

基于局部最优模型的无人机位置调整策略与仿真定位

韩奥麟¹, 孙若函¹, 赵凯文²

(1. 山东大学 澳国立联合理学院, 山东 威海 264209; 2. 山东大学 机电与信息工程学院, 山东 威海 264209)

摘 要: 研究了无人机遂行编队飞行中的纯方位无源定位问题, 首先基于发射信号无人机的位置无偏差实现了单架被动机的精确定位, 得到了被动机位置的解析解; 其次通过局部调整法完成了正九边形无人机遂行编队的调整, 比较不同方案的全局检验误差收敛值、收敛速度与无人机调整总次数确定了最优调整方案; 最后分层对无人机锥形编队队形进行调整. 仿真实验证明局部最优模型具有良好的可行性与鲁棒性. 该方法可应用推广至宇宙飞船、海上航行等定位问题.

关键词: 局部最优调整; 贪心策略; 微量仿真; 几何关系; 三维平面拟合

中图分类号: O29

文献标志码: A

文章编号: 2095-3070(2023)01-0069-10

DOI: 10.19943/j.2095-3070.jmmia.2023.01.09

0 引言

无人机协同作战是未来战场的大趋势, 已成为共识. 为此, 各国投入大量资源进行相关理论和技术的研究, 传感器技术、智能控制技术、信息集成技术和无线通信技术等都取得了长足的进步和发展^[1-2]. 无人机协同编队飞行控制是协同作战的基础和前提. 为适应战场态势、满足作战任务需要, 无人机协同应当需要形成、维持和重建既定编队^[3], 并适应一定的环境约束.

科研人员习惯将无人机编队的生成和维护结合起来进行研究. Sung 等^[4]考虑了雷达、导弹、高炮阵地的威胁和无人机的约束, 将编队重构问题转化为多目标优化问题, 促进达成了编队重构的自主控制. Huang 等^[5]采取使用粒子群优化算法求解编队重构问题, 设计了编队重构控制器, 并借助对比实验验证了算法的有效性. Liu 等^[6]采取使用模型预测的方法解决了不确定和障碍条件下的团队重建问题. 上述文献均假设无人机编队得以独立飞行, 在编队重构过程中不考虑指挥和人员决策.

合理有效的编队形式能够及时获取战场态势信息, 提升编队飞行的安全性和隐身性, 节省油耗, 进一步提升任务完成率. 常用的阵型配置涵盖柱形、线形、圆形、楔形、菱形、梯形等^[7]. 圆形编队通常用于巡航和轰炸任务^[8]; 菱形编队通常用于保护编队中的有人驾驶飞机^[9]. 李腾等^[10]结合无人机训练的特点, 设计了训练库, 研究了训练编队的生成和维护, 为无人机协同作战的研究奠定了基础. 上述有关无人机编队的生成和维护的研究, 均较好的配适于一般类型情况下的无人机编队, 但对于特定阵型的编队仍具有一定的复杂性; 上述有关无人机编队形式的训练库的研究, 均良好的阐述了不同军事需求下不同阵型的作用, 但鲜少提及特定编队的生成和维护. 故基于上述背景, 本文研究了无人机圆形及锥形编队在纯定位无源定位下的维持和调整策略, 填充了该研究方向的空白, 对现代军事化研究具有重要意义.

收稿日期: 2023-01-19

通讯作者: 韩奥麟, E-mail: aolinh@mail.sdu.edu.cn

引用格式: 韩奥麟, 孙若函, 赵凯文. 基于局部最优模型的无人机位置调整策略与仿真定位[J]. 数学建模及其应用, 2023, 12(1): 69-78+109.

HAN A L, SUN R H, ZHAO K W. UAV position adjustment strategy and simulation positioning based on local optimal model (in Chinese)[J]. Mathematical Modeling and Its Applications, 2023, 12(1): 69-78+109.

1 单架被动机精确定位

考虑圆形编队：由 10 架无人机组成，其中 9 架无人机（编号 FY01~FY09）均匀分布在某圆周上，另 1 架无人机（编号 FY00）位于圆心。在极坐标下计算无人机方位角关于发射信息的解析解，其次从几何角度给出位置稍有偏差的无人机的调整方案。

1.1 被动接收信号无人机定位模型

首先考虑当圆周上 2 架主动机编号已知的情况，此时由于无人机的分布呈辐射对称的状态，故圆周上第一架主动机的选取具有任意性，不妨 FY01 为第一架主动机。以 FY00 为原点，FY00 与 FY01 连线方向为极轴，逆时针为正方向建立极坐标系。

定义变量环境：设极轴与另一架主动机的连线的夹角为 θ ，与原点 and 被动机的连线夹角为 φ ；用编号的大小来衡量主动机的次序，编号越小次序越低。被动机关于前两架主动机的方位角为 α_1 ，被动机关于一、三两架主动机的方位角为 α_2 ，被动机关于二、三两架主动机的方位角为 α_3 。由于主动机的位置无偏差，被动机的位置略有偏差，故设圆周上两架主动机的位置分为 $(R, 0)$ ， (R, θ) ，被动机的位置为 (r, φ) 。

故该无人机定位问题可化归为方程问题进行求解。两架圆周上的被动机的分布有两种情况，即 $\varphi > \theta$ 与 $\theta > \varphi$ 。而 θ 与 φ 的取值范围则有四种情况，即 $\theta \in [0, \pi)$ 且 $\varphi \in [0, \pi)$ ； $\theta \in [0, \pi)$ 且 $\varphi \in [\pi, 2\pi)$ ； $\theta \in [\pi, 2\pi)$ 且 $\varphi \in [0, \pi)$ ； $\theta \in [\pi, 2\pi)$ 且 $\varphi \in [\pi, 2\pi)$ 。易证 θ 与 φ 的取值范围不影响数值解的大小，仅影响解的正负，故仅从 θ 与 φ 的大小关系出发进行讨论。以 $\theta \in [0, \pi)$ 且 $\varphi \in [0, \pi)$ 为例，设两架第二架主动机分为 FY02 和 FY04；两架被动机分为 FY04 和 FY02，如图 1 所示。

