Микроэкономика-I

Павел Андреянов, PhD

14 апреля 2023 г.

План лекции

- Часть 1. Повторение РВ, производство, I и II теоремы благосостояния, доли фирм, равновесие Эрроу-Дебре.
- Часть 2. Избыточный спрос, существование и единственность равновесия.

Повторение РВ

Повторение РВ

Рассмотрим экономику с тремя агентами: A, B, C, и двумя товарами: x, y. Пусть начальные запасы равны: (1,0), (0,2) и (1,1) соответственно, а суммарные запасы равны (2,3). Цены товаров назовем p, q.

Пусть полезности имеют вид Кобб Дугласа $\log x + \log y$, а множители лагранжа обозначим как λ, μ, γ.

Выпишем систему уравнений для поиска равновесия. Неизвестные это

$$x_a, y_a, x_b, y_b, x_c, y_c, \lambda, \mu, \gamma, p, q$$

причем нормировка $q = 1$. То есть, 10 неизвестных.

Повторение РВ

Первый блок уравнений это сам ящик эджворта

$$x_a + x_b + x_c = 2$$
$$y_a + y_b + y_c = 3$$

это 1,2 из 10 необходимых уравнений

Повторение РВ

Второй блок уравнений это УПП

$$1/x_a = \lambda p, \quad 1/y_a = \lambda q$$
$$1/x_b = \mu p, \quad 1/y_b = \mu q$$
$$1/x_c = \gamma p, \quad 1/y_c = \gamma q$$

это 3,4,5,6,7,8 из 10 необходимых уравнений.

Внимание: Если бы полезность агента B была Леонтьев, то вместо двух условий первого порядка было бы 1 условие «вершины уголка», но не было бы множителя Лагранжа μ. То есть, на 1 уравнение меньше и на 1 неизвестную меньше.

Повторение РВ

Третий блок уравнений это Законы Вальраса

$$px_a + qy_a = 1 \cdot p + 0 \cdot q$$
$$px_b + qy_b = 0 \cdot p + 2 \cdot q$$
$$px_c + qy_c = 1 \cdot p + 1 \cdot q$$

это 9,10 из 10 необходимых уравнений.

Внимание: Последний закон Вальраса не считается, так как он линейно зависим с остальными в ящике эджворта.

Экономика с производством

Экономика с производством

Экономика с производством это

- несколько потребителей (индивидуумов) $I = \{a, b, c, \dots\}$
- несколько производителей $J = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$
- несколько товаров $K = \{1, 2, 3, \dots\}$
- начальные запасы $\vec{w}_a, \vec{w}_b, \vec{w}_c, \dots$

В этой модели запасы есть только у потребителей. У производителей ничего нет, кроме технологий.

Технология производителя j описывается «классическим» технологическим множеством Y_j, то есть, удовлетворяющим всем классическим аксиомам: рог изобилия, выпуклость, и.т.д...

Экономика с производством

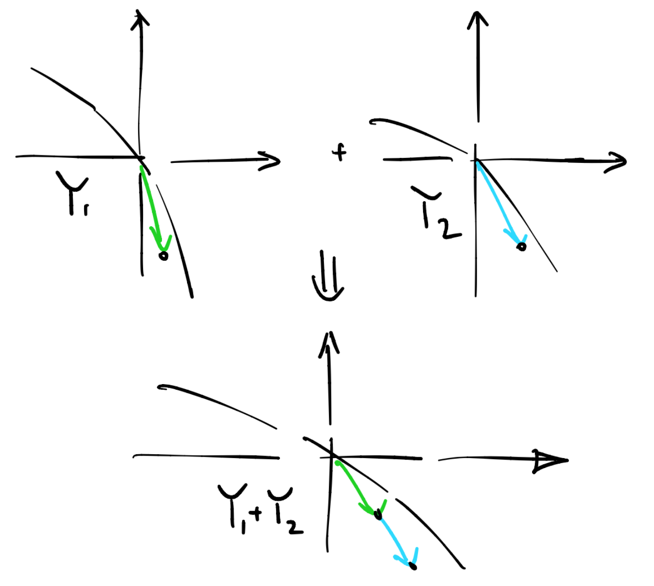
Сразу определим вспомогательный объект.

Совместным технологическим множеством Y экономики с производством называется сумма всех индивидуальных технологических множеств Y_j.

