

## 对应分析与典型相关分析作业

1. 我国山区某大型化工厂，在厂区及邻近地区挑选有代表性的8个大气取样点。每日四次同时抽取大气样品，测定其中包含的6种气体的浓度，前后共四天，每个取样点每种气体实测16次，计算每个取样点的平均浓度。

(1) 试用对应分析方法对取样点及大气污染气体进行分类。

(2) 用 $R$ 型因子分析方法(参数估计用主成分法)分析该组数据；并与(1)的结果比较之。

(3) 用 $Q$ 型因子分析方法分析该组数据；并与(1)，(2)的结果比较之。

Table 1: 大气污染数据

|   | 氯<br>$X_1$ | 硫化氢<br>$X_2$ | $SO_2$<br>$X_3$ | $C_4$<br>$X_4$ | 环氧氯<br>丙烷 $X_5$ | 环己烷<br>$X_6$ |
|---|------------|--------------|-----------------|----------------|-----------------|--------------|
| 1 | 0.056      | 0.084        | 0.031           | 0.038          | 0.0081          | 0.0220       |
| 2 | 0.049      | 0.055        | 0.100           | 0.110          | 0.0220          | 0.0073       |
| 3 | 0.038      | 0.130        | 0.079           | 0.170          | 0.0580          | 0.0430       |
| 4 | 0.034      | 0.095        | 0.058           | 0.160          | 0.2000          | 0.0290       |
| 5 | 0.084      | 0.066        | 0.029           | 0.320          | 0.0120          | 0.0410       |
| 6 | 0.064      | 0.072        | 0.100           | 0.210          | 0.0280          | 1.3800       |
| 7 | 0.048      | 0.089        | 0.062           | 0.260          | 0.0380          | 0.0360       |
| 8 | 0.069      | 0.087        | 0.027           | 0.050          | 0.0890          | 0.0210       |

2. 费希尔研究头发颜色与眼睛颜色的关系，抽查了5387人的资料如表所示，试对其进行对应分析。

Table 2: 头发颜色与眼睛颜色的数据

| 眼睛颜色 | 头发颜色 |     |      |      |     |      |
|------|------|-----|------|------|-----|------|
|      | 金黄色  | 红色  | 褐色   | 深红色  | 黑色  | 合计   |
| 蓝色   | 326  | 38  | 241  | 110  | 3   | 718  |
| 淡蓝   | 688  | 116 | 584  | 188  | 4   | 1580 |
| 浅蓝   | 343  | 84  | 909  | 412  | 26  | 1774 |
| 深蓝   | 98   | 48  | 403  | 681  | 85  | 1315 |
| 合计   | 1455 | 286 | 2137 | 1391 | 118 | 5387 |

3. 为了了解家庭特征与其消费模式之间的关系。家庭消费模式变量我们取每年去餐馆就餐的频率 $x_1$ 、每年外出看电影的频率 $x_2$ 两个指标；家庭的特征变量我们取户主的年龄 $y_1$ 、家庭收入 $y_2$ 、户主受教育程度 $y_3$ 三个指标。这两组变量的相关系数如下表所示。试求典型变量及典型变量间的相关系数。

Table 3: 成绩

|       | $x_1$ | $x_2$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $x_1$ | 1.00  | 0.80  | 0.26  | 0.67  | 0.34  |
| $x_2$ | 0.80  | 1.00  | 0.33  | 0.59  | 0.34  |
| $y_1$ | 0.26  | 0.33  | 1.00  | 0.37  | 0.21  |
| $y_2$ | 0.67  | 0.59  | 0.37  | 1.00  | 0.35  |
| $y_3$ | 0.34  | 0.34  | 0.21  | 0.35  | 1.00  |

4.在某年级44 名学生的期末考试中, 有的课程用闭卷, 有的课程用开卷. 试对闭卷( $X_1, X_2$ ) 和开卷( $X_3, X_4, X_5$ ) 两组变量进行典型相关分析.

