CAPÍTULO 3
Ejercicio 3.1

Considerar una variable x distribuida como $N(\mu,\sigma^2)$ y suponer que la varianza es conocida. Se obtiene una muestra de tamaño T y se va a contrastar $H_0 : \mu = 1$.

1). Derivar el gradiente y la matriz de información de la muestra y evalúar ambos utilizando los estimadores MV con y sin restricciones.

2). Contrastar la hipótesis nula utilizando los contrastes LR y LM. Derivar sus regiones críticas utilizando un estadístico definido en términos de los datos eligiendo previamente el tamaño del error tipo 1.

3). Suponer que el contraste se lleva a cabo utilizando la siguiente región crítica: $LR^{\bullet} \leq$ c para c=.5 y c=1.Derivar las regiones críticas correspondientes en términos de estadísticos definidos a partir de las observaciones muestrales. Calcular aproximadamente el nivel de significación implícito.

4). Suponer que se adopta la siguiente región crítica: $|\bar{x}| \geq 2$. Derivar ,aproximadamente, el tamaño del error tipo 1 que le corresponde en el caso en que $\sigma^2 = 4$ y T=16. Derivar también el tamaño del error tipo 2 para $\mu =$ 1,5.Obtener ambos tamaños en el caso en que T=36.

Solución

1). El logaritmo de la función de verosimilitud es

$$l(\mu) = -\frac{T}{2}(\log 2\pi + \log\sigma^2) - \frac{\sum(x_t - \mu)^2}{2\sigma^2}$$

El gradiente, la matriz de segundas derivadas y la matriz de información son, respectivamente

$$d(\mu) = \frac{\sum(x_t - \mu)}{\sigma^2}$$

$$D(\mu) = -\frac{T}{\sigma^2} \quad ; \quad I(\mu) = \frac{T}{\sigma^2}$$

El estimador MV restringido es $\hat{\mu}_R = 1$ mientras que el estimador sin restricciones viene dado por $\hat{\mu} = \bar{x}$. Sustituyendo estos estimadores en el gradiente y en la matriz de información se llega al resultado.

2). El estadístico LR puede escribirse como

$$LR = \frac{1}{\sigma^2}\left(\sum(x_t - \bar{x})^2 - \sum(x_t - 1)^2\right) = \frac{1}{\sigma^2}T(\bar{x} - 1)^2$$

CAPÍTULO 3
Ejercicio 3.1

Por ser $\bar{x} \underset{H_0}{\overset{d}{\approx}} N(1, \frac{\sigma}{\sqrt{T}})$ la región crítica del contraste es

$$LR > \chi^2_\varepsilon(1)$$

habiendo elegido previamente el nivel de significación. El estadístico LM toma la misma forma que el LR por lo que, en este caso, la región crítica de los dos contrastes es la misma.

3). La regla de decisión es equivalente a

$$-2\log LR^* > -2\log c$$

o,equivalentemente, se rechaza cuando

$$\frac{T(\bar{x}-1)^2}{\sigma^2} > -2\log c$$

Si c=0, entonces la desigualdad se cumple siempre por lo que no hay una verdadera regla de decisión. Para que haya una verdadera regla de decisión c tiene que ser menor que la unidad. Si c=.5 entonces la regla de decisión es

$$\frac{T(\bar{x}-1)^2}{\sigma^2} > -2\log c = 1{,}3862$$

Por cumplirse que $P(\chi^2(1) > 1{,}3862) \approx 0{,}25$, el nivel de significación es, aproximadamente, el 25%.

4). El tamaño del error tipo 1 viene dado por

$$\varepsilon = \Pr ob\left[|\bar{x}| > 2 / H_0\right] = \ldots = \Pr ob\left[N(0,1) > 2\right] + \Pr ob\left[N(0,1) < -6\right] \approx 0{,}0228$$

Respecto al tamaño del error tipo 2,

$$\delta = 1 - \Pr ob\left[|\bar{x}| > 2 / H_1 : \mu = 1{,}5\right] = .. = 1 - \Pr ob\left(N(0,1) > 1\right) - \Pr ob(N(0,1) < -7) = 0{,}8413$$

Los cálculos para T=36 siguen las mismas pautas.

Ejercicio 3.2

Considerar el siguiente modelo:

$$y_t = \beta + u_t$$

en donde suponemos que u es N (0, σ^2) y β es un parámetro. Suponiendo que σ^2 es conocida y que se dispone de T observaciones se quiere contrastar $H_0 : \beta = 1$.

