PUBLICACIONES DE 4º CURSO

Curso: 4º

Grado: Economía

Asignatura: ECONOMETRÍA III

SOLUCIONES EJERCICIOS PARTE 2

Profesores: Antonio Aznar y Mª Isabel Ayuda

Departamento de ANÁLISIS ECONÓMICO

Curso Académico 2015/16

Facultad de
Economía y Empresa
Universidad Zaragoza

Ejercicio 2.1

Una regresión del promedio de los ingresos salariales semanales (ISM, medidos en dólares) sobre la edad (medida en años), utiliza una muestra aleatoria de trabajadores con estudios universitarios a tiempo completo entre 25 y 65 años de edad, y obtiene lo siguiente:

$$\widehat{ISM} = 969{,}7 + 9{,}6\ Edad, \quad R^2 = 0.023, \quad ESR = 624{,}1$$

1. Explique qué significan los valores de los coeficientes estimados.
2. El error estándar de la regresión (ESR) es 624,1, ¿Cuáles son las unidades de medida?
3. ¿Cuáles son las unidades de medida del R^2?
4. ¿Cuáles son los ingresos salariales previstos por la regresión por un trabajador de 25 años de edad? ¿Y para uno de 45 años de edad?
5. ¿Será fiable la regresión en sus predicciones para un trabajador de 99 años de edad? ¿Por qué o por qué no?
6. Teniendo en cuenta lo que sabe sobre la distribución de los ingresos, ¿crees que es posible que la distribución de los errores de la regresión sea normal? (Pista: piensa si la distribución es simétrica o asimétrica, ¿cuál es el menor valor de los ingresos? ¿es compatible con la normal?).
7. El promedia de edad de la muestra es de 41,6 años, ¿Cuál es el valor medio muestral de ISM?

Solución Ejercicio 2.1 (Ejercicio 4.3 Stock-Watson)

1. El coeficiente 9,6 indica el efecto marginal de la *Edad* en *ISM*; es decir, *ISM* se espera que incrementen 9,6$ por cada año de edad. 696,7 es el término independiente en la línea de regresión y no tiene interpretación en este caso.

2. *ESR* está en las mismas unidades que la variable dependiente (*Y*, o *ISM* en este ejemplo). Por lo que será medido en dólares.

3. R^2 no tiene unidad.

4. (i) $969.7 + 9.6 \times 25 = 1209.7$ $;

   (ii) $969.7 + 9.6 \times 45 = 1{,}401.7$ $

5. No. El trabajador más Viejo de la muestra tiene 65 años. 99 años está fuera del rango de nuestra muestra.

6. No. La distribución de los ingresos es positivamente asimétrica y tiene una kurtosis mayor que la normal.

7. $\hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{X}$, por lo tanto $\overline{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \overline{X}$. Así la media muestral de ISM es 969.7 + 9,6 × 41,6 = 1369,06 $.

Ejercicio 2.2 (Ejercicio 5.2 Stock-Watson)

Supóngase que un investigador, con datos salariales sobre 250 trabajadores y 280 trabajadoras seleccionados aleatoriamente, estima la regresión MCO:

$$\widehat{Salario} = \underset{(0,23)}{12,52} + \underset{(0,36)}{2,12}\ Masculino, \quad R^2 = 0,06, \quad ESR = 4,2$$

Donde *Salario* se mide en dólares por hora y *Masculino* es una variable binaria que toma valor 1 si la persona es hombre y 0 si es mujer. Defina la brecha salarial por género como la diferencia de ingresos salariales medios entre hombres y mujeres.

1. ¿Cuál es la brecha de género estimada?
2. ¿Es la brecha de género significativamente distinta de cero? (Calcule el p-valor para el contraste de la hipótesis nula de que no existe brecha de género?
3. Construya un intervalo de confianza del 95% para la brecha de género?
4. En la muestra ¿cuál es el salario medio de las mujeres? ¿y el de los hombres?
5. Otro investigador utiliza estos mismos datos pero realiza la regresión de la variable *Salario* sobre la variable *Femenino*, una variable que toma valor 1 si la persona es mujer y 0 si es hombre. ¿Cuáles son las estimaciones de esta regresión?

Solución Ejercicio 2.2 (Ejercicio 5.2 Stock-Watson)

1. La brecha de género estimada es 2,12 $/hora a favor de los hombres.
2. Las hipótesis nula y alternative son $H_0 : \beta_1 = 0$ vs. $H_1 : \beta_1 \neq 0.$ El estadístico t es

$$t^{act} = \frac{\hat{\beta}_1 - 0}{SE(\hat{\beta}_1)} = \frac{2,12}{0,36} = 5,89,$$

Y el p-valor es

$$p\text{-valor} = 2\Phi(-|t^{act}|) = 2\Phi(-5{,}89) = 2\times 0{,}0000 = 0{,}000$$

El *p*-valor es menor 0.01, por lo que podemos rechazar la hipótesis nula de que no hay brecha de género al 1% de nivel de significación.

3. El intervalo de confianza, al 95%, para la brecha de género, β_1, es $\{2{,}12 \pm 1{,}96\times 0{,}36\}$, es decir, $1{,}41 \le \beta_1 \le 2{,}83$.
4. El salario medio muestral de las mujeres es $\hat{\beta}_0 = 12{,}52$ \$/hora. El salario medio muestral de los hombres es $\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 = 12{,}52 + 2{,}12 = 14{,}64$ \$/hora.
5. Este modelo puede ser escrito

$$Salario = \beta_0 + \beta_1 Masculino + u_i,$$

o

$$Salario = \gamma_0 + \gamma_1 Femenino + v_i.$$

En la primera regresión, $Masculino$ es igual a 1 para hombres y 0 para mujeres; β_0 es el salario medio poblacional para las mujeres y $\beta_0 + \beta_1$ es el salario medio poblacional para los hombres. En la segunda regresión, $Femenino$ es 1 para mujeres y 0 para hombres; γ_0 es el salario medio poblacional para los hombres y $\gamma_0 + \gamma_1$ es el salario medio poblacional para las mujeres. Tenemos la siguiente relación entre los coeficientes de ambas regresiones:

$$\gamma_0 = \beta_0 + \beta_1,$$
$$\gamma_0 + \gamma_1 = \beta_0.$$

$$\hat{\gamma}_0 = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 = 14{,}64,$$
$$\hat{\gamma}_1 = \hat{\beta}_0 - \hat{\gamma}_0 = -\hat{\beta}_1 = -2{,}12.$$

Debido a la relación entre los coeficientes estimados, para cada observación, los residuos MCO son los mismos en las dos regresiones: $\hat{u}_i = \hat{v}_i$. Por lo que la suma de los residuos al cuadrado, $SR = \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2$, es también la misma en las dos regresiones. Esto implica que $ESR = \left(\frac{SR}{n-2}\right)^{1/2}$ y $R^2 = 1 - \frac{SR}{ST}$ no cambien.