Table 4: 成绩

| 力学<br>(闭)<br>$X_1$ | 物理<br>(闭)<br>$X_2$ | 代数<br>(开)<br>$X_3$ | 分析<br>(开)<br>$X_4$ | 统计<br>(开)<br>$X_5$ | 力学<br>(闭)<br>$X_1$ | 物理<br>(闭)<br>$X_2$ | 代数<br>(开)<br>$X_3$ | 分析<br>(开)<br>$X_4$ | 统计<br>(开)<br>$X_5$ |
|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| 77                 | 82                 | 67                 | 67                 | 81                 | 63                 | 78                 | 80                 | 70                 | 81                 |
| 75                 | 73                 | 71                 | 66                 | 81                 | 55                 | 72                 | 63                 | 70                 | 68                 |
| 63                 | 63                 | 65                 | 70                 | 63                 | 53                 | 61                 | 72                 | 64                 | 73                 |
| 51                 | 67                 | 65                 | 65                 | 68                 | 59                 | 70                 | 68                 | 62                 | 56                 |
| 62                 | 60                 | 58                 | 62                 | 70                 | 64                 | 72                 | 60                 | 62                 | 45                 |
| 52                 | 64                 | 60                 | 63                 | 54                 | 55                 | 67                 | 59                 | 62                 | 44                 |
| 50                 | 50                 | 64                 | 55                 | 63                 | 65                 | 63                 | 58                 | 56                 | 37                 |
| 31                 | 55                 | 60                 | 57                 | 73                 | 60                 | 64                 | 56                 | 54                 | 40                 |
| 44                 | 69                 | 53                 | 53                 | 53                 | 42                 | 69                 | 61                 | 55                 | 45                 |
| 62                 | 46                 | 61                 | 57                 | 45                 | 31                 | 49                 | 62                 | 63                 | 62                 |
| 44                 | 61                 | 52                 | 62                 | 46                 | 49                 | 41                 | 61                 | 49                 | 64                 |
| 12                 | 58                 | 61                 | 63                 | 67                 | 49                 | 53                 | 49                 | 62                 | 47                 |
| 54                 | 49                 | 56                 | 47                 | 53                 | 54                 | 53                 | 46                 | 59                 | 44                 |
| 44                 | 56                 | 55                 | 61                 | 36                 | 18                 | 44                 | 50                 | 57                 | 81                 |
| 46                 | 52                 | 65                 | 50                 | 35                 | 32                 | 45                 | 49                 | 57                 | 64                 |
| 30                 | 69                 | 50                 | 52                 | 45                 | 46                 | 49                 | 53                 | 59                 | 37                 |
| 40                 | 27                 | 54                 | 61                 | 61                 | 31                 | 42                 | 48                 | 54                 | 68                 |
| 36                 | 59                 | 51                 | 45                 | 51                 | 56                 | 40                 | 56                 | 54                 | 35                 |
| 46                 | 56                 | 57                 | 49                 | 32                 | 45                 | 42                 | 55                 | 56                 | 40                 |
| 42                 | 60                 | 54                 | 49                 | 33                 | 40                 | 63                 | 53                 | 54                 | 25                 |
| 23                 | 55                 | 59                 | 53                 | 44                 | 48                 | 48                 | 49                 | 51                 | 37                 |
| 41                 | 53                 | 49                 | 46                 | 34                 | 46                 | 52                 | 53                 | 41                 | 40                 |

5.12. 下表是从25 个家庭中测到的成年长子和次子的头宽、头长的数据. 试用典型相关分析的方法分析长子和次子的头宽、头长的相关情况.

