Микроэкономика-I

Павел Андреянов, PhD

28 апреля 2023 г.

План лекции

- Часть 1. Трейд + дорешать с прошлой лекции
- Часть 2. Больше КПВ. Повтор равновесия с производством.

Внимание, в это время, в прошлом году, я перестал регулярно перекладывать лекции в учебник, так что ориентируйтесь больше на слайды.

Парето всё (с консы)

Парето всё

На консультации я говорил о том, что максимизация взвешенной полезности это, вообще говоря, только достаточные условия, но не необходимые. Только когда все выпукло, непрерывно и строго монотонно вы получаете гарантированно (оба) Парето Фронта.

$$
\begin{array}{ccc}
\text{СИЛЬНЫЙ ПФ} & \overset{\text{если } \underline{\underline{\text{непр}}} + \text{стр. мон}}{\subset} & \text{СЛАБЫЙ ПФ} \\
\cup & & \cup \ \| \ \text{если выпукло} \\
\lambda \gg 0 & \subset & \lambda \gneq 0
\end{array}
$$

Более того, если быть неаккуратным со знаком, то можно получить что-то вовсе неверное (см. последний пример на консультации с точками касания).

Трейд, пример 2 (с прошлой лекции)

Пример 2

Вернемся к примеру с прошлой лекции

Одна из двух стран (страна B) обладает абсолютным преимуществом в производстве всех товаров.

$$F^A(X,Y) = X + Y/2 - 1 \leqslant 0, \quad F^B(X,Y) = X/4 + Y/2 - 1 \leqslant 0$$

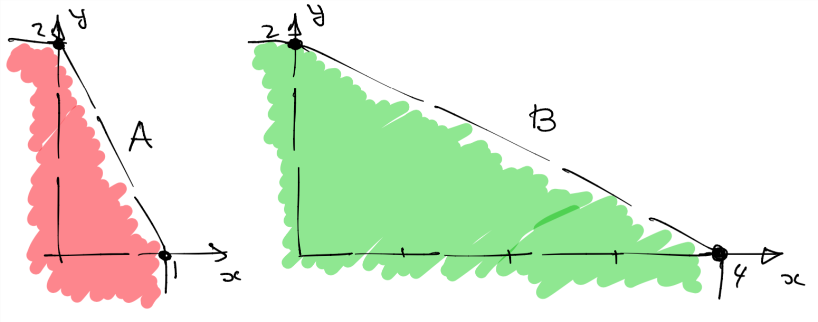
Полезность Кобб Дуглас у обоих:

$$U^i(x,y) = \log x + \log y, \quad i = A, B.$$

Напомню, что в трейде, у меня вектора X, Y уже как бы содержат в себе начальные запасы.

Пример 2

$$F^A(X, Y) = X + Y/2 - 1 \leqslant 0, \quad F^B(X, Y) = X/4 + Y/2 - 1 \leqslant 0$$



Пусть цена товара x нормирована $p = 1$, а товара y равна q.

Пример 2

Найдем равновесие в автаркии для первой страны A.

Опуская индекс страны, получаем УПП:

$$\frac{U'_x(x,y)}{U'_y(x,y)} = \frac{1/x}{1/y} = \frac{1}{q} = \frac{1}{1/2} = \frac{F'_X(X,Y)}{F'_Y(X,Y)}$$

Моментально получаем что $q = 1/2$ и $y = 2x$.

Подставляя в соответствующие технологические границы, мы получаем координаты потребления $x = 1/2, y = 1$ и полезность

$$U_A^{aut} = \log(1/2) + \log(1).$$

Пример 2

Найдем равновесие в автаркии для второй страны B.

Опуская индекс страны, получаем УПП:

$$\frac{U'_x(x,y)}{U'_y(x,y)} = \frac{1/x}{1/y} = \frac{1}{q} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{F'_X(X,Y)}{F'_Y(X,Y)}$$

Моментально получаем что $q = 2$ и $y = x/2$.

