CAPÍTULO 4

Ejercicio 4.1

Sean:

$$y_{1t} = \sum_{i=1}^{t} u_{1i} + u_{2t}$$

$$y_{2t} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{t} u_{1i} + u_{3t}$$

$$y_{3t} = u_{2t}$$

en donde u_{1t}, u_{2t}, u_{3t}, son ruidos blancos.

1). Demostrar que y_{1t} e y_{2t} son I(1).

2). Demostrar que el vector $y_t' = (y_{1t}, y_{2t}, y_{3t})$ es I(1).

3). Demostrar que y_{3t} es I(0), pero que Δy_{3t} no es I(0).

4). Demostrar que existen dos relaciones de cointegración y especificar los vectores de cointegración respectivos.

Solución

1). Podemos escribir,

$$\Delta y_{1t} = u_{1t} + u_{2t} - u_{2t-1} = \psi_1 u_t + \psi_2 u_{t-1}$$

Por lo tanto,

$$\psi_1 + \psi_2 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & -1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix} \neq 0$$

por lo que , por las definiciones 4.2 y 4.3, Δy_{1t} es I(0) $\Rightarrow$ y_{1t} es I(1).

Lo mismo se haría para y_{2t}.

2). En este caso tenemos,

$$\Delta y_t = \Psi_1 u_t + \Psi_2 u_{t-1}$$

y por ser $\Psi_1 + \Psi_2 \neq 0$, el vector es I(1).

3). Para y_{3t} se tiene,

$$\Delta y_{3t} = \psi_1 u_t + \psi_2 u_{t-1} \quad \text{con } \psi_1 + \psi_2 = 0.$$

4). Los dos vectores de cointegración son:

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Ejercicio 4.2

Sean :

$$y_{1t} = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{i} u_{1j} + \sum_{i=1}^{t} u_{2i} + u_{3t}$$

$$y_{2t} = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{i} u_{1j} - \sum_{i=1}^{t} u_{2i} + u_{3t}$$

$$y_{3t} = \sum_{i=1}^{t} u_{1i} + \sum_{i=1}^{t} u_{2i} + u_{3t}$$

en donde u_{1t}, u_{2t}, u_{3t} son ruidos blancos.

CAPÍTULO 4
Ejercicio 4.2

1). Demostrar que y_{1t} e y_{2t} son I(2) mientras que y_{3t} es I(1).
2). Demostrar que el vector $y_t' = (y_{1t}, y_{2t}, y_{3t})$ es I(2).
3). Demostrar que $y_{1t} - y_{2t}$ es I(1) y que $y_{1t} - y_{2t} - 2y_{3t}$ es I(1).

Solución

1). Para la primera variable se tiene que,

$$\Delta^2 y_{1t} = u_{1t} + u_{2t} - u_{2t-1} + u_{3t} - 2u_{3t-1} + u_{3t-2}$$

por lo que,

$$\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix} \neq 0$$

y,así, se demuestra el resultado. Lo mismo para y_{2t}. Para y_{3t} la segunda diferencia ya no es I(0) por lo que la variable es I(1).

2). Escribiendo

$$\Delta^2 y_t = \Psi_1 u_t + \Psi_2 u_{t-1} + \Psi_3 u_{t-2}$$

se cumple que,

$\Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 \neq 0$ por lo que el vector es I(2).

3). Definir,

$z_t = y_{1t} - y_{2t} = 2\sum u_{2i}$ por lo que, Δz_t es I(0).

Similar argumento cabe hacer para $y_{1t} - y_{2t} - 2y_{3t}$.

Ejercicio 4.3

Suponer que el proceso generador de datos viene dado por:

$$y_t = \rho y_{t-1} + u_t \qquad \rho = 1, y_0 = 0, t = 1,2,3,.....$$

u_t es una secuencia de ruidos blancos. A partir del modelo:

$$y_t = \alpha + \beta t + v_t$$

se definen los estimadores MCO de α y β. Se pide:

1). Derivar las propiedades asintóticas de los dos estimadores.

2). Derivar la distribución asintótica del estadístico t-ratio para la hipótesis nula

$H_0: \beta = 0$.

3). Comentar las implicaciones de los resultados anteriores.

