PUBLICACIONES DE 4er CURSO

Grado: Economía

Asignatura: ECONOMETRÍA III

Tema 3: Evaluación
Apartado 3.1: Conceptos Básicos

Grupos:

Profesores: Antonio Aznar y M. Teresa Aparicio

Departamento de ANÁLISIS ECONÓMICO

Curso Académico 2014/15

Facultad de
Economía y Empresa
Universidad Zaragoza
1542

Apartado 3.1

Conceptos Básicos

En el Tema 2 hemos definido estadísticos con el objetivo de aproximar numéricamente los valores de ciertos parámetros. Se han derivado resultados que garantizan que la aproximación es buena, aunque el valor concreto al que se llegue en una aplicación dependerá de la calidad de la evidencia empírica de la que se parta.

En este apartado variaremos de óptica. En lugar de buscar aproximaciones razonablemente válidas, el objetivo ahora es dar respuesta a cuestiones del siguiente tipo: ¿Puede aceptarse que un parámetro o una combinación de los parámetros del modelo puede tomar un valor concreto a la vista de la evidencia empírica disponible?. En torno a los estadísticos derivados en los dos primeros capítulos se pueden definir regiones de valores de forma que, en principio, todo valor situado dentro de esas regiones es un valor que puede aceptarse para el parámetro en cuestión.

En este apartado, vamos a presentar desarrollos orientados a tomar la decisión de si aceptar o rechazar una hipótesis nula determinada.Comenzaremos introduciendo una serie de definiciones que nos permitirán establecer un conjunto de contrastes que sean admisibles; posteriormente, se analizará como elegir uno de los contrastes entre el conjunto de procedimientos admisibles. Se prestará una atención especial a los contrastes de la Razón de Verosimilitud (LR), Wald (W) y los Multiplicadores de Lagrange (LM); estos procedimientos pertenecen al conjunto de contrastes admisibles, al menos asintóticamente, y han sido ampliamente utilizados en el trabajo aplicado.

Supongamos, como punto de partida, que disponemos de una muestra de tamaño T que representamos por $y_1, \dots y_T$ extraída a partir de una población con una distribución de probabilidad dada por $f(y, \theta)$ en donde θ es un vector de k parámetros cuyos valores pertenecen al espacio de parámetros, Θ, es decir, $\theta \in \Theta$.

Una hipótesis es una conjetura en el sentido de que θ pertenece a un subespacio de Θ, Θ_0. Esto se indica por:

$$H_0: \theta \in \Theta_0; \Theta_0 \subset \Theta.$$

Según la forma que adopte Θ_0, se puede hablar de diferentes tipos de hipótesis. Si Θ_0 incluye solamente un punto, se trata de una hipótesis simple; si incluye más de un punto, se trata de una hipótesis compuesta. Si la conjetura afecta sólo a uno de los elementos de θ, se trata de una hipótesis individual; si la conjetura afecta a varios elementos de θ tenemos una hipótesis conjunta. Dentro de las hipótesis compuestas, si Θ_0 incluye los valores correspondientes a una región definida como $\theta > \theta_0$, siendo θ_0 valores concretos que toman los elementos del vector, estamos en el caso de la hipótesis compuesta unilateral; si la región se define como $\theta \neq \theta_0$, se trata de una hipótesis compuesta bilateral.

Un **contraste de hipótesis** es un procedimiento que, utilizando toda la información relevante, permite concluir si la hipótesis que se contrasta es o no aceptable. La información relevante se refiere a los valores muestrales y a cualquier otra información a priori disponible sobre los parámetros incluidos en θ.

Sea S el conjunto de todas las posibles muestras. Cuando se observa una muestra particular que pertenece a S, hay que decidir si la hipótesis que se contrasta es aceptada o rechazada. Para ello, todo método de contraste distingue, dentro de S, dos regiones que llamaremos S_0 y S_1. Si la muestra observada pertenece a S_0 entonces H_0 se rechaza y si pertenece a S_1 la hipótesis es aceptada. S_0 es la llamada **Región Crítica** del contraste. La cuestión clave que determina todo el proceso es, por tanto: ¿como se lleva a cabo la partición de S en S_0 y S_1?.