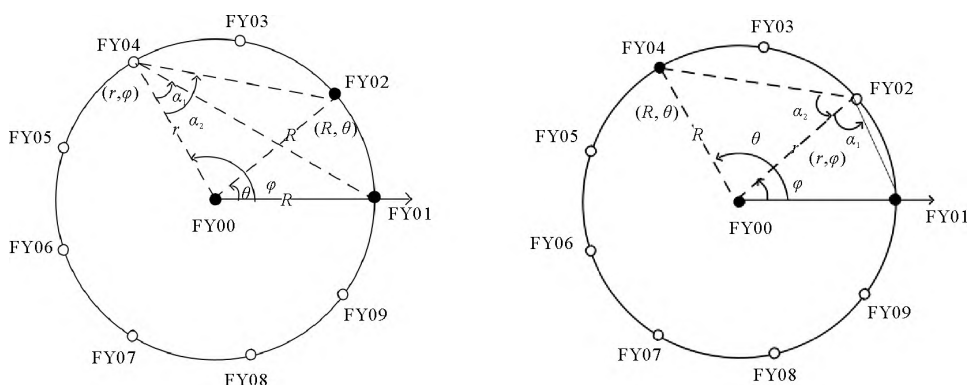


图 1 主动机与被动机排布的两种情况示意图

根据正弦定理，可列方程如下：

$$\begin{cases} \frac{R}{\sin \alpha_1} = \frac{r}{\sin(\alpha_1 + \varphi_1)}, \\ \frac{R}{\sin \alpha_2} = \frac{r}{\sin(\alpha_2 + \varphi_1 - \theta)}, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{R}{\sin \alpha_1} = \frac{r}{\sin(\alpha_1 + \varphi_2)}, \\ \frac{R}{\sin \alpha_2} = \frac{r}{\sin(\alpha_2 + \theta - \varphi_2)}. \end{cases}$$

解得

$$\varphi_1 = \arctan \frac{\cos \alpha_1 + \cos(\alpha_2 + \theta)}{\sin \alpha_1 [\sin(\alpha_2 + \theta) - \sin \alpha_2]}, \quad r_1 = \frac{R \sin(\alpha_2 - \varphi + \theta)}{\sin \alpha_2}. \quad (1)$$

$$\varphi_2 = \arctan \frac{\cos \alpha_1 - \cos(\alpha_2 - \theta)}{\sin \alpha_1 [\sin(\alpha_2 - \theta) - \sin \alpha_2]}, \quad r_2 = \frac{R \sin(\alpha_2 + \varphi - \theta)}{\sin \alpha_2}. \quad (2)$$

上述两组解为被动机位置的解析解，其极坐标为 (r_1, φ_1) 与 (r_2, φ_2) 。在几何上这两组解对应的被动机位置以 3 架主动机对应圆心角的角平分线为轴对称分布，如图 2(a)所示。特殊地，当被动机与相应角平分线的延长线重合时，方程的两个解相等，如图 2(b)所示。为了准确知道被动机的具体位置，故应提出假设：被动接收信号的无人机已知自己对应的编号。基于此假设，可以确定被动机位置的唯一解。

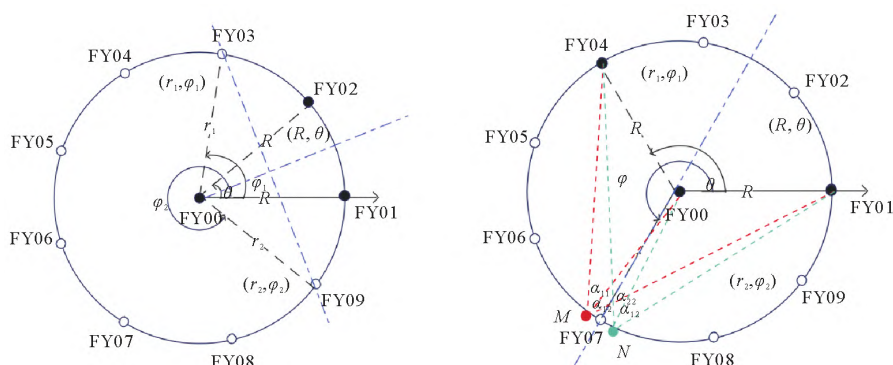


图 2 解的几何分布及特殊情况示意图

进一步研究发现,在主动机位置无偏差的前提下,若有编号已知的圆心无人机与编号已知的圆周上任一架无人机为主动机,则只需 1 架主动机(编号不必知道)即可实现其余略有偏差被动机的有效定位.

记正九边形为 $A_1A_2\cdots A_9$, 圆心为 O , 称 $\angle A_iA_jO (i \neq j)$ 为正九边形的伪圆周角, $\angle A_iA_jA_k (i, j, k$ 互不相等) 为正九边形的圆周角, $\angle A_iOA_j (i \neq j)$ 为正九边形的圆心角. 易知, 对于正九边形的圆周角 α , 存在正整数 k , 使得 $\alpha = 20^\circ k$; 对于正九边形的伪圆周角 β , 存在正整数 l , 使得 $\beta = 10^\circ (2l - 1)$.

不妨设发射信号的无人机为 $F_0, F_1, F_i (i$ 待定), 接收信号的无人机为 F_j ; 无人机 F_0, F_1, F_j 形成的圆心角为 θ ; 无人机 F_j 收到来自无人机 F_0, F_1, F_i 的方向信息为 α, β, γ . 易知 α, β, γ 三个角中必有一个为正九边形的圆周角, 不妨设 α 为该角, 从而 F_i 的位置可能有两个, 记为 F_{i1}, F_{i2} . 当 $\alpha < 90^\circ - \theta/2$ 时, 即图 3(a) 所示情形. 利用几何关系可以得到, 无人机 F_0, F_1, F_{i1} 发射给 F_j 的方向信息为集合 I_1 :

$$I_1 = \left\{ \alpha, \frac{180^\circ - \theta}{2}, \frac{180^\circ - \theta - 2\alpha}{2} \right\}.$$

无人机 F_0, F_1, F_{i2} 发射给 F_j 的方向信息为集合 I_2 :

$$I_2 = \left\{ \alpha, \frac{180^\circ - \theta}{2}, \alpha + \frac{180^\circ - \theta}{2} \right\},$$

$I_1 \neq I_2$. 在误差 $\pm 5^\circ$ 下, I_2 中的元素 $\alpha + \frac{180^\circ - \theta}{2} \neq \alpha, \frac{180^\circ - \theta}{2}, \frac{180^\circ - \theta - 2\alpha}{2}$. 此处不相等指在 $\pm 5^\circ$ 误差波动下, 不等号左右取值无交集.

故 I_1 不可能等于 I_2 . 从而可以根据无人机 F_j 实际接收到的方向信息确定出无人机 F_{i1} 或 F_{i2} 哪个发射的信号, 不妨设 F_{i1} 发射的信号. 这样, 发射信号的无人机 F_0, F_1, F_{i1} 位置无偏差且编号已知, 可实现无人机 F_j 的有效定位.

当 $\alpha > 90^\circ - \theta/2$ 时, 即图 3(b) 所示情形. 同样在误差 $\pm 5^\circ$ 波动下, 仍有 $I_1 \neq I_2$. 同上所证, 可实现无人机 F_j 的有效定位.

