猴子也能懂的 OQ 格点定理

中指君

2025 年 5 月 5 日

目录

1 前言

OQ 格点定理是在 **[O][Q]** 规则下的一系列重要而常用的定理, 此定理限制了雷格的可能分布, 简化了很多总雷数相关的推理. 首先, 我们先来回顾一下 **[O][Q]** 规则的定义:

- **[O] 外部: 非雷区域四方向联通, 雷区域与题板外部四方向联通.**
- **[Q] 无方: 每个 2×2 区域内都至少有一个雷.**

我们讨论主要讨论题板中格点的性质, 现给出格点的定义如下:

定义 1. *题板中横纵线段的交点称为***格点***.*

需注意的是, 格点并不一定是四个格子的公共点, 题板的边界上也存在格点, 例如: 8×8 题板含有 $(8+1)^2 = 81$ 个格点.

另外 **[O][Q]** 题板有三个重要性质, 在 OQ 格点定理的证明中有着重要的意义, 现叙述如下:

性质 1. *对于任意 2×2 以上题板, 其存在最小雷数且不为 0.*

证明. 由 **[Q]** 规则可知, 题板的每个 2×2 区域内至少有一个雷, 且雷的分布情况是有限的, 因此题板存在最小雷数且不为 0. □

性质 2. *非雷区域的边界为简单多边形.*

该结论是直观的, 但其证明稍显复杂, 见附录 A.1

性质 3. *非雷区域内部没有格点.*

证明. 假设非雷区域内部有格点, 则以该格点为中心的 2×2 区域内无雷, 这与 **[Q]** 规则矛盾, 因此, 非雷区域内部没有格点. □

为了方便以后的讨论, 我们将格点按其与雷的相对位置的不同分为两类:

定义 2. *题板中位于非雷区域的边界的格点为***边界格点***.*

定义 3. *题板中除边界格点以外的格点为***雷格点***.*

如图 1 所示, 非雷区域由绿线框出, 边界格点由绿色圆点标记, 雷格点由红叉标记.

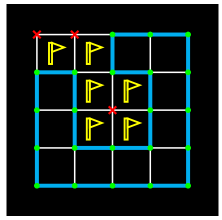


图 1: 格点的分类

2 OQ 格点定理

2.1 Pick 定理

在具体证明 OQ 格点定理之前, 我们需要先介绍一个重要的定理, 作为 OQ 格点定理证明的核心:

引理 1 (Pick 定理)**.** *对于一个简单多边形, I 为多边形内部的格点数, B 为多边形边界的格点数, 则有:*

$$A = I + \frac{B}{2} - 1. \tag{1}$$

其中 A 为多边形的面积.

这是一个非常经典的定理, 其证明略.

2.2 [O][Q] 题板的最小雷数

为了便于理解, 我们先从研究 **[O][Q]** 题板的最小雷数开始，这是 OQ 格点定理的一个特殊情况.

对于一个 $m \times n$ 的题板, 设题板的雷数为 R, 则非雷区域面积为 $mn - R$, 总格点数为 $(m+1)(n+1)$, 根据性质 2, 非雷区域内部格点数为 0, 对非雷区域应用 Pick 定理, 则有:

$$mn - R = \frac{B}{2} - 1. \tag{2}$$

由此, 我们可以得到 **[O][Q]** 题板的总雷数满足:

$$
\begin{aligned}
R &= mn - \frac{B}{2} + 1 \\
&\leqslant mn - \left\lceil \frac{(m+1)(n+1)}{2} \right\rceil + 1 \\
&= \left\lceil \frac{(m-1)(n-1)}{2} \right\rceil .
\end{aligned} \tag{3}
$$

对于这个结论, 要做两点说明:

1. 这里只证明了 R 的下界为 $\left\lceil \frac{(m-1)(n-1)}{2} \right\rceil$, 不仅如此, 实际上这个数还是下确界, 关于其为下确界的证明, 参见附录 A.2.

