PUBLICACIONES DE 4er CURSO

Grado: Economía

Asignatura: ECONOMETRÍA III

Tema 4: Variables no Estacionarias. Ejercicios Resueltos

Grupos:

Profesores: Antonio Aznar y M. Teresa Aparicio

Departamento de ANÁLISIS ECONÓMICO

Curso Académico 2014/15

Facultad de
Economía y Empresa
Universidad Zaragoza

Ejercicios Resueltos

Apartado 4.1
Apartado 4.2
Apartado 4.3

Ejercicio 4.3.1

Un investigador está interesado en la relación entre el consumo (y) y la renta (x) de un país. A partir de los datos disponibles, llega a la conclusión de que la renta tiene tendencia determinista y estocástica, mientras el consumo solo tiene tendencia estocástica en torno a una constante. Se pide:
a). La esperanza matemática y varianza de las dos variables y la convergencia de la suma de los cuadrados de las observaciones de las dos variables, determinando su orden de probabilidad.
b). Indicar qué dos procedimientos utilizaría para contrastar si las dos variables están cointegradas (escriba los estadísticos de los contrastes) y si la conclusión es que no lo están escribir el modelo que habría que utilizar para estudiar la relación entre ambas variables.

Solución

a) Los procesos que generan ambas variables son

$$y_t = \delta + y_{t-1} + u_t = y_0 + \delta t + v_t \quad \text{con } v_t = \sum u_i$$

$$x_t = x_{t-1} + e_t = \delta_0 + w_t \quad \text{con } w_t = \sum_1^t e_i \quad \text{y} \quad \delta_0 = x_0$$

A partir de estas expresiones se tiene que

$$E(y_t) = y_0 + \delta t \quad \text{y} \quad Var(y_t) = Var(v_t) = t\sigma_u^2$$

$$E(x_t) = x_0 \quad \text{y} \quad Var(x_t) = Var(w_t) = t\sigma_e^2$$

Respecto a la convergencia, tener en cuenta que

$$\sum y_t^2 = Ty_0^2 + \delta^2 \sum t^2 + \sum v_t^2 + 2y_0\delta \sum t + 2y_0 \sum v_t + 2\delta \sum t v_t$$

Como puede verse en el Apartado 1.1.2, para lograr convergencia el primer término hay que dividirlo por T, el segundo por T^3, el tercero y cuarto por T^2, el quinto por $T^{\frac{3}{2}}$ y el sexto por $T^{\frac{5}{2}}$. Por lo tanto el termino dominante es el segundo y obtenemos que

$$T^{-3} \sum y_t^2 \Rightarrow \frac{\delta^2}{3}$$

De la misma manera,

$$\sum x_t^2 = T\delta_0^2 + \sum w_t^2 + 2\delta_0 \sum w_t$$

La convergencia requiere dividir por T el primer término, por T^2 el segundo y por $T^{\frac{3}{2}}$ el tercero, por lo que el término dominante es el segundo que es el que determina el orden de probabilidad,

$$T^{-2}\sum x_t^2 \Rightarrow \sigma_e^2 \int_0^1 W(r)^2 dr$$

b) En primer lugar, se obtienen los residuos de la regresión de la variable y sobre una constante y la tendencia lineal. Sea $\hat{y}_t$ el residuo MCO t-ésimo de esta regresión. A continuación, se hace la regresión de $\hat{y}_t$ sobre x_t y se obtienen los residuos de esta regresión: $\hat{u}_t = \hat{y}_t - \hat{\beta} x_t$ .Para contrastar la cointegración, se aplican los contrastes CRDW y ADF a los residuos. El estadístico del contraste CRDW es

$$CRDW = \frac{\sum \left(\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1}\right)^2}{\sum \hat{u}_{t-1}^2}$$