En resumen, tenemos

$$\widehat{Salarios} = 14{,}64 - 2{,}12 Femenino, \quad R^2 = 0{,}06, \quad ESR = 4{,}2.$$

Ejercicio 2.3 (Ejercicio 5.5 Stock-Watson)

En la década de 1980, Tennessee llevó a cabo un experimento en el que los estudiantes de guardería fueron asignados aleatoriamente a clases de distintos tamaños, normal o pequeños, realizándose a final de curso unos exámenes o pruebas estandarizados. (Las clases normales eran aproximadamente de 24 estudiantes, y las clases pequeñas de aproximadamente 15). Supóngase que, en la población, las pruebas estandarizadas arrojan una puntuación media de 925 puntos y una desviación típica de 75 puntos. Sea *ClasePequeña* una variable binaria igual a 1 si el estudiante es asignado a una clase pequeña e igual a 0 en otro caso. Una regresión de *CalificacionExamen* sobre *ClasePequeña* proporciona estos resultados:

$$\widehat{CalificacionExamen} = \underset{(1,6)}{918,0} + \underset{(2,5)}{13,9}\ ClasePequeña, \quad R^2 = 0,01, \quad ESR = 74,6$$

1. ¿Mejoran las clases pequeñas los resultados de la prueba? ¿En cuánto? ¿Es grande el efecto? Explíquelo.
2. ¿Es estadísticamente significativo el efecto estimado del tamaño de las clases sobre las calificaciones obtenidas? Realice un contraste al 5% de nivel de significación.
3. Construye un intervalo de confianza al 99% para el efecto de *ClasePequeña* sobre las calificaciones.

Solución Ejercicio 2.3 (Ejercicio 5.5 Stock-Watson)

1. La ganancia estimada por estar en una clase pequeña es de 13,9 puntos. Incremento moderado.

2. El estadítstico $t^{act} = \frac{13,9}{2,5} = 5,56,$ que tiene un *p*-valor de 0,00. La hipótesis nula es rechazada para un nivel de significación del 5% (y 1%), luego el tamaño de la clase es una variable significativa.

3. Intervalo 13,9 $\pm$ 2,58 $\times$ 2,5 = 13,9 $\pm$ 6,45---(7,46;20,34)

Ejercicio 2.4 (Ejercicio 6.1, 6.2, 6.3 y 6,4 Stock-Watson)

Utilizando datos de 1998 de la Encuesta Actualizada de Población (CPS) que consta de 4000 trabajadores a tiempo completo durante todo el año se han estimado varios modelos. El mayor grado educativo alcanzado por cada trabajador es o un diploma de escuela secundaria o un título de licenciatura. El rango de edades de los trabajadores oscila entre los 25 y los 34 años. La base de datos, asimismo, contiene información sobre la región del país donde reside la persona, el estado civil y el número de hijos. A los efectos de esto ejercicios, sean:

IMH = ingresos medios por hora (en dólares de 1998)

Universidad = variable binaria (1 si tiene estudios universitarios y 0 si titulado escuela secundaria).

Femenino = variable binaria (1 si es mujer, 0 si es hombre).

Edad = edad (en años)

Noroeste = variable binaria (1 si Región = Noroeste, 0 en caso contrario)

Centro-Oeste = variable binaria (1 si Región = Centro-Oeste, 0 en caso contrario)

Sur = variable binaria (1 si Región = Sur, 0 en caso contrario)

Oeste = variable binaria (1 si Región = Oeste, 0 en caso contrario)

Variable dependiente: Ingresos salariales medios por hora			
Regresor	**(1)**	**(2)**	**(3)**
Universidad	5,46	5,48	5,44
Femenino	-2,64	-2,62	-2,62
Edad		0,29	0,29
Noroeste			0,69
Centro-Oeste			0,60
Sur			-0,27
Constante	12,69	4,40	3,75
Estadísticos de resumen			
ESR	6,27	6,22	6,21
R^2	0,176	0,190	0,194
$\overline{R}^2$			

1. Calcule el $\overline{R}^2$ de cada una de las regresiones.
2. Utilizando los datos de la regresión de la columna (1)

A) ¿Ganan más los trabajadores con títulos universitarios en promedio que los trabajadores con tan solo grado de secundaria? ¿Cuánto más?

B) ¿Ganan los hombres más que las mujeres en promedio?¿Cuánto más?

3. Utilizando los resultados de la regresión de la columna (2):

A) ¿Es la edad un determinante importante para los ingresos? Explíquelo.

B) Sally ese una mujer titulada universitaria de 29 años de edad. Betsy es una mujer titulada universitaria de 34 años. Prediga los ingresos de ambas.

4. Utilizando los datos de la regresión de la columna (3):

A) ¿Parece que existen diferencias regionales importantes?

B) ¿Por qué se ha omitido la variable Oeste de la regresión? ¿Qué pasaría si se incluyese?

C) Juanita es una mujer universitaria de 28 años de la región del Sur, Jennifer es una mujer de 28 años titulada universitaria de la región Centro-Oeste. Calcule la diferencia esperada entre los ingresos de Juanita y los de Jennifer.

Solución Ejercicio 2.4 (Ejercicio 6.1, 6.2, 6.3 y 6,4 Stock-Watson)

1. Sabemos que

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-k}(1-R^2).$$

Así, los valores del $\bar{R}^2$ son 0,175, 0,189, y 0,193 para las columnas (1)–(3).

2. **A)** Un universitario gana en promedio 5,46 $/hora más que uno con grado de secundaria.

B)Un hombre gana 2,64 $/hora más que una mujer.

3. **A)** En media, un trabajador gana 0,29 $/hora más por cada año que cumple .

B) La predicción de las ganancias de Sally son:
$4{,}40 + 5{,}48 \times 1 - 2{,}62 \times 1 + 0{,}29 \times 29 = 15{,}67$ dólares por hora.

La predicción de las ganancias de Betty son :
$4{,}40 + 5{,}48 \times 1 - 2{,}62 \times 1 + 0{,}29 \times 34 = 17{,}12$ dólares por hora. La diferencia es 1.45

4. **A)** Trabajadores del noroeste ganan 0,69 $ más por hora que trabajadores en el Oeste, en media, controlando por otras variables. Trabajadores en el Centro-Oeste 0,60 $ más por hora que trabajadores en el Oeste, en media, controlando por otras variables. Trabajadores en el Sur ganan 0,27 $ menos que los del Oeste.

B) La variable *Oeste* se omite para evitar problemas de multicolinealidad perfecta. Si *Oeste* se incluye, la constante se puede escribir como una función lineal perfecta de las otras cuatro variables regionales.

C) La diferencia esperada entre Juanita y Jennifer es $-0.27 - 0.6 = -0.87$ \$ por hora.

Ejercicio 2.5 (Ejercicio 7.1, 7.2, 7.3 y 7.4 Stock-Watson)

Con los datos de la base de datos del ejercicio anterior se han obtenido los siguientes resultados (entre paréntesis desviaciones típicas robustas):

Variable dependiente: Ingresos salariales medios por hora			
Regresor	**(1)**	**(2)**	**(3)**
Universidad	5,46 (0,21)	5,48 (0,21)	5,44 (0,21)
Femenino	-2,64 (0,20)	-2,62 (0,20)	-2,62 (0,20)
Edad		0,29 (0,04)	0,29 (0,04)
Noroeste			0,69 (0,30)
Centro-Oeste			0,60 (0,28)
Sur			-0,27 (0,26)
Constante	12,69 (0,14)	4,40 (1,05)	3,75 (1,06)
Estadísticos de resumen			
Estadístico F efectos regionales = 0			6,10
ESR	6,27	6,22	6,21
R^2	0,176	0,190	0,194
$\bar{R}^2$			

1. Añadir *(5%) y ** (1%) a la tabla anterior para indicar la significación estadística de los coeficientes.
2. Utilizando los resultados de la regresión de la columna (1):
   a) ¿Es estadísticamente significativa la diferencia estimada para esta regresión entre los ingresos salariales de los graduados universitarios y los graduados en enseñanza secundaria al nivel del 5%? Construya un intervalo de confianza al 95% para esta diferencia.

b) ¿es estadísticamente significativa la diferencia estimada por esta regresión entre los ingresos salariales de hombres y mujeres al nivel del 5%? Construya un intervalo de confianza al 95% para esta diferencia.

