



计算机图形学 细分曲线、曲面

主讲人：陈中贵
厦门大学信息学院



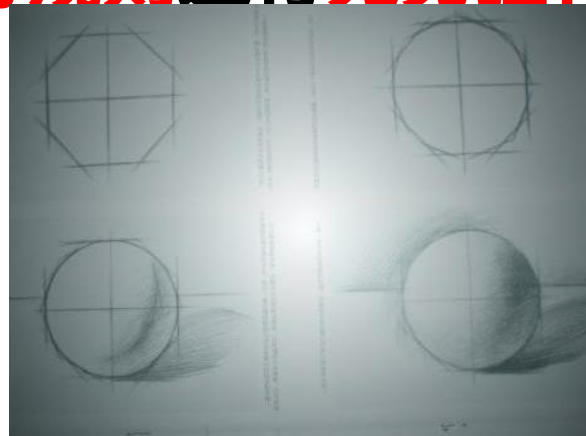
第四节 细分曲线、曲面

- 细分曲线
- 细分曲面

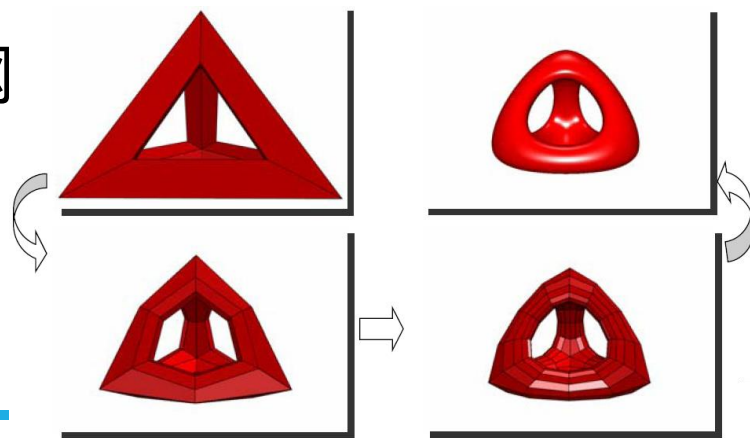
细分曲面概念

- 给定多面体，按照指定的**细分规则**进行**无穷细化**的极限

- 极限曲面
- 递归生成



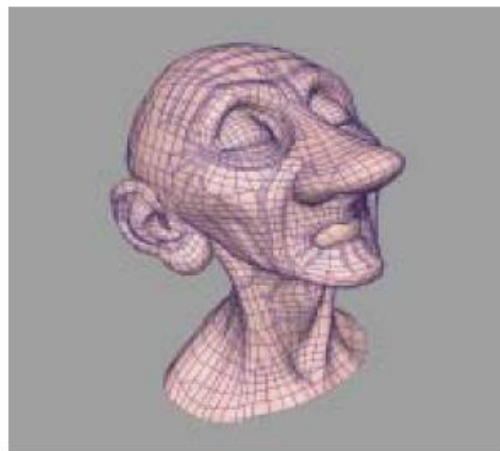
- 重新添加边、顶点、面来重新定义网格（拓扑）
- 移动顶点的空间位置来平滑网



3.1 概念

• 细分曲面的特点

- 曲面更灵活也更光滑
- 在计算机动画中有广泛的应用



Catmull-Clark细分

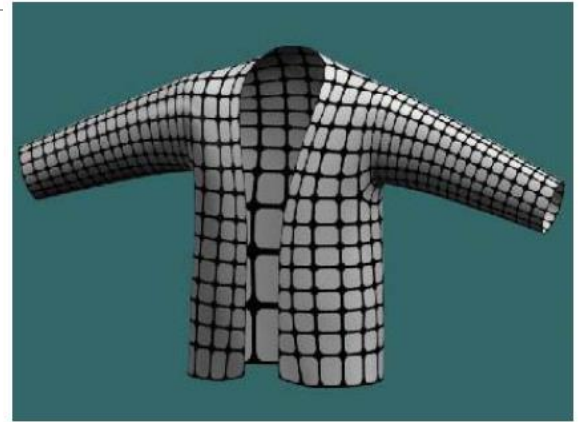
(DeRose, Pixar)

Academy Award for Best Animated Short Film, 1998

3.1 细分曲面

• 细分曲面的核心：细分规则

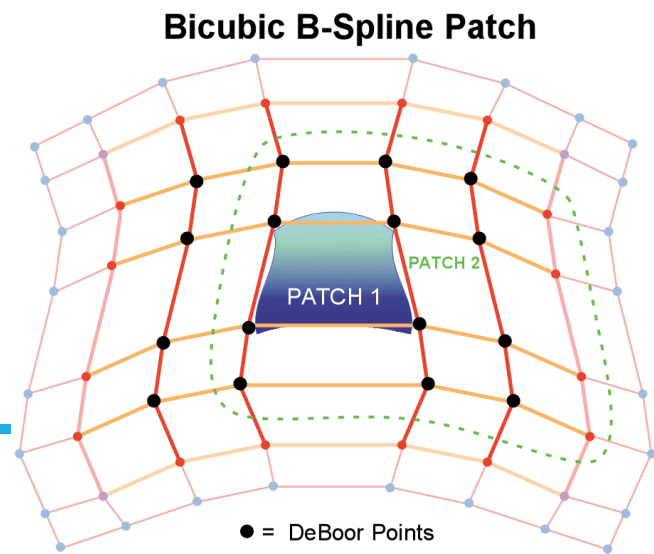
- Catmull-Clark
- Doo-Sabin
- Loop
- Butterfly