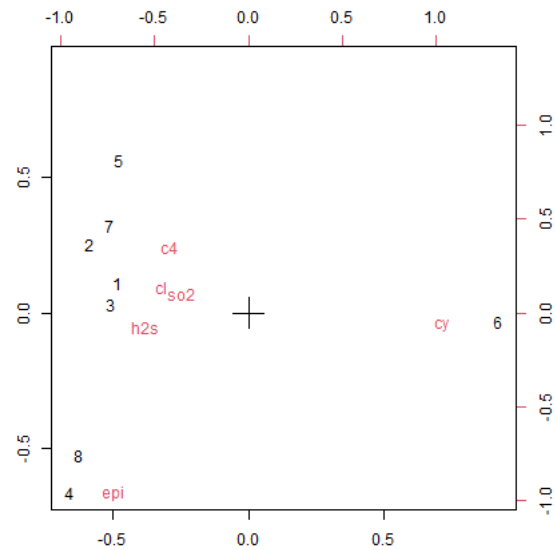
Table 5: 成年长子和次子的头宽、头长的数据

| 样品号 | 长子头长<br>$X_1$ | 长子头宽<br>$X_2$ | 次子头长<br>$X_3$ | 次子头宽<br>$X_4$ | 样品号 | 长子头长<br>$X_1$ | 长子头宽<br>$X_2$ | 次子头长<br>$X_3$ | 次子头宽<br>$X_4$ |
|-----|---------------|---------------|---------------|---------------|-----|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 1   | 191           | 155           | 179           | 145           | 14  | 190           | 159           | 195           | 157           |
| 2   | 195           | 149           | 201           | 152           | 15  | 188           | 151           | 187           | 158           |
| 3   | 181           | 148           | 185           | 149           | 16  | 163           | 137           | 161           | 130           |
| 4   | 183           | 153           | 188           | 149           | 17  | 195           | 155           | 183           | 158           |
| 5   | 176           | 144           | 171           | 142           | 18  | 186           | 153           | 173           | 148           |
| 6   | 208           | 157           | 192           | 152           | 19  | 181           | 145           | 182           | 146           |
| 7   | 189           | 150           | 190           | 149           | 20  | 175           | 140           | 165           | 137           |
| 8   | 197           | 159           | 189           | 152           | 21  | 192           | 154           | 185           | 152           |
| 9   | 188           | 152           | 197           | 159           | 22  | 174           | 143           | 178           | 147           |
| 10  | 192           | 150           | 187           | 151           | 23  | 176           | 139           | 176           | 143           |
| 11  | 179           | 158           | 186           | 148           | 24  | 197           | 167           | 200           | 158           |
| 12  | 183           | 147           | 174           | 147           | 25  | 190           | 163           | 187           | 150           |
| 13  | 174           | 150           | 185           | 152           |     |               |               |               |               |

### 对应分析与典型相关分析解答

1.解:

1 (1) 对应分析结果如下:



可以看出4和8与环氧氯丙烷相关性较大, 6和环己烷相关性较大, 其他与氯、硫化氢、二氧化硫, 碳四的相关性较大

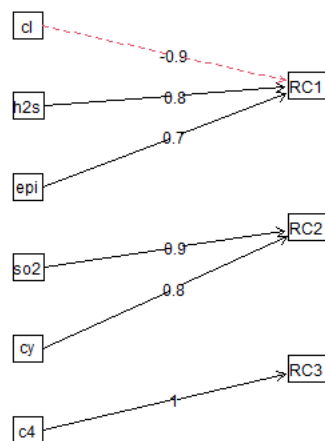
- (2) 运用R型因子分析，选择三个因子，结果为氯、硫化氢、环氧氯乙烷为一类，二氧化硫，环己烷为一类，碳4为一类

Loadings:

|     | RC1    | RC2    | RC3   |
|-----|--------|--------|-------|
| c1  | -0.868 | -0.265 | 0.270 |
| h2s | 0.796  | -0.170 |       |
| so2 | 0.119  | 0.942  |       |
| c4  |        | 0.149  | 0.970 |
| epi | 0.736  | -0.147 |       |
| cy  | -0.286 | 0.759  | 0.148 |

|                | RC1   | RC2   | RC3   |
|----------------|-------|-------|-------|
| SS loadings    | 2.032 | 1.606 | 1.049 |
| Proportion Var | 0.339 | 0.268 | 0.175 |
| Cumulative Var | 0.339 | 0.606 | 0.781 |

#### Components Analysis



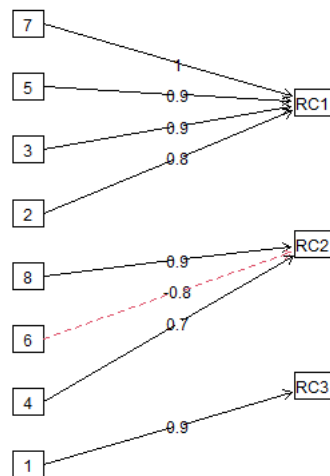
- (3) Q型因子分析的结果如下:

Loadings:

|   | RC1    | RC2    | RC3    |
|---|--------|--------|--------|
| 1 | 0.187  | 0.274  | 0.902  |
| 2 | 0.831  |        | 0.223  |
| 3 | 0.897  | 0.249  |        |
| 4 | 0.335  | 0.671  | -0.646 |
| 5 | 0.936  |        |        |
| 6 | -0.232 | -0.821 | -0.201 |
| 7 | 0.980  |        |        |
| 8 | -0.143 | 0.949  |        |

|                | RC1   | RC2   | RC3   |
|----------------|-------|-------|-------|
| SS loadings    |       | 3.552 | 2.169 |
| Proportion Var | 0.444 | 0.271 | 0.168 |
| Cumulative Var | 0.444 | 0.715 | 0.883 |

#### Components Analysis



可以看出2, 3, 5, 7为一类, 4, 6, 8为一类, 1为单独一类, 与对应分析的结果不同

代码如下:

```
library("MASS")
```

```

cl <- -c(0.056, 0.049, 0.038, 0.034, 0.084, 0.064, 0.048, 0.069)
h2s <- -c(0.084, 0.055, 0.130, 0.095, 0.066, 0.072, 0.089, 0.087)
so2 <- -c(0.031, 0.100, 0.079, 0.058, 0.039, 0.100, 0.062, 0.027)
c4 <- -c(0.038, 0.110, 0.170, 0.160, 0.320, 0.210, 0.260, 0.050)
epi <- -c(0.0081, 0.0220, 0.0580, 0.2000, 0.0120, 0.0280, 0.0380, 0.0890)
cy <- -c(0.0220, 0.0073, 0.0430, 0.0290, 0.0410, 1.3800, 0.0360, 0.0210)
x <- data.frame(cl, h2s, so2, c4, epi, cy, row.names = c(1 : 8))
ca1 <- -corresp(x, nf = 2)
ca1
biplot(ca1)
library(psych)
m <- -fa.parallel(x)
xfa <- -principal(x, nfactors = 3, rotate = 'varimax')
xfaloadings
fa.diagram(xfa)
xfa1 <- -principal(t(x), nfactors = 3, rotate = 'varimax')
xfa1loadings
fa.diagram(xfa1)

```

2.解:

根据数据首先得到协方差矩阵，求解协方差矩阵的特征值和特征向量，得到特征值向量是B:

$$B = \begin{bmatrix} -0.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0227 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1023 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2399 \end{bmatrix}$$

前两个特征值得累计贡献量为 $(.1023+0.2399)/(.1023+0.2399+0.0227)*100\% = 93.78\%$ ，因此，选前两个特征值分别计算R型与Q型的因子载荷阵如下:

$$F = \begin{bmatrix} -0.2178 & -0.1217 \\ -0.2765 & 0.2306 \\ 0.0517 & -0.1305 \\ 0.3005 & 0.1102 \\ 0.1518 & 0.0715 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} -0.1495 & 0.0655 \\ -0.0750 & -0.0553 \\ 0.0431 & -0.0356 \\ 0.1665 & 0.0431 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

最后在因子轴平面上以变量点和样品点画图，得到得结果如图1.