3. Utilizando los resultados de la regresión de la columna (2):
   a) ¿Es la edad un factor importante de los ingresos salariales?. Utilice un contraste estadístico apropiado y/o un intervalo de confianza para explicar la respuesta.
   b) Sally es una graduada universitaria de 29 años. Betsy es una mujer de 34 años graduada universitaria. Construya un intervalo de confianza al 95% para la diferencia esperada entre los ingresos salariales.
4. Utilizando los resultados de la regresión de la columna (3):
   a) ¿Parece que existan diferencias regionales importantes? Utilice un contraste adecuado para explicar su respuesta.
   b) Juanita es una mujer de 28 años graduada universitaria de la región Sur. Molly es una mujer graduada universitaria de 28 años de la región Oeste. Jennifer es una mujer de 28 años graduada universitaria de la región Centro-Oeste.
      i) Construya un intervalo de confianza al 95% para la diferencia de los ingresos esperados de Juanita y de Molly.
      ii) Explique cómo se construiría un intervalo de confianza al 95% para la diferencia entre los ingresos esperados de Juanita y Jennifer.

Solución Ejercicio 2.5 (Ejercicio 7.1, 7.2, 7.3 y 7.4 Stock-Watson)

1.

Regresor	(1)	(2)	(3)
Universidad (X_1)	5,46** (0,21)	5,48** (0,21)	5,44** (0,21)
Femenino (X_2)	- 2,64** (0,20)	- 2,62** (0,20)	- 2,62** (0,20)
Edad(X_3)		0,29** (0,04)	0,29** (0,04)
Noreste (X_4)			0,69* (0,30)
Centro-Oeste (X_5)			0,60* (0,28)
Sur (X_6)			- 0,27 (0,26)
Constante	12,69** (0,14)	4,40** (1,05)	3,75** (1,06)

*** significativa al 5%**

**** significativa al 1%**

t = 5,46/0,21=26 > $N_{0.01/2}$= 2,58 por lo que es significativo al 1%.

t = 0,60/0,28= 2,14 > N $N_{0.05/2}$= 1,96 por lo que es significativo al 5%.

2. **a)** El estadístico t = 5,46/0,21 = 26,0, es mayor que 1,96 en valores absolutos. Por lo que el coeficiente es significativo al 5%. El intervalo de confianza al 95% es (5,46 $\pm$ 1,96 $\times$ 0,21) = (5,0484; 5,8716).

b) *El estadístico t=* – 2,64/0,20 = -13,2, and 13,2 > 1,96, por lo que el coeficiente es significativo al 5% . El intervalo de confianza al 95% es (-2,64 $\pm$ 1,96 $\times$ 0,20) = (-3.032; -2.248).

3. **a)** Sí, la Edad es un determinante de los ingresos. Utilizando el estadístico t, $0,29/0,04 = 7,25$, con una *p*-valor de 4,2 $\times$ 10^{-13}, implicando que el coeficiente de la edad es significativo al 1% . El intervalo de confianza al 95% es 0,29 $\pm$ 1,96 $\times$ 0,04.

b)Δ*Edad* $\times$ [0,29 $\pm$ 1,96 $\times$ 0,04] = 5 $\times$ [0,29 $\pm$ 1,96 $\times$ 0,04] = 1,45 $\pm$ 1,96 $\times$ 0,20 = 1,06 a 1,84 dólares

4. **a)** El estadístico F para contrastar si las diferencias regionales son cero $H_0 : \beta_4 = \beta_5 = \beta_6 = 0$ es 6,10. El valor crítico al 1% (de la $F_{3,\infty}$ distribución) es 3,78. Como 6,10 > 3,78, las diferencias regionales son significativos al 1%.

b) **i)** La diferencia esperada entre Juanita y Molly es β_6. Por lo tanto el intervalo de confianza al 95% es (-0,27 $\pm$ 1,96 $\times$ 0,26) = (-0.7796; 0,2396).

ii) La diferencia esperada entre Juanita y Jennifer es ($X_{5,\text{Juanita}}$ - $X_{5,\text{Jennifer}}$) $\times$ β_5 + ($X_{6,\text{Juanita}}$ - $X_{6,\text{Jennifer}}$) $\times$ β_6 = -β_5 + β_6. Un intervalo de confianza al 95% podría ser construido para esta restricción. Y otra forma sería cambiar en el modelo Centro-Oeste por Oeste y en esta regresión el coeficiente de la variable Sur mediría la diferencia.

La estimación por intervalo será:

$$(\hat{\beta}_6 - \hat{\beta}_5) \pm N_{\varepsilon/2}\sqrt{\hat{V}(\hat{\beta}_6 - \hat{\beta}_5)}$$

$$\hat{V}(\hat{\beta}_6 - \hat{\beta}_5) = \hat{V}(\hat{\beta}_6) + \hat{V}(\hat{\beta}_6) - 2\,\hat{\mathrm{cov}}(\hat{\beta}_5, \hat{\beta}_6)$$

Ejercicio 2.6 (Ejercicio 9.3 Stock-Watson)

Los economistas laborales descubrieron un resultado empírico desconcertante por medio de un estudio sobre los determinantes de los ingresos salariales de las mujeres. Utilizando mujeres empleadas aleatoriamente seleccionadas, realizaron una regresión de los ingresos salariales sobre el número de hijos de las mujeres y un conjunto de variables de control ¿edad, educación, ocupación, etc.?. Hallaron que las mujeres con más hijos tenían salarios más altos, teniendo en cuenta todos estos factores. Explique como la selección muestral podría ser la causa de este resultado. Este enigma empírico motivó la investigación de James Heckman sobre la selección muestral que le llevó al Premio Nobel de economía 2000].

Solución **Ejercicio 2.6 (Ejercicio 9.3 Stock-Watson)**

El problema es que en la muestra únicamente están las mujeres que trabajan fuera de casa. Entre dos mujeres con las mismas características una con niño y otra sin niños, las dos pueden cobrar parecido, pero para la que no tiene niños el coste de trabajar es que no tiene ocio, pero para la que tiene niños el coste de trabajar es el que no tiene ocio y el coste del cuidado del niño. Si la que no tiene niños está en el margen entre trabajar y no trabajar, la que tiene niño, que tiene un mayor coste de oportunidad, decidirá no trabajar en el mercado de trabajo y cuidará los niños. Por lo tanto, en media, las mujeres con niños que deciden trabajar en el mercado de trabajo son mujeres con altos salarios.

Ejercicio 2.7 (Ejercicio 9.5 Stock-Watson)

La demanda de un bien está dada por $Q = \beta_0 + \beta_1 P + u,$ donde *Q* expresa la cantidad demandada, *P* expresa el precio y *u* expresa otros factores distintos del precio que determinan la cantidad. La oferta de un bien está dada por $Q = \gamma_0 + \gamma_1 P + v,$, donde *v* expresa los factores distintos del precio que influyen en la oferta. Suponga que tanto *u* como *v* tienen media igual a cero y varianzas σ_u^2 y σ_v^2, respectivamente. Y están mutuamente incorreladas.