Подставляя в соответствующие технологические границы, мы получаем координаты потребления $x = 2, y = 1$ и полезность

$$U_B^{aut} = \log(2) + \log(1).$$

Пример 2

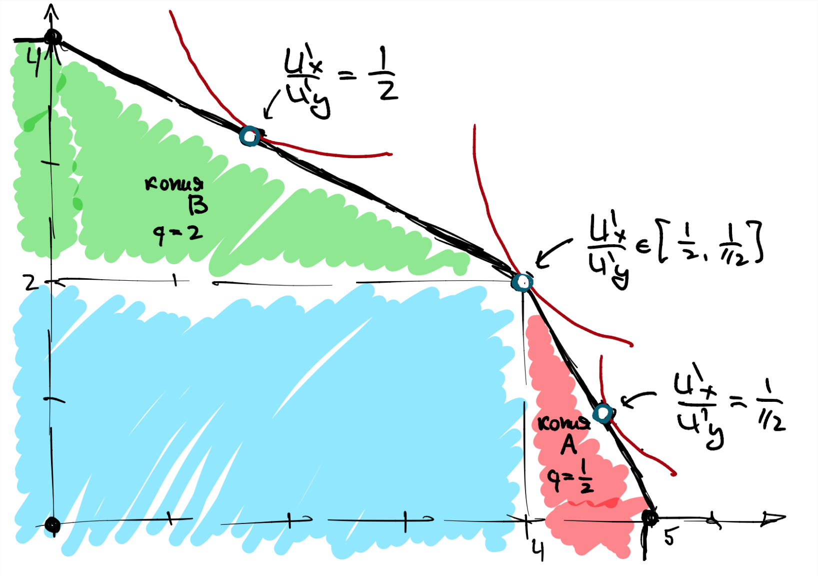
Найдем равновесие при международной торговле

Для этого надо понять, в каком из трех режимов работает экономика:

- 1) $q = 1/2$, то есть страна A не заметила разницы
- 2) $q = 2$, то есть страна B не заметила разницы
- 3) $q \in (1/2, 2)$, то есть обе страны строго выиграли

Это легко визуализировать на совместной КПВ

Пример 2



$\frac{u'_x}{u'_y} = \frac{1}{2}$
$\frac{u'_x}{u'_y} \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{1/2}]$
$\frac{u'_x}{u'_y} = \frac{1}{1/2}$
копия B
q=2
копия A
$q=\frac{1}{2}$
4
2
4
5

Пример 2

Далее будет перебор случаев, поэтому рекомендую завести табличку (даже несколько)

страна	X	Y	x	y
A				
B				

Случай $q = 1/2$

Пример 2

Если $q = 1/2$ то мы находимся на «правой арке» КПВ

- страна A не заметила разницы между автаркией и международной торговлей, то есть

$$x_A = 1/2,\ y_A = 1$$

  но производить она может любую точку вдоль старой КПВ

- страна B производит только первый товар, то есть

$$X_B = 4,\ Y_B = 0$$

  но покупает какую-то внутреннюю точку

Пример 2

Мы разом заполнили половину таблички

страна	X	Y	x	y
A			$1/2$	1
B	4	0		

Пример 2

Соответственно бюджет во второй стране равен

$$4p + 0q = 4.$$

Спрос во второй стране выводится по формулам кобб-дугласа

$$x_B = \frac{4}{2p} = 2,\ y_B = \frac{4}{2q} = 2/q = 4.$$

Мы заполнили табличку еще больше

страна	X	Y	x	y
A			1/2	1
B	4	0	2	4

Пример 2

страна	X	Y	x	y
A			$1/2$	1
B	4	0	2	4

Наконец, первой стране ничего не остается как произвести

$$X_A = x_A + x_B - X_B = 1/2 + 2 - 4 = -3/2$$
$$Y_A = y_A + y_B - Y_b = 1 + 4 - 0 = 5$$

Это явно противоречие, потому что в трейде, как правило, нельзя производить отрицательные количества товаров, все товары потребительские.