Como indica Leamer (1978) en su libro, para definir un contraste hay que resolver dos cuestiones:

Primera: definir el conjunto de procedimientos de contraste admisibles, y,

Segunda: elegir un contraste entre todos los que sean admisibles.

La primera cuestión es un problema puramente matemático-estadístico que nos dice cómo utilizar eficientemente la evidencia disponible. No todo uso de la evidencia es admisible. Para serlo debe de cumplir determinadas condiciones que son las que vamos a estudiar en este apartado.

Cuando se contrasta una hipótesis hay que tomar una decisión entre aceptarla o rechazarla. Como yo no sé si la hipótesis que estoy contrastando es o no cierta, y es por eso precisamente por lo que la contrasto, entonces puedo cometer dos errores: rechazar la hipótesis cuando es cierta y aceptarla cuando es falsa. Un contraste será bueno si minimiza, en algún sentido, la posibilidad de cometer estos dos errores.

Comenzaremos definiendo la hipótesis nula como la hipótesis definida al comienzo de la sección, es decir H_0. La hipótesis alternativa, que escribiremos H_1, será aquella que especifica que θ pertenece a la región complementaria de Θ_0 en Θ.

Definición 3.1: **Error Tipo 1 y Error Tipo 2**

El Error Tipo 1 se comete cuando se rechaza la hipótesis nula siendo cierta. Corresponde a aquellos casos en que la muestra pertenece a S_0 siendo H_0 cierta.

El Error Tipo 2 se comete cuando se acepta la hipótesis pertenece a S_1 siendo H_0 falsa.

Asociado a cada tipo de error está su tamaño.

Definición 3.2: **Tamaños de los dos Errores**

El Tamaño del Error Tipo 1, que denotaremos con ε, es la probabilidad de cometer el Error Tipo 1; es decir:

$$\varepsilon = \Pr ob\left\{\, y \in S_0 \,/\, H_0 \ cierta \,\right\} \qquad (3.1.1)$$

El Tamaño del Error Tipo 2, que denotaremos con δ, es la probabilidad de cometer el Error Tipo 2; es decir:

$$\delta = \mathrm{Prob}\left\{\, \mathrm{y} \notin \mathrm{S}_0 \,/\, \mathrm{H}_0 \ \ \mathrm{falsa} \,\right\} \qquad (3.1.2)$$

Para el caso en que tanto la hipótesis nula como la alternativa sean simples, es decir cuando sólo haya un tamaño del Error Tipo 1 y un solo tamaño del Error Tipo 2 entonces podemos definir un contraste admisible de la siguiente manera:

Definición 3.3: Entre dos contrastes, A y B, decimos que A es **admisible** con respecto a B cuando si los dos tienen el mismo tamaño del Error Tipo 1, es decir, si $\varepsilon(A) = \varepsilon(B)$ entonces el contraste A tiene un tamaño del Error Tipo 2 menor o igual que el de B, es decir, $\delta(A) \leq \delta(B)$. Decimos que el contraste A es admisible cuando lo es con respecto a cualquier otro contraste.

Pero esta definición corresponde a una situación muy restringida: aquella que viene caracterizada por el contraste de una hipótesis nula que es simple frente a una hipótesis alternativa que es también simple. Cuando la hipótesis alternativa es compuesta, que es lo más frecuente, entonces para definir el conjunto de contrastes admisibles es necesario introducir nuevos conceptos.

Definición 3.4: **Función de Potencia (P(θ))**

La función de potencia de un contraste es una función que nos proporciona, para cada valor de θ, la probabilidad de rechazar la hipótesis nula; es decir:

$$P(\theta) = \mathrm{Pr}\,ob_{\Theta}\left\{ y \in S_0 \right\} \qquad (3.1.3)$$

Otros dos conceptos relevantes son los de Tamaño y Potencia de un contraste.

Definición 3.5: **Tamaño y Potencia**

El Tamaño de un contraste es la máxima probabilidad de rechazar un punto de la hipótesis nula siendo cierta; es decir:

$$\text{TAMAÑO} = \varepsilon = \max_{\theta \in \Theta_0} \text{Prob } (y \in S_0 \,/\, H_0 \text{ cierta})$$

La Potencia de un contraste es el valor que toma la Función de Potencia para valores de θ pertenecientes a H_1; es decir:

$$\text{POTENCIA} = P_{\theta \in \Theta_1}(\theta)$$

Definición 3.6: **Contraste uniformemente más potente de tamaño ε. (UMP)**

Decimos que un contraste es UMP de tamaño ε cuando cumple:

(i) Tiene un tamaño igual a ε.