1. Resuelva las dos ecuaciones simultáneas para mostrar cómo *Q* y *P* dependen de *u* y de *v*.
2. Obtenga las medias de *P* y *Q*.
3. Obtenga la varianza de *Q*, la varianza de *P* y la covarianza entre *Q* y *P*.
4. Se obtiene una muestra aleatoria de observaciones de (Q_i, P_i) y se hace la regresión de *Q* sobre *P*. Supóngase que la muestra es muy grande.
   - I) Utilice las respuestas de 1. Y 2 para obtener los coeficientes de la regresión.
   - II) Un investigador utiliza la pendiente como una estimación de la pendiente de la función de demanda. ¿Es la pendiente estimada demasiado grande o demasiado pequeña?

Solución Ejercicio 2.7 (Ejercicio 9.5 Stock-Watson)

1. $Q = \dfrac{\gamma_1\beta_0 - \gamma_0\beta_1}{\gamma_1 - \beta_1} + \dfrac{\gamma_1 u - \beta_1 v}{\gamma_1 - \beta_1}.$

   y $P = \dfrac{\beta_0 - \gamma_0}{\gamma_1 - \beta_1} + \dfrac{u - v}{\gamma_1 - \beta_1}.$

2. $E(Q) = \dfrac{\gamma_1\beta_0 - \gamma_0\beta_1}{\gamma_1 - \beta_1}, \quad E(P) = \dfrac{\beta_0 - \gamma_0}{\gamma_1 - \beta_1}$

3. $\mathrm{var}(Q) = \left(\dfrac{1}{\gamma_1 - \beta_1}\right)^2 (\gamma_1^2 \sigma_u^2 + \beta_1^2 \sigma_v^2),$

$$\mathrm{var}(P) = \left(\frac{1}{\gamma_1 - \beta_1}\right)^2 (\sigma_u^2 + \sigma_v^2),$$

y

$$\mathrm{cov}(P, Q) = \left(\frac{1}{\gamma_1 - \beta_1}\right)^2 (\gamma_1 \sigma_u^2 + \beta_1 \sigma_V^2)$$

4. I)

$$\hat{\beta}_1 \xrightarrow{p} \frac{\mathrm{cov}(Q, P)}{\mathrm{var}(P)} = \frac{\gamma_1 \sigma_u^2 + \beta_1 \sigma_v^2}{\sigma_u^2 + \sigma_v^2} = \beta_1 + \frac{\gamma_1 \sigma_u^2 - \beta_1 \sigma_u^2}{\sigma_u^2 + \sigma_v^2}, \qquad \hat{\beta}_0 \xrightarrow{p} E(Q) - E(P) \frac{\mathrm{cov}(P, Q)}{\mathrm{var}(P)}$$

II) $\hat{\beta}_1 - \beta_1 \xrightarrow{p} \dfrac{\sigma_u^2 (\gamma_1 - \beta_1)}{\sigma_u^2 + \sigma_v^2} > 0,$ partiendo de que $\gamma_1 > 0$ (pendiente de la oferta positiva) y $\beta_1 < 0$ (pendiente de la demanda negativa). Por ser el sesgo positivo, la pendiente estimada será demasiado grande.

Ejercicio 2.8 (Ejercicio 9.6 Stock-Watson)

Supóngase que n = 100, las observaciones i.i.d. sobre (Y_i, X_i) dan lugar a los siguientes resultados:

$$\hat{Y}_i = \underset{(15,1)}{32{,}1} + \underset{(12,2)}{66{,}8} X_i, \quad ESR = 15{,}1, \quad R^2 = 0{,}81$$

Otro investigador está interesado en la misma regresión, pero comete un error al introducir los datos: introduce dos veces cada observación.

1. Mediante estas 200 observaciones ¿Qué resultados arroja su regresión?

$$\hat{Y}_i = \underset{(\_\_)}{\_\_\_} + \underset{(\_\_\_)}{\_\_\_\_} X_i, \quad ESR = \_\_\_\_, \quad R^2 = \_\_\_\_$$

2. ¿Qué requisitos se violan para la validez interna?

Solución Ejercicio 2.8 (Ejercicio 9.6 Stock-Watson)

1. Las estimaciones de los parámetros no cambian. Tampoco el R^2. La suma de los residuos al cuadrado en la regresión de las 100 observaciones es $SR_{100} = (100 - 2) \times 15{,}1^2 = 22344{,}98,$ y la suma residual de la regresión de las 200 observaciones es el doble: $SR_{200} = 2 \times 22344{,}98.$ Por lo tanto la desviación típica en la regresión de 200 observaciones es $ESR_{200} = \sqrt{\frac{1}{200-2} SR_{200}} = 15{,}02.$

Las desviaciones típicas de los estimadores de los coeficientes de la regresión son calculadas utilizando la ecuación $\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}1} = \dfrac{1}{n}\dfrac{\frac{1}{200-2}\sum_{i=1}^{200}(X_i - \overline{X})^2\hat{u}_i^2}{\left[\frac{1}{200}\sum_{i=1}^{200}(X_i - \overline{X})^2\right]^2}$ donde $\sum_{i=1}^{200}(X_i - \overline{X})^2\hat{u}_i^2$ y $\sum_{i=1}^{200}(X_i - \overline{X})^2$ es dos veces el valor de la regresión de 100 observaciones. Por lo tanto las desviaciones típicas de la regresión con 200 observaciones, son las desviaciones típicas de la regresión con 100 observaciones multiplicadas por $\sqrt{\dfrac{100-2}{200-2}} = 0,704$. En resumen, los resultados para las 200 observaciones son:

$$\hat{Y} = 32{,}1 + 66{,}8X,\ \ ESR = 15{,}02,\ R^2 = 0{,}81$$
$$(10{,}62)\ (8{,}58)$$

2 . Las observaciones no están *i.i.d. : la mitad de las observaciones son igual a la otra mitad, no son independientes*.

Ejercicio 2.9

En el marco del modelo $y_t = \alpha + \beta x_t + u_t$ en donde *u* cumple las hipótesis ideales y también se cumple que $\frac{1}{T}\sum x_t, \sum \frac{1}{x_t}, \frac{1}{T}\sum \frac{1}{x_t^2}$ convergen a constantes conforme crece el tamaño muestral, se definen los dos estimadores siguientes:

$$\widehat{\beta}_1 = \frac{\sum y_t - T\alpha}{\sum x_t} \qquad \text{y} \qquad \widehat{\beta}_2 = \frac{\sum \frac{y_t}{x_t}}{T}$$

Obtener la media y varianza de ambos estimadores y demostrar que son consistentes suponiendo que el regresor no es estocástico.

Solución ejercicio 2.9

Se tiene que

$$\widehat{\beta}_1 = \frac{\sum y_t - T\alpha}{\sum x_t} = \frac{T\alpha + \beta\sum x_t + \sum u_t - T\alpha}{\sum x_t} = \beta + \frac{\sum u_t}{\sum x_t}$$

Por lo que

$$E\widehat{\beta}_1 = \beta \quad por \quad ser \quad E\sum u_t = 0$$

$$Var(\widehat{\beta}_1) = E(\widehat{\beta}_1 - \beta)^2 = E\left(\frac{\sum u_t}{\sum x_t}\right)^2 = \ldots = \frac{T\sigma^2}{\left(\sum x_t\right)^2}$$

El estimador es consistente porque es insesgado y por lo tanto insesgado asintóticamente y porque la varianza tiende a cero conforme el tamaño muestral crece.

$$LimVar(\widehat{\beta}_1) = Lim\frac{T\sigma^2}{\left(\sum x_t\right)^2} = Lim\frac{\sigma^2}{T\left(\sum x_t/T\right)^2} = 0$$

Con respecto al segundo estimador podemos escribir,

$$\widehat{\beta}_2 = \frac{\sum \frac{y_t}{x_t}}{T} = \frac{\alpha}{T}\sum\frac{1}{x_t} + \beta + \frac{1}{T}\sum\frac{u_t}{x_t}$$

Por lo tanto

$$E(\widehat{\beta}_2) = E\frac{\sum \frac{y_t}{x_t}}{T} = \frac{\alpha}{T}\sum\frac{1}{x_t} + \beta$$ es sesgado

$$Var(\widehat{\beta}_2) = E\left(\frac{1}{T}\sum\frac{u_t}{x_t}\right)^2 = \frac{\sigma^2}{T}\frac{1}{T}\sum\frac{1}{x_t^2}$$

Este estimador también es consistente porque aunque es sesgado el sesgo tiende a cero y la varianza también tiende a cero conforme el tamaño muestral crece.