Однако, в домашке у вас будет специально по-другому.

Случай $q = 2$

Пример 2

Если $q = 2$ то мы находимся на «левой арке» КПВ

- страна B не заметила разницы между автаркией и международной торговлей, то есть

$$x_B = 2,\ y_B = 1$$

- страна A производит только второй товар, то есть

$$X_A = 0,\ Y_A = 2$$

но покупает какую-то внутреннюю точку

Пример 2

Соответственно бюджет в первой стране равен $2q$. Спрос в первой стране выводится по формулам кобб-дугласа

$$x_A = \frac{2q}{2p} = 2,\ y_A = \frac{2q}{2q} = 1$$

Наконец, второй стране ничего не остается как произвести

$$X_A = x_a + x_b - X_B = 2 + 2 - 0 = 4$$
$$Y_A = y_a + y_b - Y_b = 1 + 1 - 2 = 0$$

Чудесным образом, это попадает в КПВ первой страны, УРА!!!

Случай $q \in (1/2, 2)$

Пример 2

Если $q \in (1/2, 2)$ то мы находимся на «изломе» КПВ

- страна A производит только второй товар, то есть

$$X_A = 0, \;\; Y_A = 2$$

- страна B производит только первый товар, то есть

$$X_B = 4, \;\; Y_B = 0$$

При этом каждая страна покупает внутреннюю точку

Пример 2

Бюджет первой страны равен $2q$ а спрос соответственно

$$x_A = \frac{2q}{2p} = q, \quad y_A = \frac{2q}{2q} = 1$$

Бюджет второй страны равен 4 а спрос соответственно

$$x_B = \frac{4}{2p} = 2, \quad y_B = \frac{4}{2q} = 2/q$$

Приравнивая избыточный спрос x к нулю получаем

$$x_a + x_b - X_a - X_b = q + 2 - 0 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad q = 2.$$

Формально, это противоречие, потому что $q \in (1/2, 2)$.

Как перебирать случаи

Пример 2

Если вы не можете угадать режим решения с самого начала, рекомендую начать с «излома», и если цена не попала в интервал перейти сразу к тому случаю, на который она пытается вам «указать».

В данном случае, цена q оказалась справа от интервала $(1/2, 2)$ соответственно правильный режим это $q = 2$, или «левая верхняя арка» КПВ.

Но правильное решение тем не менее на изломе, так бывает если случайно сильно (не-)повезет с параметрами задачи.

Трейд, новый пример 3

Пример 3

Рассмотрим более сложный пример, с «разными» агентами.

Пусть у нас «сферические» технологии

$$F^A(X,Y) = X^2 + Y^2 - 16 \leqslant 0, \quad F^B(X,Y) = X^2 + Y^2 - 9 \leqslant 0$$

Полезность Кобб Дуглас у первого:

$$U^A(x,y) = \log x + \log y$$

и Леонтьев у второго

$$U^B(x,y) = \min(x,y)$$

Пример 3

Найдем равновесие в автаркии для первой страны A.

Опуская индекс страны, получаем УПП:

$$\frac{U'_x(x,y)}{U'_y(x,y)} = \frac{1/x}{1/y} = \frac{p}{q} = \frac{2X}{2Y} = \frac{F'_X(X,Y)}{F'_Y(X,Y)}$$

Моментально получаем что $x = y$ и $p = q$.

Подставляя в соответствующие технологические границы, мы получаем координаты потребления $x = 4, y = 4$ и полезность

$$U_A^{aut} = 2\log 4.$$

Пример 3

Найдем равновесие в автаркии для второй страны B.

