PUBLICACIONES DE 4º CURSO

Curso: 4º
Grado: Economía
Asignatura: ECONOMETRÍA III

PARTE 3: MODELOS DE SERIES TEMPORALES

SOLUCIÓN EJERCICIOS TEÓRICOS PARTE 3

Profesores: Antonio Aznar y Mª Isabel Ayuda

Departamento de ANÁLISIS ECONÓMICO

Curso Académico 2015/16

Facultad de
Economía y Empresa
Universidad Zaragoza

PRÁCTICAS PARTE 3

Ejercicio 1

Considerar el siguiente modelo:

$$y_t + x_t = v_t \qquad (1-\rho_1 L)v_t = \varepsilon_{1t}$$
$$x_t - x_{t-1} = \varepsilon_{2t}$$

con:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix} \approx i.i.d.N\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\right]$$

Se pide:

a) Suponiendo que $|\rho_1| < 1$, obtener la esperanza y varianza de v_t, y_t y x_t. Dibujar, aproximadamente, el gráfico y el correlograma de v_t.

b) Siguiendo con el supuesto del apartado a), determinar el orden de integración de ambas variables, demostrar si están o no cointegradas y, si lo están, escribir el vector de cointegración y la forma de mecanismo de corrección del error del modelo.

Solución

a) El modelo de v_t puede escribirse como

$$v_t = \rho_1 v_{t-1} + \varepsilon_{1t}$$

Por el supuesto hecho sobre el parámetro, la perturbación es estacionaria por lo que,

$$Ev_t = Ev_{t-1} = 0$$

$$Var(v_t) = \rho_1^2 Var(v_{t-1}) + \sigma_1^2 = \frac{\sigma_1^2}{1-\rho_1^2}$$

Por ser $Var(v_t) = Var(v_{t-1})$ por la estacionariedad.

Por otra parte, $x_t = \sum_1^t \varepsilon_{2i}$ por lo que suponiendo que el valor inicial es cero.

$$Ex_t = 0 \quad y \quad Var(x_t) = t\sigma_2^2$$

Por último,

$$Ey_t = -Ex_t + Ev_t = 0$$

$$Var(y_t) = Var(x_t) + Var(v_t) = t\sigma_2^2 + \frac{\sigma_1^2}{1-\rho_1^2}$$

por la independencia entre ε_{1t} y ε_{2t}.

El gráfico de v_t girará en torno a cero con una gran reversión a la media.

El correlograma comenzará con un palo alto para j = 1 y luego se irá amortiguando rápidamente hacia cero.

---

b) Las dos variables son integradas de orden 1, I(1), ya que por lo visto en el anterior apartado, $x_t = \sum_1^t \varepsilon_{2i}$, e $y_t = \sum_1^t \varepsilon_{2t} + v_t$ por lo que las dos tienen una tendencia estocástica. Además están cointegradas porque v_t es estacionaria. El vector de cointegración es (1,1).

Respecto a la forma del modelo se tiene que $y_t = -x_t + v_t = -x_{t-1} - \varepsilon_{2t} + v_t$. Restando en ambos lados y_{t-1} se obtiene:

$$\Delta y_t = -\left(y_{t-1} + x_{t-1}\right) + v_t - \varepsilon_{2t} = -v_{t-1} + v_t - \varepsilon_{2t}$$

Esta es la primera relación de la forma con mecanismo de corrección del error. La segunda es la relación que corresponde a x_t.

Ejercicio 5

Un investigador está estudiando la relación entre la variable consumo (y) y la variable renta (x). Tras realizar un análisis univariante de las dos series, llega a la conclusión de que el consumo es un camino aleatorio con deriva mientras que la renta es un camino aleatorio sin deriva.

a) Derivar la media y varianza de las dos variables. Dibujar, aproximadamente, el gráfico de ambas variables y el de sus correlogramas.

b) Indicar las etapas del proceso que seguiría para especificar un modelo econométrico que relacionara ambas variables, comentando en cada etapa los instrumentos econométricos que se utilizarían.

Solución

a) Se puede escribir

$$y_t = \delta + y_{t-1} + u_t = \delta t + \sum_1^t u_i \quad \text{si} \quad y_0 \neq 0$$

$$x_t = x_{t-1} + v_t = \sum_1^t v_i \quad \text{si} \quad x_0 \neq 0$$

Teniendo en cuenta la forma de los procesos, se tiene que,

$$Ey_t = y_0 + \delta t \qquad Var(y_t) = t\sigma_u^2$$

$$Ex_t = x_0 \qquad Var(x_t) = t\sigma_v^2$$

El gráfico para y_t tendrá una pauta creciente continua, debido a la presencia de la tendencia lineal y aparecerán ondas persistentes en torno a la tendencia lineal, debido a al presencia de una tendencia estocástica asociada con la existencia de una raíz unitaria.

El gráfico para X_t solo tendrá ondas persistentes en torno a la media por la existencia de una tendencia estocástica. El correlograma tiene picos que no se amortiguan hacia cero.

b) Las etapas del proceso serían las siguientes:

1) Examinar el gráfico de las dos variables para concluir si tienen o no tendencia determinista.

2) Contrastar si las dos series tienen o no raíz unitaria. Para llevar a cabo este contraste el procedimiento adecuado es el contraste de Dickey-Fuller (DF) que se puede aplicar a tres posibles modelos según sea el resultado alcanzado en la etapa anterior. Teniendo en cuenta lo que se dice en el enunciado, el resultado al que se llegará será que las dos variables tienen raíz unitaria.

