CAPÍTULO 6
Ejercicio 6.1

En el modelo con k regresores:

$$y = X\beta + u$$

se va a contrastar la hipótesis nula de no autocorrelación frente a la alternativa de un proceso autoregresivo de segundo orden . Para cinco observaciones, el vector de residuos MCO es:

$$\hat{u}' = (5\ \ 0\ \ 1\ \ -3\ \ -3\ )$$

A continuación, se hacen las regresiones de este vector,retardado uno y dos periodos, sobre los k regresores del modelo resultando los siguientes vectores de residuos MCO :

$$\hat{u}_1' = (1\ \ 0\ \ -1\ \ 0\ \ 0\ )$$

$$\hat{u}_2' = (\ 0\ \ 2\ \ 0\ \ -1\ \ -1\ )$$

1). Calcular el valor que toma el estadístico de Durbin-Watson e indicar como se utilizaría para contrastar la hipótesis nula. Comentar la distribución de probabilidad que sigue este estadístico para todo tamaño muestral.

2). En el marco del contraste de los Multiplicadores de Lagrange, escribir el logaritmo de la función de verosimilitud, indicar como se obtendría el gradiente evaluado con los estimadores sin restringir y demostrar la forma que adopta $\tilde{\theta}_R$.

3). Para el contraste de los Multiplicadores de Lagrange formular la región crítica y, utilizando la información comentada anteriormente, concluir aceptando o rechazando la hipótesis nula . Recordar que, para ε=0.05, el punto crítico para una variable χ^2 con dos grados de libertad es 6.

Solución

1). El estadístico D-W puede escribirse como:

$$d = \frac{\sum(\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum \hat{u}_{t-1}^2} = \frac{67}{35} = 1{,}9$$

El estadístico d sigue una distribución, bajo la hipótesis nula, que depende de las observaciones de los regresores. Por lo tanto, los puntos críticos de esa distribución no están disponibles de forma general, aunque si se han encontrado dos distribuciones, d_L y d_U, cuya distribución no depende de los regresores. Son los puntos criticos de estas distribuciones los que se utilizan en los contrastes. Atendiendo a estos puntos críticos concluimos aceptando la hipótesis nula de no autocorrelación.

CAPÍTULO 6
Ejercicio 6.1

2). El proceso autoregresivo de segundo orden que se contempla como alternativa puede escribirse como.

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \varepsilon_t$$

El logaritmo de la función de verosimilitud es

$$l(\theta) = -\frac{T}{2}\log(2\pi) - \frac{T}{2}\log\sigma_\varepsilon^2 - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\sum \varepsilon_t^2$$

en donde $\theta' = (\beta', \rho_1, \rho_2, \sigma_\varepsilon^2)$

Para obtener el gradiente se deriva la primera derivada del logaritmo con respecto a cada uno de los parámetros y, a continuación, se sustituyen los parámetros por sus estimaciones MV sin restringir. Respecto a la estimación restringida se tiene

$$\hat{\theta}_R = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_R \\ \hat{\rho}_{1R} \\ \hat{\rho}_{2R} \\ \hat{\sigma}_{\varepsilon R}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (X'X)^{-1}X'y \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{\hat{u}'\hat{u}}{T} \end{pmatrix}$$

3). El estadístico LM toma la forma siguiente:

$$LM = \frac{1}{\hat{\sigma}_R^2}\hat{u}'\hat{U}_{-2}\left[\hat{U}'_{-2}M\hat{U}_{-2}\right]^{-1}\hat{U}'_{-2}\hat{u}$$

Para calcular este estadístico hay que tener en cuenta que los términos de la matriz que hay entre corchetes son la suma de los productos cruzados de los residuos de la regresión de $\hat{u}$ sobre los regresores X del modelo original.

Sustituyendo se obtiene,

$$LM = \frac{1}{8{,}8}\begin{pmatrix} 6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = 2{,}12$$

Justificar que, con este valor, la hipótesis nula no se rechaza.

Ejercicio 6.2

Considerar el modelo:

$$y = X\beta + u$$

en donde X tiene k regresores.La esperanza de u es 0 y se quiere contrastar la hipótesis nula de homoscedasticidad frente a:

CAPÍTULO 6
Ejercicio 6.2

$$\sigma_t^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 z_t)^2$$

utilizando el contrasta de los Multiplicadores de Lagrange:

$$LM = d(\tilde{\theta}_R)' I(\tilde{\theta}_R)^{-1} d(\tilde{\theta}_R)$$

1). Escribir el logaritmo de la función de verosimilitud, indicar como obtendría el gradiente y derivar la forma concreta que adoptan los k primeros elementos del gradiente.

2). Determinar los elementos del vector θ y escribir la forma que toma el vector $\tilde{\theta}_R$ en función de los datos. Evaluar los elementos del gradiente utilizando los estimadores MV con y sin restricciones, respectivamente.

3). Indicar como calcularia el estadístico LM utilizando una regresión auxiliar y establecer la región crítica del contraste utilizando este estadístico.

