Микроэкономика-I

Павел Андреянов, PhD

21 апреля 2023 г.

План лекции

- Часть 1. РВ с функциями издержек, РВ с линейными функциями
- Часть 2. Международная торговля.

РВ с функциями издержек

РВ с функциями издержек

Обычно, когда речь идет о равновесии Вальраса, мы не обговариваем, какие ресурсы являются факторами, а какие потребительскими товарами.

Однако, легко представить ситуацию, в которой полезность агента вообще не зависит от некоторых товаров.

Тогда я мог бы задать поведение фирмы при помощи функции издержек, главное чтобы они были выпуклые по конечному товару и вогнуты по ценам факторов

Пример 1

Пример 1

Рассмотрим пример с 2 фирмами и 1 агентом

$$U_a(x_1, x_2, x_3) = \log x_2 + \log x_3, \quad w = (1, 0, 0)$$
$$TC_\alpha(x_2) = x_2^2$$
$$TC_\beta(x_3) = x_3^2$$

Агент владеет обеими фирмами

Вектор цен нормирован $(1, p, q)$.

Попробуем решить...

Пример 1

Выпишем прибыли каждой фирмы

$$\pi_\alpha = px_2 - x_2^2, \quad \pi_\beta = qx_3 - x_3^2$$

Выпишем условия первого порядка

$$x_{2,\alpha}^* = p/2, \quad x_{3,\beta}^* = q/2$$

Выпишем прибыли опять

$$\pi_\alpha^* = p^2/2 - p^2/4 = p^2/4, \quad \pi_\beta^* = q^2/2 - q^2/4 = q^2/4$$

Пример 1

Поскольку агент владеет обеими фирмами, его бюджет

$$I = 1 + p^2/4 + q^2/4$$

А спрос соответственно

$$x_{2,a}^* = \frac{1 + p^2/4 + q^2/4}{2p}, \quad x_{3,a}^* = \frac{1 + p^2/4 + q^2/4}{2q}$$

Осталось выписать избыточный спрос

Пример 1

Осталось выписать избыточный спрос

$$E_2 = x^*_{2,a} - x^*_{2,\alpha} = \frac{1 + p^2/4 + q^2/4}{2p} - \frac{p}{2}$$

$$E_3 = x^*_{3,a} - x^*_{3,\beta} = \frac{1 + p^2/4 + q^2/4}{2q} - \frac{q}{2}$$

Приравнивая к нулю получаем систему линейных уравнений относительно (p^2, q^2), а решение угадывается из соображений симметрии:

$$p = q \quad \Rightarrow \quad 1 + p^2/4 + p^2/4 - p^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad p = q = \sqrt{2}$$

Пример 2

Пример 2

Рассмотрим пример с 1 фирмой и 2 агентами

$$U_a(x_1, x_2, x_3) = 2\log x_2 + \log x_3, \quad w_a = (1, 0, 0)$$
$$U_b(x_1, x_2, x_3) = \log x_2 + 2\log x_3, \quad w_b = (1, 0, 0)$$
$$TC_\alpha(x_2, x_3) = x_2^2 + x_3^2$$

Агенты владеют фирмами поровну

Вектор цен нормирован $(1, p, q)$.

Попробуем решить...

Пример 2

Выпишем прибыль фирмы

$$\pi_\alpha = px_2 + qx_3 - (x_2^2 + x_3^2)$$

Выпишем условия первого порядка

$$x_{2,\alpha}^* = p/2, \quad x_{3,\alpha}^* = q/2$$

Выпишем прибыль опять

$$\pi_\alpha^* = p^2/4 + q^2/4$$

Пример 2

Поскольку агенты владеют фирмой поровну, их бюджеты

$$I_a = 1 + \frac{p^2/4 + q^2/4}{2}, \quad I_b = 1 + \frac{p^2/4 + q^2/4}{2}$$

А спрос соответственно

$$x^*_{2,a} = \frac{2}{3p}(1 + p^2/8 + q^2/8), \quad x^*_{3,a} = \frac{1}{3q}(1 + p^2/8 + q^2/8)$$
$$x^*_{2,b} = \frac{1}{3p}(1 + p^2/8 + q^2/8), \quad x^*_{3,b} = \frac{2}{3q}(1 + p^2/8 + q^2/8)$$

Осталось выписать избыточный спрос

Пример 2

Осталось выписать избыточный спрос

$$E_2 = x^*_{2,a} + x^*_{2,b} - x^*_{2,\alpha} = (\frac{2}{3p} + \frac{1}{3p})(1 + p^2/8 + q^2/8) - \frac{p}{2}$$

$$E_3 = x^*_{3,a} + x^*_{3,b} - x^*_{3,\beta} = (\frac{1}{3q} + \frac{2}{3q})(1 + p^2/8 + q^2/8) - \frac{q}{2}$$