Ejercicio 2.10

En el marco del modelo $y_t = \beta x_t + u_t$, en donde *u* cumple las hipótesis ideales y suponemos que el regresor no es estocástico, se definen dos estimadores de β : el MCO y el siguiente estimador

$$\widehat{\beta}_1 = \frac{\sum y_t}{\sum x_t}$$

1. Obtener la media y varianza de ambos estimadores e indicar las condiciones que debe cumplir el regresor para que ambos estimadores sean consistentes.
2. Definir los residuos correspondientes a cada estimador y, para la observación t-ésima, derivar la media y varianza del correspondiente residuo. Demostrar que la suma de cuadrados de los residuos MCO es menor que la suma de los cuadrados de los residuos que corresponden a $\widehat{\beta}_1$.

Solución ejercicio 2.10

1. Se tiene que

$$\widehat{\beta}_1 = \frac{\sum y_t}{\sum x_t} = \frac{\beta\sum x_t + \sum u_t}{\sum x_t} = \beta + \frac{\sum u_t}{\sum x_t}$$

Por lo que

$$E\hat{\beta}_1 = \beta \quad por \quad ser \quad E\sum u_t = 0$$

$$Var(\hat{\beta}_1) = E(\hat{\beta}_1 - \beta)^2 = E\left(\frac{\sum u_t}{\sum x_t}\right)^2 = ... = \frac{T\sigma^2}{\left(\sum x_t\right)^2}$$

Un estimador es consistente si tanto el sesgo como la varianza tienden a cero conforme el tamaño muestral tiende a infinito. Para este primer estimador, la primera condición se cumple por ser insesgado mientras que la varianza tenderá a cero según sea el comportamiento asintótico del sumatorio de los valores del regresor. Por ejemplo, basta que este sumatorio dividido por T tienda a una constante. En este caso tendríamos:

$$LimVar(\hat{\beta}_1) = Lim\frac{T\sigma^2}{\left(\sum x_t\right)^2} = Lim\frac{\sigma^2}{T\left(\sum x_t / T\right)^2} = 0$$

Con respecto al estimador MCO se tiene que,

$$\hat{\beta} = \frac{\sum x_t y_t}{\sum x_t^2} = \beta + \frac{\sum x_t u_t}{\sum x_t^2}$$

Por lo tanto

$$E\hat{\beta} = \beta \quad por \quad ser \quad E\sum x_t u_t = \sum x_t E u_t = 0$$

$$Var\left(\hat{\beta}\right) = E\left(\frac{\sum x_t u_t}{\sum x_t^2}\right)^2 = \frac{1}{\left(\sum x_t^2\right)^2} E\left(\sum x_t u_t\right)^2 = \frac{\sigma^2}{\sum x_t^2}$$

Este estimador también es consistente porque es insesgado y por lo tanto insesgado asintóticamente y para que la varianza tienda a cero asintóticamente, el promedio de los cuadrados del regresor tiene que tender a una constante conforme el tamaño muestral crece. Es decir:

$\lim\limits_{T\to\infty}\sum x_t^2 / T \to cte$

2. El residuo del estimador propuesto es

$$\hat{u}_{1t} = y_t - \hat{\beta}_1 x_t = \beta x_t + u_t - \beta x_t - \frac{\sum u_t}{\sum x_t} x_t = u_t - \frac{\sum u_t}{\sum x_t} x_t$$

Por lo tanto,

$E\hat{u}_{1t} = 0$ por lo que es insesgado

$$Var(\hat{u}_{1t}) = E\left(u_t - x_t\frac{\sum u_t}{\sum x_t}\right)^2 = E\left(u_t^2 + x_t^2\frac{(\sum u_t)^2}{(\sum x_t)^2} - 2x_t\frac{u_t(\sum u_t)}{\sum x_t}\right)$$

$$= \left(\sigma^2 + x_t^2\frac{T\sigma^2}{(\sum x_t)^2} - 2x_t\frac{\sigma^2}{\sum x_t}\right)$$

En lo que respecta al residuo MCO podemos escribir,

$$\hat{u}_t = y_t - \hat{\beta}x_t = \beta x_t + u_t - \beta x_t - \frac{\sum x_t u_t}{\sum x_t^2} x_t = u_t - \frac{\sum x_t u_t}{\sum x_t^2} x_t$$

La esperanza es

$E\hat{u}_t = 0$ por lo que es insesgado.

Respecto a la varianza,

$$Var(\hat{u}_t) = E\left(u_t - x_t \frac{\sum x_t u_t}{\sum x_t^2}\right)^2 = E\left(u_t^2 + x_t^2 \frac{(\sum x_t u_t)^2}{(\sum x_t^2)^2} - 2x_t \frac{u_t(\sum x_t u_t)}{\sum x_t^2}\right)$$
$$= \left(\sigma^2 + x_t^2 \frac{\sigma^2}{\sum x_t^2} - 2x_t^2 \frac{\sigma^2}{\sum x_t^2}\right) = \sigma^2\left(1 - \frac{x_t^2}{\sum x_t^2}\right)$$

Respecto al último punto, basta tener en cuenta que

$$\widehat{u}_{1t} = y_t - \widehat{\beta}_1 x_t = y_t - \hat{\beta}x_t + \hat{\beta}x_t - \widehat{\beta}_1 x_t = \hat{u}_t + (\hat{\beta} - \widehat{\beta}_1)x_t$$

La suma de los cuadrados es,

$$\sum \widehat{u}_{1t}^2 = \sum \hat{u}_t^2 + (\hat{\beta} - \widehat{\beta}_1)^2 \sum x_t^2 + 2(\hat{\beta} - \widehat{\beta}_1)\sum x_t \hat{u}_t$$

El resultado se cumple porque el tercer término de la derecha es cero ya que, por la ecuación normal, se cumple que $\sum x_t \hat{u}_t = 0$.

Ejercicio 2.11

Considerar el siguiente modelo:

$$y_t = \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + u_t$$

donde se supone que las variables están medidas en desviaciones respecto a sus medias, que suponemos regresores no estocásticos y la perturbación *u* cumple las hipótesis ideales.

1. Expresar las varianzas de los estimadores MCO de β en función de las varianzas muestrales de x_1 y x_2 $(S_1^2 \; y \; S_2^2)$, respectivamente y del coeficiente de correlación entre ambas variables (r_{12}).
2. Conociendo que σ^2=1, S_1^2=2, T=8, $\hat{\beta}_1$(MCO)=2,se pide determinar la región crítica para contrastar la hipótesis nula $H_0{:}\beta_1 = 0$ frente a la alternativa de que es diferente de cero para aquellos casos en que $r_{12}^2 = 0{,}02$ y $r_{12}^2 = 0{,}99$. Utilizar un tamaño del error tipo 1 igual a 0,05.
3. Obtener el tamaño del error tipo 2 para los dos casos contemplados en el apartado anterior suponiendo β_1=1,8.