Помним, что интересующее нас геометрическое место точек описывается уравнением

$$x = y$$

Подставляя в соответствующие технологические границы, мы получаем координаты потребления $x = y = \sqrt{9/2}$ и

$$U_B^{aut} = \sqrt{9/2}$$

Цены можно, по прежнему, вытащить из фоков для фирмы

$$\frac{p}{q} = \frac{2X}{2Y} = \frac{F_X'(X,Y)}{F_Y'(X,Y)}.$$

Пример 3

Попробуем общее равновесие.

Для построения совместного КПВ можно

- воспользоваться геометрической интуицией
- построить руками через наклон
- max X_{sum} при заданном Y_{sum} или наоборот.

Последний подход мне кажется наиболее универсальным, но в этой задаче он немного тяжело решается...

Пример 3

Но в этой задаче нам это даже и не поможет (потому что полезности разные), поэтому придется идти через избыточный спрос...

Пусть цены нормированы к $(1, q)$.

страна	X	Y	x	y
A	?	?	?	
B	?	?	?	

Чтобы найти q достаточно узнать все про товар x:

$$x_A(q) + x_B(q) - X_A(q) - X_B(q) = 0$$

...немного подумав, убеждаемся что вычитать запасы тут не надо, потому что это трейд, тут запасы зашиты в X, Y. Да и как их вычесть, если они в задаче даже не известны?

Пример 3

Пусть цены $(1, q)$ тогда производство определяется фоком

$$\frac{1}{q} = \frac{2X}{2Y} = \frac{F'_X(X,Y)}{F'_Y(X,Y)}$$

подставляя в технологии получаем

$$X_A^2 = \frac{16}{1+q^2}, \quad Y_A^2 = \frac{16q^2}{1+q^2}, \quad X_B^2 = \frac{9}{1+q^2}, \quad Y_B^2 = \frac{9q^2}{1+q^2}$$

и бюджеты стран (внимание, корень сократился)

$$I_a = 4\sqrt{1+q^2}, \quad I_b = 3\sqrt{1+q^2}$$

Пример 3

Теперь вспоминая кобдугласа

$$x_A = \frac{4\sqrt{1+q^2}}{1}\frac{1}{2}, \quad y_A = \frac{4\sqrt{1+q^2}}{q}\frac{1}{2}$$

и вспоминая леонтьева

$$x_B = y_B = \frac{3\sqrt{1+q^2}}{1+q}$$

Осталось выписать избыточный спрос:

$$E_x = \frac{4\sqrt{1+q^2}}{2} + \frac{3\sqrt{1+q^2}}{1+q} - \frac{4}{\sqrt{1+q^2}} - \frac{3}{\sqrt{1+q^2}} = 0$$

Тут есть один положительный корень $q = 1$, потому что задача была нарочито составлена симметрично, а других таких нет (вольфрам), да их и не может быть по свойству валовости.

Вернемся к КПВ

КПВ

В прошлой задаче у вас были два КПВ:

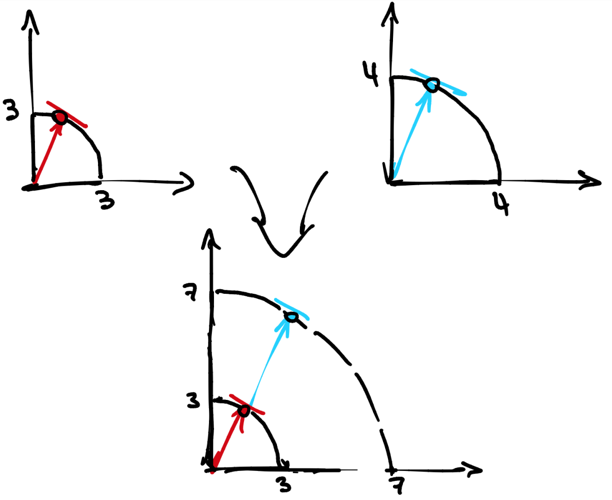
$$F^A(X,Y) = X^2 + Y^2 - 16 \leqslant 0, \quad F^B(X,Y) = X^2 + Y^2 - 9 \leqslant 0$$

и возможно вам потребовалось бы их объединить...