3) Contrastar la posible cointegración entre las dos variables, para lo cual se especifica una regresión entre las dos variables incluyendo como regresor la tendencia temporal lineal. A continuación, a los residuos MCO de esta regresión se les aplican los contrastes CRDW y ADF (que por ser para los residuos de la relación de cointegración, es el contraste de Engle-Granger) y teniendo en cuenta la región crítica se concluye sobre si las dos variables están o no cointegradas.

4) Si la conclusión en la etapa anterior es que las dos variables no están cointegradas, entonces se especifica un modelo con retardos distribuidos de las primeras diferencias de las dos variables y el modelo final elegido será el resultado de aplicar el Análisis de Especificación que se detalla en la etapa final del proceso:

$$\begin{aligned}\Delta Y_t = \phi_{10} + \phi_{11}\Delta Y_{t-1} + \ldots + \phi_{1p}\Delta Y_{t-p} + \delta_{11}\Delta X_{t-1} + \ldots\ldots \\ + \delta_{1p}\Delta X_{t-p} + u_{1t}\end{aligned}$$

5) Si la conclusión es que las dos variables están cointegradas, entonces se especifica el modelo con mecanismo de corrección del error y la forma final del mismo se determina aplicando el Análisis de Especificación contenido en la etapa final.

$$\begin{aligned}\Delta Y_t = \phi_{10} + \phi_{11}\Delta Y_{t-1} + \ldots + \phi_{1p}\Delta Y_{t-p} + \delta_{11}\Delta X_{t-1} + \ldots\ldots \\ + \delta_{1p}\Delta X_{t-p} + \alpha_1\left(Y_{t-1} - \delta_0 - \delta_1(t-1) - \beta X_{t-1}\right) + u_{1t}\end{aligned}$$

6) El Análisis de Especificación es un proceso con dos etapas:

- Contrastes para determinar los modelos esféricos.
- Contrastes para elegir el mejor modelo entre los modelos esféricos.

Los contrastes a utilizar para determinar si un modelo es o no esférico son los descritos en el Suplemento docente 3 (Contrastes de Esfericidad), la mayoría de ellos en torno al método de los Multiplicadores de Lagrange.

Los contrastes a utilizar para elegir el mejor modelo son los descritos en el suplemento docente 4 (Criterios de selección) La recomendación que se hizo en el curso es la de utilizar el criterio SBIC en el sentido de que, entre dos modelos M1 y M2 se rechaza el M1 frente al M2 si se cumple que

SBIC (M1)> SBIC(M2)

En donde

$$\text{SBIC(Mj)} = \ln\tilde{\sigma}_j^2 + \frac{k_j \ln T}{T}$$

En donde $\tilde{\sigma}_j^2$ es el estimador MV de la varianza de la perturbación aleatoria.

Ejercicio 7

Suponer la siguiente modelo VAR(1) estimado para dos variables cointegradas, $Y_t \; y \; X_t$:

$$Y_t = 0,3 + 0.7Y_{t-1} + 0,24X_{t-1} + \hat{v}_{1t}$$
$$X_t = -0,6 + 0,6Y_{t-1} + 0,52X_{t-1} + \hat{v}_{2t}$$

- **a)** Reescribir el modelo en forma MCE especificando la relación de cointegración.
- **b)** Obtener las predicciones dinámicas de las dos variables para T+1 y T+2.

Solución

a) Para obtener la forma MCE, en la primera relación del modelo restamos a ambos lados Y_{t-1} obteniéndose

$$\Delta Y_t = 0,3 - 0,3Y_{t-1} + 0,24X_{t-1} + v_{1t} = -0,3\left(Y_{t-1} - 0,1 - 0,8X_{t-1}\right) + \hat{v}_{1t}$$

Esta es la primera relación del modelo MCE. Para obtener la segunda restamos de los dos lados de la segunda relación del VAR X_{t-1} y obtenemos

$$\Delta X_t = -0,6 + 0,6Y_{t-1} - 0,48X_{t-1} + v_{2t} = 0,6\left(Y_{t-1} - 1 - 0,8X_{t-1}\right) + \hat{v}_{2t}$$

y esta es la segunda relación del modelo MCE. Por lo tanto el modelo estimado MCE puede escribirse como:

$$\Delta Y_t = -0,3\left(Y_{t-1} - 1 - 0,8X_{t-1}\right) + \hat{v}_{1t}$$
$$\Delta X_t = 0,6\left(Y_{t-1} - 1 - 0,8X_{t-1}\right) + \hat{v}_{2t}$$

La relación de cointegración es:

$$Y_t = 1 + 0,8X_t$$

Este ejemplo corresponde al caso en que ninguna de las dos variables tiene tendencia lineal y, al menos una de las dos gira en torno a una constante.

b) Para T+1 la predicción dinámica para ambas variables es

$$\hat{Y}_T(1) = 0,3 + 0,7Y_T + 0,24X_T$$
$$\hat{X}_T(1) = -0,6 + 0,6Y_T + 0,52X_T$$

Para el periodo T+2 las predicciones son

$$\hat{Y}_T(2) = 0,3 + 0,7\hat{Y}_T(1) + 0,24\hat{X}_T(1)$$
$$\hat{X}_T(2) = -0,6 + 0,6\hat{Y}_T(1) + 0,52\hat{X}_T(1)$$