Mientras que el estadístico del contraste ADF es el t-ratio $t = \dfrac{\hat{\phi}}{\hat{\sigma}_{\hat{\phi}}}$

definido a partir de la siguiente regresión

$$\Lambda \hat{u}_t = \phi \hat{u}_{t-1} + e_t$$

En el caso en que la conclusión fuera el rechazo de la existencia de cointegración la regresión que habría que plantear sería

$$\Delta y_t = \lambda + \phi_1 \Delta y_{t-1} + ... + \phi_{p-1}\Delta y_{t-p+1} + \beta_1 \Delta x_{t-1} + ... + \beta_{p-1}\Delta x_{t-p+1} + \varepsilon_t$$

Apartado 4.4

Ejercicio 4.4.1. Suponer dos variables, y_{1t} e y_{2t} que son I(1) y que están cointegradas. La perturbación de la relación de cointegración, suponiendo que la variable dependiente de esta relación es y_{1t}, sigue un proceso autorregresivo de orden 2 y la primera diferencia de y_{2t} es un ruido banco. Se pide,

a). La esperanza y varianza de la perturbación de la relación de cointegración y dibujar aproximadamente su gráfico. Derivar también la esperanza y varianza de y_{2t} y su gráfico.
b). Obtener la forma del modelo con mecanismo de corrección del error y derivar la esperanza y varianza de la perturbación de la relación que, en ese modelo, corresponde a y_{1t} .

SOLUCIÓN
a). La relación de cointegración puede escribirse como,

$$y_{1t} = \beta y_{2t} + u_{1t} \quad \text{con} \quad u_{1t} = \rho_1 u_{1t-1} + \rho_2 u_{1t-2} + \varepsilon_{1t}$$

siendo ε_{1t} un ruido blanco. Por ser la perturbación de la relación de cointegración, u_{1t} es estacionario, por lo que,

$$Eu_{1t} = Eu_{1t-1} = Eu_{1t-2} \quad \text{de donde,} \quad Eu_{1t} = 0$$

Respecto a la varianza,

$$Var(u_{1t}) = \rho_1^2 Var(u_{1t}) + \rho_2^2 Var(u_{1t}) + \sigma_\varepsilon^2 + 2\rho_1\rho_2 Cov(u_{1t-1}, u_{1t-2})$$

por ser ε_{1t} independiente de u_{1t-1} y de u_{1t-2}.
De la última expresión se obtiene,

$$Var(u_{1t}) = \frac{\sigma_\varepsilon^2 + 2\rho_1\rho_2 Cov(u_{1t-1}, u_{1t-2})}{1 - \rho_1^2 - \rho_2^2}$$

El gráfico de u_{1t} será una línea deambulando en torno a cero, con una dispersión constante en torno a ese valor.
El modelo generador de la segunda variable, y_{2t}, puede escribirse como

$$\Delta y_{2t} = y_{2t} - y_{2t-1} = \varepsilon_{2t}$$

sustituyendo sucesivamente y asumiendo que $y_{20} = 0$ se tiene que

$$y_{2t} = \varepsilon_{2t} + \varepsilon_{2t-1} + \ldots\ldots + \varepsilon_{21}$$

Por lo tanto, tenemos

$$Ey_{2t} = 0$$

$$Var\left(y_{2t}\right) = \ldots s.p.a.c.\ldots = t\sigma_\varepsilon^2$$

El gráfico de y_{2t} será una línea deambulando en torno a cero, gran persistencia del signo respecto a cero y dispersión creciente.
b). A partir de la relación de cointegración se tiene que,

$$u_{1t} = y_{1t} - \beta y_{2t}$$

Sustituyendo en el proceso autorregresivo que define a u_{1t} se obtiene

$$y_{1t} - \beta y_{2t} = \rho_1(y_{1t-1} - \beta y_{2t-1}) + \rho_2(y_{1t-2} - \beta y_{2t-2}) + \varepsilon_{1t}$$

Pasando βy_{2t} a la derecha, sustituyendo y_{2t} por su modelo generador de datos y sumando y restando, respectivamente, $\rho_2 y_{1t-1}$ y $\rho_2 \beta y_{2t-1}$ y agrupando términos, se obtiene

$$y_{1t} = (\rho_1 + \rho_2) y_{1t-1} + \beta(1-\rho_1-\rho_2) y_{2t-1} - \rho_2 \Delta y_{1t-1} + \rho_2 \beta \Delta y_{2t-1} + \varepsilon_{1t} + \beta \varepsilon_{2t}$$