3.2 类型

• 3.2.1 Catmull-Clark细分

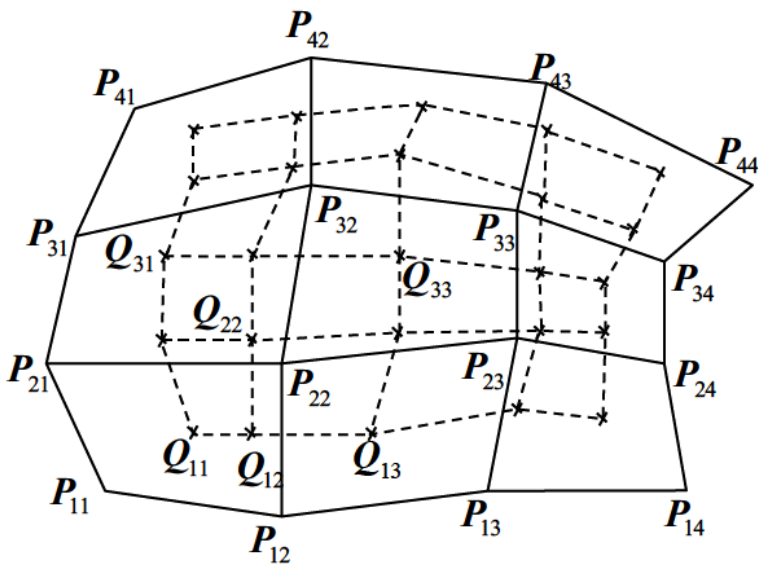
- E. Catmull 和 J. Clark在1978年发现
- 双三次B样条的推广
- 应用到多边形网格中
- 几乎为 C^2 的连续性 (除一些特殊点)



3.2 类型

• 3.2.1 Catmull-Clark细分

• 双三次B样条曲面的切割磨光生成



$$Q_{11} = (P_{11} + P_{12} + P_{22} + P_{21})/4$$

$$\begin{cases} Q_{12} = ((C + D)/2 + (P_{12} + P_{22})/2)/2; \\ C = Q_{11}, \\ D = Q_{13} = (P_{12} + P_{13} + P_{22} + P_{23})/4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_{22} = Q/4 + R/2 + P_{22}/4, \\ Q = (Q_{11} + Q_{13} + Q_{23} + Q_{21})/4, \\ R = (1/4)((P_{22} + P_{12})/2 + (P_{22} + P_{21})/2 + (P_{22} + P_{32})/2 + (P_{22} + P_{23})/2). \end{cases}$$

面点

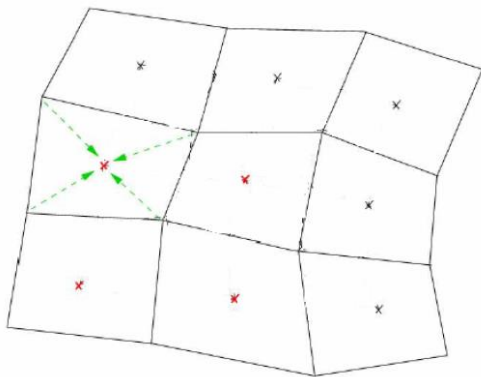
边点

新顶点

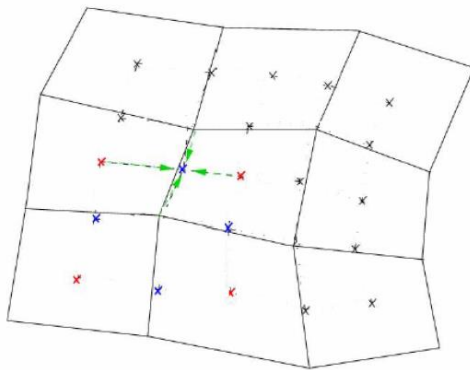
3.2 类型

• 3.2.1 Catmull-Clark细分

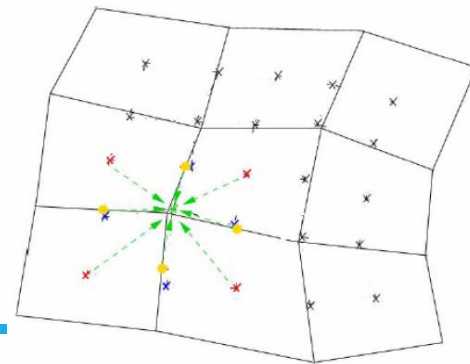
- 任意多边形细分规则（几何）
 - 加一个新顶点（表面点）到每个表面的中心
 - 给每个边加一个新顶点（边点），这个顶点是两个端点和表面点的平均值
 - 用新的顶点替代旧的顶点