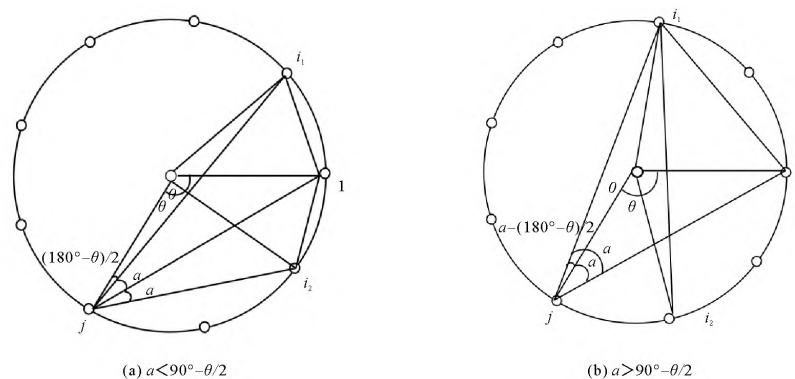


图 3 主动机的两种分布情况

1.2 被动接收信号无人机位置的调整方案

定位被动机后可更明确地知道其偏离程度. 为了尽可能地减小这种偏离程度, 故在此提出被动机位置的调整方案. 由于圆的高度对称性, 主动机的排布共分 4 种, 如图 4 所示.

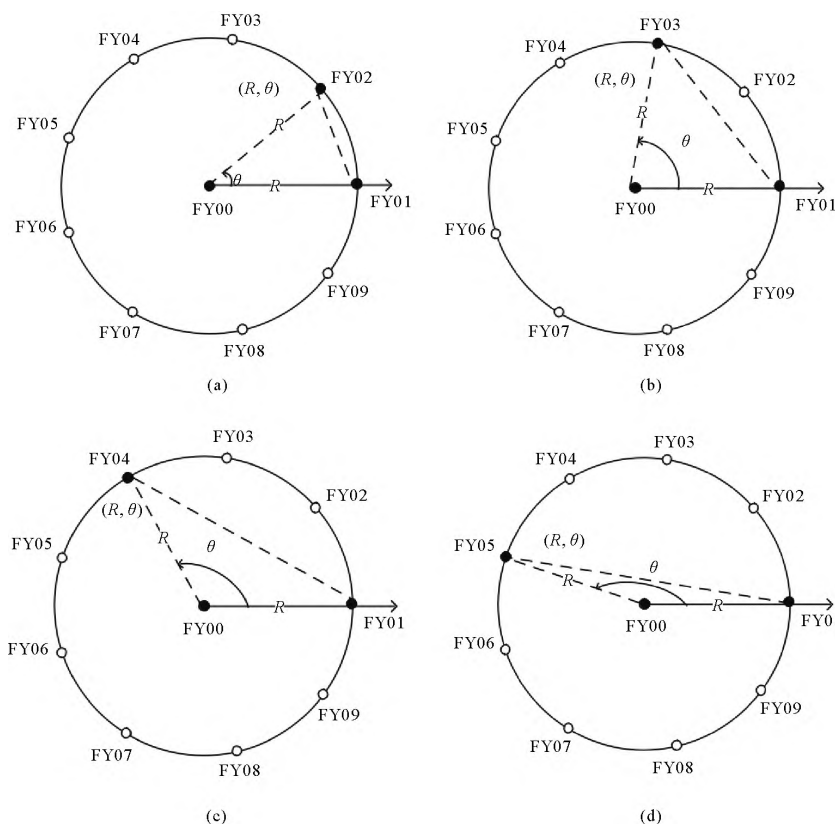


图 4 主动机的 4 种排布示意图

以排布方式 1 为例讨论被动机位置的调整方案, 其余 3 种排布同理. 如图 5 所示, FY00、FY01 和 FY02 为主动机, 点 P 为被动机所在位置, 根据方位角的定义, $\angle F_0 P F_1 = \alpha_1$, $\angle F_0 P F_2 = \alpha_2$, $\angle F_1 P F_2 = \alpha_3$, 易知 $\angle F_1 F_0 F_2 = 40^\circ$. 若 P 的位置有偏差, 则可将被动机的位置分为两种情况讨论.

1) 当 P 点在圆周上时, 方位角满足:

$$\alpha_1 = \frac{180^\circ - \varphi}{2}, \quad \alpha_2 = 90^\circ - \frac{\varphi - 40^\circ}{2}, \quad \alpha_3 = 20^\circ.$$

2) 当点 P 不在圆周上时, 根据圆的性质: 同弧所对的圆

外角 < 圆周角 < 圆内角, 则在图 5 中, 对于 $\widehat{F_1 F_2}$, P 在圆外时, $\alpha_3 < 20^\circ$; P 在圆内时, $\alpha_3 > 20^\circ$.

因此, 若要将有偏差的被动机调至无偏差, 应按以下步骤进行:

Step1 观测被动机接收到的方位角信号, 利用 α_1 与 α_2 计算出 α_3 ;

Step2 比较 α_3 与 20° 的大小, 若 $\alpha_3 > 20^\circ$, 跳至 Step3; 若 $\alpha_3 < 20^\circ$, 跳至 Step4; 若 $\alpha_3 = 20^\circ$, 跳至 Step5;

Step3 被动机在圆内, 应沿径向背离圆心飞行, 直至 $\alpha_3 = 20^\circ$;

Step4 被动机在圆外, 应沿径向朝向圆心飞行, 直至 $\alpha_3 = 20^\circ$;

Step5 被动机在圆周上, 进行角度微调, 应沿切线方向飞行(无人机不施加朝向圆心的力), 直至 α_1 与 α_2 和无偏差的方向角重合.

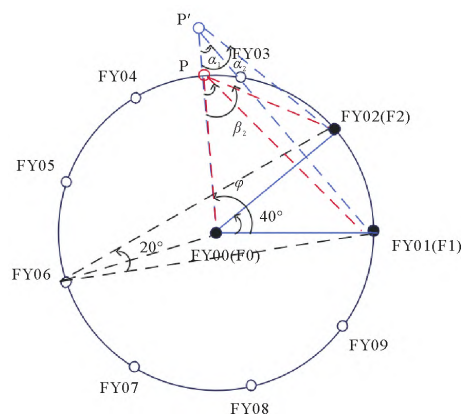


图 5 排布方式 1 的被动机位置

2 无人机遂行编队定位

讨论整个无人机编队中,所有无人机的位置均略有偏差,此时无法通过单次调整精确定位单架无人机,采用局部调整法完成了无人机遂行编队的调整,基于以下假设:无人机间信息不共享,即接收信号的无人机是被动接收的,不能发射电磁波信号;每架无人机均知道自己的编号;无人机位置调整可以沿任意方向.考虑到实际情况,无人机群构成严格正九边形是不可能的,总会有一定的误差,故假设无人机圆形编队圆周上的无人机角度偏差不超过 $\pm 5^\circ$ 且当误差小于一定值时,可以认为无人机以正九边形遂行编队飞行.