(ii) Su función de potencia toma siempre un valor superior a la de cualquier otro contraste que tenga el mismo tamaño.

Llegados aquí podemos dar una nueva definición de procedimiento de contraste admisible que se adecúa mejor a la nueva situación.

Definición 3.7: Cuando contrastamos hipótesis compuestas decimos que un contraste es admisible cuando es UMP cualquiera que sea el tamaño que se considere.

Pero en muchas situaciones resulta difícil encontrar un contraste que sea UMP bien porque es matemáticamente imposible o bien porque las dificultades de derivación son grandes y no puede llegarse a resultados satisfactorios.

Para resolver algunos de estos problemas se han seguido dos vías; la primera, ha consistido en restringir las categorías de contrastes que se comparan exigiendo que cumplan alguna exigencia adicional. Por ejemplo, se habla de contrastes insesgados, invariantes, etc. La otra vía ha consistido en adoptar un marco asintótico y redefinir el concepto de admisibilidad para adaptarlo a ese nuevo marco. Veamos con un poco más de detalle esta segúnda vía.

El contraste y la función de potencia se definen en términos de estadísticos cuyas propiedades se han derivado asintóticamente. Así, puede hablarse de la función de potencia asintótica que, siguiendo a Spanos (1986), escribiremos como:

$$\Pi(\theta) = \Pr ob\{y \in S_0^{\infty}\} \quad \forall \theta \in \Theta$$

en donde S_0^{∞} es la región crítica determinada asintóticamente.

Más que hablar de un contraste habría que hablar de una secuencia de contrastes, siendo ahora el concepto relevante el de consistencia.

<u>Definición 3.8</u>: Se dice que una secuencia de contrastes con función de potencia asintótica, $\prod(\theta)$, es **consistente** de tamaño ε si:

(i) $\max\limits_{\theta \in \Theta_0} \prod(\theta) = \varepsilon$

(ii) $\prod(\theta) = 1 \quad \theta \in \Theta_1$

Entonces en este nuevo marco asintótico diremos que una secuencia de contrastes es admisible si es consistente sea cual sea el tamaño adoptado.

Establecidas estas definiciones pasamos a estudiar cómo se llega al conjunto de procedimientos admisibles. Vamos a comenzar prestando atención al principio de la Razón de Verosimilitud considerando, posteriormente, otros enfoques que han sido utilizados en Econometría para derivar contrastes admisibles.

La función de verosimilitud de las T observaciones la denotaremos L(θ) y, suponiendo que estas observaciones son independientes, la escribiremos como:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{T} f(y_i;\theta) \qquad (3.1.4)$$

Los estimadores máximo-verosímiles (MV) que denotaremos por $\tilde{\theta}$, son aquellos que maximizan el valor de la función de verosimilitud, pudiendose escribir:

$$L(\tilde{\theta}) = \sup_{\theta \in \Theta} L(\theta) \qquad (3.1.5)$$

Los estimadores máximo-verosímiles restringidos, que denotaremos por $\tilde{\theta}_R$, son aquellos que maximizan el valor de la función de verosimilitud, pero cumpliendo las restricciones impuestas por la hipótesis nula. Podemos escribir:

$$L(\tilde{\theta}_R) = \sup_{\theta \in \Theta_0} L(\theta) \qquad (3.6)$$

La función de verosimilitud reune toda la información contenida en los datos acerca de los parámetros y, por tanto, es el punto de referencia obligado a la hora de llevar a cabo la partición de S en S_0 y S_1.

Supongamos que C es una expresión que puede tomar cualquier valor en el intervalo (0,1). El marco general que proponemos para llevar a cabo la partición de S en S_0 y S_1 viene dado por:

S_0: incluye todas las muestras que cumplen que:

$$LR^* = \frac{L(\tilde{\theta}_R)}{L(\tilde{\theta})} \leq C$$

S_1: incluye todas las muestras que cumplen que:

$$LR^* > C$$

Cuando se toma la decisión de aceptar o rechazar una hipótesis nula, como ya hemos indicado, se pueden cometer dos tipos de errores: el error tipo 1 y el error tipo 2.