У вас на выбор 3 метода

- воспользоваться геометрической интуицией
- построить руками через наклон
- max X_{sum} при заданном Y_{sum} или наоборот.

Воспользоваться геометрической интуицией...



КПВ

Построить руками через наклон вектора α (ему соответствует наклон касательной $\pi - \alpha$, который нас обычно интересует)

- $X_a(\alpha) = 3\cos\alpha, \quad Y_a(\alpha) = 3\sin\alpha$
- $X_b(\alpha) = 4\cos\alpha, \quad Y_b(\alpha) = 4\sin\alpha$

Получается

$$X_{sum}(\alpha) = 7\cos\alpha, \quad Y_{sum}(\alpha) = 7\sin\alpha$$

Это действительно уравнение окружности.

Третий способ

$$X_{sum} = X_A + X_B \to \max \quad s.t. \quad Y_{sum} = \sqrt{16 - X_A^2} + \sqrt{9 - X_B^2}$$

пишем фоки

$$1 + \lambda \frac{-2X_A}{2\sqrt{16 - X_A^2}} = 0, \quad 1 + \lambda \frac{-2X_B}{2\sqrt{9 - X_B^2}} = 0$$

делим, получаем

$$\frac{X_A^2}{X_B^2} = \frac{16 - X_A^2}{9 - X_B^2} \quad \Rightarrow \quad 9X_A^2 = 16X_B^2$$

... и немного порешав уравнения ...

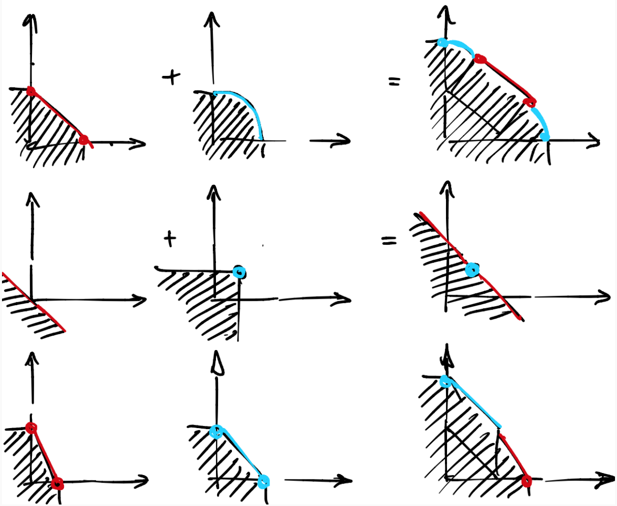
$$X_A = \frac{4}{7}\sqrt{49 - Y_{sum}^2}, \quad X_B = \frac{3}{7}\sqrt{49 - Y_{sum}^2}$$

и наконец уравнение окружности

$$X_{sum} = \sqrt{49 - Y_{sum}^2}$$

Больше КПВ

Геометрический подход самый результативный, на самом деле



Повтор PB с производством

Повтор РВ с производством

У меня в планах решить 4 задачки

- 1+1 (один агент одна фирма)
- 1+2 (один агент две фирмы)
- 2+1 (два агента одна фирма)
- 2+2 (два агента две фирмы) но точно не до конца

В каждой задаче надо выписать замкнутую систему уравнений, а также попытаться приравнять избыточный спрос к нулю.

Попробуем также поработать с табличкой, чтобы структурировать процесс решения.

1+1

1+1

Возьмем агента с (квазивогнутой) CES полезностью

$$U(x, y) = \alpha\sqrt{x} + \sqrt{y}, \quad w = (2, 3)$$

и, внимание, линейной технологией

$$F(X, Y) = X + Y \leqslant 0$$

Сходу сложно сказать, будет ли решение внутреннее, но мы всей душой в это верим и надеемся на собственную удачу.

