变分法建模作业

1.求泛函J[y(x)] =$\int_a^b \frac{1}{2}(-4y'^2+y''^2)$，满足条件y(0)=y($\frac{\pi}{4}$),$z^{'}(0)=-1,z^{'}(\frac{\pi}{4})=1$ 的极值曲线.

2.设质点以速度$v=x$从$A(x_0,y_0)$沿曲线$y=y(x)$移动到$B(x_1,y_1)$,求曲线$y=y(x)$为何形状时质点移动时间最少?

3.求泛函$J[y(x),z(x)]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(y'^2+z'^2+2yz)dx$ 满足条件$y(0)=0$，$y(\frac{\pi}{2})=-1$，$z(0)=0$，$z'(\frac{\pi}{2})=1$ 的极值曲线.

4.受控系统为

$$\dot{x(t)}=u(t),x(0)=1$$

性能指标为

$$J(u)=ax^2(t_f)+\int_0^{t_f}[u^2(t)+1]dt$$

其中，$a>1$ 为常数，求当t_f 自由时的最优控制$u^*(t)$ 及最优轨线$x^*(t)$.

5.考虑一个简单的经纪机构，其资金储备$K(t)$为唯一的生产因素. 令$F(K)$为该经纪机构的产出速率（当K为资本储备时）. 假定$F(O)=0,F(K)>0,F'(K)>0$，以及当$K>0$时$F''<0$. 后一条件是指减少的边际资金生产率. 这个产出既可以被消费也可以用来再投资，作为进一步的资金积累. 令$C(t)$为分配给消费者的产出量，$I(t)=F(K(t))-C(t)$为投资量，δ为订场的资本贬值率，$u(C(t))$为消费的社会受益，ρ表示社会会扣率，T表示有限时间范围，并假定$u'(0)=\infty$.

(1)建立资金储备状态方程.

(2)建立一个选举任期T年的政府最优资金积累模型.

变分法建模作业解答

1.解：

法一：由题意有

$$F(x,y,y',y^{''})=\frac{1}{2}(-4y'^2+y^{''2})$$

因此

$$F_y=0,F_{y'}=-4y',F_{y''}=y^{''}$$

于是有欧拉方程为

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}=4y^{''}+y^{(4)}=0$$

由初值条件用Matlab解上述方程得

$$y=1+\sqrt{2}-\sin x-(1+\sqrt{2})\cos x$$

即为泛函$J[y(x)]$的极值曲线.

法二：设y_0为对应极值曲线，$\forall y \in \mathcal{C}^2[0, \frac{\pi}{4}], y(0) = y(\frac{\pi}{4}) = 0, y'(0) = y'(\frac{\pi}{4}) = 0$

$$h(t) = J(y_0 + ty) = 0.5 * \int_0^{\frac{\pi}{4}} (y_0'' + ty'')^2 - 4(y_0' + ty')^2 dx$$

$$0.5 * \int_0^{\frac{\pi}{4}} (y_0'')^2 - 4y_0'^2 + 2ty_0''y'' + t^2y''^2 - 8ty_0'y' + t^2y'^2 dx$$

利用:

$$h'(t)|_{t=0} = 0$$

得：

$$0.5 * \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2y_0''y'' - 8y_0'y' dx = 0$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} y_0''y'' - 4y_0'y' dx = 0$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (y_0'''' + 4y_0'')y dx = 0, \forall y$$

$$\begin{cases} y_0'''' + 4y_0'' = 0 \\ y(0) = y(\dfrac{\pi}{4}) = 0 \\ y'(0) = -1, y'(\dfrac{\pi}{4}) = 1 \end{cases}$$