Solución ejercicio 2.11

1. Teniendo en cuenta que,

$$S_i^2 = \frac{\sum x_i^2}{T} \quad \text{y que} \quad r_{12} = \frac{\sum x_1 x_2}{T S_1 S_2}$$

podemos escribir,

$$Var(\hat{\beta}) = \sigma^2 (X'X)^{-1} = \sigma^2 \begin{pmatrix} \sum x_{1t}^2 & \sum x_{1t}x_{2t} \\ \sum x_{1t}x_{2t} & \sum x_{2t}^2 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \frac{\sigma^2}{T} \begin{pmatrix} \sum x_{1t}^2 / T & \sum x_{1t}x_{2t} / T \\ \sum x_{1t}x_{2t} / T & \sum x_{2t}^2 / T \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\sigma^2}{T} \begin{pmatrix} S_1^2 & S_1 S_2 r_{12} \\ S_1 S_2 r_{12} & S_2^2 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \frac{\sigma^2}{T} \left[\begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & r_{12} \\ r_{12} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix} \right]^{-1} = \frac{\sigma^2}{T} \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & r_{12} \\ r_{12} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \frac{\sigma^2}{T} \begin{pmatrix} S_1^{-1} & 0 \\ 0 & S_2^{-1} \end{pmatrix} \frac{1}{1-r_{12}^2} \begin{pmatrix} 1 & -r_{12} \\ -r_{12} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1^{-1} & 0 \\ 0 & S_2^{-1} \end{pmatrix} = \frac{\sigma^2}{T} \begin{pmatrix} \frac{1}{S_1^2(1-r_{12}^2)} & \frac{-r_{12}}{S_1 S_2 (1-r_{12}^2)} \\ \frac{-r_{12}}{S_1 S_2 (1-r_{12}^2)} & \frac{1}{S_2^2(1-r_{12}^2)} \end{pmatrix}$$

2. Dada la forma que adopta la hipótesis alternativa, la región crítica viene dada por:

$\left|\hat{\beta}_1\right| > c$ en donde c se determina de forma tal que,

$$\Pr ob\left(\left| \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sigma_{\hat{\beta}_1}} \right| > \frac{c - \beta_1}{\sigma_{\hat{\beta}_1}} / H_0 \right) = 0,05 \quad \Pr ob\left(\left| N(0,1) \right| > \frac{c-0}{\sigma_{\hat{\beta}_1}} \right) = 0,05$$

Por lo que $c = 1,96 * \sigma_{\hat{\beta}_1}$

Si $r_{12}^2 = 0,02$, entonces $\sigma_{\hat{\beta}_1} = \frac{1}{3,96} \Rightarrow c = 0,5 \Rightarrow \left|\hat{\beta}_1\right| > 0,5$ Rechazo

Notar que:

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}^2 = \frac{\sigma^2}{T} \frac{1}{S_1^2 \left(1 - r_{12}^2\right)} = \frac{1}{8 \times 2 \times 0,98} = \frac{1}{15,68}$$

Si $r_{12}^2 = 0,99 \Rightarrow c = 1,96 * \frac{1}{\sqrt{0,16}} = 4,9 \Rightarrow Si \left|\hat{\beta}_1\right| > 4,9$ Rechazo, como $\hat{\beta}_1$= 2 no se rechaza la hipótesis nula.

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}^2 = \frac{\sigma^2}{T} \frac{1}{S_1^2 \left(1 - r_{12}^2\right)} = \frac{1}{8 \times 2 \times 0,01} = \frac{1}{0,16}$$

3. El tamaño del error tipo 2 será

$$\delta = 1 - \Pr ob\left(\left|\hat{\beta}_1\right| > c / \beta = 1.8 \right)$$

Si $r_{12}^2 = 0,02 \Rightarrow \delta = 1 - \Pr ob(N(0,1) > \frac{0,5-1.8}{1/3.96}) - \Pr ob(N(0,1) < \frac{-0,5-1.8}{1/3.96}) \cong 0$

Si $r_{12}^2 = 0,99 \Rightarrow \delta = 1 - \Pr ob(N(0,1) > \frac{4.9-1.8}{2.5}) - \Pr ob(N(0,1) < \frac{-4.9-1.8}{2.5}) \cong 0.89$

Ejercicio 2.12

Considerar los dos modelos siguientes y considerando que son regresores no estocásticos (variables en diferencias):

M1: $y_t = \beta_1 x_{1t} + u_{1t}$

M2: $y_t = \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + u_{2t}$

Para estimar β_1 se definen dos estimadores MCO, uno a partir de M1 y otro a partir de M2, suponiendo que genera los datos M2, se pide:

1. Escribir la forma que toman ambos estimadores y derivar el sesgo y la varianza de ambos. Hallar el cociente de las dos varianzas y comentar de qué depende el resultado.
2. Escribir los estimadores MCO de las varianzas de los dos estimadores de β_1 y derivar los sesgos de los mismos.

Solución ejercicio 2.12

1. El estimador MCO de β_1 a partir de M1 es

$$\hat{\beta}_{1R} = \frac{\sum x_{1t} y_t}{\sum x_{1t}^2}$$

El estimador MCO de β_1 a partir de M2 se obtiene resolviendo las ecuaciones normales:

$$\hat{\beta}_1 \sum x_{1t}^2 + \hat{\beta}_2 \sum x_{1t} x_{2t} = \sum x_{1t} y_t$$
$$\hat{\beta}_1 \sum x_{1t} x_{2t} + \hat{\beta}_2 \sum x_{2t}^2 = \sum x_{2t} y_t$$

Para calcular la esperanza y la varianza de $\hat{\beta}_{1R}$, como los datos son generados por M2, podemos escribir:

$$\hat{\beta}_{1R} = \frac{\sum x_{1t} y_t}{\sum x_{1t}^2} = \frac{\sum x_{1t}\left(\beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + u_t\right)}{\sum x_{1t}^2} = \beta_1 + \beta_2 \frac{\sum x_{1t} x_{2t}}{\sum x_{1t}^2} + \frac{\sum x_{1t} u_t}{\sum x_{1t}^2}$$

Teniendo en cuenta que: $E\left(\sum x_{1t} u_t\right) = 0$, se tiene que

$$E\left(\hat{\beta}_{1R}\right)=\beta_1+\beta_2\frac{\sum x_{1t}x_{2t}}{\sum x_{1t}^2}; \quad Sesgo\left(\hat{\beta}_{1R}\right)=\beta_2\frac{\sum x_{1t}x_{2t}}{\sum x_{1t}^2}$$

$$Var(\hat{\beta}_{1R})=E\left(\frac{\sum x_{1t}u_t}{\sum x_{1t}^2}\right)^2=\frac{\sigma^2}{\sum x_{1t}^2}$$

Respecto a $\hat{\beta}_1$ tomando esperanzas en las dos ecuaciones normales,

$$E\left(\hat{\beta}_1\right)\sum x_{1t}^2+E\left(\hat{\beta}_2\right)\sum x_{1t}x_{2t}=\beta_1\sum x_{1t}^2+\beta_2\sum x_{1t}x_{2t}$$
$$E\left(\hat{\beta}_1\right)\sum x_{1t}x_{2t}+E\left(\hat{\beta}_2\right)\sum x_{2t}^2=\beta_1\sum x_{1t}x_{2t}+\beta_2\sum x_{2t}^2$$

de donde se obtiene que $E\left(\hat{\beta}_1\right)=\beta_1$.

