ECONOMETRÍA-III. FEBRERO-2009.

1). Suponer una muestra aleatoria simple de tamaño T: $x_1, x_2, \ldots. x_T$,
obtenida a partir de una población con distribución N(μ, σ^2).
a). Escribir el logaritmo de la función de verosimilitud, el gradiente y la matriz de información. Derivar el estimador máximo verosímil sin restricciones de μ y obtener su esperanza y varianza.
b). Sea $\overline{x}$ la media muestral. Obtener $E\left[x_i\left(x_j - \overline{x}\right)\right]$ y $E\left[\overline{x}\left(x_j - \overline{x}\right)\right]$ siendo x_i y x_j elementos cualesquiera de la muestra.
c) Suponer, ahora, que la media se estima con la restricción μ=0. Derivar el sesgo y varianza del estimador restringido. Derivar y escribir las regiones críticas correspondientes a los contrastes de la Razón de Verosimilitud y los Multiplicadores de Lagrange para contrastar la hipótesis nula de que μ es igual a cero.

2). Suponer el siguiente modelo:
$y_t = \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + u_t \qquad u \sim N(0, \sigma^2 I_T)$
con:
$\left(X'X\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad X'y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad y'y = 10 \qquad \overline{y} = 0.5 \qquad T=10$
a). Calcular los estimadores MCO, $\hat{\beta}$, y escribir su matriz de varianzas y covarianzas. Estimar esta matriz. Derivar las propiedades estadísticas de este estimador.
b). Se estima el modelo con la restricción β_2=0. Calcular los estimadores restringidos, su matriz de varianzas y covarianzas y la estimación de esta matriz. Derivar el sesgo de ambos estimadores.
c). Utilizando los contrastes de la F, el coeficiente de determinación corregido y el AIC contrastar la hipótesis nula formulada en el apartado anterior. En cada caso, especificar la región crítica.

3). En el marco del modelo lineal general con k regresores

$$y = X\beta + u$$

se van a contrastar r restricciones lineales para β. Demostrar que los contrastes de la Razón de Verosimilitud (LR) y Multiplicadores de Lagrange (LM) pueden escribirse como:

$$LR = T\,\mathbf{log}\,\frac{\tilde{\sigma}_R^2}{\tilde{\sigma}^2}$$

$$LM = \frac{T(\tilde{\sigma}_R^2 - \tilde{\sigma}^2)}{\tilde{\sigma}_R^2}$$

en donde $\tilde{\sigma}_R^2$ y $\tilde{\sigma}^2$ son los estimadores de la varianza de u con y sin restricciones, respectivamente. T es el tamaño muestral. Demostrar también que el contraste LR puede escribirse como:

$$LR = T\,\mathbf{log}(1 + \frac{rF}{T-k})$$

en donde F es el contraste de la F.

4). Un investigador está interesado en la relación entre el consumo (y_t) y la renta $\left(x_t\right)$ de un país. A partir de los datos disponibles, llega a la conclusión de que ambas variables solo tienen tendencia estocástica. Para estudiar la relación entre ambas variables, considera el modelo:

$$y_t = \beta x_t + u_t \quad \text{con} \quad u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$$

siendo ε_t un ruido blanco. Se pide:

a). Suponiendo que $\left|\rho\right| < 1$, obtener la media, varianza y los tres primeros valores de la función de autocorrelación de u_t. Dibujar el gráfico de esta serie. Derivar las propiedades del estimador MCO de y_t sobre x_t.

b). Suponiendo que $\left|\rho\right| = 1$, obtener la media, varianza y el gráfico de u_t. Derivar las propiedades del estimador MCO de y_t sobre x_t y las del estadístico t-ratio que se utiliza para contrastar la hipótesis nula de que $\beta = 0$.

c). Comparar los resultados obtenidos en los dos apartados anteriores .