CAPÍTULO 4
Ejercicio 4.3

Solución

1). Los estimadores MCO pueden escribirse como

$$\hat{\beta} = \frac{\sum t(y_t - \bar{y})}{\sum (t - \bar{t})^2} = \frac{\sum t y_t - \bar{y}\sum t}{\sum t^2 - T\bar{t}^2}$$

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{t}$$

Utilizando el Resultado 2.6 se tiene,

$$T^{-\frac{1}{2}}\bar{y} \xrightarrow{d} \int W(r)dr \quad \text{(Apartado c))}$$

$$T^{-\frac{5}{2}}\sum t y_t \xrightarrow{d} \int rW(r)dr \quad \text{(Apartado g))}$$

$$T^{-3}\sum t^2 \xrightarrow{d} \frac{1}{3} \text{ y } T^{-1}\bar{t} \xrightarrow{d} \frac{1}{2} \quad \text{(Apartado i))}$$

Utilizando estos resultados se llega a

$$\hat{\beta} = \frac{T^{-\frac{1}{2}}\left\{T^{-\frac{5}{2}}\sum t y_t - T^{-\frac{1}{2}}\bar{y}T^{-2}\sum t\right\}}{T^{-3}\sum t^2 - \frac{T}{T}(\frac{\bar{t}}{T})^2} \xrightarrow{d} T^{-\frac{1}{2}}\beta^*$$

$$\hat{\alpha} = T^{\frac{1}{2}}\left\{T^{-\frac{1}{2}}\bar{y} - T^{\frac{1}{2}}\hat{\beta}T^{-1}\bar{t}\right\} \xrightarrow{d} T^{\frac{1}{2}}\alpha^*$$

Por lo tanto, $\hat{\beta}$ es O($T^{-\frac{1}{2}}$) y $\hat{\alpha}$ es 0($T^{\frac{1}{2}}$).

2). El estadístico t-ratio toma la forma siguiente:

$$t = \frac{\hat{\beta}}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}} = \frac{T^{\frac{1}{2}}\hat{\beta}T^{\frac{3}{2}}\left\{T^{-3}\sum (t - \bar{t})^2\right\}^{\frac{1}{2}}}{TT^{-\frac{1}{2}}\hat{\sigma}} \xrightarrow{d} T^{\frac{1}{2}}t^*$$

teniendo en cuenta los resultados del apartado anterior y, para el estimador de la varianza, seguir la misma secuencia utilizada en el Apartado 2 del Ejercicio 2.2.

3). La principal conclusión que se deriva de los resultados anteriores es que el valor del estadístico t-ratio tendera a hacerse muy grande bajo la hipótesis nula de que $\beta = 0$ por lo que esta hipótesis nunca va a aceptarse.

CAPÍTULO 4
Ejercicio 4.4

Suponer el siguiente modelo:

$$y_t = x_t'\beta + u_t$$

$$\text{con} \quad x_t' = (1, t) \quad \text{y} \quad \beta = \begin{pmatrix} \alpha \\ \delta \end{pmatrix}$$

Definidos los estimadores MCO de α y δ, se pide:

1). Estudiar el comportamiento asintótico de dichos estimadores.

2). Adoptando la normalización adecuada derivar la distribución asintótica de los dos estimadores. Obtener la varianza asintótica de $\hat{\delta}$.

3). Derivar la distribución asintótica del t-ratio definido para contrastar la hipótesis nula $H_0 : \delta = \delta_0$.

Solución

1). El vector de estimadores MCO es:

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\delta} \end{pmatrix} = \beta + \begin{pmatrix} T & \sum t \\ \sum t & \sum t^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum u_t \\ \sum t u_t \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta el Apartado i) del Resultado 2.6, definimos la matriz

$$\Psi_T = \begin{pmatrix} T^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & T^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$$

podemos escribir,

$$\hat{\beta} - \beta = \Psi_T^{-1} \left[\Psi_T^{-1} X' X \Psi_T^{-1} \right]^{-1} \begin{pmatrix} T^{-\frac{1}{2}} \sum u_t \\ T^{-\frac{3}{2}} \sum t u_t \end{pmatrix}$$

Esto implica que,

$$(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{d} \Psi_T^{-1} \beta^*$$

Por lo que, $\hat{\alpha}$ es $O(T^{-\frac{1}{2}})$ y $\hat{\delta}$ es $O(T^{-\frac{3}{2}})$.

2). Utilizaremos el siguiente resultado,

$$\begin{pmatrix} T^{-\frac{1}{2}} \sum u_t \\ T^{-\frac{3}{2}} \sum t u_t \end{pmatrix} \xrightarrow{as\,\text{int.}} N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \sigma^2 Q \right)$$

Ejercicio 4.4

donde, $\Psi_T^{-1}(X^{'}X)\Psi_T^{-1} \xrightarrow{d} Q = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

A partir de las reglas habituales de derivación asintótica,

$$\begin{pmatrix} T^{\frac{1}{2}}(\hat{\alpha}-\alpha) \\ T^{\frac{3}{2}}(\hat{\delta}-\delta) \end{pmatrix} \xrightarrow{as\,\text{int.}} N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \sigma^2 Q^{-1}\right)$$

La varianza asintótica de $T^{\frac{3}{2}}(\hat{\delta}-\delta)$ es: $\sigma^2 q_{22} = ?$.