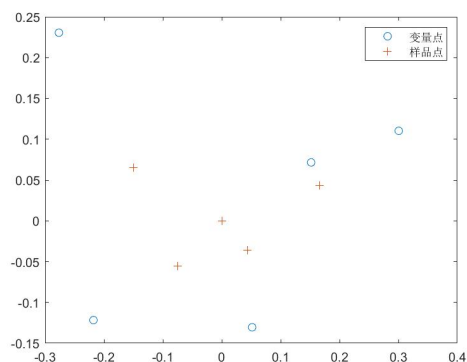


Figure 1: 因子轴

代码如下:

```
x=[190.33 43.77 9.73 60.54 49.01 9.04;135.20 36.40 10.47 44.16 13.49 3.94;...
95.21 22.83 9.30 22.44 22.81 2.80;104.78 25.11 6.40 9.89 18.17 3.25;...
128.41 27.63 8.94 12.58 23.99 3.27;145.68 32.83 17.79 27.29 39.09 3.47;...
159.37 33.38 18.37 11.81 25.29 5.22;116.22 29.57 13.24 13.76 21.75 6.04;...
221.11 38.64 12.53 115.65 50.82 5.89;144.98 29.12 11.67 42.60 27.30 5.74;...
169.92 32.75 12.72 47.12 34.35 5.00;153.11 23.09 15.62 23.54 18.18 6.39;...
144.92 21.26 16.96 19.52 21.75 6.73;140.54 21.5 17.64 19.19 15.97 4.94;...
115.84 30.26 12.20 33.61 33.77 3.85;101.18 23.26 8.46 20.2 20.5 4.3];
[n p]=size(x);
T=sum(sum(x));
xliehe=zeros(1,p);
xhanghe=zeros(1,n);
for k=1:p
    xliehe(k) = sum(x(:,k));
end
for l=1:n
    xhanghe(l) = sum(x(l,:));
end
Z=zeros(p,p);
for i=1:1:n
```

```

for j=1:1:p
    Z(i,j)=(x(i,j)-xhanghe(i)*xliehe(j)/T)/((xhanghe(i)*xliehe(j))^(1/2));
end
end
A=Z'*Z;
[XB]=eig(A);
F=zeros(p,2);
for t=1:1:p
    F(t,1)=(0.0357^0.5)*(X(t,6));
    F(t,2)=(0.0069^0.5)*(X(t,5));
end
F
G=Z*F
h1=F(:,1);
g1=F(:,2);
h2=G(:,1);
g2=G(:,2);
plot(h1,g1,'o')
hold on
plot(h2,g2,'+')
3.解:
计算可得X组的典型变量为

```

$$U_1 = 0.7689X_1 + 0.2721X_2$$

$$U_2 = -1.4787X_1 + 1.644X_2$$

Y组的典型变量为

$$V_1 = 0.049Y_1 + 0.8975Y_2 + 0.1900Y_3$$

$$V_2 = 1.000Y_1 - 0.5837Y_2 + 0.2956Y_3$$

典型相关系数为

$$\lambda_1 = 0.6879, \lambda_2 = 0.1869$$

代码如下:

```
clc,clear
```

```
r=[1.00,0.80,0.26,0.67,0.34;
```



```

0.80,1.00,0.33,0.59,0.34;
0.26,0.33,1.00,0.37,0.21;
0.67,0.59,0.37,1.00,0.35;
0.34,0.34,0.21,0.35,1.00];
n1=2;n2=3;num=min(n1,n2);
s1 = r([1 : n1], [1 : n1]); %‘提出X与X的相关系数’
s12 = r([1 : n1], [n1 + 1 : end]); %‘提出X与Y的相关系数’
s21 = s12'; %‘提出Y与X的相关系数’
s2 = r([n1 + 1 : end], [n1 + 1 : end]); %‘提出Y与Y的相关系数’
m1 = inv(s1) * s12 * inv(s2) * s21; %‘计算矩阵M1’
m2 = inv(s2) * s21 * inv(s1) * s12; %‘计算矩阵M2’
[vec1, val1] = eig(m1); %‘求M1的特征向量和特征值’
for i=1:n1
    vec1(:, i) = vec1(:, i)/sqrt(vec1(:, i)' * s1 * vec1(:, i)); %‘特征向量归一
化，满足a's1a=1’
    vec1(:, i) = vec1(:, i)/sign(sum(vec1(:, i))); %‘特征向量乘以1或-1，
保证所有分量和为正’
end
val1 = sqrt(diag(val1)); %‘计算特征值的平方根’
[val1, ind1] = sort(val1, 'descend'); %‘按照从大到小排列’
a = vec1(:, ind1(1 : num)) %‘取出X组的系数阵’
dcoef1 = val1(1 : num) %‘J;.’X’
[vec2, val2] = eig(m2);
for i=1:n2
    vec2(:, i) = vec2(:, i)/sqrt(vec2(:, i)' * s2 * vec2(:, i)); %‘特征向量归一
化，满足b's2b=1’
    vec2(:, i) = vec2(:, i)/sign(sum(vec2(:, i))); %‘特征向量乘以1或-1，
保证所有分量和为正’
end
val2 = sqrt(diag(val2)); %‘计算特征值的平方根’
[val2, ind2] = sort(val2, 'descend'); %‘按照从大到小排列’
b = vec2(:, ind2(1 : num)) %‘取出Y组的系数阵’
dcoef2 = val2(1 : num) %‘提出典型相关系数’
mu = sum(xur.^2)/n1 %‘x组原始变量被 $u_i$ 解释的方差比例’
mv = sum(xvr.^2)/n1 %‘x组原始变量被 $v_i$ 解释的方差比例’