Face point



Edge point



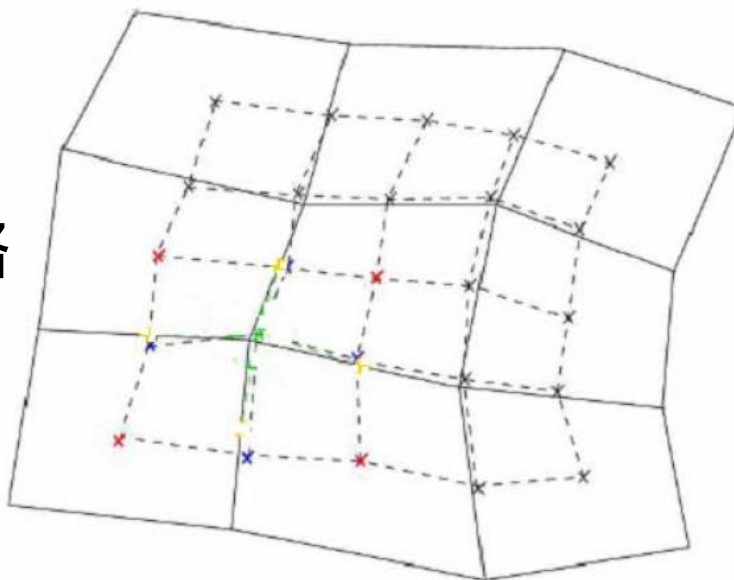
Vertex point

3.2 类型

• 3.2.1 Catmull-Clark细分

- 任意多边形细分规则(拓扑)
 - 连接每个表面点到邻接的新边点上
 - 连接每个顶点到邻接的新边点上

细化的网格

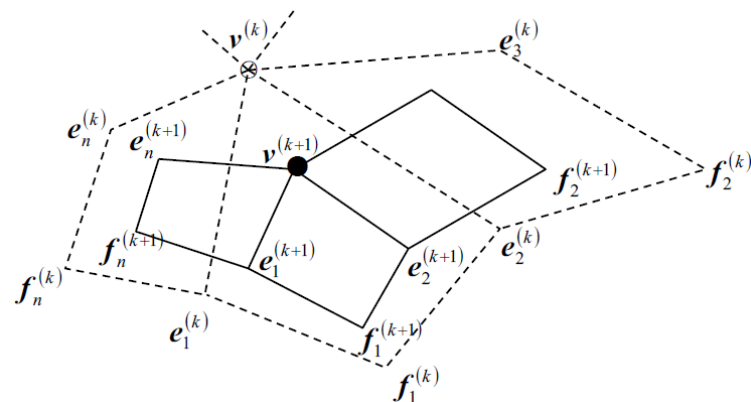


3.2 类型

• 3.2.1 Catmull-Clark细分

- 连续性

- 作用细分规则一次以后，所有的面均变为四边形，而且从此以后度数不为4的顶点（称为奇异点）的个数保持不变。
- 除了奇异点以外，Catmull-Clark曲面由一系列双三次B样条曲面覆盖而成，从而处处达到曲率连续。
- 在奇异点处，仅切平面保持连续。