1). Obtener el gradiente y la matriz de información y evaluarlos utilizando los estimadores MV con y sin restricciones.

2). Utilizando los procedimientos de Wald y de los Multiplicadores de Lagrange contrastar la hipótesis nula especificando sus regiones críticas.

3). Suponer que se especifica la región crítica: $LR^{\bullet} \leq$ c para c=0,5 y 1. Obte-

Ejercicio 3.2

ner el tamaño del error tipo 1 en ambos casos.
4). Suponer que $\tilde{\beta}$ es el estimador MV. Se especifica la siguiente región crítica $\hat{\beta} \geq 2$. Obtener el tamaño del error tipo 1 suponiendo que σ^2 es igual a 4 y T=16. Para esos mismos valores obtener el tamaño del error tipo 2 para un valor de β=1,5. Indicar cuales serían los tamaños en el caso en que $\sigma^2 = 0{,}64$.

Solución

1). El logaritmo de la función de verosimilitud es

$$l(\beta) = -\frac{T}{2}(\log 2\pi + \log\sigma^2) - \frac{\sum(y_t - \beta)^2}{2\sigma^2}$$

A partír de esta expresión, se ve que la respuesta es la misma que en el apartado 1) del ejercicio anterior siendo el parámetro β en lugar de μ .

2). El estimador Máximo-verosimil de β cumple

$$\hat{\beta} = \bar{y} \approx N(\beta, \frac{\sigma^2}{T})$$

El estadístico de Wald se define como,

$$W = \frac{(\hat{\beta} - 1)^2}{\sigma^2 / T} = \frac{(\bar{y} - 1)^2}{\sigma^2 / T}$$

A partir de esta expresión se ve que el contraste de Wald toma la misma forma que los contrastes LR y LM derivados en el apartado 2) del ejercicio anterior.Basta extender los resultados de ese apartado.

3). Son aplicables los resultados obtenidos en el mismo apartado del ejercicio anterior.

4). Bajo la hipótesis nula se obtiene que,

$$\frac{\hat{\beta} - 1}{\sigma / \sqrt{T}} \approx N(0,1)$$

El tamaño del error tipo 1 viene dado por

$$\varepsilon = \Pr ob(N(0,1) > \frac{2-1}{2/4} = 2) = 0{,}0228$$

Respecto al tamaño del error tipo 2 para 1,5 se tiene,

$$\delta = 1 - \Pr ob(N(0,1) > \frac{2-1{,}5}{2/4} = 1) = 1 - 0{,}1587 = 0{,}8413$$

Los resultados para $\sigma^2 = 0.64$ se obtienen siguiendo las mismas pautas.

Ejercicio 3.3

CAPÍTULO 3
Ejercicio 3.3

Utilizando una muestra de tamaño T obtenida a partir de una población con media μ y varianza σ^2=1, se trata de contrastar la hipótesis nula $H_0 : \mu = 0$, frente a la alternativa de que la media es diferente de cero. La región crítica que se propone para un nivel de significación del 5% es:

$$|\overline{X}| \succ 0{,}5$$

en donde $\overline{X}$ es la media muestral. Calcular el tamaño muestral e indicar cual sería la región crítica si el tamaño muestral fuera T=100. Indicar como se formularía la regi0n crítica en el caso en que se contrastara la hipótesis nula frente a una hipótesis alternativa que dijera que el parámetro toma un valor igual a 2.

Solución

Podemos escribir,

$$\Pr o(|N(0,1)| > \frac{0{,}5}{\sigma / \sqrt{T}}) = 0{,}05$$

Por las tablas se tiene que

$$\frac{0{,}5}{1/\sqrt{T}} = 1{,}96 \Rightarrow T = 16$$

Si el tamaño muestral fuera 100, entonces tendríamos

$$\frac{c}{1/\sqrt{100}} = 1{,}96 \Rightarrow c = 0{,}196$$

Si se sabe que el valor bajo la alternativa es 2, entonces la región crítica sería

$$\bar{x} > c$$

determinando c como

$$\frac{c}{1/\sqrt{100}} = 1{,}65 \Rightarrow c = 0{,}165$$

CAPÍTULO 3
Ejercicio 3.4

Considerar el siguiente modelo:

$$y_t = \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + u_t$$

en donde se supone que las variables estan medidas en desviaciones respecto a sus medias y la perturbación u cumple las hipótesis ideales.