Подсчет Y дословно соответствует тому, что мы делали раньше, когда надо было "объединить два завода".

Как правило, Y выглядит примерно так же, как и сами Y_j: он выпуклый, проходит через ноль, и не содержит первый ортант.

Экономика с производством



Экономика с производством

Допустимым состоянием экономики с производством называется набор координат потреблений и производств

$$\vec{x} = \{\vec{x}_i\}_{i \in I}, \quad \vec{y} = \{\vec{y}_j\}_{j \in J}$$

такой, что ... все то же что и в экономике обмена ... плюс производства принадлежат соответствующим технологическим множествам $\vec{y}_j \in Y_j$.

Так, а причем тут совместное технологическое множество?

Ящик Эджворта

Ящик Эджворта

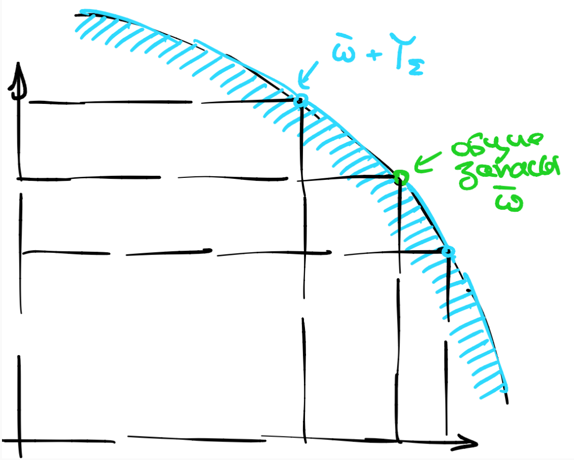
Как представить себе ящик Эджворта в экономике с производством?

- сначала надо нарисовать суммарные запасы $\{w_k\}_{k \in K}$, другими словами, угол ящика «до производства»
- затем надо построить совместное технологическое множество Y, проходящее через $\{w_k\}_{k \in K}$, как если бы это было начало координат
- затем на (или даже под) границей этого множества выбрать новую точку - угол ящика «после производства»
- от нее нарисовать ящик для уже чистого обмена

Пространство допустимых состояний описывается множеством прямоугольников (ящиков) в $\mathbb{R}^2$, по одному на каждый $y \in Y$.

Ящик Эджворта

В проекции на пространство потреблений, ящик уже вовсе не ящик. Назовем его «обобщенным ящиком» Эджворта $\tilde{E}$.



Ящик Эджворта

Если производство эффективное, то получается что угол ящика Эджворта как бы «едет вдоль границы» Y. Как только мы зафиксировали производство $y \in Y$, ящик останавливается и дальше анализ соответствует простой экономике обмена.

Конечно, неэффективное производство тоже является допустимым, но мы никогда не будем по настоящему рассматривать его.

Забегая вперед, неэффективное производство не может быть Парето оптимальным с локально ненасыщаемыми полезностями.

Парето оптимальность

Парето оптимальность

Парето-оптимальность определяется аналогично тому, как мы это делали в экономике обмена, только поменялась интерпретация допустимого состояния.

Допустимое (в эк-ке с пр-вом) состояние x, y слабый ПО, если не существует другого допустимого состояния, которое делает всем агентам строго лучше.

$$\tilde{E} \cap L^1_{++}(x) \cap L^2_{++}(x) = \emptyset, \quad y \in Y$$

Допустимое (в эк-ке с пр-вом) состояние x, y сильный ПО, если не существует другого допустимого состояния, которое делает всем агентам не хуже, но хотя бы одному агенту строго лучше.

$$\tilde{E} \cap ((L^1_{++}(x) \cap L^2_{+}(x)) \cup (L^1_{+}(x) \cap L^2_{++}(x))) = \emptyset, \quad y \in Y$$

Геометрическая интерпретация

Геометрическая интерпретация

Назовем ПО внутренним если он находится «внутри» ящика Эджворта. Я могу дать геометрическую интерпретацию внутреннего ПО, это точка, в которой:

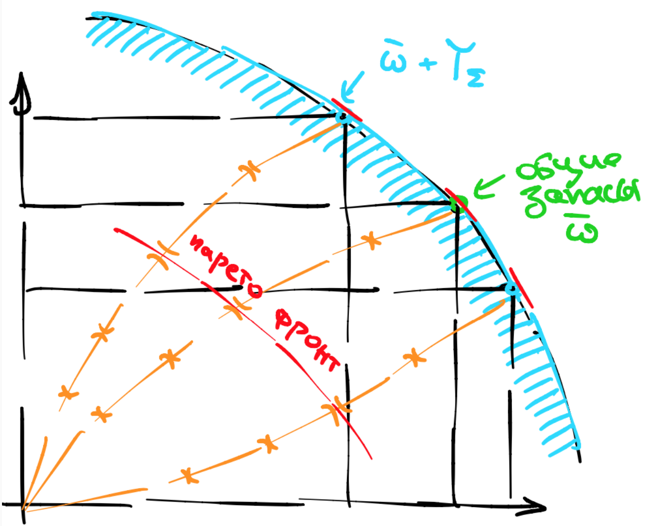
- равны наклоны всех кривых безразличия
- равны наклоны всех технологических границ
- и все они не только равны друг другу но также равны наклону совместной технологической границы

Другими словами:

$$\nabla U_i = \nabla F_j = \vec{p}, \quad \forall i, j.$$

Геометрическая интерпретация

Получается, что Парето фронт выглядит примерно так



Геометрическая интерпретация

Что это значит?

Это значит что производство эффективно распределено между заводами а потребление эффективно распределено между потребителями.

Более того, мы можем притвориться, что $F(\vec{y})$ это как бы полезность еще одного агента, которая зафиксирована на некотором уровне.

В таком случае действует стандартный подход с взвешенной полезностью.

Геометрическая интерпретация

Пусть есть две полезности $U_a(\vec{x})$ и $U_b(\vec{y} + \vec{w} - \vec{x})$ и

$$\vec{y} \in \partial Y \quad \Leftrightarrow \quad F(\vec{y}) = 0.$$

В таком случае взвешенная полезность это

$$\lambda U_a(x) + \mu U_b(y + w - x) + F(y) \to \max_{x,y}, \quad \lambda, \mu \geqslant 0$$

Максимизируем взвешенную полезность, добавляем ограничение $F(\vec{y}) = 0$, получаем Парето фронт.

Условия первого порядка:

$$\nabla U_i = \nabla F_j = \vec{p}, \quad \forall i, j.$$

Равновесие Вальраса

Равновесие Вальраса

Равновесием Вальраса экономики с производством называется допустимое состояние $\vec{x}, \vec{y}$ и вектор цен $\vec{p}$, такие, что каждый агент достигает максимума полезности по бюджетному ограничению, с бюджетом равным доходу от продажи своих начальных запасов плюс трансферт, а производители максимизируют прибыль.

$$\forall i \in I, \quad \vec{x}_i \in arg\max U_i(*) \quad s.t. \quad \vec{p} \cdot * \leqslant \vec{p} \cdot \vec{w}_i + T_i$$

$$\forall j \in J, \quad \vec{y}_j \in arg\max \pi_j(*) \quad s.t. \quad * \in Y_j$$

где $\pi_j(*) = \vec{p} \cdot *$ это прибыль фирмы $j \in J$.

Равновесие Вальраса

Также, я бы добавил в определение равновесие денежное равенство, без него могут начаться проблемы с нормировкой:

$$\sum_i T_i = \sum_j \pi_j.$$

Другими словами, фирмы должны, по какой то причине, отдать все свои деньги потребителям.

Равновесие Вальраса

Частный случай такой конструкции это когда агент i владеет долей γ_{ij} от фирмы j. Тогда он получает трансферт $\sum_j \gamma_{ij}\pi_j$.

Заметим что

$$\sum_i T_i = \sum_i (\sum_j \gamma_{ij}\pi_j) = \sum_j (\sum_i \gamma_{ij})\pi_j = \sum_j \pi_j,$$

поскольку доли каждой фирмы суммируются в единичку.

Это называется равновесием Эрроу Дебре.

РВ как система уравнений

РВ как система уравнений

Попробуем снова сосчитать уравнения и неизвестные.

Неизвестные тоже можно разбить на группы

- цены, их K штук,
- собственно потребления, их $K \cdot I$ штук
- производства, их $K \cdot J$ штук
- множители Лагранжа, их I штук

Однако, одна из цен нормируется к единичке, так что

$$(I + J) \cdot K + K + I - 1$$

неизвестных.