2.1 圆形编队调整方案

在圆形编队中,给定圆周半径 $R=100\text{ m}$,其中初始时刻所有无人机的位置略有偏差(无人机圆形编队圆周上的无人机角度偏差不超过 $\pm 5^\circ$).通过多次调整,每次选择编号为FY00的无人机和圆周上一定数量的无人机遂行发射信号,其余无人机根据接收到的方向信息调整到理想位置,最终9架无人机均匀分布在某个圆周上.

由于无人机定位系统的无源性,各无人机之间的信息不共享,故无法通过全局对无人机位置进行调整.对每次在圆周上选取2个或每次在圆周上选取3个无人机作主动机时分别给出了局部调整方案,两种方案的目标为在实现无人机位置尽可能均匀分布在以 R 为半径的圆周的前提下,使得无人机向外发射电磁波信号的总次数尽可能小.

以无人机 F_0 为原点,无人机 F_0 和 F_1 连线方向为 x 轴正方向建立平面直角坐标系 xOy ,并假设无人机1的位置 $F_1(R, 0)$ 是准确的.

2.1.1 方案1:每次选取圆周上3个无人机发射信号

考虑到正九边形的对称性,如图6,无人机 F_2, F_5, F_8 ,无人机 F_3, F_6, F_9 ,无人机 F_4, F_7, F_1 三组均近似构成等边三角形,将它们依次作为发射信号的无人机,其余无人机(除无人机 F_1)接收信号根据局部最优模型做出调整.注意,无人机 F_1 的位置是准确的,始终不调整.

Step1 选取无人机 F_0, F_2, F_5, F_8 发射信号,其余6架无人机被动接受信号并作出调整(F_1 不需要调整).由于对称性,以无人机 F_3 为例(其余无人机与 F_3 无本质区别),其调整方式如下:

记 $\angle F_5 F_3 F_0 = \alpha$, $\angle F_0 F_3 F_8 = \beta$, $\angle F_0 F_3 F_2 = \gamma$.由正九边形几何关系易知, α, β, γ 两个角的理想值分别为 $50^\circ, 10^\circ, 70^\circ$.记 $\mathbf{x} = [\alpha, \beta, \gamma]^T$, $\mathbf{y} = [50^\circ, 10^\circ, 70^\circ]^T$,建立目标函数

$$f_3(\alpha, \beta, \gamma) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 = (\alpha - 50^\circ)^2 + (\beta - 10^\circ)^2 + (\gamma - 70^\circ)^2,$$

f_3 下标为对应无人机编号.依此,其余待调整无人机目标函数为 f_4, f_6, f_7, f_9 .以无人机 F_3 为中心,在边长为 a 的正方形区域内以步长 b 进行搜索,使目标函数达到最小值.设置邻域边长、搜索步长只是为了利用Python对无人机实际调整进行仿真模拟.实际情况是无人机在其原来位置附近任意搜索.

注意到此处(包括下面及方案2)定义的目标函数不是全局函数,其仅通过纯方位无源定位方法得出.

Step2 选取无人机 F_0, F_3, F_6, F_9 发射信号,其余6架无人机被动接受信号并作出调整(F_1 不需要调整).调整方式同Step1,无人机 F_2 的目标函数记为 g_2 ,其余待调整无人机目标函数为 g_4, g_5, g_7, g_8 .

Step3 选取无人机 F_0, F_4, F_7, F_1 发射信号,其余6架无人机被动接受信号并作出调整(F_1 不需要调整).调整方式同Step1,无人机 F_2 的目标函数记为 h_2 ,其余待调整无人机目标函数为 h_3, h_5, h_6, h_8, h_9 .

Step4 设置循环次数阈值 η ,以控制无人机调整结束.记总循环次数为 σ ,一次循环指先选取无人

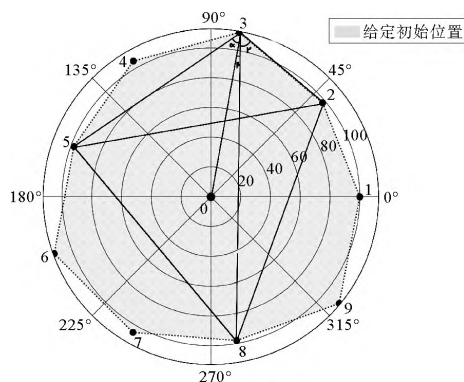


图6 方案一调整示例图

机 F_0 、 F_2 、 F_5 、 F_8 发射信号, 其他无人机作出调整, 然后选取无人机 F_0 、 F_3 、 F_6 、 F_9 发射信号, 其他无人机作出调整, 最后选取无人机 F_0 、 F_4 、 F_7 、 F_1 发射信号, 其他无人机作出调整. 一次循环每架无人机(无人机 F_0 、 F_1 除外)均被选做发射信号无人机一次与选做两次被动接受信号无人机做出调整. 也即, 若总循环次数为 σ , 各无人机调整次数如表 2 所示.

总调整次数为 $2\sigma \times 3 \times 8 = 48\sigma$. 若每架无人机 (0, 1 除外) 调整次数超过 η , 即 $\sigma > \eta/2$, 则该飞机调整结束. 否则, $\sigma \leq \eta/2$, 返回 Step1 继续调整.

Step5 定义误差检测函数 $\mu = h_2 + h_3 + g_4 + h_5 + h_6 + g_7 + h_8 + h_9$ 量化无人机趋于正九边形程度.

注意, g_i 和 h_j 均为无人机 i, j 最后做出调整时对应的目标函数. 定义全局误差函数以衡量无人机调整方案的好坏是合理的, 因为无人机并没有根据全局误差函数做出位置调整, 这并不违反无人机间信息不共享的前提.

2.1.2 方案 2: 每次选取圆周上两个无人机发射信号

分别选取无人机 F_0 、 F_2 、 F_7 , 无人机 F_0 、 F_3 、 F_8 , 无人机 F_0 、 F_4 、 F_9 , 无人机 F_0 、 F_1 、 F_5 , 无人机 F_0 、 F_1 、 F_6 发射信号, 调整方案与方案 1 本质相同. 仅以无人机 F_0 、 F_2 、 F_7 为主动机为例, 如图 7 所示.