```

$nu = \text{sum}(yur.^2)/n2$  %y组原始变量被 $u_i$ 解释的方差比例  
 $nv = \text{sum}(yvr.^2)/n2$  %y组原始变量被 $v_i$ 解释的方差比例  
 $fprintf('X|\text{œ}\Sigma\text{æ}u1\ u\ %d\text{解释的比例为}\%f/n', num, \text{sum}(mu));$   
 $fprintf('Y|\text{œ}\Sigma\text{æ}v1\ v\ %d\text{解释的比例为}\%f/n', num, \text{sum}(nv));$   
 4.解:

将数据输入SPSS中，得到结果

| 典型相关性 |      |      |       |       |       |        |
|-------|------|------|-------|-------|-------|--------|
|       | 相关性  | 特征值  | 威尔克统计 | F     | 分子自由度 | 分母自由度  |
| 1     | .643 | .705 | .578  | 4.094 | 6.000 | 78.000 |
| 2     | .117 | .014 | .986  | .     | .     | .      |

H0 for Wilks 检验是指当前行和后续行中的相关性均为零

集合 1 标准化典型相关系数

| 变量 | 1     | 2     |
|----|-------|-------|
| 力学 | -.584 | -.947 |
| 物理 | -.596 | .940  |

集合 2 标准化典型相关系数

| 变量 | 1     | 2     |
|----|-------|-------|
| 代数 | -.844 | -.418 |
| 分析 | -.514 | .183  |
| 统计 | .481  | 1.048 |

集合 1 非标准化典型相关系数

| 变量 | 1     | 2     |
|----|-------|-------|
| 力学 | -.042 | -.068 |
| 物理 | -.052 | .082  |

集合 2 非标准化典型相关系数

| 变量 | 1     | 2     |
|----|-------|-------|
| 代数 | -.117 | -.058 |
| 分析 | -.074 | .026  |
| 统计 | .031  | .067  |

此图给出了典型相关系数及其检验，结果表明第一个典型相关系数是显著的，因此我们选择第一个典型相关变量进行解释。

具体来说，第一对典型相关变量的相关系数是0.643， $p=0.001$ ；

上图分别是两组变量的标准化相关系数和未标准化的相关系数。

根据此图，可以写出各典型变量的表达式，如对于第一对典型变量 $u_1$ 和 $v_1$ ：

其标准化的表达式为（Z外向倾向表示将该变量标准化后的值）

$$u_1 = -0.584 * Z_{\text{力学}} - 0.596 * Z_{\text{物理}}$$

$$v_1 = -0.844 * Z_{\text{代数}} - 0.514 * Z_{\text{分析}} + 0.481 * Z_{\text{统计}}$$

非标准化的表达式为

$$u_1 = -0.042 * Z_{\text{力学}} - 0.052 * Z_{\text{物理}}$$

$$v_1 = -0.117 * Z_{\text{代数}} - 0.074 * Z_{\text{分析}} + 0.031 * Z_{\text{统计}}$$

5.解：

由典型分析结果为

\$cor

```
[1] 0.7885079 0.0537397
```

\$xcoef

```
[,1]      [,2]
```

```
x1 0.1127152 -0.2789099
```

```
x2 0.1064583 0.2813576
```