Restando de ambos lados y_{1t-1} y sacando factor común $\rho_1 + \rho_2$-1 en los dos primeros términos de la derecha, se obtiene

$$\Delta y_{1t} = (\rho_1 + \rho_2 - 1)(y_{1t-1} - \beta y_{2t-1}) - \rho_2 \Delta y_{1t-1} + \rho_2 \beta \Delta y_{2t-1} + \varepsilon_{1t} + \beta \varepsilon_{2t}$$

Por lo tanto, el modelo con mecanismo de corrección del error viene dado por

$$\Delta y_{1t} = (\rho_1 + \rho_2 - 1) u_{1t-1} - \rho_2 \Delta y_{1t-1} + \rho_2 \beta \Delta y_{2t-1} + v_{1t}$$
$$\Delta y_{2t} = \varepsilon_{2t}$$

La perturbación de la primera relación que corresponde a y_{1t} es

$$v_{1t} = \varepsilon_{1t} + \beta \varepsilon_{2t}$$

Por lo que sus propiedades son

$$Ev_{1t} = 0$$
$$Var(v_{1t}) = \sigma_1^2 + \beta^2 \sigma_2^2$$

Teniendo en cuenta que los dos ruidos blancos son independientes entre si.

Ejercicio 4.4.2

Suponer dos variables, y_{1t} e y_{2t} que son I(1) y que están cointegradas. La perturbación de la relación de cointegración, suponiendo que la variable dependiente de esta relación es y_{1t}, sigue un proceso autorregresivo de orden 1 y la primera diferencia de y_{2t} es, también, un proceso autoregresivo de primer orden. Se pide,

a). Derivar las formas VAR y mecanismo de corrección del error del modelo.

b). Escribir el vector de perturbaciones del modelo VAR y obtener la esperanza y matriz de varianzas y covarianzas de dicho vector.

SOLUCIÓN

a). La relación de cointegración puede escribirse como,

$$y_{1t} = \beta y_{2t} + u_{1t} \quad \text{con} \quad u_{1t} = \rho_1 u_{1t-1} + \varepsilon_{1t}$$

siendo ε_{1t} un ruido blanco.

El modelo generador de la segunda variable, y_{2t}, puede escribirse como

$$\Delta y_{2t} = y_{2t} - y_{2t-1} = u_{2t} \quad \text{con} \quad u_{2t} = \rho_2 u_{2t-1} + \varepsilon_{2t}$$

A partir de la relación de cointegración se tiene que,

$$u_{1t} = y_{1t} - \beta y_{2t}$$

Sustituyendo en el proceso autorregresivo que define a u_{1t} se obtiene

$$y_{1t} - \beta y_{2t} = \rho_1 (y_{1t-1} - \beta y_{2t-1}) + \varepsilon_{1t} \qquad (1)$$

Para y_{2t} se tiene que

$$y_{2t} - y_{2t-1} = \rho_2 (y_{2t-1} - y_{2t-2}) + \varepsilon_{2t}$$

De donde se obtiene que

$$y_{2t} = (\rho_2 + 1) y_{2t-1} - \rho_2 y_{2t-2} + \varepsilon_{2t} \qquad (2)$$

A partir de (1) se pasa βy_{2t} a la derecha, se sustituye y_{2t} por su modelo generador de datos que es (2) y se obtiene

$$y_{1t} = \rho_1 y_{1t-1} + \beta(1 - \rho_1 + \rho_2) y_{2t-1} - \rho_2 \beta y_{2t-2} + \varepsilon_{1t} + \beta \varepsilon_{2t} \qquad (3)$$