Step1 选取无人机 F_0 、 F_2 、 F_7 发射信号, 其余 7 架无人机被动接受信号并作出调整 (F_1 不需要调整). 以无人机 F_9 接收信号为例 (其余无人机与 F_3 大同小异), 其调整方式如下:

记 $\angle F_7 F_0 F_9 = \alpha$, $\angle F_9 F_0 F_2 = \beta$. 由正九边形几何关系易知, α, β 两个角的理想值均为 50° . 记 $x = [\alpha, \beta]^T$, $y = [50^\circ, 50^\circ]^T$, 建立目标函数

$$f_9(\alpha, \beta, \gamma) = \|x - y\|_2^2 = (\alpha - 50)^2 + (\beta - 50)^2.$$

f_9 下标为对应无人机编号. 依此, 其余待调整无人机目标函数为 f_3, f_4, f_5, f_6, f_8 . 以无人机 F_9 为中心, 在边长为 a 的正方形区域内以步长 b 调整, 使目标函数达到最小值.

Step2 选取无人机 F_0 、 F_3 、 F_8 发射信号, 其余 7 架无人机被动接受信号并作出调整 (F_1 不需要调整). 调整方式同 Step1, 目标函数记为 g_i .

Step3 选取无人机 F_0 、 F_4 、 F_9 发射信号, 其余 7 架无人机被动接受信号并作出调整 (F_1 不需要调整). 调整方式同 Step1, 目标函数记为 h_i .

Step4 选取无人机 F_0 、 F_1 、 F_5 发射信号, 其余 7 架无人机被动接受信号并作出调整. 调整方式同 Step1, 目标函数记为 u_i .

Step5 选取无人机 F_0 、 F_1 、 F_6 发射信号, 其余 7 架无人机被动接受信号并作出调整. 调整方式同 Step1, 目标函数记为 v_i .

Step6 设置循环次数阈值 η , 以控制调整结束. 仍记总循环次数为 σ . σ 含义同步骤 1 所述. 各无人机调整次数见表 3.

总调整次数为 $4\sigma \times 2 \times 8 = 64\sigma$ 次. 从而若每辆无人机 (F_0, F_1 除外) 调整次数超过 η , 即 $\sigma > \eta/4$, 则该飞机调整结束, 否则若 $\sigma < \eta/4$, 返回 Step1 继续调整.

Step7 定义误差检测函数 $\mu = v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + u_6 + v_7 + v_8 + v_9$ 量化无人机趋于正九边形程度.

注意, u_i, v_j 含义均为无人机 F_i, F_j 最后做出调整时对应的目标函数.

2.2 空间锥形编队调整方案

锥形编队中, 仍考虑纯方位无源定位的情形. 给定初始位置略有偏差的无人机锥形编队队形, 标

表 2 步骤 1 循环时各无人机调整次数表

飞机编号	0	1	2~9
调整次数	0	0	2σ

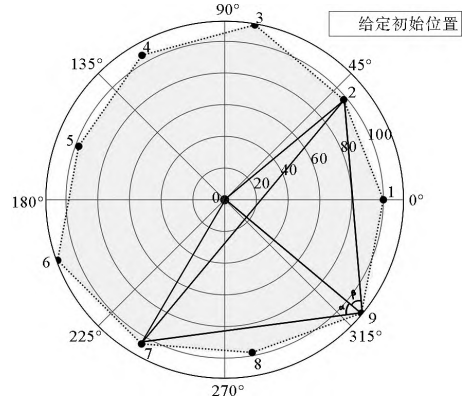


图 7 方案 2 调整示例图

表 3 步骤二循环时各无人机调整次数

飞机编号	0	1	2~9
调整次数	0	0	4σ

记无人机所在点依次为 A_1, A_2, \dots, A_{15} , 截取锥形编队无人机所在空间中的平面, 如图 8 所示. 下面证明, 在空间中可将待调整编队调至倾角与初始位置相近的严格的锥形编队队形.

首先给出 3 个引理, 分别对应不同类的操作.

引理 1 给定空间中近似成正三角形的 3 个点 A, B, C , 以及在边 AC 附近的点 D , 可以通过三步微调将 $\triangle ABC$ 调整为严格正三角形, 点 B 始终不动, 且 D 在边 AC 上, 图 9 为调整图示, 调整方案如下:

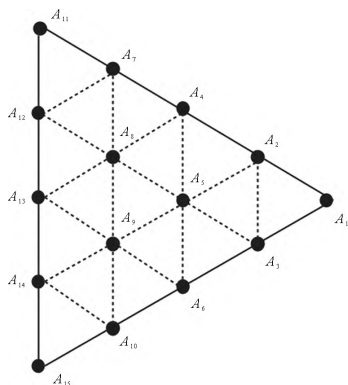


图 8 锥形编队无人机排布

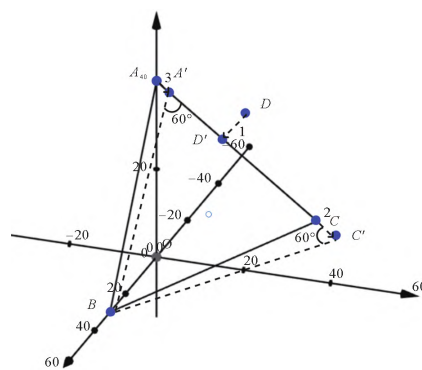


图 9 引理 1 的调整方案

第一步: 点 A, B, C 不动, 调整点 D . 控制 $\angle ADC = 180^\circ$, 使得 D 通过微调落在边 AC 上;

第二步: 点 A, B, D 不动, 调整点 C . 控制 $\angle ACD = 0^\circ$, $\angle DCB = \angle BCA = 60^\circ$, 使得点 C 在边 AD 上且 $\angle C = 60^\circ$;

第三步: 点 B, D, C 不动, 调整点 A . 控制 $\angle CAD = 0^\circ$, $\angle DAB = \angle BCA = 60^\circ$, 使得点 A 在边 CD 延长线上且 $\angle A = 60^\circ$.

通过以上三步, 可以将 $\triangle ABC$ 在给定位置附近微调为正三角形, 且点 D 在 AC 上, 即将 $\triangle ABC$ 调至 $\triangle AB'C'$.

引理 2 给定空间中近似成正三角形的 3 个点 A, B, C , 与在边 AC 附近的点 D . 对于任意 $\lambda \in [0, +\infty)$, 可以将点调到边 AC 上, 且满足 $AD/DC = \lambda$, 如图 10 所示.

当点 D 在边 AC 上, 且满足 $AD/DC = \lambda$ 时, 根据正三角形几何关系易求得

$$\angle ADB = \arccos \frac{\lambda - 1}{2\sqrt{\lambda^2 + \lambda + 1}}.$$

调整方案如下: 点 A, B, C 不动, 微调点 D , 控制 $\angle ADC = 0^\circ$, $\angle ADB = \arccos \frac{\lambda - 1}{2\sqrt{\lambda^2 + \lambda + 1}}$, 使得点 D 在边 AC 上且满足 $AD/DC = \lambda$.