a). Expresar las varianzas de los estimadores MCO de β en función de las varianzas muestrales de x_1 y x_2 (S_1^2yS_2^2, respectivamente)y del coeficiente de correlación entre ambas variables (r_{12}).

b).Conociendo que σ^2=1, S_1^2=2, T=8, $\hat{\beta}_1$(MCO)=2,se pide determinar la región crítica para contrastar la hipótesis nula $H_0{:}\beta_1 = 0$ frente a la alternativa de que es diferente de cero para aquellos casos en que $r_{12}^2 = 0{,}02$ y $r_{12}^2 = 0{,}99$. Utilizar un tamaño del error tipo 1 igual a 0,05.

c). Obtener el tamaño del error tipo 2 para los dos casos contemplados en el apartado anterior suponiendoβ_1=1.8.

Solución

1). Teniendo en cuenta que,

$$S_i^2 = \frac{\sum x_i^2}{T} \quad \text{y que} \quad r_{12} = \frac{\sum x_1 x_2}{T S_1 S_2}$$

podemos escribir,

$$Var(\hat{\beta}) = \sigma^2 \begin{pmatrix} \sum x_1^2 & \sum x_1 x_2 \\ \sum x_1 x_2 & \sum x_2^2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\sigma^2}{T} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{S_1^2(1-r_{12}^2)} & \dfrac{-r_{12}}{S_1 S_2 (1-r_{12}^2)} \\ \dfrac{-r_{12}}{S_1 S_2 (1-r_{12}^2)} & \dfrac{1}{S_2^2(1-r_{12}^2)} \end{pmatrix}$$

2). Dada la forma que adopta la hipótesis alternativa, la región crítica viene dada por:

$\left|\hat{\beta}\right| > c$ en donde c se determina de forma tal que,

$$\Pr ob(\left|N(0,1)\right| > \frac{c-0}{\sigma_{\hat{\beta}_1}}) = 0{,}05$$

Por lo que $\quad c = 1{,}96 * \sigma_{\hat{\beta}_1}$

Si $r_{12}^2 = 0{,}02$, entonces $\sigma_{\hat{\beta}_1} = \dfrac{1}{3{,}96} \Rightarrow c = 0{,}5 \Rightarrow$ **Rechazo**

Si $r_{12}^2 = 0{,}99 \Rightarrow c = 4{,}9 \Rightarrow$ **Aceptación**

3). El tamaño del error tipo 2 será

$$\delta = 1 - \Pr ob(\left|\hat{\beta}_1\right| > c / \beta = 1.8)$$

CAPÍTULO 3
Ejercicio 3.4

Si

$$r_{12}^2 = 0{,}02 \Rightarrow \delta = 1 - \Pr ob(N(0,1) > \frac{.5 - 1.8}{1/3.96}) - \Pr ob(N(0,1) < \frac{-.5 - 1.8}{1/3.96}) \cong 0$$

Si

$$r_{12}^2 = 0{,}99 \Rightarrow \delta = 1 - \Pr ob(N(0,1) > \frac{4.9 - 1.8}{2.5}) - \Pr ob(N(0,1) < \frac{-4.9 - 1.8}{2.5}) \cong 0.89$$

Ejercicio 3.5

Sea $x_1,.......x_T$ una muestra aleatoria simple obtenida a partir de una población que sigue una distribución normal con media θ, desconocida, y varianza conocida igual a 1. Se va a contrastar la hipótesis nula $H_0{:}\theta = 0$ frente a la alternativa $H_1{:}\theta = 1$ utilizando un procedimiento que minimiza $\varepsilon(A) + b\,\delta(A)$, en donde $\varepsilon(A)$ y $\delta(A)$ son, respectivamente, los tamaños de los errores tipo 1 y tipo 2 de un contraste cualquiera A, y b es una constante positiva.

1). Se especifica $\varepsilon(A)$=0.01 y se pide determinar la región crítica del contraste, b y $\delta(A)$ para tres tamaños muestrales, T=1, 25, 100.

2). Se especifica b=0.16 y se pide determinar la región crítica del contraste, $\varepsilon(A)$ y $\delta(A)$ para tres tamaños muestrales, T=1, 25, 100.