\$ycoef

```
[,1]      [,2]
```

```
x3 0.1029701 -0.3610078
```

```
x4 0.1098775 0.3589657
```

\$xcenter

```
x1      x2
```

```
1.243450e-16 -6.049328e-16
```

\$ycenter

```
x3      x4
```

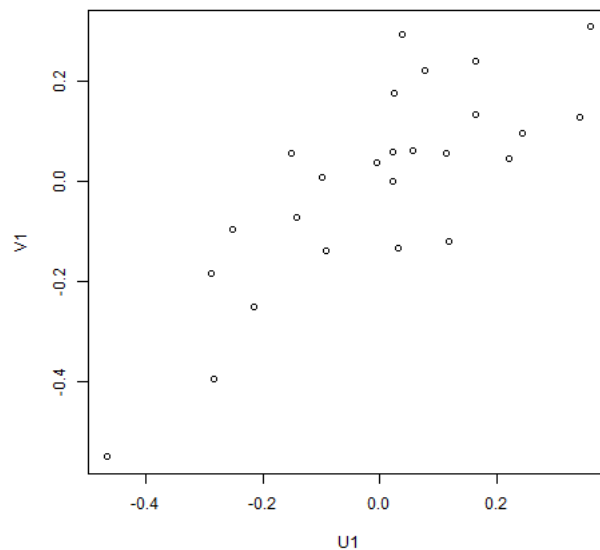
```
-3.380629e-16 -1.359746e-15
```

进行相关系数的 $\chi^2$ 检验得到p值分别为0.0003, 0.8，因此第二个典型相关系数可能为0，第一对典型相关变量为

$$U_1 = 0.1127X_1^* + 0.1065X_2^*$$

$$V_1 = 0.1030X_3^* + 0.1099X_4^*$$

其中 $X_i^*$ 是 $X_i$ 经过标准化后的结果。从散点图中可以看出 $U_1$ 和 $V_1$ 有较强的相关性



代码如下：

```

x1 <- -c(191, 195, 181, 183, 176, 208, 189, 197, 188, 192, 179, 183, 174,
190, 188, 163, 195, 186, 181, 175, 192, 174, 176, 197, 190)
x2 <- -c(155, 149, 148, 153, 144, 157, 150, 159, 152, 150, 158, 147, 150,
159, 151, 137, 155, 153, 145, 140, 154, 143, 139, 167, 163)
x3 <- -c(179, 201, 185, 188, 171, 192, 190, 189, 197, 187, 186, 174, 185,
195, 187, 161, 183, 173, 182, 165, 185, 178, 176, 200, 187)
x4 <- -c(145, 152, 149, 149, 142, 152, 149, 152, 159, 151, 148, 147, 152,
157, 158, 130, 158, 148, 146, 137, 152, 147, 143, 158, 150)
x <- -data.frame(x1, x2, x3, x4)
x <- -scale(x)
ca1 <- -cancor(x[, 1 : 2], x[, 3 : 4])
ca1
%'Xu\Phi RS
corcoef.testi-function(r, n, p, q, alpha=0.05){
  %'r为相关系数n为样本个数且n_i p+q'
  m <- -length(r); Q <- -rep(0, m); lambda <- -1
  for(k in m : 1){
    %检验统计量

```

```

lambda <- -lambda * (1 - r[k]^2);
Q[k] <- -log(lambda)
}
s <- -0; i <- -m
for(kin1 : m){
%统计量
Q[k] <- -(n - k + 1 - 1/2 * (p + q + 3) + s) * Q[k]
chi <- -1 - pchisq(Q[k], (p - k + 1) * (q - k + 1))
print(chi)
if(chi > alpha){
i <- -k - 1; break
}
s <- -s + 1/r[k]^2
}
%显示输出结果选用前几对典型变量
print(i)
}
corcoef.test(r = ca1$cor, n = 25, p = 2, q = 2)
U <- -as.matrix(x[, 1 : 2])
V <- -as.matrix(x[, 3 : 4])
plot(U[, 1], V[, 1], xlab = "U1", ylab = "V1")

```