El modelo VAR está formado por las relaciones (3) y (2) que podemos reescribir de forma equivalente como

$$y_{1t} = \phi_{111} y_{1t-1} + \phi_{121} y_{2t-1} + \phi_{122} y_{2t-2} + v_{1t} \qquad (4)$$

$$y_{2t} = \phi_{221} y_{2t-1} - \phi_{222} y_{2t-2} + v_{2t} \qquad (5)$$

Si sumamos y restamos a ambos lados de (3) y_{1t-1}, y teniendo en cuenta que $\phi_{122} = -\beta \rho_2$, podemos escribir

$$\Delta y_{1t} = (\rho_1 - 1) y_{1t-1} + \beta(1 - \rho_1) y_{2t-1} - \phi_{122} \Delta y_{2t-1} + v_{1t}$$

Y sacando $\rho_1 - 1$ factor común de los dos primeros términos de la derecha,

$$\Delta y_{1t} = (\rho_1 - 1)(y_{1t-1} - \beta y_{2t-1}) - \phi_{122} \Delta y_{2t-1} + v_{1t}$$

Que es la primera relación del modelo con mecanismo de corrección del error. La segunda relación viene dada por

$$\Delta y_{2t} = \rho_2 \Delta y_{2t-1} + v_{2t}$$

b). El vector de perturbaciones aleatorias del modelo VAR viene dado por

$$v_t = \begin{pmatrix} v_{1t} \\ v_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} + \beta \varepsilon_{2t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$$

La esperanza de este vector es

$$Ev_t = \begin{pmatrix} Ev_{1t} \\ Ev_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Y la matriz de varianzas y covarianzas viene dada por

$$Var(v_t) = Ev_t v_t^{'} = E \begin{bmatrix} v_{1t}^2 & v_{1t} v_{2t} \\ v_{1t} v_{2t} & v_{2t}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 + \beta^2 \sigma_2^2 & \beta \sigma_2^2 \\ \beta \sigma_2^2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 4.4.3

Un investigador está estudiando la relación entre la variable consumo (y) y la variable renta (x). Tras realizar un análisis univariante de las dos series, llega a la conclusión de que el consumo es un camino aleatorio con deriva mientras que la renta es un camino aleatorio sin deriva.

a). Derivar la media y varianza de las dos variables. Dibujar, aproximadamente, el gráfico de ambas variables y el de sus correlogramas. Estudiar la convergencia de las sumas de valores de ambas variables.

b). Indicar las etapas del proceso que seguiría para especificar un modelo econométrico que relacionara ambas variables, comentando en cada etapa los instrumentos econométricos que se utilizarían. Un posible resultado al que se puede llegar es que las dos variables están cointegradas. En este caso, especificar la forma que adoptarían los modelos VAR y de mecanismo de corrección del error, asumiendo las hipótesis que sean necesarias.

Solución

Se puede escribir

$$y_t = \delta + y_{t-1} + u_t = \delta t + \sum_1^t u_i \quad \text{si} \quad y_0 = 0$$

$$x_t = x_{t-1} + v_t = \sum_1^t v_i \quad \text{si} \quad x_0 = 0$$

a) Teniendo en cuenta la forma de los procesos, se tiene que,

$$Ey_t = \delta t \qquad Var(y_t) = t\sigma_u^2$$

$$Ex_t = 0 \qquad Var(x_t) = t\sigma_v^2$$

El gráfico para y_t tendrá una pauta creciente continua, debido a la presencia de la tendencia lineal y aparecerán ondas persistentes en torno a la tendencia lineal, debido a al presencia de una tendencia estocástica asociada con la existencia de una raíz unitaria. El gráfico para x_t solo tendrá ondas persistentes en torno a la media por la existencia de una tendencia estocástica. En lo que respecta a la convergencia,

$$\sum_1^T y_t = T^2 \left[T^{-2} \sum_1^T \delta t + T^{-\frac{1}{2}} T^{-1} \sum_1^T \left(\frac{\sum_1^t u_i}{T^{\frac{1}{2}}} \right) \right] \to T^2 \frac{\delta}{2}$$

porque la expresión dentro del corchete está dominada por el primer término. Por lo tanto, $\sum_{1}^{T} y_t$ es $O(T^2)$.

$$\sum_{1}^{T} x_t = T^{\frac{3}{2}} \left[T^{-1} \sum_{1}^{T} \left(\frac{x_t}{T^{\frac{1}{2}}} \right) \right] \Rightarrow T^{\frac{3}{2}} \int_{0}^{1} W_v(r) dr$$

Por lo tanto, $\sum_{1}^{T} x_t$ es $O_P(T^{\frac{3}{2}})$.

b) Las etapas del proceso serían las siguientes:

1) Examinar el gráfico de las dos variables para concluir si tienen o no tendencia determinista.