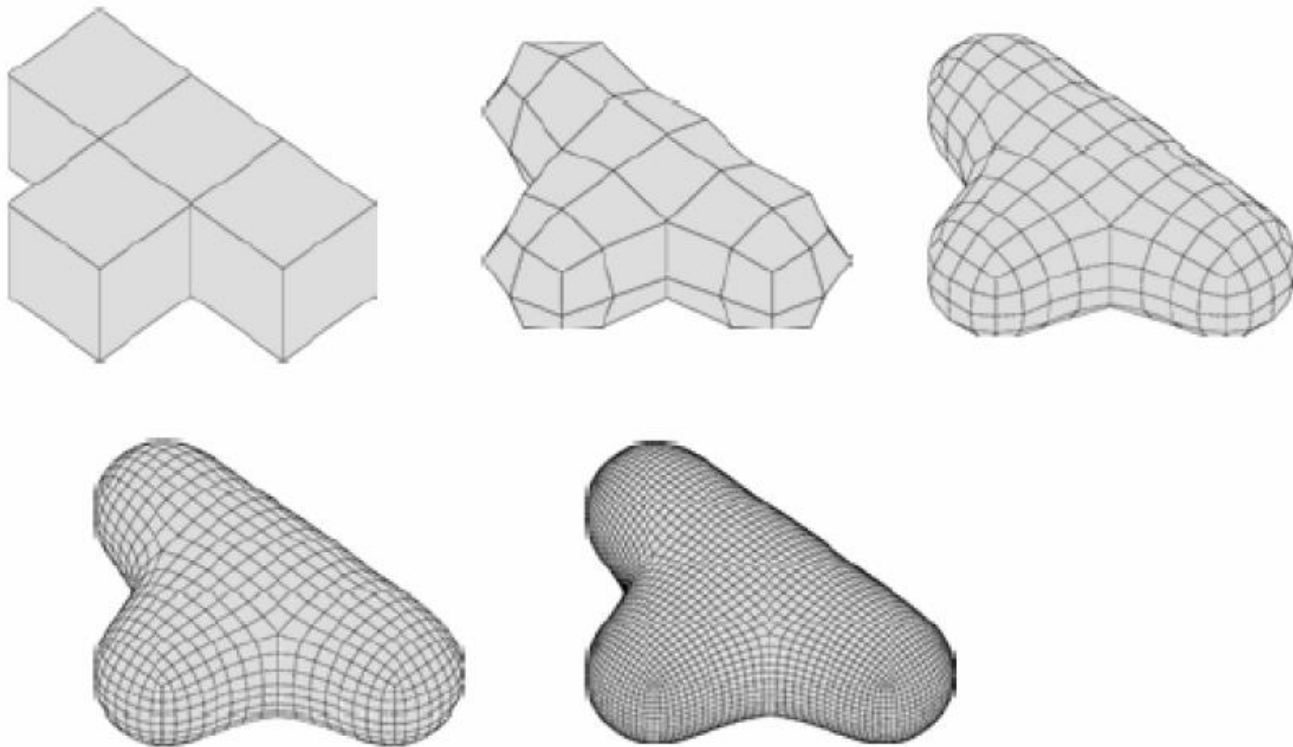


度为n的网格顶点

3.2 类型

• 3.2.1 Catmull-Clark细分

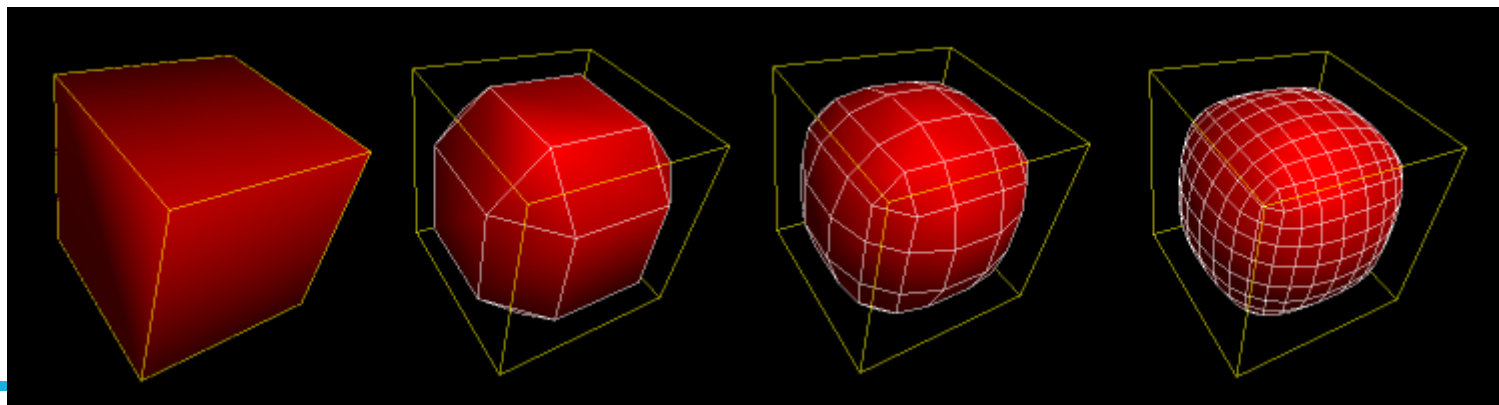
• 结果示例



3.2 类型

• 3.2.2 Doo-Sabin细分

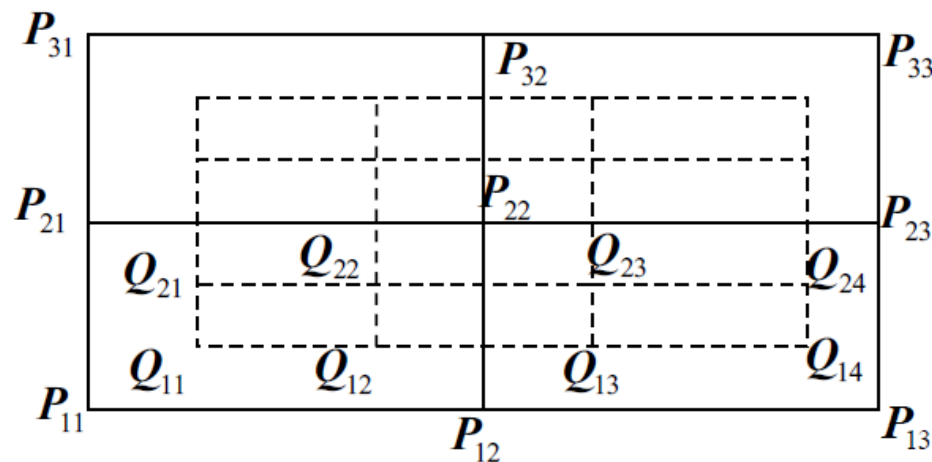
- D. Doo 和 M. Sabin在1978年发现
- 双二次B样条的推广
- 应用到多边形网格
- C^1 的连续性



3.2 类型

• 3.2.2 Doo-Sabin细分

- 双二次B样条的切割磨光生成



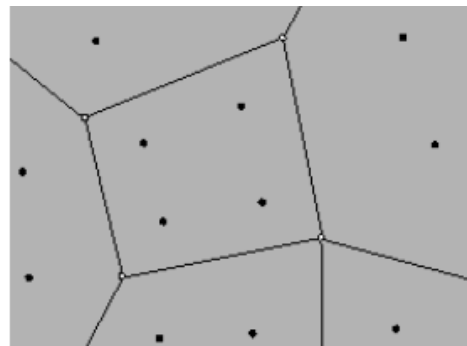
每个面的每个
顶点产生一个
新顶点

$$Q_{11} = (9P_{11} + 3P_{12} + 3P_{21} + P_{22})/16$$

3.2 类型

• 3.2.2 Doo-Sabin细分

- 任意多边形细分规则 (几何)
 - 对于每个表面有 k 个顶点 V_1, V_2, \dots, V_K , 形成新的对应的顶点 V_1', V_2', \dots, V_K'