Solución

1). Teniendo en cuenta el Resultado 3.1, la región crítica que minimiza la expresión mencionada en el enunciado es,

$$\frac{L_1(x)}{L_0(x)} > \frac{1}{b} = c$$

en donde

$$L_1(x) = (2\pi)^{-\frac{T}{2}} (\sigma^2)^{-\frac{T}{2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum (x_t - 1)^2 \right\}$$

sustituyendo, la región crítica resultante es

$$\bar{x} > c' = \frac{1}{2} + \frac{1}{T} \log c$$

Por ser, bajo la hipótesis nula, $\bar{x} \approx N(0, \frac{1}{T})$ el tamaño se define como,

$$\varepsilon(A) = \Pr ob(\sqrt{T}\bar{x} > \sqrt{T}c') = 0{,}01$$

A partir de una tabla de la normal standard se tiene que:

CAPÍTULO 3
Ejercicio 3.5

$$\sqrt{T}c' = 2,326 \Rightarrow c' = 2,326 \times T^{-\frac{1}{2}}$$

En lo que respecta al tamaño del error tipo 2

$$\delta(A) = \Pr ob(\bar{x} < c' / H_1) = \Pr ob(N(0,1) < \sqrt{T}(c' - 1)$$

Utilizando estos resultados se obtiene

T	$\varepsilon(A)$	c'	**b**	$\delta(A)$
1	**0,01**	2,326	**0,16**	$\Pr ob(N(0,1) < 1,326) = 0,91$
25	**0,01**			
100	**0,01**			

Las otras casillas se pueden llenar utilizando los resultados derivados anteriormente.

2). En este caso, la región crítica sería

$$\bar{x} > \frac{1}{2} + \frac{1}{T}\log 6,21 = c'$$

Los tamaños de los errores 1 y 2 ,respectivamente, vienen dados por

$$\varepsilon(A) = \Pr ob(\bar{x} > c' / H_0) = \Pr ob(N(0,1) > \sqrt{T}c')$$

$$\delta(A) = \Pr ob(N(0,1) < \sqrt{T}(c' - 1))$$

Los resultados son:

T	b	c'	$\varepsilon(A)$	$\delta(A)$
1	0,16	2,3261	$\Pr ob(N(0,1) < 2,3261) = 0,01$	$\Pr ob(N(0,1) < 1,3261) = 0,91$
25	0,16			
100	0,16			

Las otras casillas se obtienen de forma inmediata.

Ejercicio 3.6

Sea $y_1, y_2, ...y_T$ una muestra aleatoria simple obtenida a partir de una población normal con media μ y varianza σ^2. Sea $\bar{y}$ la media muestral. Se pide:

CAPÍTULO 3
Ejercicio 3.6

1). Demostrar que $\frac{\bar{y}-\mu}{\sigma}$ se puede escribir como $a'x$ siendo a y x vectores de T elementos con x distribuida como: N (0, I).

2). Demostrar que $\sum_{t=1}^{T}(y_t-\bar{y})^2$ se puede escribir como $\sigma^2(x'Ax)$ en donde A es una matriz idempotente. Obtener su rango.

3). Escribir $\frac{T(\bar{y}-\mu)^2}{\sigma^2}$ en la forma $x'Bx$ en donde B es una matriz idempotente. Obtener su rango.

4). Demostrar que Aa=0 y que AB=0 y comentar como se utilizarían todos estos resultados para contrastar una hipótesis acerca de μ.

Solución

1). Definir

$$x_t = \frac{y_t-\mu}{\sigma}$$

El vector a cumple

$$a' = \begin{pmatrix} \frac{1}{T} & \frac{1}{T} & \cdots & \frac{1}{T} \end{pmatrix}$$

2). La matriz A es la siguiente

$$A = I - \frac{1}{T}ii' = \begin{bmatrix} \frac{T-1}{T} & \frac{-1}{T} & \cdots & \frac{-1}{T} \\ \frac{-1}{T} & \frac{T-1}{T} & \cdots & \frac{-1}{T} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{-1}{T} & \frac{-1}{T} & \cdots & \frac{T-1}{T} \end{bmatrix}$$

La matriz A cumple con el resultado porque es idempotente y, además, por ser idempotente, rang(A)=traza(A)=T-1.

3). Definiendo x_t como se ha hecho en el Apartado 1), se tiene que,

$$\frac{T(\bar{y}-\mu)^2}{\sigma^2} = T(\frac{1}{T}i'x)'(\frac{1}{T}i'x) = \frac{1}{T}x'ii'x = x'Bx$$

4).Los resultados se ven de forma directa sustituyendo A y a por las expresiones obtenidas. Respecto a como utilizar estos resultados en el contraste, hay que tener en cuenta lo siguiente: si x: N(0, I), entonces si llamamos $L = a'x$, $Q_1 = x'Ax$ y $Q_2 = x'Bx$ se tiene que:

L se distribuye como $N(0, a'a)$.