Приравнивая к нулю получаем систему линейных уравнений относительно (p^2, q^2), а решение угадывается из соображений симметрии:

$$p = q \quad \Rightarrow \quad 1 + p^2/8 + p^2/8 - p^2/2 = 0 \quad \Rightarrow \quad p = q = 2$$

Пример 3

Пример 3

Рассмотрим пример с 2 фирмами и 2 агентами

$$U_a(x_1, x_2, x_3) = 2\log x_2 + \log x_3, \quad w_a = (U, 0, 0)$$
$$U_b(x_1, x_2, x_3) = \log x_2 + 2\log x_3, \quad w_b = (V, 0, 0)$$
$$TC_\alpha(x_2, x_3) = x_2^2 + 2x_3^2$$
$$TC_\beta(x_2, x_3) = 2x_2^2 + x_3^2$$

Агенты владеют фирмой α поровну, а фирма β принадлежит целиком второму агенту

Вектор цен нормирован $(1, p, q)$.

Попробуем решить у доски...

Пример 3

Алгоритм

- максимизируем прибыль
- находим прибыль
- находим бюджеты
- находим спросы
- пишем избыточный спрос

Если задача симметричная (Примеры 1, 2 но не 3) относительно товаров (симметричные полезности, технологии и запасы) то решение системы, скорее всего, угадывается из $p = q = 1$. Но даже не симметричную систему можно решить, если она линейная.

РВ с линейными функциями

РВ с линейными функциями

До сих пор мы рассматривали только экономики, в которых все полезности и технологии были достаточно выпуклые. А что если они линейные?

Короткий ответ такой - если технология линейна, то цены обязательно сонаправлены градиенту к технологической границе, иначе фирма сможет получить бесконечную прибыль.

Ясно что в равновесии прибыль и бюджеты должны быть конечны.

Пример 1

Пример 1

Рассмотрим пример с 2 фирмами и 1 агентом

$$U_a(x_1, x_2, x_3) = \log x_2 + \log x_3, \quad w = (1, 0, 0)$$
$$F_\alpha(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant 0$$
$$F_\beta(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leqslant 0$$

Агент владеет обеими фирмами.

Наша единственная надежда - на то что вектор цен будет сонаправлен (2,3,1).

Пример 1

Пусть цены нормированы к $(1, 3/2, 1/2)$.

Заметим, что при этих ценах, фирма β готова производить любую точку на своей технологической границе, а прибыль ее будет автоматически равна нулю.

Прибыль фирмы α считается как обычно.

Пример 1

Действительно, поскольку эффективность производства подразумевает что мы на границе технологического множества:

$$F_\beta(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = -2x_1 - 3x_2$$

получается, что

$$\pi_\beta = x_1 + 3x_2/2 + x_3/2 = x_1 + 3x_2/2 + (-2x_1 - 3x_2)/2 = 0.$$

Пример 1

С другой стороны,

$$F_\alpha(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -2x_2^2 - x_2^2$$

получается, что

$$\pi_\alpha = x_1 + px_2 + qx_3 = -(x_2^2 + x_3^2) + px_2 + qx_3$$

отсюда

$$x_{\alpha,1} = -p^2/4 - q^2/4, \quad x_{\alpha,2} = p/2, \quad x_{\alpha,3} = q/2$$

и прибыль фирмы

$$\pi_\alpha = p^2/4 + q^2/4$$

Пример 1

Теперь можно посчитать бюджет агента

$$I = 1 + \pi_\alpha + \pi_\beta = 1 + p^2/4 + q^2/4$$

и его спрос

$$\begin{aligned} x_{1,a}^* &= 0 \\ x_{2,a}^* &= \frac{1}{2p}(1 + p^2/4 + q^2/4) \\ x_{3,a}^* &= \frac{1}{2q}(1 + p^2/4 + q^2/4) \end{aligned}$$

Осталось подставить цены.

Пример 1

Заметим, что я не искал избыточный спрос, почему?

Потому что он нужен нам был только для того, чтобы найти цены. А когда одна из технологий линейная, цены фактически известны.

Однако, не стоит забывать, что равновесие - это не только цены p, q но еще и все остальные координаты:

$$x^*_{a,1}, x^*_{a,2}, x^*_{a,3}, x^*_{\alpha,1}, x^*_{\alpha,2}, x^*_{\alpha,3}, x^*_{\beta,1}, x^*_{\beta,2}, x^*_{\beta,3}$$

Пример 2

Пример 2

Рассмотрим пример с 1 фирмой и 2 агентами

$$U_a(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \quad w = (1, 0)$$
$$U_b(x_1, x_2) = \log x_1 + 2\log x_2, \quad w = (1, 0)$$
$$F_\alpha(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2^2 \leqslant 0$$

Заметим, что полезность линейна, а значит, опять, мы надеемся на то, что цены будут сонаправлены (1,1). Однако, следует быть осторожным, так как тут может быть и краевое решение.