РВ как система уравнений

Сосчитаем уравнения:

- товарные равенства, K штук
- условия оптимальности агентов, $K \cdot I$ штук
- условия оптимальности фирм, $K \cdot J$ штук
- законы Вальраса, I штук

Причем последний закон Вальраса не считается, так что

$$(I + J) \cdot K + K + I - 1$$

уравнений.

РВ как система уравнений

Вообще говоря, непонятно, сколько решений имеет такая система нелинейных уравнений и есть ли они вообще.

После перерыва мы убедимся, что, как правило, решение есть, и иногда (при дополнительных сильных предпосылках) оно единственно.

Первая теорема благосостояния

Первая теорема благосостояния

Эту теорему можно сформулировать двумя способами.

Первая версия: Пусть $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{p})$ - равновесие в экономике с производством, тогда $(\vec{x}, \vec{y})$ - слабый Парето-оптимум.

Вторая версия: Пусть $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{p})$ - равновесие в экономике с производством, где все полезности локально ненасыщаемы, тогда $(\vec{x}, \vec{y})$ - сильный Парето-оптимум.

Первая теорема благосостояния

Доказательство (первая версия):

Мы уже доказали ее для случая без производства, от обратного, то есть, предположив другую точку в ящике Эджворта (я называл его E) которая лежит в пересечении всех $L^i_{++}(\vec{x})$, и придя к противоречию с максимизацией полезности, которая есть часть равновесия Вальраса.

Здесь ситуация аналогичная, ящик тут «обобщенный» $\tilde{E}$.

Но это будет один и тот же ящик $\tilde{E}$ в определении и ПО и в доказательстве, так что сути это не меняет.

Конец.

Первая теорема благосостояния

Доказательство (вторая версия):

От обратного, предположим, что есть слабое Парето-улучшение, несмотря на то, что а) агенты максимизируют полезности б) фирмы максимизируют прибыль.

Пусть допустимая точка $(\tilde{x}, \tilde{y})$ - это кандидат на Парето-улучшение по сравнению с допустимой точкой $(\vec{x}, \vec{y})$ который есть часть равновесия Вальраса $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{p})$.

Точка зрения потребителей

Из локальной не-насыщаемости следует, что $\tilde{x}$ должна лежать вне бюджетного ограничения для того агента, который строго предпочитает $\tilde{x}$ к $\vec{x}$, в противном случае он бы никогда не купил $\vec{x}$ в равновесии,

$$\exists i \in I \quad \vec{p} \cdot \tilde{x}_i > \vec{p} \cdot \vec{x}_i$$

А для всех остальных агентов либо вне либо в точности на бюджетной гипер-плоскости,

$$\forall i \in I \quad \vec{p} \cdot \tilde{x}_i \geqslant \vec{p} \cdot \vec{x}_i.$$

Тогда верно что

$$\vec{p} \cdot \sum_i \tilde{x}_i > \vec{p} \cdot \sum_i \vec{x}_i.$$

Первая теорема благосостояния

Точка зрения производителей

Поскольку все фирмы максимизируют прибыль,

$$\forall j \in J \quad \vec{p} \cdot \tilde{y}_j \leqslant \vec{p} \cdot \vec{y}_j$$

а значит

$$\vec{p} \cdot \sum_j \vec{y}_j \geqslant \vec{p} \cdot \sum_j \tilde{y}_j,$$

или еще по другому можно записать как

$$\vec{p} \cdot (\sum_i \vec{w}_i + \sum_j \vec{y}_j) \geqslant \vec{p} \cdot (\sum_i \vec{w}_i + \sum_j \tilde{y}_j)$$

Первая теорема благосостояния

По цепочке у нас получается что

$$\vec{p} \cdot \sum \tilde{x}_i > \vec{p} \cdot \sum \vec{x}_i =$$

$$= \text{товарооборот в равновесии } (\vec{x}, \vec{y}, \vec{p}) =$$

$$= \vec{p} \cdot (\sum \vec{w}_i + \sum \vec{y}_i) \geqslant$$

$$\geqslant \vec{p} \cdot (\sum \vec{w}_i + \sum \tilde{y}_i)$$

Однако, это противоречит тому, что $(\tilde{x}, \tilde{y})$ это допустимое состояние, в которой

$$\forall k \in K: \quad \sum_{i \in I} \tilde{x}_{ik} = \sum_{i \in I} w_{ik} + \sum_{j \in J} \tilde{y}_{jk}.$$

Конец

Перерыв

Избыточный спрос

Избыточный спрос

Избыточным спросом в экономике обмена/с производством/ЭД называется вектор $\vec{E}(\vec{p}) = \{E_k(\vec{p})\}_{k=1}^{n}$, такой что:

$$E_k(\vec{p}) = -\sum_{i \in I} w_{ik} - \sum_{j \in J} y_{jk} + \sum_{i \in I} x_{ik},$$

где $\vec{x}, \vec{y}$ – это решения задач потребителя и производителя при данных ценах.