1+1

Выпишем товарные равенства

$$\ldots$$

Выпишем фоки

$$\ldots$$

Не забудем про эффективное производство

$$\ldots$$

И закон Вальраса, но он последний, поэтому его не берем

$$\ldots$$

и нормируем одну из цен, например, $p = 1$.

Должно быть пять уравнений на (q, x, X, y, Y) неизвестных.

1+1

Выпишем товарные равенства

$$x = X + 2, \quad y = Y + 3$$

Выпишем фоки (тут совмещенные)

$$\frac{\alpha}{2\sqrt{x}} / \frac{1}{2\sqrt{y}} = p/q = 1/1$$

Не забудем про эффективное производство

$$X + Y = 0$$

И закон Вальраса, но он последний, поэтому его не берем

$$\cancel{px + qy = 2p + 3q}.$$

Должно быть пять уравнений на (q, x, X, y, Y) неизвестных.

Вроде получилось.

Пытаться выписать избыточный спрос тут нет большого смысла, потому что технология то линейная, цены, по сути известны: $p = q = 1$; поэтому придется решать систему.

Подставляем...

$$\alpha\sqrt{y} = \sqrt{x}$$
$$x = X + 2$$
$$y = Y + 3$$
$$X + Y = 0$$

Совет: нелинейное уравнение лучше не трогать, решать начиная с линейных

$1+2$

1+2

Возьмем агента с полезностью кобб дуглас

$$U(x, y) = \alpha \log x + \log y$$

и, двумя фирмами с технологиями

$$F_1(X, Y) = X^2 + 2Y^2 \leqslant 1, \quad F_2(X, Y) = 2X^2 + Y^2 \leqslant 1$$

Но фирмам запрещено производить отрицательные координаты, то есть, как в трейде, $X_1, Y_1, X_2, Y_2 \geqslant 0$.

1+2

Поскольку тут фирма владеет всем, хотелось бы объединить КПВ, но он тут составной. Понадеемся на внутреннее решение и запишем условие эффективности производства:

$$\frac{2X_1}{4Y_1} = \frac{p}{q} = \frac{4X_2}{2Y_2}$$

Запишем товарные равенства:

$$x = X_1 + X_2, \quad y = Y_1 + Y_2$$

Наконец, запишем оптимальность потребления

$$\frac{\alpha/x}{1/y} = \frac{p}{q}$$

Быстро сосчитали неизвестные $(q, x, y, X_1, Y_1, X_2, Y_2)$

Чего не хватает?

1+2

Вот такая система из 7 уравнений и 7 неизвестных

$$\frac{2X_1}{4Y_1} = \frac{1}{q} = \frac{4X_2}{2Y_2} = \frac{\alpha/x}{1/y}$$

$$x = X_1 + X_2$$

$$y = Y_1 + Y_2$$

$$X_1^2 + 2Y_1^2 = 1$$

$$2X_2^2 + Y_2^2 = 1$$

Такое даже мне страшно решать, поэтому лучше выпишем избыточный спрос...

1+2

сначала придется сосчитать предложение 1ой фирмы

$$X + qY \to \max, \quad s.t. \quad X^2 + 2Y^2 \leqslant 1$$

это довольно легко

$$X + q\sqrt{\frac{1 - X^2}{2}} \to \max$$

и тогда

$$X_1^2 = \frac{2}{q^2 + 2}, \quad Y_1^2 = \frac{q^2/2}{q^2 + 2}$$

а прибыль

$$\pi_1 = \frac{\sqrt{2} + q^2/\sqrt{2}}{\sqrt{q^2 + 2}} = \frac{\sqrt{q^2 + 2}}{\sqrt{2}}$$