2. 由于其中的字母必为整数, 所以引入了向上取整符号, 这同时提醒我们, 在 **[O][Q]** 题板中, 非雷区域的边界格点的数目必为偶数, 换言之, 雷格点数目也受到限制.

   为了便于理解, 我们在这里举一个例子: 使用上式计算可得: 2×4 题板的最小雷数为 2, 其分布仅有如图 2 上的三种情况 (忽略对称的情况), 由于总格点数为奇数, 而边界格点数目为偶数, 所以雷格点数目为奇数且为 1, 可直观地用图形验证 (雷格点用红叉标出).

   事实上, 雷格点的分布就是 OQ 格点定理要讨论的内容.

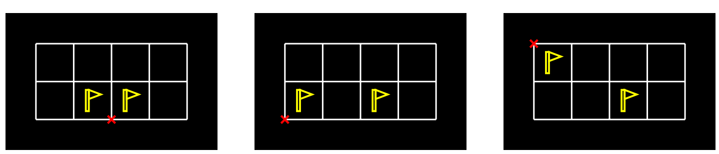


图 2: 2×4 题板的例子

2.3 OQ 格点定理的一般形式

有了前面的铺垫, 我们几乎就可以得到 OQ 格点定理了, 有兴趣的读者可以尝试利用以上内容得到自己的结论 (提示: 考虑总雷数 R 为任意的情况).

接下来给出较为常用的一个结论:

定理 1 (OQ 格点第一定理)**.** *对于总雷数为 R 的 $m \times n$* **[O][Q]** *题板, 雷格点数 $M = 2R - (m-1)(n-1)$.*

证明. 由式 2 可知,

$$B = 2(mn - R - 1),$$

则雷格点数为

$$\begin{aligned} M &= (m+1)(n+1) - B \\ &= (mn + m + n + 1) - 2(mn - R - 1) \\ &= 2R - (m-1)(n-1). \end{aligned}$$

□

在实际游玩中, 题板大小和总雷数是固定的, 也即:

- 对于 5×5 题板, $R = 10, M = 2R - (5-1)^2 = 4$;
- 对于 6×6 题板, $R = 14, M = 2R - (6-1)^2 = 3$;
- 对于 7×7 题板, $R = 20, M = 2R - (7-1)^2 = 4$;
- 对于 8×8 题板, $R = 26, M = 2R - (8-1)^2 = 3$.

2.4 OQ 格点定理的推论

在实际游玩过程中, 还有一些情况, 仅仅使用 OQ 格点第一定理仍然难以得出结论, 这时我们可以使用 OQ 格点定理的增强形式. 不过, 这一推论的证明更加复杂, 所以我们仍先从一个例子开始慢慢讲解.

我们仍然从 2×4 题板开始, 当 $R = 2$ 时, 如前, 雷格点数为 1. 让我们进一步观察雷格点的分布, 可以发现, 即使考虑到对称的所有情况, 雷格点的位置也只可能出现在如图 3 所示的六个位置之一 (用黄叉标记).

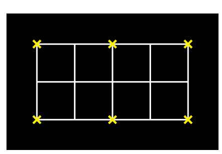


图 3: 雷格点的可能位置

再看 $R = 3$ 的情况, 这时雷格点数为 3, 在不计对称性的意义下, 共有 4 种情况, 如图 4 所示.

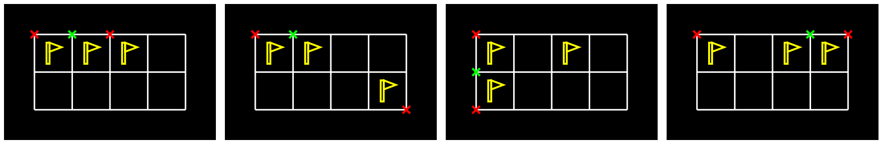


图 4: $R=3$ 时雷格点的分布

你可能注意到, 这里分别使用了红色和绿色的叉来标记雷格点, 标注规则是这样的: 首先, 将网格看成一个平面直角坐标系, 以左上角为原点, 每个格子的长宽均为 1, 横纵坐标之和为偶数的格点定义为**偶格点**, 横纵坐标之和为奇数的格点定义为**奇格点**. 若雷格点为偶格点, 则用红色叉标记, 若为奇格点则用绿色叉标记.