Избыточный спрос

Избыточный спрос обладает тремя свойствами:

- $E(\vec{p}) = \vec{0}$ в равновесии
- $pE(\vec{p}) = \vec{0}$ всегда (если лок. ненасыщ)
- $E(\lambda\vec{p}) = E(\vec{p})$ для всех $\lambda > 0$.

Поэтому, избыточный спрос, как правило, определен на симплексе цен - пространство цен после нормировки. Только нормировать я буду не как обычно (последняя цена к единице), а так, чтобы сумма цен равнялась единице.

Избыточный спрос

Симплексом цен называется пространство цен Δ такое, что

$$\Delta = \{p \in \mathbb{R}_+^K : \sum_{k \in K} p_k = 1\}$$

Это, по сути, все цены кроме $\vec{p} = \vec{0}$.

То есть, можно думать про равновесие Вальраса как про решение системы уравнений $E(\vec{p}) = \vec{0}$ на симплексе Δ.

Заметим, что последнее уравнение в системе линейно зависимо, так что его нужно игнорировать.

Примеры

Пример 1

Рассмотрим два агента с начальными запасами (1,0) и (0,1) и полезностями вида Кобб-Дуглас. Производства нет.

- выпишите избыточный спрос с ценами $\vec{p} = (p, 1)$
- найдите равновесие

Пример 2

Рассмотрим два агента с начальными запасами (1,0) и (0,1) и полезностями вида Кобб-Дуглас, и одного агента с начальным запасом (1,1) и полезностью Леонтьев. Производства нет.

- выпишите избыточный спрос с ценами $\vec{p} = (p, 1)$
- найдите равновесие

Пример 3

Рассмотрим 1 агента с начальным запасом (1/2,0) и полезностью вида Кобб-Дуглас, и одну фирму (которой он же и владеет) с технологией $x - 2y \leqslant 0$

- выпишите избыточный спрос с ценами $\vec{p} = (p, 1)$

Пример 4

Рассмотрим одного агента с начальным запасом (1,0) и линейной полезностью, и другого агента с начальным запасом (0,1), полезностью Кобб-Дуглас и фирмой (которой он владеет) с технологией $\log(1-x) + 2\log(1-y) \geqslant 3\log 2$

- выпишите избыточный спрос с ценами $\vec{p} = (p, 1)$

Пример 5

Рассмотрим одного агента с начальным запасом (1,0), полезностью Кобб-Дуглас и двумя фирмами (которыми он владеет) с технологиями $\log(1-x) + 2\log(1-y) \geqslant 3\log 2$ и $2\log(1-x) + \log(1-y) \geqslant 3\log 2$

- выпишите избыточный спрос с ценами $\vec{p} = (p, 1)$

Существование решения

Существование решения

Предлагается следующая динамика цен на внутренности Δ.

- инициализируем точку $\vec{p}_0$
- пусть мы находимся в точке $\vec{p}_i$
- меняем цены по следующему алгоритму

$$\tilde{p}_{k,i+1} := \vec{p}_{k,i} + \gamma \cdot \max(0, E_k(\vec{p})), \quad \gamma > 0$$

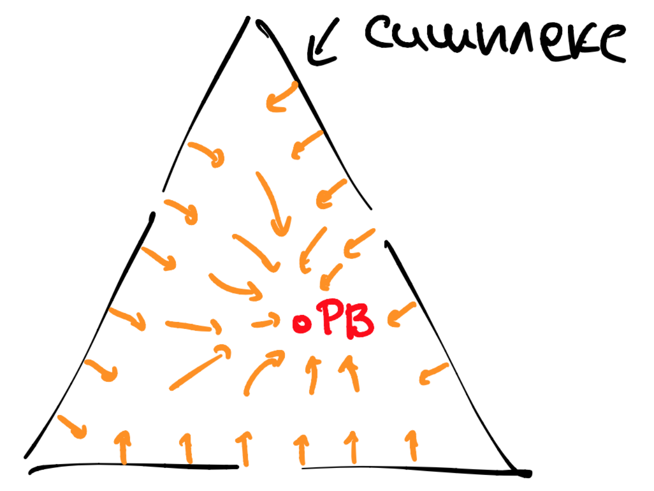
- и возвращаем их на симплекс

$$\vec{p}_{k,i+1} := \frac{\tilde{p}_{k,i+1}}{\sum_{k \in K} \tilde{p}_{k,i+1}}.$$

