PUBLICACIONES DE 4er CURSO

Grado: Economía

Asignatura: ECONOMETRÍA III

Tema 1: El Proyecto Econométrico. Ejercicios Resueltos

Grupos:

Profesores: Antonio Aznar y M. Teresa Aparicio

Departamento de ANÁLISIS ECONÓMICO

Curso Académico 2014/15

Facultad de
Economía y Empresa
Universidad Zaragoza

Ejercicios Resueltos

Apartado 1.1
Apartado 1.2

Ejercicio 1.2.1

Suponer tres procesos definidos como:

$$y_{1t} = \sum_{i=1}^{t} u_{1i} + u_{3t}$$

$$y_{2t} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{t} u_{2i} + u_{3t}$$

$$y_{3t} = u_{3t}$$

En donde u_{1t}, u_{2t} y u_{3t} son ruidos blancos.

a) Derivar el orden de integración de las tres variables.
b) Determinar si hay alguna relación de cointegración.
c) Suponer que la primera variable se genera como $y_{1t} = \sum_{i=1}^{t} u_{2i} + u_{3t}$. Repetir lo mismo que en a) y en caso de que haya cointegración escribir el modelo con mecanismo de corrección del error.

SOLUCIÓN

a). y_{3t} es I(0) por ser un ruido blanco. Respecto a las otras dos variables, serán I(1) si la primera diferencia es I(0).

$$\Delta y_{1t} = u_{1t} + u_{3t} - u_{3t-1} = \eta_1 u_t^* + \eta_2 u_{t-1}^*$$

En donde $u_t' = \begin{bmatrix} u_{1t} & u_{2t} & u_{3t} \end{bmatrix}$, $\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\eta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

La primera diferencia es I(0) porque $\eta_1 + \eta_2 \neq 0$. Por lo tanto, y_{1t} es I(1). Para y_{2t} se tiene que

$$\Delta y_{2t} = \frac{1}{2}u_{2t} + u_{3t} - u_{3t-1} = \eta_1^* u_t^* + \eta_2^* u_{t-1}^*$$

Por lo que también será I(1).

b). Por lo tanto, las dos primeras variables tienen el mismo orden de integración, por lo que cumplen la primera condición para que exista cointegración entre las mismas. Pero la segunda condición no se cumple porque no se puede encontrar una relación lineal entre las dos variables con una perturbación aleatoria que sea I(0). La conclusión es que las dos variables no están cointegradas.

c). Siguiendo el mismo proceso del apartado anterior se demuestra que las dos primeras variables son I(1). Luego también cumplen la primera condición para la cointegración. Además, se puede definir la relación $y_{1t} - 2y_{2t} = v_{1t}$ que es una relación de cointegración porque v_{1t} es I(0) por ser $v_{1t} = -u_{3t}$. Podemos escribir el modelo estructural como:

$$y_{1t} - 2y_{2t} = v_{1t}$$

$$\Delta y_{2t} = v_{2t}$$

Introduciendo la segunda relación en la primera se obtiene

$$y_{1t} = 2y_{2t-1} + 2v_{2t} + v_{1t} = 2y_{2t-1} + w_{1t}$$

Restando a ambos lados y_{1t-1} se obtiene

$$\Delta y_{1t} = -1(y_{1t-1} - 2y_{2t-1}) + w_{1t}$$

Esta es la primera relación del modelo con mecanismo de corrección del error. La segunda coincide con la segunda del modelo estructural.

Ejercicio 1.2.2

Tomando los datos de la función Cobb-douglas en el Apartado 2.3 se pide:

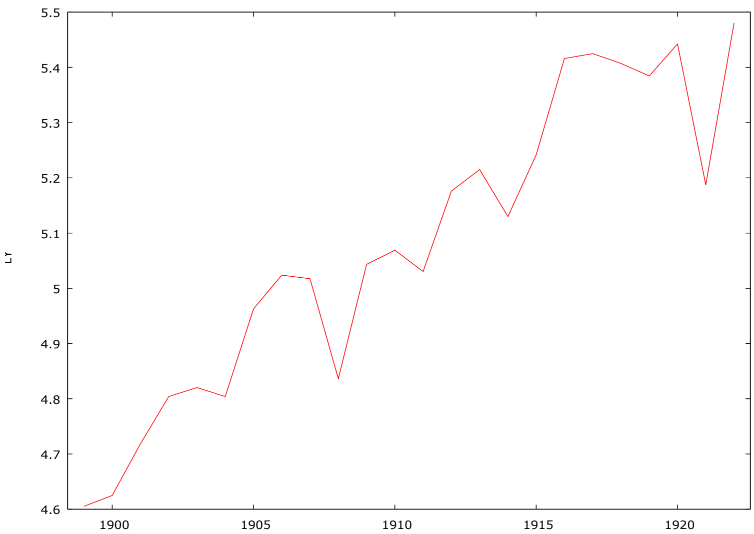
a). Utilizando el contraste DFA determinar el orden de integración de las variables, en logaritmos, producto (LY), capital (LK) y trabajo (LL).

b). Repetir el ejercicio anterior para las variables resultantes de introducir la restricción asociada con los rendimientos constantes. Estas variables se definen como LLY=LY-LK y LLL=LL-K.