图 3 中可以看到, 三个雷格点中有两个偶格点, 一个奇格点. 对于前述的 $R=2$ 的情况, 雷格点数为 1 , 一定是偶格点. 其一般规律为:

定理 2 (OQ 格点第二定理)**.** *对于任意* **[O][Q]** *题板中的雷格点, 其中偶格点数为 E, 奇格点数为 O, 则有:*

$$E-O=0 \text{ 或 } 1. \tag{4}$$

证明. 若题板上不全为雷, 由性质 2 可知, 非雷区域的边界为简单多边形, 任取一个格点作为起点, 沿着边界格点的顺序遍历, 直到回到起点, 可保证除起点外每个点会且只会经过一次. 在遍历过程中, 偶格点和奇格点交替出现, 因此边界格点中奇偶格点数目相等. 特殊地, 若题板上全为雷, 边界格点数为 0, 同样满足以上结论. 综上所述, 边界格点中奇偶格点数目相等.

因此, 若 m,n 均为偶数, 则题板中偶格点比奇格点多 1, 除去其中的边界格点, 雷格点中偶格点数比奇格点数多 1; 反之同理, 雷格点中偶格点数与奇格点数相等, 综上所述, 雷格点中偶格点数比奇格点数多 0 或 1. □

在实际游玩中, 进一步有:

- 对于 5×5 题板, 偶雷格点数为 2, 奇雷格点数为 2;
- 对于 6×6 题板, 偶雷格点数为 2, 奇雷格点数为 1;
- 对于 7×7 题板, 偶雷格点数为 2, 奇雷格点数为 2;
- 对于 8×8 题板, 偶雷格点数为 2, 奇雷格点数为 1.

3 其他规则下的格点定理

此部分将在本文章以后的版本补充.

4 致谢与感言

这是本人第一次制作游戏攻略, 也应该是第一篇基于 LaTeX 写成的《14 种扫雷变体》文档.

在被《14 种扫雷变体》的玩法和 LaTeX 出色的排版效果吸引后, 在今年年初, 我就产生了使用 LaTeX 创作《14 种扫雷变体》相关攻略的想法. 为了满足在攻略中绘图的需要, 我制作了基于 Ti*k*Z 的宏包 Ti*k*Z-14mv, 本文的所有图片都是使用以上两个宏包绘制的. 同时, 这应该是 Ti*k*Z-14mv 第一次被使用在实际的攻略中.

此前, OQ 格点定理常常在群里被提到, 但当时我并不了解其具体内容. 直到实际游玩 **[O] [Q]** 题板时, 有感其趣味性和 OQ 格点定理中蕴含的数学思维, 于是我顺理成章地决定将其写成攻略, 以便于更多的玩家了解. 我本计划写一个系统的 **[O][Q]** 攻略, 并将本文作为其中的一部分. 但考虑到本人的水平有限, 恐怕无法撑起一篇完整的攻略, 因此仅仅写了 OQ 格点定理的部分.

此外, 格点定理不仅在出现在 **[O][Q]** 题板中, 在其他规则中也有相应的版本, 例如 QS、DQ 格点定理等. 这同时说明其中蕴含的数学思维是相通的. 我也有计划在本文中简要说明其他规则下的格点定理, 不过目前我还没有具体涉足过它们. 希望在本文的未来版本中, 能够加入其他规则下的格点定理.

在本文章的写作过程中, 我得到了很多群友的建议和指正, 特别要感谢灵秀之韵老师和 sgo37 老师, 他们分别贡献了 **[O][Q]** 题板的下确界和性质 2 的证明. 另外, 还要感谢群友们对本文章的支持和鼓励.

中指君

写于 2025 年 4 月 30 日

A 补充材料

A.1 [O][Q] 规则下非雷区域的边界为简单多边形

群友 sgo37 给出了一个涉及图论的性质 2 的证明, 为了使得对图论了解程度不同的读者都能理解本证明, 先不那么系统地介绍一下图论的基本概念.