2) Contrastar si las dos series tienen o no raíz unitaria. Para llevar a cabo este contraste el procedimiento adecuado es el contraste de Dickey-Fuller (DF) que se puede aplicar a tres posibles modelos según sea el resultado alcanzado en la etapa anterior. Teniendo en cuenta lo que se dice en el enunciado, el resultado al que se llegará será que las dos variables tienen raíz unitaria.

3) Contrastar la posible cointegración entre las dos variables, para lo cual se especifica una regresión entre las dos variables incluyendo como regresor la tendencia temporal lineal. A continuación, a los residuos MCO de esta regresión se les aplican los contrastes CRDW y DF y teniendo en cuenta la región crítica se concluye sobre si las dos variables están o no cointegradas.

4) Si la conclusión en la etapa anterior es que las dos variables no están cointegradas, entonces se especifica un modelo con retardos distribuidos de las primeras diferencias de las dos variables y el modelo final elegido será el resultado de aplicar el Análisis de Especificación que se detalla en la etapa final del proceso.

5) Si la conclusión es que las dos variables están cointegradas, entonces se especifica el modelo con mecanismo de corrección del error y la forma final del mismo se determina aplicando el Análisis de Especificación contenido en la etapa final.

6) El Análisis de Especificación es un proceso con dos etapas:

- Contrastes para determinar los modelos esféricos.

- Contrastes para elegir el mejor modelo entre los modelos esféricos.

Los contrastes a utilizar para determinar si un modelo es o no esférico son los descritos en los Apuntes, la mayoría de ellos en torno al método de los Multiplicadores de Lagrange.

Los contrastes a utilizar para elegir el mejor modelo son los descritos en el Apartado 4.4. La recomendación que se hizo en el curso es la de utilizar el criterio SBIC en el sentido de que, entre dos modelos M1 y M2 se rechaza el M1 frente al M2 si se cumple que

SBIC (M1)> SBIC(M2)

En donde

$$\text{SBIC(Mj)}=\ln\tilde{\sigma}_j^2+\frac{j\ln T}{T}$$

En donde $\tilde{\sigma}_j^2$ es el estimador MV de la varianza de la perturbación aleatoria.

Para derivar las formas de los modelos partimos de lo más simple

$$y_t=\delta t+\beta x_t+\varepsilon_t \qquad (1)$$

$$x_t=x_{t-1}+v_t \qquad (2)$$

La primera relación es la relación de cointegración y suponemos que tanto ε_t como v_t son ruido blanco. Para obtener el modelo VAR basta sustituir (2) en (1) llegándose a

$$y_t=\delta t+\beta x_{t-1}+\beta v_t+\varepsilon_t=\delta t+\beta x_{t-1}+w_t \qquad (3)$$

El modelo VAR está formado por (3) y (2). Para obtener el modelo con mecanismo de corrección del error(MCE) restar a ambos lados de (3) y_{t-1} y escribir

$$\Delta y_t=\delta+\delta(t-1)-y_{t-1}+\beta x_{t-1}+w_t=\delta-\varepsilon_{t-1}+w_t \quad (4)$$

El MCE está formado por (4) y (2).

Ejercicio 4.4.4

Suponer que un investigador trata de determinar el modelo más adecuado para estudiar la relación entre el consumo (y) y la renta(x). Se sabe, por estudios anteriores, que este investigador no conoce, que ambas variables tienen una tendencia lineal clara y tendencia estocástica. Se pide:

a). Indicar las cuatro etapas que seguiría el investigador hasta llegar al modelo más adecuado que se propone para estudiar la relación entre las dos variables. Escribir la forma que adoptaría el modelo suponiendo que los resultados que va alcanzando en las diferentes etapas coinciden con los mencionados de estudios anteriores. Si en una etapa hay que utilizar un modelo particular, escribir el modelo; y si hay que llevar a cabo un contraste, escribir el estadístico del contraste, la hipótesis nula y la región crítica.
b) Derivar el orden de probabilidad de la suma de los valores de la variable consumo y la suma de los cuadrados de la variable renta suponiendo que ambas variables tienen las dos tendencias.