Solución.

a).

Gráfico de LY



El gráfico claramente muestra una pauta creciente por lo que hay que utilizar el modelo M3 con constante y tendencia.

Contraste aumentado de Dickey-Fuller para LY
incluyendo 2 retardos de (1-L)LY (el máximo fue 8)
tamaño muestral 21
hipótesis nula de raíz unitaria: a = 1
  con constante y tendencia
  modelo: (1-L)y = b0 + b1*t + (a-1)*y(-1) + ... + e
  Coef. de autocorrelación de primer orden de e: -0.070
  diferencias retardadas: F(4, 12) = 1.156 [0.3774]
  valor estimado de (a - 1): -2.48967
  Estadístico de contraste: tau_ct(1) = -2.87488
  valor p asintótico 0.1707

Teniendo en cuenta los valores del t-ratio y el p-valor, la hipótesis nula no se rechaza.

El gráfico también indica en este caso que el modelo a utilizar es el M3.

```
Contraste aumentado de Dickey-Fuller para LK
incluyendo 8 retardos de (1-L)LK (el máximo fue 8)
tamaño muestral 15
hipótesis nula de raíz unitaria: a = 1


   con constante y tendencia
   modelo: (1-L)y = b0 + b1*t + (a-1)*y(-1) + ... + e
   Coef. de autocorrelación de primer orden de e: -0.190
   diferencias retardadas: F(6, 8) = 7.965 [0.0050]
   valor estimado de (a - 1): -1.7271
   Estadístico de contraste: tau_ct(1) = -3.11383
   valor p asintótico 0.1029
```

Los valores del t-ratio y el p-valor indican aceptar la hipótesis nula de que la variable LK es I(1).

Analizando el gráfico el modelo a utilizar es el M3
Contraste aumentado de Dickey-Fuller para LL
incluyendo 5 retardos de (1-L)LL (el máximo fue 8)
tamaño muestral 18
hipótesis nula de raíz unitaria: a = 1

con constante y tendencia

modelo: (1-L)y = b0 + b1*t + (a-1)*y(-1) + ... + e
Coef. de autocorrelación de primer orden de e: -0.006
diferencias retardadas: F(4, 12) = 3.182 [0.0534]
valor estimado de (a - 1): -3.11477
Estadístico de contraste: tau_ct(1) = -4.07228
valor p asintótico:: O,OO6

En este caso, la hipótesis nula habría que rechazarla. Los resultados podrían sintetizarse en la siguiente tabla.

variable	modelo	retardos	t-ratio	p-valor
LY	M3	2	-2,87	0,17
LK	M3	8	-3,11	0,10
LY	M3	5	-4,07	0,006

b)

El gráfico indica utilizar el modelo con constante y con tendencia.
Contraste aumentado de Dickey-Fuller para LLY
incluyendo un retardo de (1-L)LLY (el máximo fue 8)
tamaño muestral 22
hipótesis nula de raíz unitaria: a = 1

con constante y tendencia

modelo: (1-L)y = b0 + b1*t + (a-1)*y(-1) + ... + e

Coef. de autocorrelación de primer orden de e: -0,107
diferencias retardadas: F(4, 12) = 1,206 [0,3583]
valor estimado de (a - 1): -1,8416
Estadístico de contraste: tau_ct(1) = -2,66839
valor p asintótico 0,2499

La conclusión a la que se llega es que la variable LLY es, al menos, I(1).
En lo que respecta a la serie LLL el gráfico también indica utilizar el modelo con constante y tendencia.