首先, 图是一些点 (称为**顶点**) 和点之间的连线 (称为**边**) 构成的, 在图论研究中, 我们只关心顶点和边的关系, 而点和每个点的位置, 线的形状如何都不在考虑范围内.

不考虑一条边的两端是同一个顶点, 或者两个顶点间有多余一条边的情况 (称为 "简单的"), 与 V_i 关联 (连接) 的边数, 称作顶点 V_i 的度数, 记作 $\deg(V_i)$, 由于一个边连接两点, 所以一个图的边数 E 是所有点度数之和的一半, 也即

$$E = \frac{1}{2}\sum_{V}\deg(V_i).$$

另外, 如果一个图能画成所有边都不相交的样子, 则称这个图为平面图, 有欧拉公式:

$$V - E + F = 2.$$

其中 V 为顶点数, E 为边数, F 为面数 (可理解为平面图被分成区域的数量).

于是, 引出性质 2 的证明:

证明. 首先, 非雷区域是无 "洞" 的, 换言之, 非雷区域是单连通区域. 否则雷区域与题板外部无法四方向联通, 这与 **[O]** 规则矛盾. 因此, 非雷区域的边界是一条闭合曲线. 那么, 将所有边界格点作为顶点, 相邻两边界格点于非雷区域边界上的连线作为边, 成为一个简单平面图, 有如下性质:

1. 其只有两个面, 对应非雷区域和雷区域及题板外部;

2. 每个顶点的度数 $\deg(V_i) = 2$ 或 4

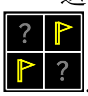
其边数 $E = \frac{1}{2}\sum_{V}\deg(V_i)$, 面数为 $F = 2$ 由平面图的欧拉公式

$$V - E + F = 2$$

得

$$\begin{aligned} V-\frac{1}{2}\sum_{V}\deg(V_i)+2&=2 \\ V-\frac{1}{2}\sum_{V}\deg(V_i)&=0 \\ \sum_{V}\deg(V_i)&=2V \\ \deg(V_i)&=2 \end{aligned}$$

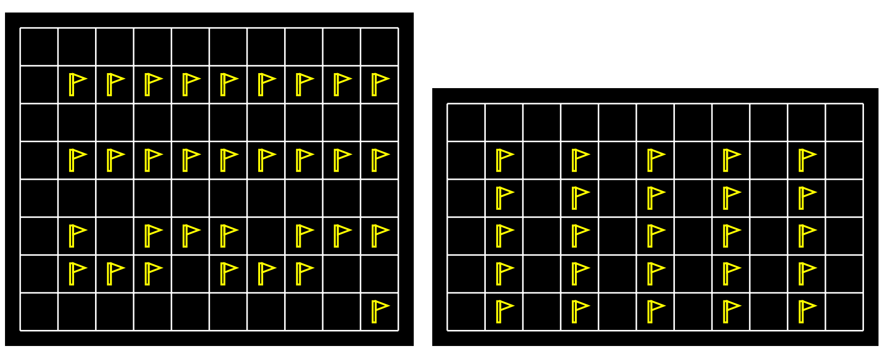
由此可知, 每个边界格点的度数均为 2, 即边界不会自交, 即边界是一个简单多边形. □

这是一个 **[O]** 题板的性质. 同样表明, **[O]** 题板中不含 “扭断”, 即 , 因为此结构中中心格点的度数为 4.

A.2 [O][Q] 的下确界

此前证明了 R 的下界为 $\left\lceil\frac{(m-1)(n-1)}{2}\right\rceil$, 要证明其同时为下确界, 只需给出一种满足要求的构造方式即可. 如下的构造由群友灵秀之韵给出:

- 当 m,n 均为偶数时, 取如 5a 的分布;
- 当 m,n 其中一个为奇数时, 取如 5b 的分布.



(a) m,n 均为偶数　　(b) m,n 其中一个为奇数