Solución

a). Las etapas serían las siguientes:
Primera: Inspección visual del gráfico de cada serie, a partir del cuál se debe concluir si la serie tiene o no tendencia determinista y el modelo a utilizar para contrastar en la etapa siguiente el orden de integración de las variables. Por los resultados de estudios anteriores la conclusión será que las dos series tienen tedencia determinista y que el modelo a utilizar es el M3.
Segunda: Se toma el M3

$$\Delta y_t = \alpha + \beta t + \phi y_{t-1} + u_t$$

Se estima con MCO y se contrasta la autocorrelación; si hay autocorrelación se van añadiendo retardos hasta llegar a un modelo sin autocorrelación. Se calcula el t-ratio definido como

$$t = \frac{\hat{\phi}}{\hat{\sigma}_{\hat{\phi}}}$$

La hipótesis nula que se contrasta es $H_0 : \phi = 0$ y la región crítica es

R.C.: t<Punto crítico del bloque 3

Por los resultados de estudios previos, la conclusión será que las dos variables son I(1).
Tercera. Se contrasta si las dos variables están o no cointegradas. La hipótesis nula es que no están cointegradas y la alternativa que si lo están. Comenzamos con el contraste CRDW que puede escribirse como,

$$\text{CRDW}=\frac{\sum\left(\hat{u}_{t}-\hat{u}_{t-1}\right)^{2}}{\sum\hat{u}_{t-1}^{2}}$$

En donde $\hat{u}_t$ son los residuos MCO de la regresión de la potencial relación de cointegración. La región crítica del contraste es: CRDW>Punto Critico del Cuadro 4.5. Este punto crítico depende del número de variables en la relación de cointegración y del número de observaciones, una vez elegido el nivel de significación. El segundo método que se utiliza para contrastar la hipótesis nula de no cointegración es el contraste DF utilizando el M1 para los residuos MCO. A partir de este modelo se calcula el t-ratio y la región crítica es

T< Punto Crítico del Cuadro 4.5

Este punto crítico depende del número de variables en la relación de cointegración y del número de observaciones.

Cuarta: El camino a seguir depende de si la conclusión en la etapa anterior es favorable o contraria a la hipótesis nula. Si la conclusión es que no hay cointegración entonces el modelo a utilizar es el modelo en primeras diferencias que se escribe así. (Modelo M-19 de los apuntes). Si la conclusión es que las dos variables están cointegradas entonces el modelo a utilizar es el MCE que se escribe así.

b) Los modelos que generan ambas variables son:

$$y_t=\delta+y_{t-1}+u_{1t}\quad con\quad y_0\neq 0$$
$$x_t=\lambda+x_{t-1}+u_{2t}\quad con\quad x_0\neq 0$$

También podemos escribir

$$y_t=y_0+\delta t+\sum u_{1i}$$
$$x_t=x_0+\lambda t+\sum u_{2i}$$

En cuanto a los órdenes de probabilidad

$$\sum y_t=Ty_0+T^2\delta\frac{\sum t}{T^2}+T^{3/2}\frac{\sum\left(\sum u_{1i}\right)}{T^{3/2}}$$

El termino dominante es el segundo, por lo que el orden de probabilidad es T^2 . Para la otra variable se tiene

$$\sum x_t^2 = \sum\left(x_0 + \lambda t + \sum u_{2i}\right)^2 = Tx_0^2 + T^3\lambda^2 \frac{\sum t^2}{T^3} +$$

$$T^2 \frac{\sum\left(\sum u_{2i}\right)^2}{T^2} + 2T^2\lambda x_0 \frac{\sum t}{T^2}.....$$

El termino dominante es el segundo por lo que el orden de probabilidad es T^{-3}.