Дорешиваем у доски...

Перерыв

Трейд

Трейд

Одно из приложений теории общего равновесия - анализ эффектов международной торговли на благополучие торгующих стран.

По сути, страна - это (репрезентативный) агент и фирма, которой этот агент владеет.

Без международной торговли страны находятся в автаркии, то есть, каждая в своем равновесии и со своими ценами.

В задачах на трейд удобнее пользоваться обозначениями $x, y, z...$ для потреблений и $X, Y, Z...$ для производств.

Пример 1

Пример 1

Есть две страны с одинаковыми потребителями (можно считать что в каждой стране ровно один человек) с полезностями $U(x, y) = \log x + \log y$, но разными технологическими множествами (по сути, двумя разными фирмами) F_1, F_2 в $\mathbb{R}^2_+$:

$$F_1(X, Y) = X + Y/2 - 1 \leqslant 0, \quad F_2(X, Y) = X/2 + Y - 1 \leqslant 0$$

то есть, у первой страны есть преимущество в производстве товара y, а у второй в производстве товара x. Внимание, это !не линейная! технология, поскольку $X, Y \geqslant 0$.

Начальные запасы не важны, можно считать что это любая точка на границе технологического множества. Также неважно, у кого они находятся: у агента или у фирмы.

Пример 1

Пусть цена товара x нормирована к 1, а цена товара y равна q.

Найдем равновесие в автаркии

УПП для первой страны можно записать как

$$\frac{1/x}{1/y} = \frac{1}{1/2} = \frac{1}{q} \quad \Rightarrow \quad q = 1/2,\ y = 2x$$

Подставляя в соответствующие технологические границы, мы получаем координаты потребления $(1/2, 1)$ для первой страны и полезность $\log(1/2) + \log(1)$.

Пример 1

УПП для второй страны можно записать как

$$\frac{1/x}{1/y} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{q} \quad \Rightarrow \quad q = 2,\ y = x/2$$

Подставляя в соответствующие технологические границы, мы получаем координаты потребления $(1, 1/2)$ для второй страны и полезность $\log(1) + \log(1/2)$.

Обратим внимание, что цены в автаркии отличаются между странами, что создает стимулы для международной торговли.

Пример 1

Поскольку цена (q) товара y выше во второй стране, то при международной торговле товар y будет экспортироваться в направлении второй страны, а x, наоборот, в направлении первой страны. Цены будут двигаться навстречу друг другу до тех пор, пока не встретятся где-то посередине.

Найдем общее производство и цены

Пример 1

Поскольку цена (q) товара y выше во второй стране, то при международной торговле товар y будет экспортироваться в направлении второй страны, а x, наоборот, в направлении первой страны. Цены будут двигаться навстречу друг другу до тех пор, пока не встретятся где-то посередине.

Найдем общее производство и цены.

Пример 1

Если международная торговля разрешена, то цены должны прийти в равновесие Вальраса, которое, как известно, является Парето оптимальным.

В частности, это значит, что две фирмы, которые раньше работали отдельно теперь будут оптимально распределять производство, как если бы находились в руках у одного собственника.

Вспомним навык построения совместного КПВ.

Пример 1

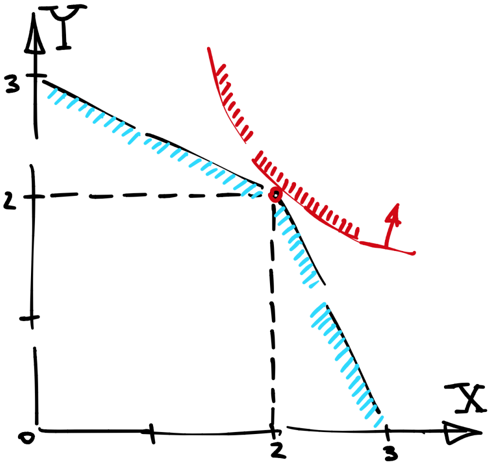
В этот момент мы еще не знаем бюджеты, поскольку мы не знаем равновесных цен. Однако, какими бы эти цены не оказались, поскольку полезности всех агентов в странах одинаковые и гомотетичные, напомню, это КД, Линейный, Леонтьев и CES но не квазилинейная, потребление между странами будет пропорционально их бюджету.

Более того, общее потребление можно описать как потребление одного репрезентативного агента с такой же полезностью но суммарным бюджетом.

Таким образом, задача сводится к максимизации полезности $\log X_{sum} + \log Y_{sum}$ против совместного технологического множества, что позволяет найти равновесные цены без потери общности.

Пример 1

Этот трюк не сработает, если полезности разные или не гомотетичные.



