Examen ECONOMETRÍA-III
Enero- 2009

1). Un investigador está interesado en la relación entre el consumo (y_t) y la renta (x_t) de un país. A partir de los datos disponibles, llega a la conclusión de que la renta tiene tendencia determinista y estocástica, mientras el consumo solo tiene tendencia estocástica. Se pide:
a). La esperanza matemática y varianza de las dos variables. También se pide la representación gráfica de las mismas. Estudiar la convergencia de

$\sum x_t^2$ y de $\sum x_t y_t$, determinando su orden de probabilidad.

b). Indicar cuales son las condiciones que deben cumplir las dos variables para estar cointegradas. Suponiendo que están cointegradas, escribir el modelo resultante y derivar las relaciones del modelo con mecanismo del error.
c). Indicar el proceso que habría que seguir para contrastar el orden de integración de las dos variables. Derivar las propiedades del estimador MCO de la regresión de y_t sobre x_t.

2). Suponer una muestra aleatoria simple de tamaño T, $x_1, x_2, \ldots x_T$, a partir de una población con distribución N(μ, σ^2).
a). Escribir el logaritmo de la función de verosimilitud, el gradiente y la matriz de información. Derivar el estimador máximo verosímil sin restricciones de μ y obtener su esperanza y varianza.
b). Sea $\bar{x}$ la media muestral. Obtener Var (x_j - $\bar{x}$) y E($\bar{x}$ x_j) siendo x_j un elemento cualquiera de la muestra.
c) Suponer, ahora, que la media se estima con la restricción μ=0. Derivar el sesgo y varianza del estimador restringido. Derivar y escribir las regiones críticas correspondientes a los contrastes de la Razón de Verosimilitud y los Multiplicadores de Lagrange para contrastar la hipótesis nula de que μ es igual a cero.

3). Para el siguiente modelo

$$y_t = \beta x_t + u_t$$

se pide:

a). Suponiendo que la perturbación cumple las hipótesis ideales formuladas en el Capítulo 1, derivar la esperanza y varianza del estimador MCO de β y demostrar que es consistente. Derivar la media y varianza del estimador

$$\hat{\hat{\beta}} = \frac{\sum \frac{y_t}{x_t}}{T}.$$

b). Suponiendo que la perturbación sigue un proceso autorregresivo de primer orden estacionario, derivar la esperanza y varianza del estimador MCO de β. Derivar, también, la media y varianza de la perturbación, dibujar su gráfico y su correlograma.

c). Suponer que β se estima con la restricción β=0. Derivar la esperanza y varianza del estimador restringido. Derivar la región crítica que se obtiene con la razón de verosimilitud para contrastar la hipótesis nula β=0.

4) Considerar los dos siguientes modelos.

M1: $y_t = \beta_1 x_{1t} + u_{1t}$

M2: $y_t = \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + u_{2t}$

a). Para ambos modelos, definir los vectores de residuos MCO y derivar la media y varianza de ambos suponiendo que los datos han sido generados por M2.

b). Para seleccionar entre los dos modelos, se utilizan los criterios $\overline{R}^2$, AIC y AVE. Escribir, para cada uno de ellos, la región crítica y derivar el correspondiente factor de parsimonia.

c). Para el criterio AVE, demostrar las condiciones que debe cumplir la función f(T) para que el tamaño de los dos errores converja a cero.