Заметим, что РВ характеризуется стационарной точкой.

Существование решения

Это почти как градиентный спуск, но не совсем.



Существование решения

Нас интересует фиксированная точка следующего отображения:

$$\forall k,\ \ p_k \to \frac{p_k + \gamma \cdot \max(0, E_k(\vec{p}))}{\sum_j p_j + \gamma \cdot \sum_j \max(0, E_j(\vec{p}))}, \quad \gamma > 0,$$

которое действует из внутренности симплекса Δ на себя.

Заметим, что $\sum_j p_j = 1$ так как мы стартовали из симплекса.

По Теореме Брауэра, непрерывное отображение компактного выпуклого множества на себя имеет неподвижную точку.

Осталось доказать, что она то и будет равновесием.

Существование решения

Пусть для некоторого вектора цен

$$p_k = \frac{p_k + \gamma \cdot \max(0, E_k(\vec{p}))}{1 + \gamma \cdot \sum_j \max(0, E_j(\vec{p})))}$$

тогда

$$p_k + p_k \cdot \gamma \cdot \sum_j \max(0, E_j(\vec{p}))) = p_k + \gamma \cdot \max(0, E_k(\vec{p}))$$

или

$$p_k \cdot \sum_j \max(0, E_j(\vec{p}))) = \max(0, E_k(\vec{p}))$$

Существование решения

напомним что

$$p_k \cdot \sum_j \max(0, E_j(\vec{p}))) = \max(0, E_k(\vec{p}))$$

умножим все на $E_k(\vec{p})$...

$$E_k(\vec{p}) \cdot p_k \cdot \sum_j \max(0, E_j(\vec{p}))) = E_k(\vec{p}) \cdot \max(0, E_k(\vec{p}))$$

и сложим

$$(\sum_k E_k(\vec{p}) \cdot p_k) \cdot \sum_j \max(0, E_j(\vec{p}))) = \sum_k E_k(\vec{p}) \cdot \max(0, E_k(\vec{p}))$$

левая часть обнулится по закону Вальраса ($pE(p) = 0$)

Существование решения

получается

$$\sum_k \max(0, (E_k(\vec{p}))^2) = 0 \quad \Rightarrow E_k(\vec{p}) = 0, \forall k$$

Осталось вспомнить, какие условия необходимы для непрерывности спросов и выполнения Закона Вальраса

- непрерывность всего
- выпуклость всего
- локальная ненасыщаемость предпочтений

Конец доказательства?

Существование решения

На самом деле нет.

Отображение должно действовать из всего компакта Δ, а у нас границе Δ бесконечные избыточные спросы.

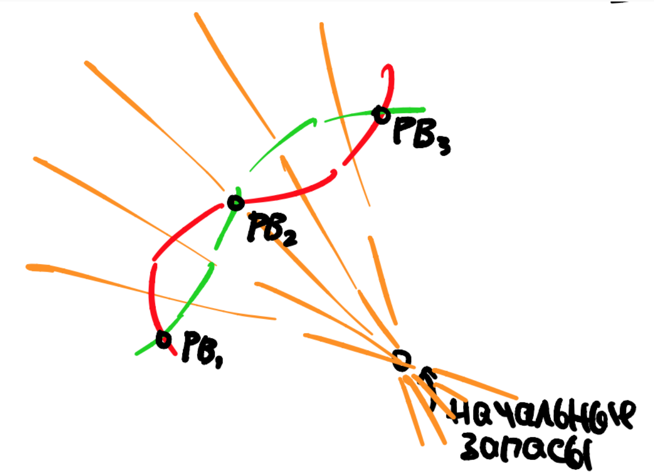
Это легко исправляется переопределением избыточного спроса так, чтобы он никогда не превышал максимальное число товара в экономике (с учетом производства), то есть, размеры «обобщенного ящика» Эджворта.

$$E_k(\vec{p}) := \min(E_k(\vec{p}), \text{ size of Edgeworth box}).$$

Действительно, такая модификация не изменит определение РВ, но оно корректно определит динамику на границе симплекса. Теперь конец.