Ya hemos dicho que el error tipo 1 se comete cuando la hipótesis nula es rechazada siendo cierta. Es decir cuando:

$y \in S_0$, siendo H_0 verdadera o, bien, cuando:

$\frac{L(\tilde{\theta}_R)}{L(\tilde{\theta})} \leq C$, siendo H_0 verdadera.

El error de tipo 2 se comete cuando la hipótesis nula se acepta siendo falsa. Es decir, cuando:

$y \in S_1$, siendo H_0 falsa o bien, cuando:

$\frac{L(\tilde{\theta}_R)}{L(\tilde{\theta})} > C$, siendo H_0 falsa.

El tamaño del error tipo 1, se puede escribir ahora como:

$$\varepsilon = \text{Prob} \quad \left[\frac{L(\tilde{\theta}_R)}{L(\tilde{\theta})} \leq C \,/\, H_0 \text{ cierta} \right]$$

y el tamaño del error tipo 2 adopta la forma siguiente:

$$\delta = \text{Prob} \quad \left[\frac{L(\tilde{\theta}_R)}{L(\tilde{\theta})} > C \,/\, H_0 \text{ falsa} \right]$$

A continuación, vamos a demostrar cómo el uso del principio de la Razón de Verosimilitud nos lleva a contrastes admisibles.

Comenzando con el marco más restrictivo de hipótesis nula simple versus alternativa también simple, la respuesta está en el llamado Lema de Neyman-Pearson. El siguiente resultado da cuenta de este Lema aunque siguiendo la presentación que hace del mismo De Groot (1975).

<u>Resultado 3.1:</u> Sea A un procedimiento de contraste tal que la hipótesis H_0 se rechaza si $aL_0(y) \leq bL_1(y)$ y dicha hipótesis se acepta si $aL_0(y) > bL_1(y)$ siendo a y b dos constantes positivas y $L_0(y)$ y $L_1(y)$ los valores de la función de verosimilitud bajo

H_0 y H_1, respectivamente. Entonces, para cualquier otro contraste B se cumple que:

$$a\varepsilon(A) + b\delta(A) \leq a\varepsilon(B) + b\delta(B).$$

<u>Prueba</u>: Supongamos, sin merma de generalidad, que la función de probabilidad f( ) es discreta. Podemos escribir:

$$a\varepsilon(\ ) + b\delta(\ ) = a\sum_{y\in S_0} L_0(y) + b\sum_{y\in S_1} L_1(y) =$$

$$= a\sum_{y\in S_0} L_0(y) + b\left[1 - \sum_{y\in S_0} L_1(y)\right] =$$
$$= b + \sum_{y\in S_0}\left[aL_0(y) - bL_1(y)\right]$$

Esta expresión alcanzará un mínimo cuando el segundo término de la derecha alcance su valor mínimo. Esto se logra cuando en la región crítica se incluyen aquellas muestras para las que se cumple que: a $L_0(y) \leq$ b $L_1(y)$ o, equivalentemente, aquellas muestras para las que se cumple: $aL(\tilde{\theta}_R) \leq bL(\tilde{\theta})$, que es precisamente lo que define el procedimiento A.

A partir de este resultado, el Lema de Neyman-Pearson establece que si un procedimiento de contraste, A, se define en la forma indicada, entonces para cualquier otro procedimiento, B, tal que se cumple que $\varepsilon(B) \leq \varepsilon(A)$ necesariamente se cumple que $\delta(B) \geq \delta(A)$. Es decir, no puede existir otro contraste que tenga los dos tipos de error con tamaños menores que los correspondientes a A.

Este principio de que no puede haber un criterio de contraste que, teniendo el tamaño del error tipo 1 menor, tenga también el tamaño del error tipo 2 menor es seguramente el que explica el amplio uso que se ha hecho del criterio basado en la comparación de la razón de verosimilitud con una constante.