引理 3 给定空间中成正三角形的 3 个点 A, B, C , 与在 $\triangle ABC$ 中心附近的点 D , 可通过微调使得 D 是 $\triangle ABC$ 的中心, 如图 11 所示.

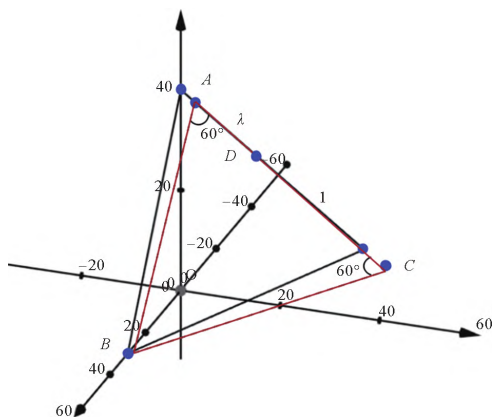


图 10 引理 2 的几何关系

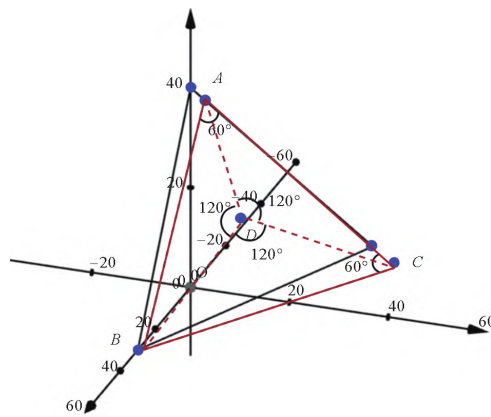


图 11 引理 3 的几何关系

点 A, B, C 不动, 微调点 D . 控制 $\angle ADB = \angle BDC = \angle CDA = 120^\circ$, 即可使点 D 为 $\triangle ABC$ 的中心. 证明是显然的, 由于此时 $\angle ADB + \angle BDC + \angle CDA = 360^\circ$, 故点 D 在平面 ABC 内. 由 Fermat 定理, 平面上满足 $\angle ADB = \angle BDC = \angle CDA = 120^\circ$ 的点只有一个——Fermat 点. 又因为 $\triangle ABC$ 是正三角形, 其 Fermat 点即为中心, 从而点 D 为 $\triangle ABC$ 的中心.

下面通过以上 3 个引理, 将给定的初始位置略有偏差的无人机锥形编队队形调整至存在倾角与初始位置相近的严格的锥形编队队形.

Step1 由引理 1, 调整 $A_1, A_{11}, A_{15}, A_{12}$, 可以将 $\triangle A_1 A_{11} A_{15}$ 调整为正三角形, 且 A_{12} 在边 $A_{11} A_{15}$;

Step2 由引理 2, 可以将 A_2, A_4, A_7 调至边 A_1, A_{11} 的四等分点, A_3, A_6, A_{10} 调至边 A_1, A_{15} 的四等分点, A_{12}, A_{13}, A_{14} 调至边 $A_{11} A_{15}$ 的四等分点. 每次调整均是选取 A_1, A_{11}, A_{15} 发射信号, 待调整点接收信号即可;

Step3 由引理 3, 可以将 A_5 调至正 $\triangle A_1 A_7 A_{10}$ 的中心, A_8 调至正 $\triangle A_2 A_{11} A_{14}$ 的中心, A_9 调至正 $\triangle A_3 A_{12} A_{15}$ 的中心.

综上, $A_1 A_2 \cdots A_{15}$ 调至准确位置且在同一有一定倾角的平面内, 构成锥形编队队形.

3 仿真实验

3.1 平面圆形编队调整方案仿真

通过仿真模拟对局部最优模型进行检验. 仿真包括两个部分: (a) 给定初始值仿真; (b) 灵敏性检验. 无人机实际情况是可以沿任意方向微调的, 为了对无人机进行仿真模拟, 取搜索区域正方形边长 $a=0.2$ 、搜索步长 $b=0.01$ (这对应无人机在原来位置微调), 编写 Python 程序求解模型.

仿真求解模型实际是求函数 F_u 最优值对应的 (i, j) :

$$\arg \min_{(i,j)} f_u = \sum_v [\text{Angle}(\langle x_v, y_v \rangle, \langle x_u + ib, y_u + jb \rangle, \langle 0, 0 \rangle) - \text{Ideal}_{v0}]^2,$$

其中, f_u 是无人机 $A_u (u=2, 3, \cdots, 9)$ 的目标函数, $\text{Angle}(A, B, O)$ 表示边 BA 与边 BO 的夹角, Ideal_{v0} 表示无人机 F_v, F_0 发射信号, 无人机 F_u 接收的方向角的理想值. 方案 1 选取 3 架无人机, v 取 3 个值; 而方案 2 选取两架无人机, v 取两个值.

3.1.1 给定初始值仿真

首先对无人机原始位置极坐标进行预处理: 记极坐标下无人机位置分别为 $(0, 0^\circ), (R, 0^\circ), (R + \epsilon_k, 40^\circ(k-1) + \xi_k), k=2, 3, \cdots, 9$, 其中, ϵ_k 与 ξ_k 分别为半径误差与角度误差. 由于初始时刻无人机的位置略有偏差, 故不妨设 $\epsilon_k \in (-15\%R, 15\%R), \xi_k \in (-0.5^\circ, 0.5^\circ), k=2, 3, \cdots, 9$.

对初始时刻无人机位置进行预处理, 使得对 $\forall F_k \in \{F_2, F_3, \cdots, F_9\}$, 距离误差 ϵ_k 可缩小至 $(-5\%R, 5\%R)$. 对任意无人机 $F_j \in \{F_2, F_3, \cdots, F_9\}$, 其极坐标为 $(R + \epsilon_j, 40^\circ(j-1) + \xi_j)$, 将其沿径向调整, 使其从无人机 F_0, F_1 接收到的方向信息角调整为 $\alpha_j = 90^\circ - 20^\circ(j-1)$.

无人机原始位置、预处理后的位置与方案 1、方案 2 调整完后的位置见极坐标图 12. 图 12 是预处理前原始位置、预处理后局部调整前位置以及两种方案分别调整后的位置对比图. 可以看出, 预处理后, 无人机位置已经很接近正九边形了. 无人机 5 可以较明显地看出两种方案调整后的位置.

方案 1 与方案 2 的全局检验误差值函数 μ_1, μ_2 如图 13 所示.