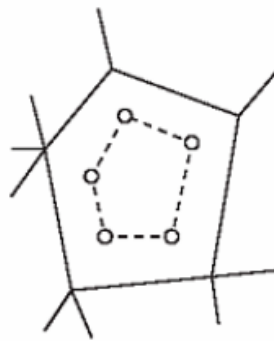
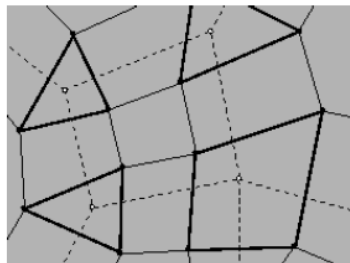
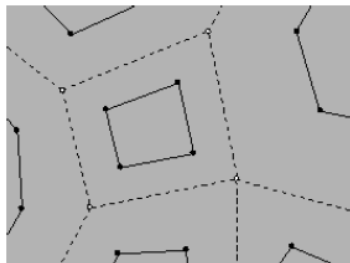


$$V_i' = \sum_{j=1}^K \alpha_{ij} V_j \quad \alpha_{ij} = \begin{cases} \frac{K+5}{4K}, & i = j \\ \frac{3 + 2\cos(2(i-j)\pi/K)}{4K}, & i \neq j \end{cases}$$

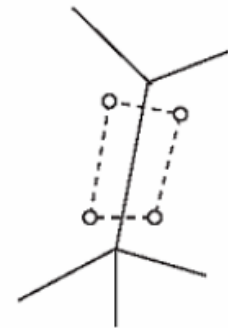
3.2 类型

• 3.2.2 Doo-Sabin细分

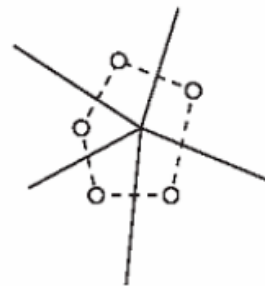
- 任意多边形细分规则（拓扑）
 - 连接新的顶点去形成一个新的F类型表面
 - 连接围绕一个边周围的4个顶点去形成新的表面E
 - 连接围绕一个旧边周围的4个新的顶点，形成V



F



E



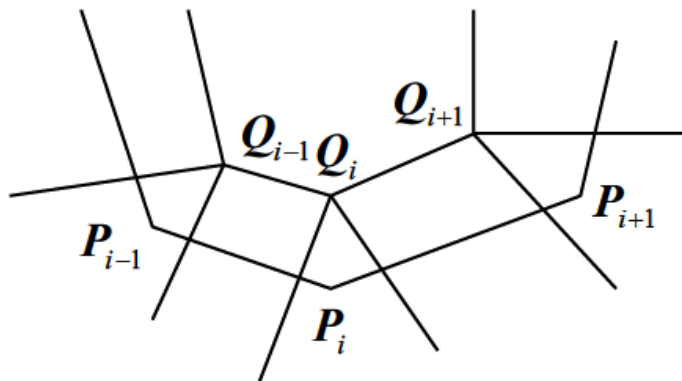
V

3.2 类型

• 3.2.2 Doo-Sabin细分

• 连续性分析

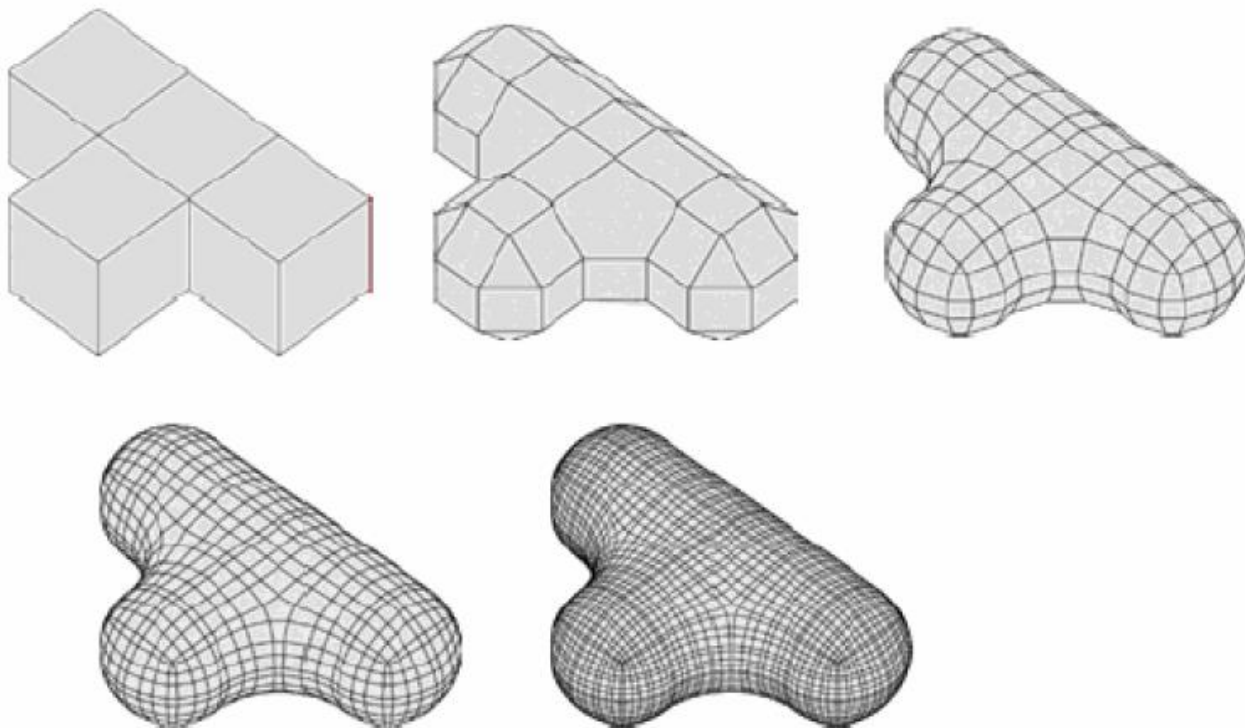
- 经过一次Doo-Sabin细分后，每个顶点的度数均为4；再经过一次细分后，度数不为4的面的个数保持不变。
- 除了有限个奇异点外，由一系列双二次B样条曲面覆盖而成。
- 在奇异点处，Doo-Sabin曲面也是一阶光滑连续。