Единственность решения

Вообще говоря, единственность неочевидна



Единственность решения

Единственность решения

Однако есть не очень сильные предположения, при которых ее можно все-таки доказать.

Скажем, что избыточный спрос $\vec{E}(*)$ обладает свойством валовых субститутов, если для двух векторов цен $\vec{p}, \vec{q}$, таких что

- для одной координаты $p_i = q_i$
- для другой координаты $p_j > q_j,\ j \neq i$
- для остальных координат $p_k \geqslant q_k,\ k \neq i,\ k \neq j$

верно что $E_i(\vec{p}) > E_i(\vec{q})$.

Понятно, что ВС избыточного спроса вытекает из ВС индивидуальных спросов и предложений каждого агента.

Единственность решения

Предположим, от обратного, что есть два вектора цен $\vec{p} \neq \vec{q}$, и вокруг каждого из них можно построить равновесие.

Рассмотрим число λ такое, что:

$$\lambda = \max_k \left(\frac{p_k}{q_k}\right),$$

Единственность решения

Предположим, от обратного, что есть два вектора цен $\vec{p} \neq \vec{q}$, и вокруг каждого из них можно построить равновесие.

Рассмотрим число λ такое, что:

$$\lambda = \max_k \left(\frac{p_k}{q_k}\right),$$

тогда существует индекс i такой что

$$q_i \cdot \lambda = p_i,$$

Единственность решения

Предположим, от обратного, что есть два вектора цен $\vec{p} \neq \vec{q}$, и вокруг каждого из них можно построить равновесие.

Рассмотрим число λ такое, что:

$$\lambda = \max_k \left(\frac{p_k}{q_k}\right),$$

тогда существует индекс i такой что

$$q_i \cdot \lambda = p_i,$$

существует индекс j такой что

$$q_j \cdot \lambda > p_j,$$

Единственность решения

Предположим, от обратного, что есть два вектора цен $\vec{p} \neq \vec{q}$, и вокруг каждого из них можно построить равновесие.

Рассмотрим число λ такое, что:

$$\lambda = \max_k \left(\frac{p_k}{q_k}\right),$$

тогда существует индекс i такой что

$$q_i \cdot \lambda = p_i,$$

существует индекс j такой что

$$q_j \cdot \lambda > p_j,$$

а для всех остальных индексов

$$q_k \cdot \lambda \geqslant p_k.$$

Единственность решения

Тогда рассмотрим вектора цен $\vec{p}$ и $\lambda\vec{q}$

Напомним что существует индекс i такой что

$$q_i \cdot \lambda = p_i,$$

Единственность решения

Тогда рассмотрим вектора цен $\vec{p}$ и $\lambda\vec{q}$

Напомним что существует индекс i такой что

$$q_i \cdot \lambda = p_i,$$

существует индекс j такой что

$$q_j \cdot \lambda > p_j,$$

Единственность решения

Тогда рассмотрим вектора цен $\vec{p}$ и $\lambda\vec{q}$

Напомним что существует индекс i такой что

$$q_i \cdot \lambda = p_i,$$

существует индекс j такой что

$$q_j \cdot \lambda > p_j,$$

а для всех остальных индексов

$$q_k \cdot \lambda \geqslant p_k.$$

Единственность решения

Тогда рассмотрим вектора цен $\vec{p}$ и $\lambda\vec{q}$

Напомним что существует индекс i такой что

$$q_i \cdot \lambda = p_i,$$

существует индекс j такой что

$$q_j \cdot \lambda > p_j,$$

а для всех остальных индексов

$$q_k \cdot \lambda \geqslant p_k.$$

Другими словами, это предпосылка ВС, следовательно

$$E_i(\lambda\vec{q}) > E_i(\vec{p}).$$

Единственность решения

Наконец, надо вспомнить свойство гомогенности спроса

$$E(\vec{q}) = E(\lambda\vec{q}) \neq E(\vec{p})$$

Что противоречит тому, что $\vec{p}, \vec{q}$ были оба равновесиями.