3.1.2 灵敏性分析

接下来对问题 3 中局部最优模型的方案 2 进行灵敏性分析. 考虑对精确点 $A_i (100, 40^\circ(i-1)) (i=2, 3, \cdots, 9)$ 进行如下扰动:

$$R_i = 100 \rightarrow r_i = (1 + \delta_i) \cdot R_i, \quad \theta_i = 40^\circ(i-1) \rightarrow \theta_i = \theta_i + \Delta\theta_i,$$

其中: (R_i, θ_i) 表示点 A_i 的精确位置; δ_i 与 $\Delta\theta_i$ 分别为半径随机扰动与角度随机扰动. 取 δ_i 服从均值为 0, 标准差为 0.01 的高斯分布, 即 $\delta_i \sim N(0, 0.01^2)$; 取 $\Delta\theta_i$ 服从均值为 0, 标准差为 0.1 的正态分布, 即 $\Delta\theta_i \sim N(0, 0.1^2)$. 进行 10 组扰动, 其中一组的半径随机扰动 δ_i 与角度随机扰动 $\Delta\theta_i$ 如表 5 所示.

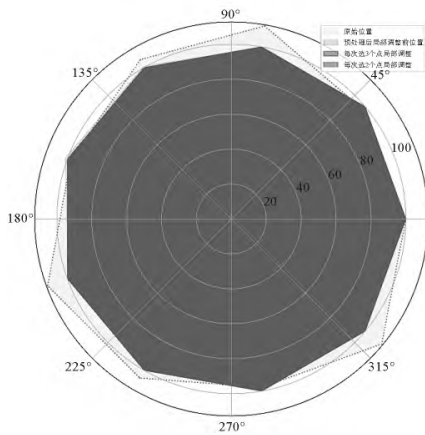


图 12 调整前后无人机几何位置变化示意图

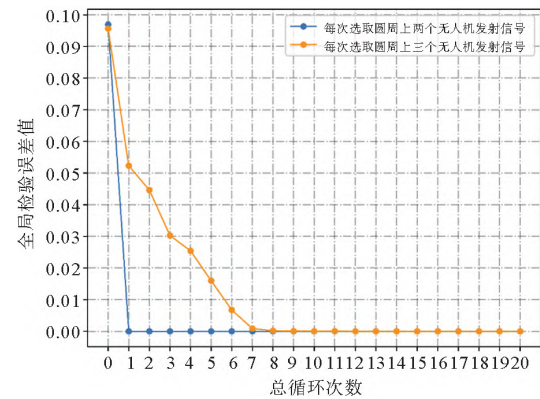


图 13 方案 1 与方案 2 的全局检验误差值函数图

通过方案 2(每次调整选取圆周上两个无人机发射信号)对 10 组扰动进行调整, 计算得全局检验误差值如图 14 所示。

表 5 第一组扰动数据集半径与角度的数值

无人机编号	扰动后半径/m	扰动后角度/(°)
1	$100 \times (1 - 0.016\ 31) = 98.369$	$0 - 0.046$
2	$100 \times (1 - 0.001\ 97) = 99.803$	$40 + 0.085$
3	$100 \times (1 - 0.002\ 48) = 99.752$	$80 + 0.330$
4	$100 \times (1 - 0.009\ 30) = 99.070$	$120 - 0.138$
5	$100 \times (1 - 0.008\ 44) = 99.156$	$160 - 0.150$
6	$100 \times (1 + 0.007\ 84) = 100.784$	$200 + 0.062$
7	$100 \times (1 - 0.009\ 40) = 99.060$	$240 - 0.068$
8	$100 \times (1 - 0.005\ 32) = 99.468$	$280 + 0.065$
9	$100 \times (1 - 0.000\ 76) = 99.924$	$320 + 0.155$

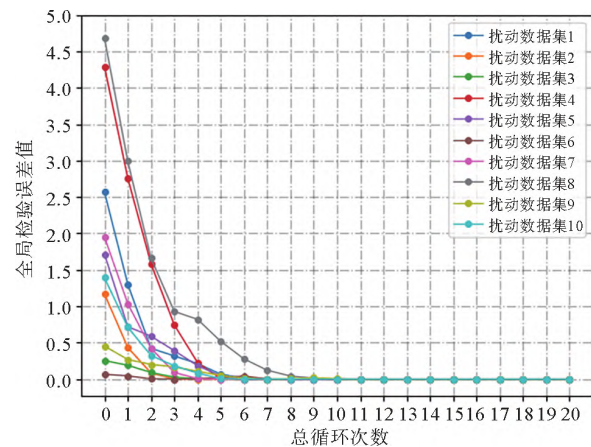


图 14 10 组数据集的全局检验误差值(彩图见封三)

由图 14 可见, 全局检验误差值随着循环次数迅速下降并收敛 $10^{-7} \sim 10^{-5}$, 可见模型对于一定范围内的扰动显示出较好的稳定性. 因此, 局部优化模型具有良好的鲁棒性。

3.2 空间锥形编队调整方案仿真

在空间锥形编队调整方案中, 主要通过调整后的平面化程度度量方案的好坏. 首先定义平面化检验函数 Λ . 给定空间中 n 个点 A_1, A_2, \dots, A_n , 设其坐标为 $(x_i, y_i, z_i) (i=1, 2, \dots, n)$, 利用最小二乘法拟合 A_1, A_2, \dots, A_n 的平面 $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$, 即确定 A, B, C, D , 使得 $\epsilon = \sum_{i=1}^n d^2(A_i, \pi)$ 最小. 其中, $d(A_i, \pi)$ 表示点 A_i 到平面 π 的距离, 称 ϵ 最小值为平面化检验函数, 记为 $\Lambda = \Lambda(A_1, A_2, \dots, A_n)$.

下面仿真检验无人机调整前后平面化程度. 对 A_1, A_2, \dots, A_{15} 锥形队列的调整, 实际上是由引理 1~3 组合而成. 初始 15 个点在空间中的拟合平面如图 15(a) 所示. 随机生成近似锥形排列的 15 个点的坐标 $A_i(x_i, y_i, z_i)$ 编写 Python 求解.

将无人机位置的扰动从二维推广至三维, 在仿真微调过程中取搜索区域正方体边长 $a=0.2$ 、搜索步长 $b=0.01$, 要求目标函数的最优值, 仿真目标即找到最佳的 (i, j, k) , 使得目标函数尽可能减小:

$$\arg \min_{(i,j,k)} f_u = F(x_u + ib, y_u + jb, z_u + kb),$$

其中, f_u 是无人机 $A_u (u=1, 2, \dots, 15)$ 的目标函数.

调整结束后 15 个点在空间中的拟合平面如图 15(b) 所示. 调整前平面化检验函数 $\Delta_1 = 3.893$, 调整后平面化检验函数 $\Delta_2 = 0.206$. 调整前后 15 个点空间图如图 15(c) 所示. 通过调整, 无人机集群更趋近共面.