新顶点

3.2 类型

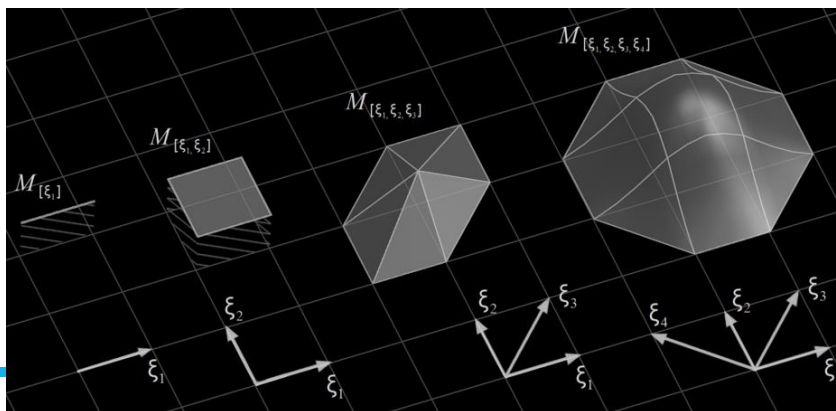
- 3.2.2 Doo-Sabin细分
- 结果示例



3.2 类型

• 3.2.3 Loop细分

- C. Loop在1987年发现
- 箱样条的推广
- 应用到三角形网格中
- 几乎为 C^2 的连续性 (除一些特殊点)

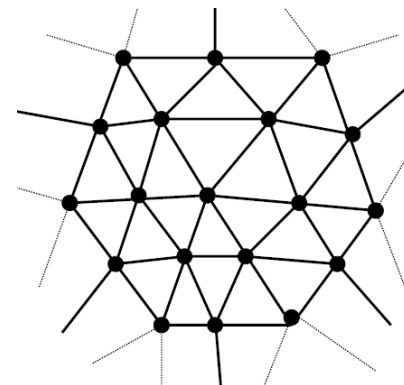
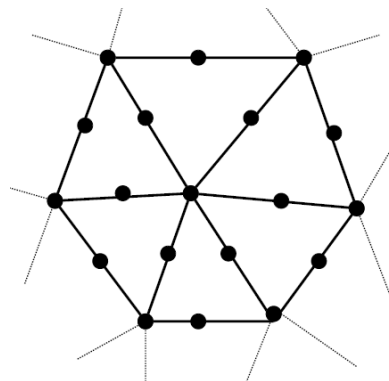
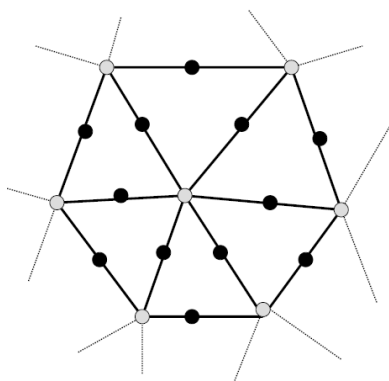
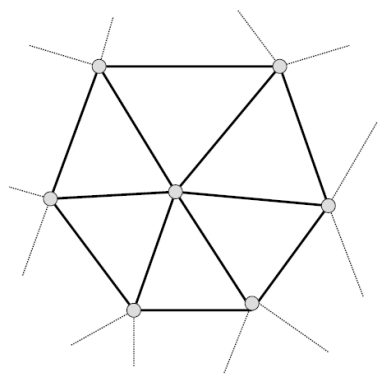


3.2 类型

• 3.2.3 Loop细分

- 规则(几何/拓扑)