解得：

$$y_0(x) = -\frac{1}{2}cos(2x) - \frac{1}{2}sin(2x) + \frac{1}{2}$$

2.解：

设从$A(x_0, y_0)$出发沿$y = y(x)$的弧长为s，则有

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{1 + (y')^2}dx}{dt} = x$$

从而有

$$dt = \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{x}dx$$

积分后得到沿着曲线$y = y(x)$从A到B所需的时间为：

$$t[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{x}dx$$

且固定的边界条件为

$$y(x_0) = y_0 \ , \ y(x_1) = y_1$$

令$F = \dfrac{\sqrt{1 + y'^2}}{x}$，则根据变分法的欧拉方程，有

$$\frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y'}) = 0$$

从而可以得到

$$y' = \frac{c_1 x}{\sqrt{1-c_1^2x^2}}$$

解得

$$y = -\frac{1}{c_1}\sqrt{1-c_1^2x^2} + c_2$$

其中c_1，c_2是常数，将初始边界条件$A(x_0, y_0)$，$B(x_1, y_1)$代入上式便可求出c_1，c_2.

3.解：

这是含有两个函数的泛函，$F = y'^2 + z'^2 + 2yz$，其中极值曲线应满足欧拉方程组，有，

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 2z - 2y'' = 0$$

$$F_z - \frac{d}{dx}F_{z'} = 2y - 2z'' = 0$$

这是一个二阶线性微分方程组，消去z 得，

$$y - y^{(4)} = 0$$

特征方程为：

$$r^4 - 1 = 0$$

欧拉方程的解为，

$$y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3cosx + c_4sinx$$

由$z = y''$ 得$y = c_1e^x + c_2e^{-x} - c_3cosx - c_4sinx$，代入条件.

由$y(0) = 0, z(0) = 0$，得$c_3 = 0$.

由$y(\frac{\pi}{2}) = -1, z(\frac{\pi}{2}) = 1$，解得$c_1 = c_2 = 0, c_4 = -1$，于是可得

$$\begin{cases} y = -sinx \\ z = sinx \end{cases}$$

4.解：

由题设条件可知，此题的哈密顿函数为

$$H = u^2(t) + 1 + \lambda u(t)$$

可知此题中$\varphi(t_f, x(t_f)) = ax^2(t_f)$, $F(t, x, u) = u^2(t) + 1$.

由协态方程以及边界条件：

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}\lambda(t)}{\mathrm{d}t} = -H_x = 0 \\ \lambda(t_f) = \varphi_{x(t_f)} = 2ax(t_f),\ a > 1 \end{cases}$$

解得：$\lambda(t) = 2ax(t_f)$. 最优策略$u^*(t)$ 必须使哈密顿函数H 达到极值. 将H 可进一步变形为：

$$H = u^2(t) + 2ax(t_f)u(t) + 1$$

由必要条件可知，哈密顿函数作为u的函数必须满足：

$$H_u = 2u(t) + 2at_f = 0$$

解得$u^*(t) = -2at_f$

再由最优轨线$x^*(t)$的状态方程和边界条件：

$$\begin{cases} x^*(t)' = H_\lambda = u^*(t) = -at_f \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

解得：$x^*(t) = 1 - at_f t$. 从而最优控制$u^*(t) = -2at_f$，最优轨线$x^*(t) = 1 - at_f t$.

5.解：

(1)边际资金生产率等于单位时间的实际投资量并加上实际的消费社会收益，其中投资量存在一定的贬值率. 有

$$\frac{dF(K)}{dK} = (1-\delta)I(t) + (1-\rho)u(C(t))$$

其中我们假定δ、ρ均为常量. 得资本储备状态方程：

$$\frac{dF(K)}{dK} = (1-\delta)(F(K(t)) - C(t)) + (1-\rho)u(C(t))$$

(2)假设T年初资本累积量为W_0,则有

$$W(t) = \int_0^t I(s)\,ds + W_0 = \int_0^t (F(K(s)) - C(s))\,ds + W_0$$

故得到泛函极值模型：

$$\begin{cases} W(t) = & \int_0^t I(s)\,ds + W_0 = \int_0^t (F(K(s)) - C(s))\,ds + W_0 \\ \frac{dF(K)}{dK} = & (1-\delta)(F(K(t)) - C(t)) + (1-\rho)u(C(t)) \end{cases}$$

相当于考虑一段时间T，使$W(t)$从初值W_0达到尽可能大的$W(T)$，这也等价于在固定端点条件$W(T) = W_1$下使得T最小.