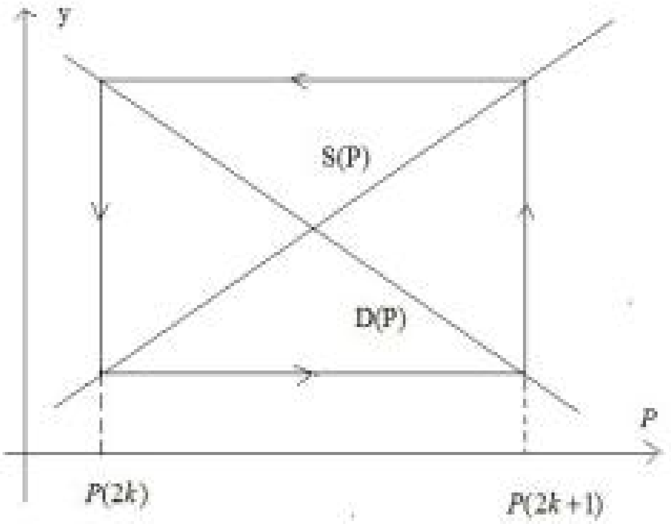


图 5.5

但也可能有价格波动越来越大而不稳定的现象发生，

或周期性变化的现象，见图 5.6.



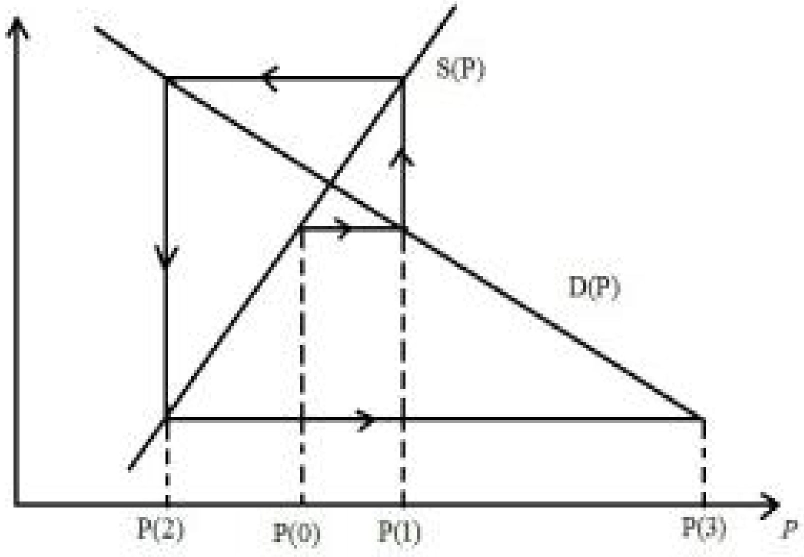


图 5.6

从图 5.5 中还可看出，当 D(P) 曲线比 S(P) 曲线陡 (即 D(P) 曲线斜率的绝对值比 S(P) 曲线斜率绝对值大)时，才是封闭型的蛛网模型，才能达到供求平衡．从图 5.6 中则看出，当 S(P)曲线比 D(P) 曲线陡，价格波动越来越大则不稳定的现象发生.

模型构建

一般地，设

$$\mathbf{D(t) = \alpha + aP(t), a < 0;} \qquad (5.3.1)$$

$$\mathbf{S(t) = \beta + bP(t-1), b > 0.} \qquad (5.3.2)$$

于是均衡价格与均衡值分别为$\bar{P}$ 与 $\bar{X}$ 满足

$$\bar{X} = \alpha + a\bar{P} = \beta + b\bar{P} \quad (5.3.3)$$

解得

$$\bar{P} = \frac{\alpha-\beta}{b-a}, \bar{X} = \frac{b\alpha-a\beta}{b-a} \quad (5.3.4)$$

$$X(t) = \alpha + aP(t) = \beta + bP(t-1), \quad (5.3.5)$$

(5.3.5)式减去 (5.3.3)式，且令

$$p(t) = P(t) - \bar{P}$$

$$x(t) = X(t) - \bar{X}$$

则$x(t)=ap(t)=bp(t-1)$， $p(t)=\frac{b}{a}p(t-1)$

记$p_0=p(0),\ c=\frac{b}{a}<0$ 迭代得

$$p_0=p(0),\ c=\frac{b}{a}<0$$

即$p(t)=p_0c^t$

令 r = |c|，于是 P(t) 在$\bar{P}$的上下振动，t = 0, 1, 2, · · · ，有三种情形:

(1)$b>-a$，这时 $r>1$，$|P(t)|$ 无限增大.

(2)$b=-a$，$r=1$，$P(t)=\bar{P}\pm(P_0-\bar{P})$，$t$ 是偶数时取正号，奇数时取负号.

(3)$b<-a$，这时 $r<1$，$\lim_{t\to\infty}P(t)=\bar{P}$.

(1)(2)(3)有明显的市场意义:

(1)$b > -a$，如图 5.6 所示，供给量随价格的变化率比需求量随价格的变化率大，即供给对价格变化的敏感程度更大，而顾客对价格波动已有足够的承受力．这时，由于生产者对利润太敏感，生产量的增减速度 (随价格的波动)过快，所以引起市场价格的畸形波动而大起大落. 这也暗示，欲稳定市场价格，应首先稳定商品供应量．

(2)是一种临界状态，实为巧合，不易发生，见图 5.6．

(3)是(l)的相反情形，需求对价格敏感性较大，形成买方市场，这时会出现市场稳定的形势，这种形势一般是方方面面都满意的形势。

案例二：凯恩斯（Keynes.J.M）乘数动力学模型

问题背景： 设 Y_t 表示 t 期国民收入，C_t 为 t 期消费，I_t 为 t 期投资，I_0 为自发（固定）投资，ΔI 为周期固定投资增量。如何建立这些变量间的定量关系？

问题分析：

首先，国民收入等于同期消费与同期投资之和，称为均衡条件，即：

$$Y_t = C_t + I_t, \tag{5.3.6}$$

现期消费水平依赖于前期国民收入（消费滞后于收入一个周期），$a(\geq 0)$ 为基本消费水平，b 为边际消费倾向 $(0 < b < 1)$，称为消费函数，即：

$$\mathbf{C_t = a + bY_{t-1},} \tag{5.3.7}$$

这里，如果我们仅考虑为固定投资，称为投资函数，即：

$$\mathbf{I_t = I_0 + \Delta I.} \tag{5.3.8}$$

模型构建

凯恩斯国民经济收支动态均衡模型为：

$$Y_t = C_t + I_t$$
$$C_t = a + bY_{t-1}$$
$$I_t = I_0 + \Delta I$$

模型求解

在 (5.3.6)(5.3.7)(5.3.8)式中消去 C_t 和 I_t，得到一阶常系数非齐次线性差分方程:

$$Y_t - bY_{t-1} = a + I_0 + \Delta I$$

方程的一个特解$\bar{Y}_t = \frac{a+I_0+\Delta I}{1-b}$

方程的通解为$Y_t = A \cdot b_t + \frac{a+I_0+\Delta I}{1-b}$

其中 A 为任意常数，称系数$\frac{1}{1-b}$为凯恩斯乘数.

XIAMEN UNIVERSITY

THANK YOU