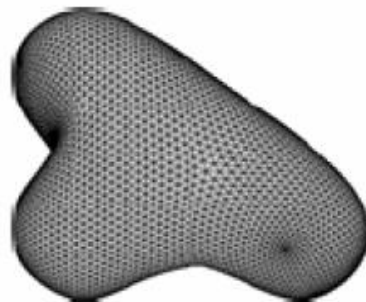
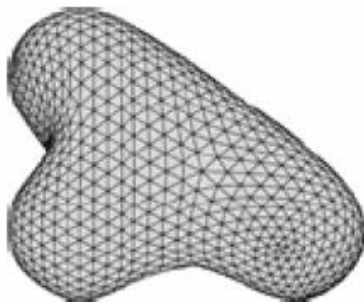
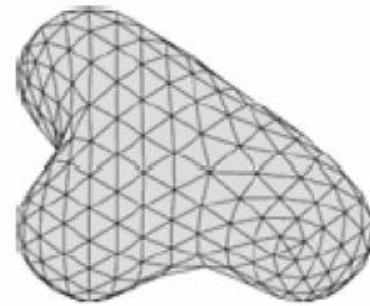
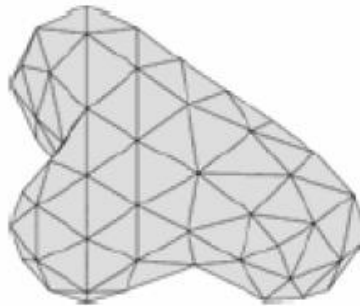
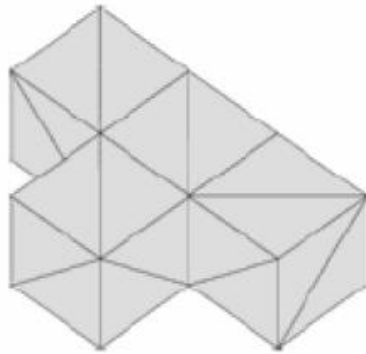
- 对于每个边，计算一个新的点
- 更新顶点位置
- 连接新点形成一个新的网格



3.2 类型

• 3.2.3 Loop细分

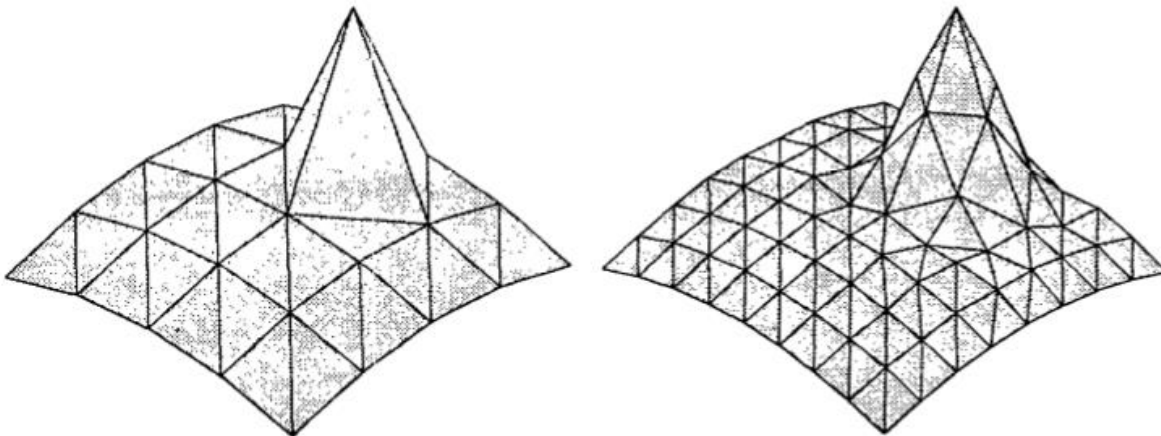
- 结果示例



3.2 类型

• 3.2.4 Butterfly细分

- N. Dyn *et al.*在1990年发现
- 应用到三角形网格
- 几乎为 C^1 的连续性 (除一些特殊点)

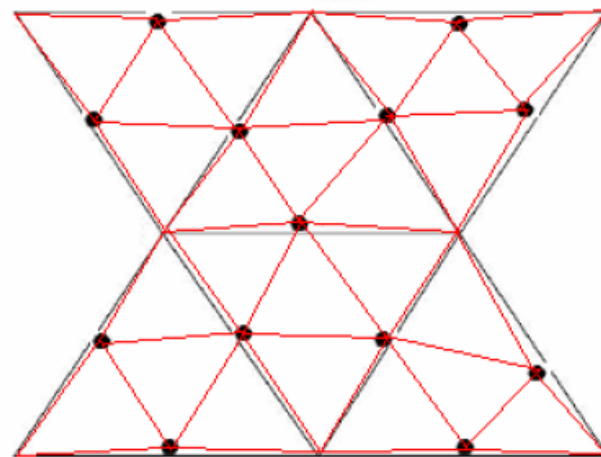
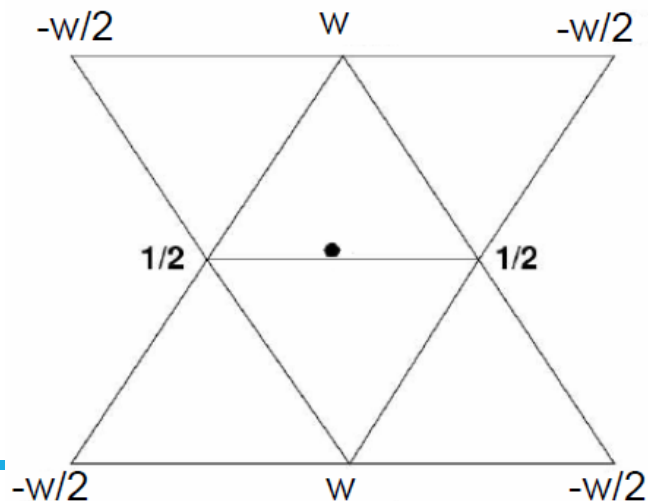


3.2 类型

• 3.2.4 Butterfly细分

- 规则(几何/拓扑)