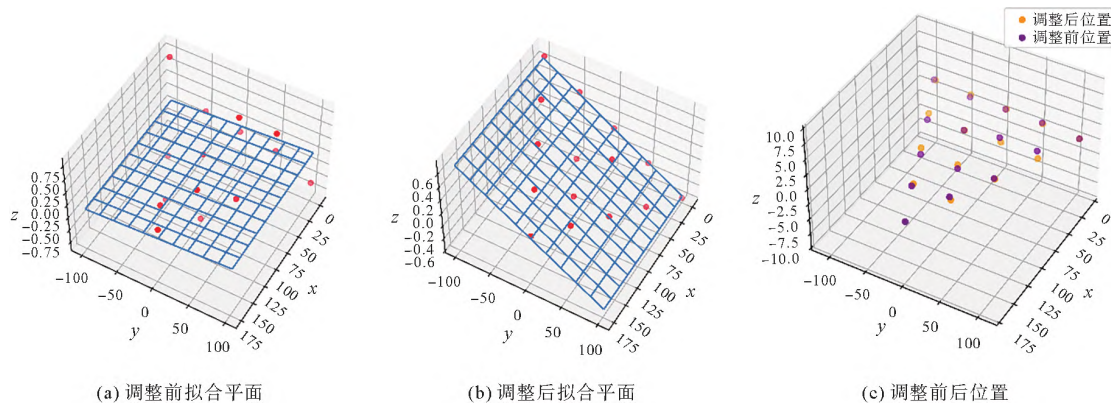


图 15 锥形编队调整仿真(彩图见封三)

4 结论

本文主要研究了圆形编队以及锥形编队的无人机阵型, 基于局部最优模型与仿真实验, 建立了无人机的定位模型以及无人机位置的调整策略.

首先, 运用正弦定理得出了单架被动机精确定位的解析解, 即通过两架位置无偏差且编号已知的主动机可完全确定圆周上略有偏差的任意被动机的位置. 并且进一步得出, 在发射信号的无人机位置无偏差的前提下, 已知编号已知的圆心无人机与圆周上任一架无人机为主动机, 则只需 1 架主动机即可实现其余略有偏差无人机的有效定位.

其次, 利用局部最优模型解决了正九边形无人机遂行编队的调整. 仿真实验结果表明, 方案 2(每次选取 2 架无人机作主动机)的收敛速度与全局检验误差收敛值要明显优于方案 1(每次选取 3 架无人机作主动机), 并且方案 2 的调整次数要远远小于方案 1 的调整次数, 所以通过比较两种方案的这 3 个指标, 确定每次选取 2 架主动机为最佳方案. 局部最优调整的优势体现在一次性解决 9 架无人机的共圆与等分问题.

最后, 通过分层调整的方法解决了初始位置略有偏差的无人机锥形编队队形的调整问题.

本文主要方法局部调整模型有着良好的准确性与鲁棒性, 普适性高, 可推广至人造卫星、宇宙飞船、海上航行等定位问题.

参考文献

- [1] 全国大学生数学建模组委会. 2022 高教社杯全国大学生数学建模竞赛赛题[EB/OL]. [2022-09-15]. http://www.mcm.edu.cn/html_cn/node/5267fe3e6a512bec793d71f2b2061497.html.
- [2] 林林. 基于协同机制的多无人机任务规划研究[D]. 北京: 北京邮电大学, 2013.
- [3] 邓启波. 多无人机协同任务规划技术研究[D]. 北京: 北京理工大学, 2014.
- [4] Sung Hoon Chung, Bhawesh Sah, Jinkun Lee. Optimization for drone and drone-truck combined operations: A review of the state of the art and future directions[J]. Computers and Operations Research, 2020, 123(prepublish).
- [5] Huang Q, Sheng Z, Fang Y, et al. A simulated annealing-particle swarm optimization algorithm for UAV multi-target path planning[C]//International Conference on Consumer Electronics and Computer Engineering, 2022: 906.
- [6] Liu H, Liu F, Zhang X, et al. A formation reconfiguration algorithm for multi-UAVs based on distributed cooperative coevolutionary with an adaptive grouping strategy[J]. Chinese Journal of Electronics, 2020, 29(5): 841-851.

(下转第 109 页)

(Symmetric Structures in Banach Spaces)。他的博士导师是著名数学家贝拉·波罗巴斯。如果你认为高尔斯先生只写科普书那就大错了，他还是多卷本《普林斯顿数学指南》(The Princeton Companion to Mathematics)的核心编者。

书评人介绍

李大潜, 1937 年 11 月 10 日生于江苏南通, 数学家, 中国科学院院士, 发展中国家科学院院士, 欧洲科学院院士, 法国科学院外籍院士, 葡萄牙科学院外籍院士, 博士生导师, 复旦大学教授。上文是李大潜院士为高尔斯先生的书所写推荐序, 经出版社同意原文刊发。



(上接第 78 页)

- [7]王欢, 刘树光, 张博洋. 基于分层控制结构的有人/无人机编队队形控制[J/OL]. 电光与控制, 2023, 30(1): 1-8. [2023-01-17]. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/41.1227.TN.20220914.1151.003.html>.
- [8]欧超杰. 多无人机编队控制技术研究[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2015.
- [9]成成. 多无人机协同编队飞行控制关键技术研究[D]. 长春: 中国科学院大学(中国科学院长春光学精密机械与物理研究所), 2018.
- [10]李腾. 有人/无人机协同编队控制技术研究[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2017.

UAV Position Adjustment Strategy and Simulation Positioning Based on Local Optimal Model

HAN Aolin¹, SUN Ruohan¹, ZHAO Kaiwen²

(1. SDU-ANU Joint Science College, Shandong University, Weihai, Shandong 264209, China;

2. College of Electromechanical and Information Engineering, Shandong University, Weihai, Shandong 264209, China)

Abstract: This paper investigates the problem of pure bearing-based passive localization for UAV (unmanned aerial vehicle) formation flying. firstly, the precise positioning of a single passive machine is realized based on the position of the transmitting signal UAV without deviation, and the analytical solution of the passive machine position is obtained; secondly, the adjustment of a positive nine-sided UAV attempted formation is completed by the local adjustment method, and the optimal adjustment scheme is determined by comparing the global test error convergence value, the convergence speed and the total number of UAV adjustments of different schemes; finally, the conical formation of UAV is stratified. Finally, the UAV conical formation is adjusted in layers. The simulation experiments prove that the local optimal model has good feasibility and robustness. The method can be applied and extended to positioning problems such as spacecraft and sea navigation.

Key words: local optimal adjustment; greedy strategy; microvolume simulation; geometric relationships; three-dimensional plane fitting

作者简介

韩奥麟(2001—), 男, 数学与应用数学专业 2020 级本科生.

孙若函(2002—), 女, 数学与应用数学专业 2020 级本科生.

赵凯文(2002—), 男, 人工智能专业 2020 级本科生.