Contraste aumentado de Dickey-Fuller para LLL
incluyendo 4 retardos de (1-L)LLL (el máximo fue 8)
tamaño muestral 19
hipótesis nula de raíz unitaria: a = 1

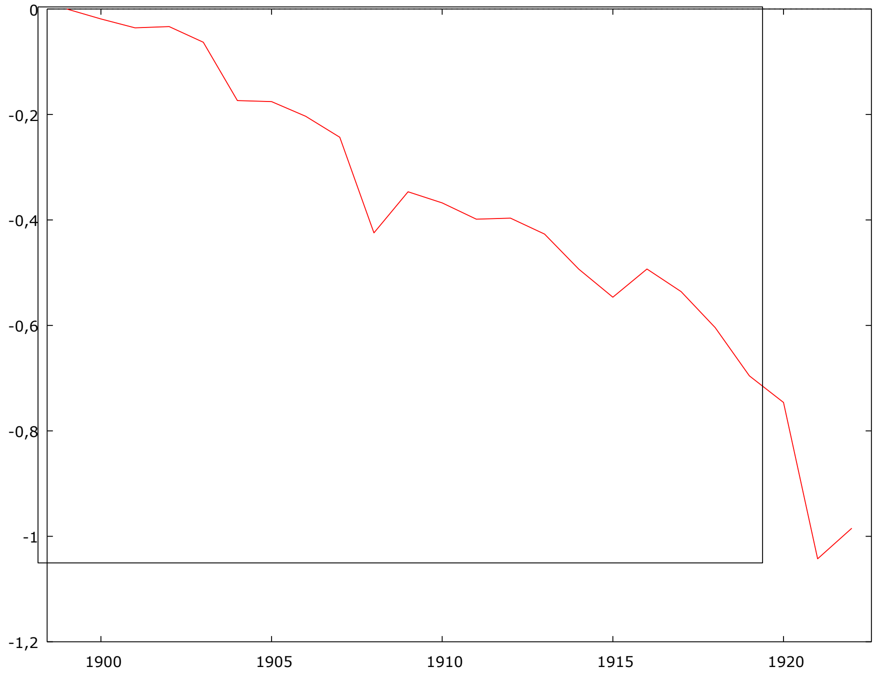
con constante y tendencia
modelo: (1-L)y = b0 + b1*t + (a-1)*y(-1) + ... + e
Coef. de autocorrelación de primer orden de e: 0,032
diferencias retardadas: F(4, 12) = 0,834 [0,5290]
valor estimado de (a - 1): -1,59966
Estadístico de contraste: tau_ct(1) = -1,91002
valor p asintótico 0,6492

La conclusión es que LLL es, al menos, I(1).
Los resultados se pueden sintetizar en la siguiente tabla.

variable	modelo	retardos	t-ratio	p-valor
LLY	M3	1	-2,66	0,249
LLL	M3	4	-1,91	0,64

Gráfico de LLY

Gráfico de LLL



Ejercicio 1.2.3
Considerar el siguiente modelo:

$$\begin{aligned} y_t + x_t &= v_t \\ x_t - x_{t-1} &= \varepsilon_{2t} \end{aligned} \qquad (1-\rho_1 L)v_t = \varepsilon_{1t}$$

con:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix} \approx i.i.d.N\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\right]$$

Se pide:

a). Suponiendo que $|\rho_1| \prec 1$, obtener la esperanza y varianza de v_t, y_t y x_t. Dibujar, aproximadamente, el gráfico y el correlograma de v_t.

b). Siguiendo con el supuesto del apartado a), determinar el orden de integración de ambas variables, demostrar si están o no cointegradas y, si lo están, escribir el vector de cointegración y la forma de mecanismo de corrección del error del modelo.

Solución

a). El modelo de v_t puede escribirse como

$$v_t = \rho_1 v_{t-1} + \varepsilon_{1t}$$

Por el supuesto hecho sobre el parámetro, la perturbación es estacionaria por lo que,

$$Ev_t = Ev_{t-1} = 0$$

$$Var(v_t) = \rho_1^2 Var(v_{t-1}) + \sigma_1^2 = \frac{\sigma_1^2}{1-\rho_1^2}$$

P0r ser $Var(v_t) = Var(v_{t-1})$ por la estacionariedad.

Por otra parte, $x_t = \sum_1^t \varepsilon_{2i}$ por lo que suponiendo que el valor de arranque es cero.