Ejercicio 4.4.5

Considerar el siguiente modelo:

$$y_t = x_t + u_{1t}$$
$$\mathrm{x_t = x_{t-1} + u_{2t}}$$

en donde $\mathrm{u_1}$ y $\mathrm{u_2}$ son ruidos blancos independientes entre si. Se pide:

1). La esperanza y varianza no condicionada de $\mathrm{y_t}$.

2). Especificar el vector de cointegración y las propiedades de la perturbación de la relación de cointegración. Obtener la forma con mecanismo de corrección de error del modelo.

3). ¿Como seran las propiedades del estimador MCO en la regresión de $\mathrm{y_t}$ sobre $\mathrm{x_t}$?. Justifique la respuesta.

Solución

1). Se puede escribir

$$x_t = \sum_1^t u_{2i} \quad x_0 = 0$$

$$y_t = \sum_1^{t-1} u_{2i} + u_{1t}$$

Por lo tanto, $Ex_t = 0 \quad y \quad Var\left(x_t\right) = t\sigma_2^2$

$$Ey_t = 0 \quad Var\left(y_t\right) = \left(t-1\right)\sigma_2^2 + \sigma_1^2$$

2). Se demuestra fácilmente la primera condición requerida de que las dos variables sean del mismo orden de integración y se ve que, en este caso, ambas son I(1). El vector de cointegración es (1, -1); la perturbación de la relación de cointegración es:

$$w_t = u_{1t} + u_{2t}$$

Los momentos de esta perturbación se obtienen de forma inmediata.
La forma MCE del modelo se obtiene restando a la primera relación y_{t-1} quedando la segunda relación tal como esta.
3). El estimador MCO de la regresión indicada es,

$$\hat{\beta} = \frac{\sum y_t x_t}{\sum x_t^2} = \beta + \frac{\sum x_t w_t}{\sum x_t^2} = \ldots..$$

Las propiedades de este estimador se obtienen derivando los órdenes de probabilidad y sus correspondientes convergencias en probabilidad del numerador y denominador del segundo término de la derecha. Para llevar a cabo esta derivación, hay que utilizar el Apartado 1.2.

Ejercicio 4.4.5
Considerar el siguiente modelo:

$$\begin{aligned} x_t &= \mu + x_{t-1} + u_t \\ y_t &= \lambda x_t + v_t \end{aligned}$$

en donde u_t, v_t son ruidos blancos. Se pide:
1).Determinar el orden de integración de las dos variables y la convergencia de la expresión $\sum y_{t-1} u_t$.
2). Determinar el tipo de tendencia que ambas variables tienen y dibujar, aproximadamente, el gráfico de la variable x_t .
3). Escribir el modelo en forma de Mecanismo de Correccion de Error.

Solución
1). Sustituyendo sucesivamente se obtiene:

$$x_t = \mu t + \sum_1^t u_i = \mu t + \xi_t$$

se trata de un proceso que tiene una parte determinista y una variable que es I(1). Por lo tanto, la variable $x_t - \mu t$ es una variable I(1). En lo que respecta a y_t, se tiene que,

$$y_t = \lambda \mu t + \lambda \xi_t + v_t$$

Por lo que cabe hacer el mismo razonamiento que el realizado para x_t. La convergencia que se pide está resuelta en el Apartado a) del Resultado 2.7.
2). Las dos series tienen tendencia estocástica y determinista y el gráfico se deriva fácilmente de las dos expresiones escritas en el apartado anterior.
3). La forma MCE puede escribirse como:

$$\Delta y_t = \delta_1 + \alpha_1 v_{t-1} + \sum_1^{p-1} \gamma_{11i} \Delta y_{t-i} + \sum^{p-1} \gamma_{12i} \Delta x_{t-i} + v_{1t}$$

$$\Delta x_t = \delta_2 + \alpha_2 v_{t-1} + \sum_1^{p-1} \gamma_{21i} \Delta y_{t-i} + \sum^{p-1} \gamma_{22i} \Delta x_{t-i} + v_{2t}$$

Se trata ahora de identificar el valor que toman los parámetros en el modelo propuesto en el ejercicio.