Пример 1

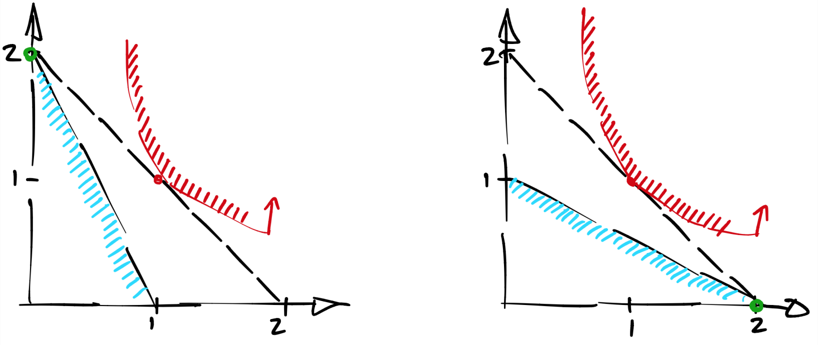
Легко видеть, что общее производство должно быть на уровне $(X_{sum}, Y_{sum}) = (2, 2)$, а цены равны (1,1). Это моментально дает нам производство в каждой стране, а также бюджет в каждой стране.

Производство в первой стране равно (0,2) а во второй (2,0, а бюджеты равны 2 у каждой страны.

Обратите внимание, что бюджетное множество в каждой стране, по факту, расширилось!

Пример 1

Координаты новых потреблений легко найти из условий первого порядка.



Выведем их на доске.

Пример 1

Подведем итог.

- Первая страна специализируется на производстве товара y
- Вторая страна специализируется на производстве товара x
- Экспорт товара x идет из второй страны в первую
- Каждый агент выберет точку, недоступную в автаркии
- Каждый агент повысит свою полезность на

$$\log(1) - \log(1/2) > 0$$

Пример 2

Пример 1

В предыдущем примере выгода от торговли была очевидна. А что если одна из двух стран обладает абсолютным преимуществом в производстве всех товаров.

$$F_1(X, Y) = X + Y/2 - 1 \leqslant 0, \quad F_2(X, Y) = X/4 + Y/2 - 1 \leqslant 0$$

Будет ли торговля оптимальной тогда?

Пример 2

Пусть цена товара x нормирована к 1, а цена товара y равна q.

Найдем равновесие в автаркии

УПП для первой страны можно записать как

$$\frac{1/x}{1/y} = \frac{1}{1/2} = \frac{1}{q} \quad \Rightarrow \quad q = 1/2, \; y = 2x$$

Подставляя в соответствующие технологические границы, мы получаем координаты потребления $(1/2, 1)$ для первой страны и полезность $\log(1/2) + \log(1)$.

Пример 2

УПП для второй страны можно записать как

$$\frac{1/x}{1/y} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{q} \quad \Rightarrow \quad q = 2,\ y = x/2$$

Подставляя в соответствующие технологические границы, мы получаем координаты потребления $(1/2, 1/4)$ для второй страны и полезность $\log(1/2) + \log(1/4)$.

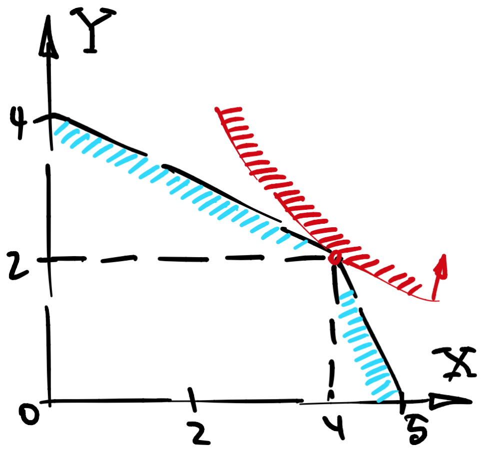
Пример 2

Так же как и в первом примере, поскольку цена товара y выше во второй стране, то при международной торговле товар y будет экспортироваться в направлении второй страны, а x, наоборот, в направлении первой страны. Цены будут двигаться навстречу друг другу до тех пор, пока не встретятся где-то посередине.

Совместное технологическое множество это такая *трапеция* с изломом в точке $(4, 2)$.

Пример 2

Напомню, что мы используем трюк с гомотетичностью



Пример 2

Всего возможно три варианта, в котором будет равновесие:

- если производство на верхней арке технологического множества, тогда цена будет как во второй стране, то есть, $q = 2$
- если производство на правой арке технологического множества, тогда цена будет как в первой стране, то есть, $q = 1/2$
- если производство на изломе, тогда цены неизвестны, но известно что одна страна производит 4 единицы товара x а другая 2 единицы товара y

Вообще, равновесная цена всегда должна находиться в интервале между ценами автаркии.

Пример 2

Дорешаем у доски. В оставшееся время

- Леонтьевская полезность
- Гладкие КПВ
- Разные полезности