$Ex_t = 0 \quad y \quad Var(x_t) = t\sigma_2^2$. Por último,

$$Ey_t = Ex_t + Ev_t = 0$$

$Var(y_t) = Var(x_t) + Var(v_t) = t\sigma_2^2 + \dfrac{\sigma_1^2}{1-\rho_1^2}$ por la independencia entre ε_{1t} y ε_{2t}. El gráfico de v_t girará en torno a cero con una gran reversión a la media. El correlograma comenzara con un palo alto para j=1 y luego se ira amortiguando rápidamente hacia cero.

b). Las dos variables son integradas de orden 1, I(1), ya que por lo visto en el anterior apartado, $x_t = \sum_1^t \varepsilon_{2i}$, e $y_t = \sum_1^t \varepsilon_{2t} + v_t$ por lo que las dos tienen una tendencia estocástica. Además están cointegradas porque v_t es estacionaria. El vector de cointegración es (1,1). Respecto a la forma del modelo se tiene que $y_t = -x_t + v_t = -x_{t-1} - \varepsilon_{2t} + v_t$. Restando en ambos lados y_{t-1} se obtiene

$$\Delta y_t = -\left(y_{t-1} + x_{t-1}\right) + v_t - \varepsilon_{2t} = -v_{t-1} + v_t - \varepsilon_{2t}$$

Esta es la primera relación de la forma con mecanismo de corrección del error. La segunda es la relación que corresponde a x_t .

Ejercicio 1.2.4
Suponer el modelo:

$$c_t = \beta y_t + u_t$$
$$y_t = c_t + a_t \qquad (1)\text{-}(2)$$

en donde c_t, y_t y a_t son, respectivamente, consumo, renta y gasto autónomo; u_t es un ruido blanco. Se supone que a_t no es aleatorio.
1). Obtener la forma reducida del modelo, las medias, varianzas y covarianza de c_t e y_t y la media y varianza de c_t dada y_t.
2). Estimar β aplicando MCO en (1). Derivar las propiedades de este estimador tanto en muetras pequeñas como asintóticamente y determinar el signo del sesgo en caso de que exista.
3). Estimar β utilizando el estimador de los mínimos cuadrados en dos etapas y derivar las propiedades de este estimador.

Solución
1). La forma reducida es,

$$y_t = \frac{a_t}{1-\beta} + \frac{u_t}{1-\beta}$$
$$c_t = \frac{\beta a_t}{1-\beta} + \frac{u_t}{1-\beta}$$

Las medias y varianzas son:

$$\begin{pmatrix} y_t \\ c_t \end{pmatrix} \approx N\left[\begin{pmatrix} \dfrac{a_t}{1-\beta} \\ \dfrac{\beta a_t}{1-\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\sigma^2}{(1-\beta)^2} & \dfrac{\sigma^2}{(1-\beta)^2} \\ \dfrac{\sigma^2}{(1-\beta)^2} & \dfrac{\sigma^2}{(1-\beta)^2} \end{pmatrix}\right]$$

Para la distribución condicional vamos a considerar el siguiente resultado

Si $$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \approx N\left[\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{12} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}\right]$$

Entonces la distribución del primer subvector dado el segundo viene dada por

$$x_1 / x_2 \approx N\left[\mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x_2 - \mu_2), \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{12}\right]$$

Aplicandolo a nuestro caso se obtiene

$$c_t / y_t \approx N(y_t - a_t, 0)$$

2). En este marco, los momentos muestrales convergen a los momentos poblacionales. Además, los momentos muestrales entre a_t y cualquiera de las variables aleatorias convergen a cero. Por ejemplo,

$$T^{-1}\sum a_t u_t \xrightarrow{p} 0$$

Así, a partir de la primera relación de la forma reducida tenemos

$$T^{-1}\sum y_t u_t \xrightarrow{p} \frac{\sigma_u^2}{1-\beta}$$

Por lo tanto, las variables y_t y u_t no son asintóticamente independientes. De la misma manera podemos escribir

$$T^{-1}\sum y_t^2 \xrightarrow{p} \frac{\sigma_a^2 + \sigma_u^2}{(1-\beta)^2}$$

Utilizando estas expresiones la convergencia del estimador MCO de β es la siguiente

$$\hat{\beta} = \beta + \frac{\sum y_t u_t}{\sum y_t^2} \xrightarrow{p} \beta + \frac{(1-\beta)\sigma_u^2}{\sigma_a^2 + \sigma_u^2}$$

A partir de esta expresión se puede derivar el signo del sesgo y su importancia en cuantía.

3). El estimador en dos etapas toma la forma siguiente

$$\beta^* = \frac{\sum c_t y_t^*}{\sum y_t^{*2}}$$

en donde,

$$y_t^* = \hat{\delta} a_t = \frac{\sum y_t a_t}{\sum a_t^2} a_t$$

Por cumplirse que

$$\hat{\delta} \xrightarrow{p} \frac{1}{1-\beta}$$

La convergencia del estimador bietápico es

$$\beta * = \frac{\hat{\delta}\sum c_t a_t}{\hat{\delta}^2 \sum a_t^2} \xrightarrow{p} \beta$$

Por lo que, en este caso, este estimador es consistente.