1+2

теперь придется сосчитать предложение 2ой фирмы

$$X + qY \to \max, \quad s.t. \quad 2X^2 + Y^2 \leqslant 1$$

это довольно легко

$$X + q\sqrt{1 - 2X^2} \to \max$$

и тогда

$$X_2^2 = \frac{1}{2 + 4q^2}, \quad Y_2^2 = \frac{4q^2}{2 + 4q^2}$$

а прибыль

$$\pi_2 = \frac{1 + 2q^2}{\sqrt{2 + 4q^2}} = \frac{\sqrt{1 + 2q^2}}{\sqrt{2}}$$

1+2

В принципе, мы готовы выписать избыточный спрос

$$E_x(q) = x(q) - X_1(q) - X_2(q) =$$

$$= \frac{\alpha}{1+\alpha}\frac{1}{1}\left(\frac{\sqrt{q^2+2}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{1+2q^2}}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{\frac{2}{q^2+2}} - \sqrt{\frac{1}{2+4q^2}}$$

Можно убедиться, что при $\alpha = 1$ решение $q = 1$, что неудивительно, поскольку задача становится симметричной.

Для красоты, выпишу второй избыточный спрос.

$$E_y(q) = y(q) - Y_1(q) - Y_2(q) =$$

$$= \frac{1}{1+\alpha}\frac{1}{q}\left(\frac{\sqrt{q^2+2}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{1+2q^2}}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{\frac{q^2/2}{q^2+2}} - \sqrt{\frac{4q^2}{2+4q^2}}$$

Напоминаю, что тут как в трейде нет запасов.

2+1

2+1

Не так то легко придумать задачку так, чтобы она решилась.

Пусть есть две фирмы

$$U_a = min(2x, y), \quad w_a = (1, 0)$$

$$U_b = min(x, 2y), \quad w_b = (0, 1)$$

И завод

$$F(X, Y) = \log(1 - X) + \log(1 - Y) - \log 2 \geqslant 0$$

которым они владеют поровну

2+1

Что делает фирма?

$$X + qY \to max, \quad s.t. \quad \log(1-X) + \log(1-Y) - \log 2 \geqslant 0$$

Выпишем фоки

$$1 - \frac{\lambda}{1-X} = 0, \quad q - \frac{\lambda}{1-X} = 0$$

или

$$1 - X = \lambda, \quad 1 - Y = \lambda/q$$

подставляя

$$\log(\lambda) + \log(\lambda/q) - \log 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \sqrt{2q}$$

отсюда находим

$$X = 1 - \sqrt{2q},\ Y = 1 - \sqrt{2}/\sqrt{q},\ \pi = 1 + q - 2\sqrt{2q}$$

Агенты делят прибыль $\pi = 1 + q - 2\sqrt{2q}$ пополам, но у них еще деньги есть от продажи запасов, 1 у агента a, q у агента b.

По формулам леонтьева

$$x_a = \frac{1+\pi/2}{1+2q},\ y_a = \frac{2+\pi}{1+2q}$$

$$y_b = \frac{q+\pi/2}{2+q},\ x_b = \frac{2q+\pi}{2+q}$$

тогда избыточный спрос

$$E_x(q) = -1 + \frac{1+\pi/2}{1+2q} + \frac{2q+\pi}{2+q} - (1-\sqrt{2q})$$

можно проверить что $q = 1$ подходит.

$2+2$

2+2

Пусть есть две фирмы

$$U_a = \log x + \log y, \quad w_a = (1, 0)$$

$$U_b = \log x + \log y, \quad w_b = (0, 1)$$

И заводы

$$F_\alpha(X, Y) = \sqrt{1 - X} - Y - 1 \geqslant 0$$

$$F_\beta(X, Y) = \sqrt{1 - X} - Y/2 - 1 \geqslant 0$$

причем a владеет α, b владеет β.

Тут не очень сложно, поэтому выпишу избыточный спрос у доски, должно получиться квадратное уравнение.