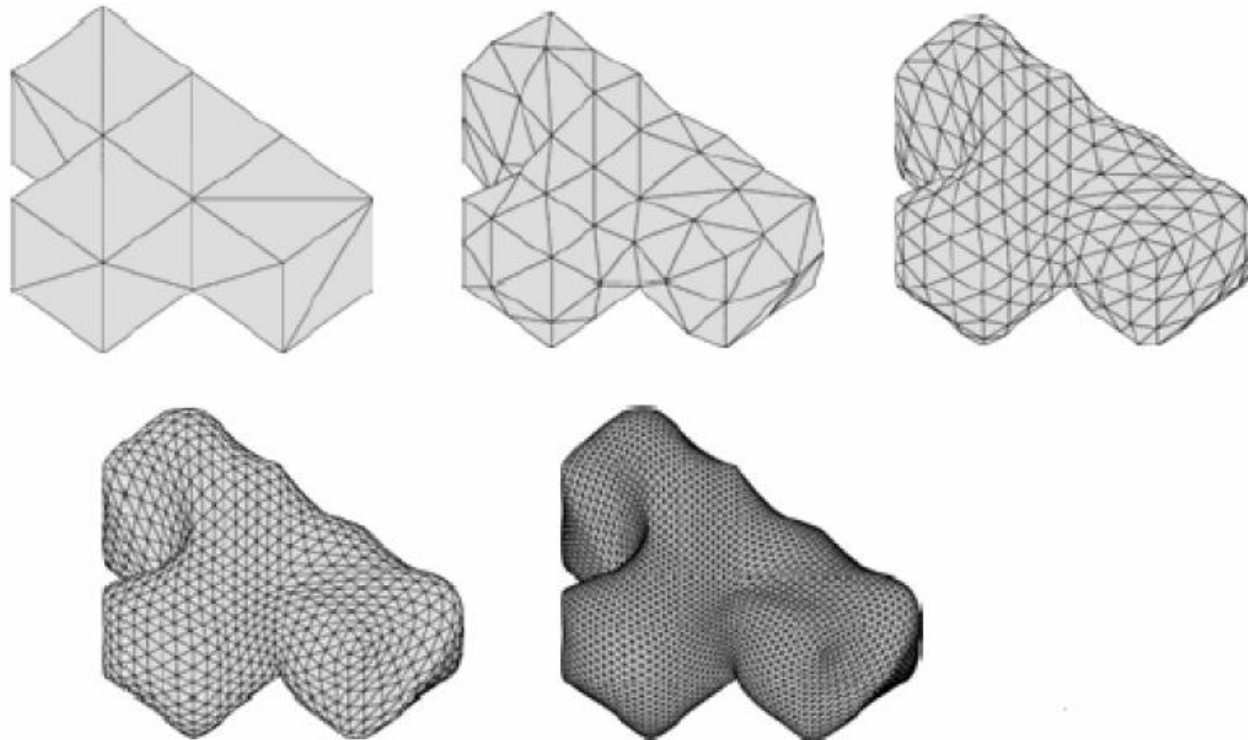
- 对于每个边，使用规定的模式创造一个新的点
- 保留旧的顶点，使用旧的边点和定点把一个旧表面转化成四个新表面



3.2 类型

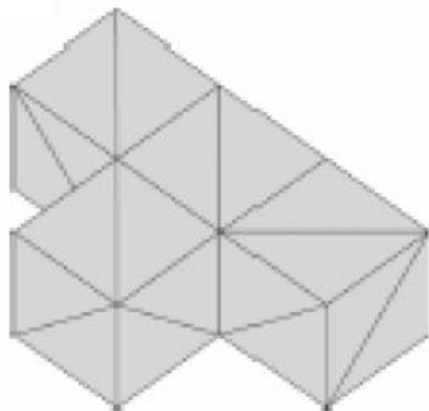
• 3.2.4 Butterfly细分

- 结果示例



3.2 类型

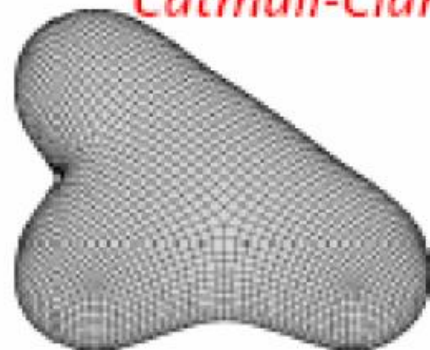
• 建模例子



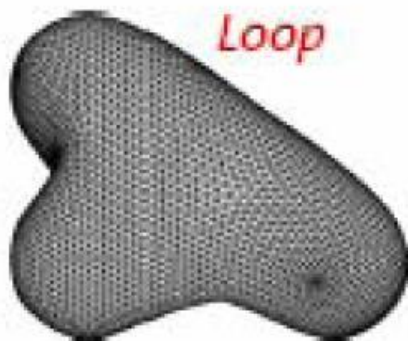
Doo-Sabin



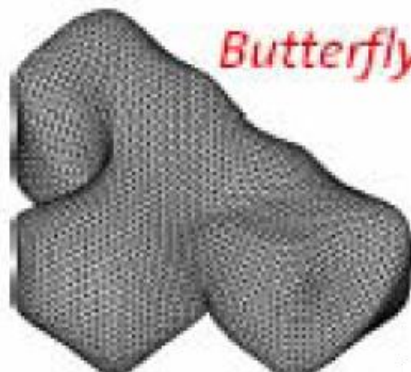
Catmull-Clark



Loop



Butterfly



3.2 类型

• 建模例子