Respecto a la varianza y teniendo en cuenta el resultado del ejercicio anterior:

$$Var(\hat{\beta}_1)=\frac{\sigma^2}{\sum x_{1t}^2\left(1-r_{12}^2\right)}$$

en donde r_{12}^2 es el coeficiente de correlación al cuadrado de los dos regresores. El cociente entre las varianzas de los dos estimadores puede escribirse como:

$$\frac{Var(\hat{\beta}_{1R})}{Var(\hat{\beta}_1)}=1-r_{12}^2<1$$

Como se ve, depende de la relación lineal entre los dos regresores. Cuanto mayor es la relación menor se hace el cociente.

2. Los estimadores MCO de las varianzas son

$$Va\hat{r}\left(\hat{\beta}_{1R}\right)=\frac{\hat{\sigma}_R^2}{\sum x_{1t}^2} \text{ con } \hat{\sigma}_R^2=\frac{\sum \hat{u}_{Rt}^2}{T-1} \text{ y } \hat{u}_{Rt}=y_t-\hat{\beta}_{1R}x_{1t}$$

$$Va\hat{r}(\hat{\beta}_1)=\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum x_{1t}^2(1-r_{12}^2)} \text{ con } \hat{\sigma}^2=\frac{\sum \hat{u}_t^2}{T-2} \text{ y } \hat{u}_t=y_t-\hat{\beta}_1x_{1t}-\hat{\beta}_2x_{2t}$$

Hay que tener en cuenta que

$$\hat{u}_{Rt}=\beta_1x_{1t}+\beta_2x_{2t}+u_t-\beta_1x_{1t}-x_{1t}\frac{\sum x_{1t}x_{2t}}{\sum x_{1t}^2}\beta_2-x_{1t}\frac{\sum x_{1t}u_t}{\sum x_{1t}^2}$$

$$=\beta_2\left(x_{2t}-\hat{x}_{2t}\right)+u_t-u_t^*$$

en donde $\hat{x}_{2t} = x_{1t} \dfrac{\sum x_{1t} x_{2t}}{\sum x_{1t}^2}$ y $u_t^* = x_{1t} \dfrac{\sum x_{1t} u_t}{\sum x_{1t}^2}$

Por lo tanto, podemos escribir

$$\sum \hat{u}_{Rt}^2 = \beta_2^2 \sum \left(x_{2t} - \hat{x}_{2t} \right)^2 + \sum u_t^2 + \sum u_t^{*2} + 2\beta_2 \sum u_t \left(x_{2t} - \hat{x}_{2t} \right)$$
$$-2\beta_2 \sum u_t^* \left(x_{2t} - \hat{x}_{2t} \right) - 2 \sum u_t u_t^*$$

La esperanza del primer sumando en la derecha, es el mismo término por no ser estocástico. Respecto al segundo se tiene que

$$E(\sum u_t^2) = T\sigma^2$$

La esperanza del tercer término es

$$E(\sum u_t^{*2}) = E \sum x_{1t}^2 \frac{(\sum x_{1t} u_t)^2}{(\sum x_{1t}^2)^2} = \sigma^2$$

Las esperanzas de los dos siguientes términos son cero

$$E(2\beta_2 \sum u_t \left(x_{2t} - \hat{x}_{2t} \right)) = 2\beta_2 \sum \left(x_{2t} - \hat{x}_{2t} \right) E u_t = 0$$
$$E(2\beta_2 \sum u_t^* \left(x_{2t} - \hat{x}_{2t} \right)) = 2\beta_2 \sum \left(x_{2t} - \hat{x}_{2t} \right) E u_t^* = 0$$

La esperanza del último término es

$$E(2 \sum u_t u_t^*) = 2 \frac{1}{\sum x_{1t}^2} E \left(\sum x_{1t} u_t \right)^2 = 2\sigma^2$$

Combinando todos estos resultados se llega a

$$E\hat{\sigma}_R^2 = E \frac{\sum \hat{u}_{Rt}^2}{T-1} = \frac{1}{T-1} \beta_2^2 \sum \left(x_{2t} - \hat{x}_{2t} \right)^2 + \sigma^2$$

por lo que

$$EVa\hat{r}\left(\hat{\beta}_{1R} \right) = E \frac{\hat{\sigma}_R^2}{\sum x_{1t}^2} = \frac{\beta_2^2 \sum \left(x_{2t} - x_{2t} \right)^2}{(T-1) \sum x_{1t}^2} + \frac{\sigma^2}{\sum x_{1t}^2}$$

Por lo tanto, el sesgo es igual al primer término de la derecha.

En lo que respecta al estimador obtenido a partir del modelo M2, hay que tener en cuenta que

$$E\hat{\sigma}^2 = E \frac{\sum \hat{u}_t^2}{T-2} = \sigma^2$$

por estar el modelo bien especificado. Por lo tanto,

$$EVa\hat{r}(\hat{\beta}_1) = E\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum x_{1t}^2(1-r_{12}^2)} = \frac{\sigma^2}{\sum x_{1t}^2(1-r_{12}^2)}$$

se trata de un estimador insesgado.

Ejercicio 2.13

Considerar los dos modelos siguientes, suponiendo regresores no estocásticos (variables en desviaciones):

M1: $y_t = \beta_1 x_{1t} + u_{1t}$

M2: $y_t = \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + u_{2t}$

Se dispone de la siguiente información

$$\left(X^{'}X\right) = \begin{pmatrix} \sum x_{1t}^2 & \sum x_{1t}x_{2t} \\ \sum x_{2t}x_{1t} & \sum x_{2t}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad X^{'}y = \begin{pmatrix} \sum x_{1t}y_t \\ \sum x_{2t}y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad y'y = 10 \qquad \text{T} = 10$$

1. Estimar β_1 con MCO, utilizando ambos modelos. Estimar insesgadamente la varianza de los dos estimadores. Obtener las propiedades (media y varianza) del estimador restringido de β_2.
2. Se va a discriminar entre los dos modelos utilizando el estimador máximo verosímil de la varianza de ambos estimadores. Escribir la forma que adoptaría la regla de discriminación si lo escribimos como un contraste F derivando el punto crítico implícito. Aplicar esa regla y determinar el modelo que sería rechazado en este caso. Comparar este punto crítico con el que corresponde al criterio SBIC.

Solución Ejercicio 2.13

1. El estimador MCO de β_1 a partir de M1 es:

$$\hat{\beta}_{1R} = \frac{\sum x_{1t}y_t}{\sum x_{1t}^2} = \frac{2}{2} = 1$$

El estimador MCO de β_1 a partir de M2 es:

$$X'X\,\hat{\beta} = X'y \rightarrow \hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = (X'X)^{-1}X'y$$

$$\begin{aligned} 2\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 &= 2 \\ \hat{\beta}_1 + 2\hat{\beta}_2 &= 1 \end{aligned} \rightarrow \hat{\beta} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se ve como los dos estimadores de β_1 coinciden.