Capítulo 3
Ejercicio 3.8

$Q_1 \approx \chi^2(rango(A))$ y lo mismo para Q_2.

Q_1 y Q_2 son independientes si AB=0.

L y Q_1 son independientes si Aa=0.

$$\frac{Q_1 / tra(A)}{Q_2 / tra(B)} \approx F(tra(A), tra(B)) \text{ si AB=0.}$$

Ejercicio 3.8

Considerar el siguiente modelo:

$$y_t = \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + u_t \qquad u \approx N(0, \sigma^2 I_T)$$

con:

$$X'X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad X'y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma^2 = 1$$

Se pide:

1). Utilizando los procedimientos LR, W, LM contrastar $H_0 : \beta_2 = 0$.

2). Calcular el estimador previo contraste de β_1 bajo la restricción introducida en 1) y adoptando un nivel de significación del 5%.

3). Comparar los estimadores MCO y restringidos de β_1 e indicar como variaria dicha comparación si los regresores fueran ortogonales. Suponer que el verdadero valor de β_2 coincide con la estimación MCO del parámetro.

Solución

1). El logaritmo de la función de verosimilitud evaluado con los estimadores restringidos y sin restringir es

$$l(\hat{\beta}) = -\frac{T}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\sum \hat{u}_t^2$$

$$l(\hat{\beta}_R) = -\frac{T}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\sum \hat{u}_{Rt}^2$$

Los elementos del gradiente evaluados con estimadores no restringidos son:

$$d_1(\tilde{\beta}) = \left(\frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_1}\right)_{\beta=\tilde{\beta}} = \frac{\sum x_{1t}\hat{u}_t}{\sigma^2} = x_1'\hat{u}$$

$$d_2(\tilde{\beta}) = \left(\frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_2}\right)_{\beta=\hat{\beta}_*} = \frac{\sum x_{2t}\hat{u}_t}{\sigma^2} = x_2'\hat{u}$$

De la misma manera se obtendría $d(\hat{\beta}_R)$.

Capítulo 3
Ejercicio 3.8

La matriz de información viene dada por:

$$I(\beta) = X^{'}X$$

El contraste de la razón de verosimilitud es,

$$LR = 2(l(\hat{\beta}) - l(\hat{\beta}_R) = (\hat{u}^{'}_R\hat{u}_R - \hat{u}^{'}\hat{u}) = 4$$

por ser,

$$\hat{u}^{'}_R\hat{u}_R - \hat{u}^{'}\hat{u} = (y - \hat{\beta}_{1R}x_1)^{'}(y - \hat{\beta}_{1R}x_1) - y^{'}My = -\hat{\beta}_{1R}x_1^{'}y + y^{'}X(X^{'}X)^{-1}X^{'}y$$

Por ser LR> $\chi^2(1)$ =3,84(tablas) $\Rightarrow$ se rechaza la hipótesis nula.

Para aplicar el contraste de Wald, hay que tener en cuenta que

$R\hat{\beta} = \hat{\beta}_2$, q=0 y que $RI(\beta)^{-1}R^{'} = 1$

por lo que, W=4, llegandose a la misma conclusión.

En lo que respecta al método de los multiplicadores de Lagrange, tener en cuenta que:

$$d(\hat{\beta}_R) = \begin{pmatrix} x_1^{'}\hat{u}_R \\ x_2^{'}\hat{u}_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo se llega a LM=4, y, también , se concluye rechazando la hipótesis nula.

2). El estimador previo contraste se define como:

$\hat{\beta}_{1PC} = \hat{\beta}_1$ si la hipótesis nula es rechazada

$= \hat{\beta}_{1R}$ si la hipótesis nula no es rechazada.

3).Los dos estimadores se comparan utilizando el Error Cuadrático Medio(ECM).

$$ECM(\hat{\beta}_1) = Sesgo^2 + Varianza = 0 + 4 = 4$$

$$ECM(\hat{\beta}_{1R}) = Sesgo^2 + Varianza = (-2)^2 + 3 = 7$$

Podemos concluir diciendo que es mejor el estimador MCO.