Pero la utilidad del principio de la Razón de Verosimilitud para derivar procedimientos admisibles no se limita a este marco restrictivo de hipótesis nula simple versus hipótesis alternativa simple. Es bien conocido y destacado en la literatura que el procedimiento de contraste tratado en el principio de la Razón de Verosimilitud es consistente en cualquier situación. Por lo tanto, asintóticamente nos proporciona métodos de contraste que son admisibles.

En consecuencia, hemos encontrado un método para definir el conjunto de procedimientos de contraste admisibles. Aunque no es el único y luego comentaremos otros, por el momento nos basta como ilustración.

Pero nos falta todavía cómo resolver la segunda cuestión que es la de elegir uno de los procedimientos entre los admisibles. Gráficamente este conjunto puede representarse tal como aparece en la Figura 3.1.

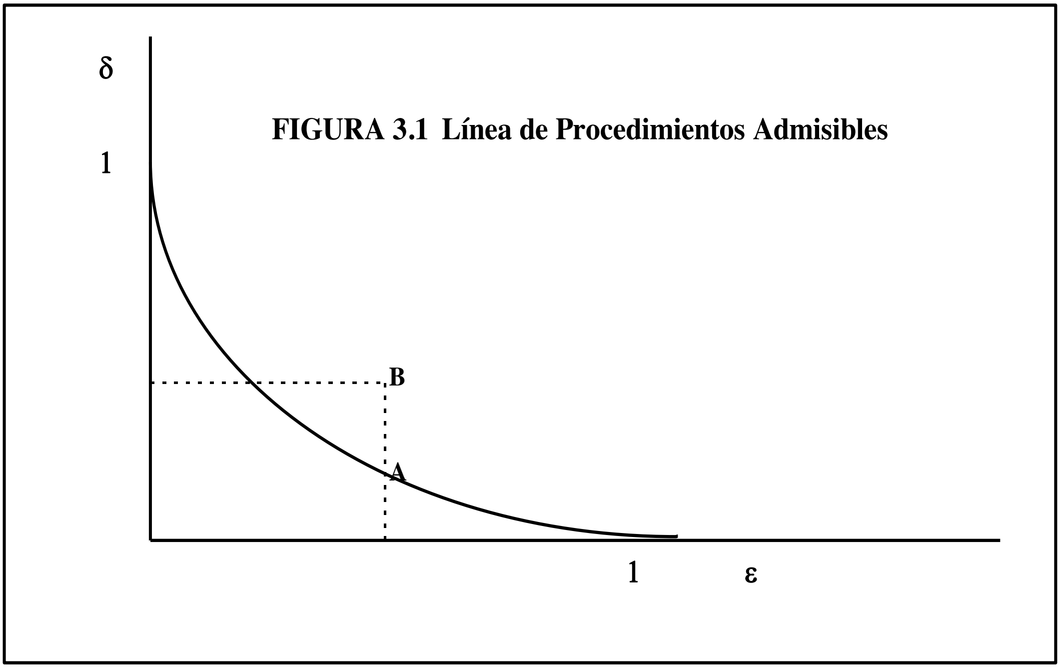

FIGURA 3.1 Línea de Procedimientos Admisibles

Esta línea nos proporciona, dado el tamaño de uno de los errores, el menor tamaño alcanzable por el otro error. Si un contraste garantiza la combinación B de los tamaños de los dos errores, la línea de procedimientos admisibles nos indica la existencia de otro contraste con el mismo tamaño del error tipo 1 pero con un tamaño del error tipo 2 menor, que es el que corresponde al punto A. Por lo tanto, cuando nos situemos en la línea de procedimientos admisibles podemos estar seguros de que no hay otra forma mejor de utilizar la evidencia disponible que la que corresponde a esta línea.

Pero como ya hemos dicho, queda una cuestión por resolver y es la de determinar el punto concreto de la línea en el que uno va a situarse. Una vez que se está seguro de que la evidencia se utiliza de forma óptima, hay que pensar en un par $(\varepsilon_0, \delta_0)$ que concrete la forma en que un contraste admisible va a ser utilizado. La primera cuestión, como ya hemos comentado, es puramente estadístico-matemática; la segunda tiene un carácter más complejo y entra dentro del esquema de preferencias y de decisión.

Referencias

Aznar, A. (2012): "Curso de Econometría" Copy Center Digital. Zaragoza.