Las varianzas de los estimadores se han obtenido en el ejercicio anterior:

$$Var\left(\hat{\beta}_{1R}\right) = \frac{\sigma^2}{\sum x_{1t}^2} \qquad Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{\sum x_{1t}^2(1-r_{12}^2)}$$

Para estimar insesgadamente la varianza de ambos estimadores, hay que sustituir σ^2 por su estimador MCO definido en el modelo amplio. Es decir, sustituido por

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{u}'\hat{u}}{T-2} = \frac{8}{8} = 1$$

en donde,

$$\hat{u}'\hat{u} = \left(y - X\hat{\beta}\right)'\left(y - X\hat{\beta}\right) = y'y - \hat{\beta}'X'y = 10 - 2 = 8$$

Los estimadores insesgados son

$$Va\hat{r}(\hat{\beta}_1) = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum x_{1t}^2(1-r_{12}^2)} \quad \text{y} \quad Va\hat{r}(\hat{\beta}_{1R}) = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum x_{1t}^2}$$

y las correspondientes estimaciones, 0,66 y 0,5, respectivamente. Teniendo en cuenta que

$$r_{12}^2 = \frac{\left(\sum x_{1t}x_{2t}\right)^2}{\sum x_{1t}^2 \sum x_{2t}^2} = \frac{1}{4} = 0,25$$

Respecto al estimador restringido de β_2 se tiene que

$$E\hat{\beta}_{2R} = 0 \qquad \text{y} \qquad Var(\hat{\beta}_{2R}) = 0$$

2. La hipótesis nula se rechaza si

$$Va\tilde{r}\left(\hat{\beta}_{1R}\right) > Va\tilde{r}\left(\hat{\beta}_1\right)$$

o, equivalentemente, cuando

$$\frac{\tilde{\sigma}_R^2}{\sum x_{1t}^2} > \frac{\tilde{\sigma}^2}{\sum x_{1t}^2(1-r_{12}^2)}$$

en donde ahora

$$\tilde{\sigma}_R^2 = \frac{\sum \hat{u}_{Rt}^2}{T} \quad \text{y} \quad \tilde{\sigma}^2 = \frac{\sum \hat{u}_t^2}{T}$$

La regla de decisión puede escribirse como

$$\frac{\sum \hat{u}_{Rt}^2}{\sum \hat{u}_t^2} > \frac{1}{1 - r_{12}^2}$$

Por lo tanto, el factor de parsimonia es h(T)=$\frac{1}{1 - r_{12}^2}$. Rescribiendo la anterior expresión se obtiene

$$\text{F}=\frac{\sum \hat{u}_{Rt}^2 - \sum \hat{u}_t^2}{\sum \hat{u}_t^2 / (T-2)} > \frac{(T-2) r_{12}^2}{1 - r_{12}^2}$$

El punto crítico implícito viene dado por el término de la derecha de esta desigualdad. Teniendo en cuenta que

$$r_{12}^2 = \frac{(\sum_1^T x_{1t} x_{2t})^2}{\sum x_{1t}^2 \sum x_{2t}^2} = 0,25$$

el valor que toma el punto crítico implícito en este ejemplo es 2,7.

Por otra parte, el estadístico F toma el valor 0 por ser

$$\sum \hat{u}_{Rt}^2 = \sum y_t^2 - \hat{\beta}_{1R} \sum x_{1t} y_t = 10 - 2 = 8$$

Por lo tanto, la hipótesis nula no se rechaza.

El punto crítico implícito correspondiente al criterio SBIC viene dado por

$$\frac{(T-2)\ln T}{T} = \frac{8 \times 2,3}{10} = 1,84$$

Solución Ejercicio 2.15

Primero, hay que tener en cuenta que

$$\sum_1^{10} \left(y_t - \bar{y} \right)^2 = y'y - T\bar{y}^2 = 200 - 10.16 = 40$$

$$k_1 = 1 \qquad k_2 = 2$$

1. El valor de los criterios es

$$\bar{R}_2^2 = 1 - \frac{T-1}{T-k_2}\frac{\hat{u}_2'\hat{u}_2}{\sum\left(y_t - \bar{y}\right)^2} = 0,718$$

$$AIC_2 = \ln \tilde{\sigma}_2^2 + \frac{2\left(k_2+1\right)}{T} = 0,6$$

$$LM_2 = T\frac{\hat{u}_1'\hat{u}_1 - \hat{u}_2'\hat{u}_2}{\hat{u}_1'\hat{u}_1'} = 7,5$$

Respecto a los factores de parsimonia, decimos que rechazamos la hipótesis nula si

$$\bar{R}_1^2 < \bar{R}_2^2 \Rightarrow 1 - \frac{T-1}{T-k_1}\frac{\hat{u}_1'\hat{u}_1}{\sum\left(y_t-\bar{y}\right)^2} < 1 - \frac{T-1}{T-k_2}\frac{\hat{u}_2'\hat{u}_2}{\sum\left(y_t-\bar{y}\right)^2} \Rightarrow$$
$$\frac{\hat{u}_1'\hat{u}_1}{T-k_1} > \frac{\hat{u}_2'\hat{u}_2}{T-k_2} \Rightarrow \frac{\hat{u}_1'\hat{u}_1}{\hat{u}_2'\hat{u}_2} > 1 + \frac{k_2-k_1}{T-k_2} = h(\bar{R}^2)$$

De la misma manera se pueden obtener los factores de parsimonia para los otros dos criterios. Sustituyendo, se obtiene

$$h(\bar{R}^2) = 1 + \frac{k_2-k_1}{T-k_2} = 1{,}125$$

$$h(AIC) = 1 + \frac{2(k_2-k_1)}{T} = 1,2$$

$$h(LM) = 1 + \frac{\chi_\varepsilon^2}{T-\chi_\varepsilon^2} = 1,62$$

Respecto al punto crítico implícito, se tiene que

$$\bar{R}_1^2 < \bar{R}_2^2 \Rightarrow \frac{\hat{u}_1'\hat{u}_1}{\hat{u}_2'\hat{u}_2} > 1 + \frac{k_2-k_1}{T-k_2} \Rightarrow \frac{\hat{u}_1'\hat{u}_1 - \hat{u}_2'\hat{u}_2}{\hat{u}_2'\hat{u}_2} > \frac{k_2-k_1}{T-k_2} \Rightarrow$$
$$\frac{(\hat{u}_1'\hat{u}_1 - \hat{u}_2'\hat{u}_2)/(k_2-k_1)}{\hat{u}_2'\hat{u}_2/(T-k_2)} > 1$$

Por lo tanto,

$$F_{\bar{R}^2} = 1$$

Siguiendo similar proceso para los otros dos criterios se obtiene

$$F_{AIC} \simeq 2$$

$$F_{LM} = \frac{T-k_2}{k_2-k_1}\frac{\chi_\varepsilon^2}{T-\chi_\varepsilon^2} = \frac{8.3,84}{6,16} = 4,98$$

2. Por lo que se ha visto al derivar el factor de parsimonia, la hipótesis nula se rechaza si

para $\bar{R}^2$ se cumple que $\frac{\hat{u}_1'\hat{u}_1}{\hat{u}_2'\hat{u}_2} > 1 + \frac{k_2-k_1}{T-k_2} = 1{,}125$

para AIC se cumple que $\frac{\hat{u}_1'\hat{u}_1}{\hat{u}_2'\hat{u}_{\cdot 2}} > 1 + \frac{2(k_2 - k_1)}{T} = 1,2$

para LM se cumple que $\frac{\hat{u}_1'\hat{u}_1}{\hat{u}_2'\hat{u}_{\cdot 2}} > \frac{T}{T - \chi_{\varepsilon}^2} = 1,62$

Por ser

$\frac{\hat{u}_1'\hat{u}_1}{\hat{u}_2'\hat{u}_{\cdot 2}} = \frac{40}{10} = 4$ la hipótesis nula se rechaza con los tres criterios.