3). La suma de los cuadrados de los residuos es,

$$\sum \hat{u}_t^2 = T(\alpha-\hat{\alpha})^2 + (\delta-\hat{\delta})^2 \sum t^2 + \sum u_t^2 + ...$$

por lo que $\hat{\sigma}$ es O(1). Por lo que:

$$t = \frac{\hat{\delta}-\delta_0}{\left\{\hat{\sigma}^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} (X^{'}X)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{d} N(0,1).$$

Ejercicio 4.5

Considerar el siguiente modelo:

$$\Delta y_{1t} = \varepsilon_{1t}$$
$$\Delta y_{2t} = y_{1t-1} + \varepsilon_{2t}$$

en donde:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix} \approx \text{i.i.d.N}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 \\ 0 & \sigma_{22} \end{pmatrix}\right]$$

Se pide:

1). Obtener la esperanza y varianza de y_{1t} e y_{2t} y derivar el orden de integración de ambas variables.

2). ¿Puede haber cointegración entre y_{1t} e y_{2t} ?.

3). ¿Puede haber cointegración entre y_{1t} e Δy_{2t} ?. Si la respuesta es afirmativa escribir el modelo en forma de mecanismo de correción.

Solución

CAPÍTULO 4

Ejercicio 4.5

1). Suponiendo que $y_{10} = 0$, se tiene que,

$y_{1t} = \sum u_{1i}$, por lo que, y_{1t} es I(1).

Respecto a y_{2t}, podemos escribir:

$$y_{2t} = \sum_{1}^{t} y_{1i} + \sum_{1}^{t} u_{2i}\text{, con,}$$

$$\Delta y_{2t} = y_{1t} + u_{2t}$$

Por lo que y_{2t} es I(2) (Demostrar prestando atención a las definiciones 4.2 y 4.3).

Respecto a los momentos, se tiene que,

$$Ey_{2t} = 0$$

$$\mathrm{Var}(y_{2t}) = t\sigma_{22}^2 + \sum_{1}^{t-1} 2(t-i)\sigma_{11}^2$$

2). No porque…..

3). Si porque………

La relación del MCE correspondiente a Δy_{2t} es,

$$\Delta y_{2t} - \Delta y_{2t-1} = ...$$

Ejercicio 4.8

Suponer el siguiente modelo:

$$\Delta y_{1t} = -\frac{1}{2}(y_{1t-1} - y_{2t-1}) + \varepsilon_{1t}$$
$$\Delta y_{2t} = \varepsilon_{2t}$$

ε_{1t} y ε_{2t} son ruidos blancos independientes entre sí. Suponer que el modelo está escrito en forma MCE. Se pide:

1). Encontrar una expresión de y_t en función de $y_{0,}\varepsilon_1,.......\varepsilon_t$.

2). Encontrar la perturbación de la relación de cointegración y derivar su media, varianza y su función de autocorrelación.

3). Escribir el modelo en la forma:

$$y_t = \pi_1 y_{t-1} + ... + \pi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

CAPÍTULO 4
Ejercicio 4.8

Identificar los diferentes elementos del modelo y determinar el rango de la matriz:

$$I - \pi_1 \ldots\ldots\ldots - \pi_p .$$

4). Escribir el modelo en la forma:

$$\Delta y_t = \alpha\beta' y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \Gamma_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t$$

e identificar α, β y las matrices Γ_i.

Solución

1). El modelo puede escribirse como,

$$y_t = Ay_{t-1} + \varepsilon_t \text{ (definir A)}$$

Sustituyendo sucesivamente se llega a

$$y_t = \varepsilon_t + A\varepsilon_{t-1} + \ldots . + A^{t-1}\varepsilon_1 + A^t y_0 .$$

2). Se trata de encontrar : $u_t = y_{1t} - y_{2t}$. Si restamos y_{2t} a ambos lados de la primera relación, se obtiene,

$u_t = \frac{1}{2} u_{t-1} + v_t$ con $v_t = \varepsilon_{1t} - \varepsilon_{2t}$.Los momentos de esta variable se obtienen de forma inmediata:

$$Eu_t = \ldots .$$

$$Var(u_t) = \ldots\ldots$$

La función de autocorrelación es la que corresponde a un proceso autoregresivo de primer orden.

3). Basta hacer, $\pi_1 = A$ y $\pi_j = 0$ para j>1.El rango de la matriz mencionada es 1 por la existencia de una relación de cointegración.

4). La identificación es la siguiente:

$$\alpha = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \beta' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } \Gamma_i = 0$$

CAPÍTULO 4

Ejercicio 4.8

Determinar el rango de $\alpha\beta'$ y comentar el valor que toma. ¿Cuál sería el rango de esta matriz en el caso de que no hubiera cointegración?.