Solución

1). El logaritmo de la función de verosimilitud es:

$$l(\theta) = -\frac{T}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}\sum \log\sigma_t^2 - \frac{1}{2}\sum\frac{u_t^2}{\sigma_t^2}$$

El gradiente es un vector con k+2 parámetros que se define como se ha indicado en el Capítulo 3.

Los k primeros elementos toman la forma siguiente:

$$d_\beta(\theta) = \frac{\partial l(\theta)}{\partial\beta} = \sum\frac{x_t^{'} u_t}{\sigma_t^2}$$

2). El vector de parámetros es $\theta' = (\beta', \alpha_1, \alpha_2)$ y sus estimaciones

$$\hat{\theta}_R = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_R \\ \hat{\alpha}_{1R} \\ \hat{\alpha}_{2R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (X'X)^{-1}X'y \\ \left(\frac{\hat{u}'\hat{u}}{T}\right)^{\frac{1}{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

La evaluación de los elementos del gradiente es como se indica en el texto.

3). La expresión es

$LM = \frac{1}{2}RSS$ en donde RSS es la varianza explicada de la regresión de

CAPÍTULO 6
Ejercicio 6.3

$g_t = \frac{\hat{u}_t^2}{\hat{\sigma}^2}$ sobre una constante y la variable z. La región crítica sería:

$$\frac{1}{2} RSS > \chi^2_\varepsilon(1).$$

Ejercicio 6.3

Para el modelo:

$$y_t = \phi y_{t-1} + \beta x_t + u_t \qquad |\phi| \prec 1$$

Se va a contrastar la hipótesis nula de no autocorrelación frente a la alternativa de un proceso autoregresivo de segundo orden, utilizando el procedimiento de los Multiplicadores de Lagrange. Se pide:

1). El número de elementos del gradiente indicando cuales de ellos seran cero en dos situaciones: sustituyendo los parámetros por los estimadores restringidos y cuando se utilizan los estimadores sin restringir.

2). Escribir la forma que toma el estadístico de los Multiplicadores de Lagrange indicando como se obtiene cada uno de sus elementos en función de las observaciones muestrales.Escribir la forma que adopta la región crítica indicando los tamaños del error tipo 1 y tipo2 que se cometen cuando se utiliza este contraste.

3).Demostrar que el contraste de la hipótesis nula de no autocorrelación utilizando los Multiplicadores de Lagrange equivale a contrastar la hipótesis nula : $H_0 : \delta = 0$ en el modelo:

$$y_t = \phi y_{t-1} + \beta x_t + \delta z_t + u_t$$

Especificar la forma que debe adoptar z_t.

Solución

1). El número de elementos es igual al número de parámetros, en nuestro caso 5.(Explicar porque). Si se evalúa con los estimadores MV sin restringir, todos los elementos del gradiente serán cero. Si se utilizan los estimadores restringidos, entonces tres serán cero y los otros dos diferentes de cero.(Indicar cuales serán cero y cuales no dando las razones para este resultado).

CAPÍTULO 6
Ejercicio 6.3

2). El estadístico para el contraste es

$$LM = \frac{1}{\hat{\sigma}^2}\hat{u}'\hat{U}_{-p}\left[\hat{U}'_{-P}\hat{U}_{-p} - \hat{U}'_{-P}X(X'X)^{-1}X'\hat{U}_{-p}\right]^{-1}\hat{U}'_{-P}\hat{u}$$

Todos los símbolos se pueden escribir a partir de los datos. Por ejemplo,

$$\hat{U}_{-p} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \hat{u}_1 & 0 \\ \hat{u}_2 & \hat{u}_1 \\ \vdots & \vdots \\ \hat{u}_{T-1} & \hat{u}_{T-2} \end{pmatrix}$$

y así sucesivamente. Este contraste tiene una justificación asintótica y, en este marco, se sabe que el nivel de significación es el adoptado previamente y que el tamaño del error tipo 2 tiende a cero conforme la muestra crece. Pero en muestras pequeñas es difícil concretar los tamaños de los dos errores.

3). Basta hacer $Z = \hat{U}_{-p}$ y luego estimar δ como:

$\hat{\delta} = (Z'MZ)^{-1}Z'My$. A continuación, se forma la expresión

$$\hat{\delta}'\left(Var(\hat{\delta})\right)^{-1}\hat{\delta}$$

Se demuestra fácilmente que esta expresión coincide con el estadístico LM definido anteriormente.

Ejercicio 6.4

6.4). Suponer que para el modelo:

$y_t = \beta t + u_t$ t=1, 2, 3, 4, 5.

el vector de residuos MCO es el siguiente:

$\hat{u}' = (\ 2, -4, 3, 1, -2\ )$

1). Se pide contrastar la hipótesis nula de no autocorrelación frente a la alternativa de un proceso autorregresivo de orden dos utilizando el procedimiento de los Multiplicadores de Lagrange. Para el cálculo de este estadístico utilizar la siguiente aproximación:

$$[\hat{U}'_{-p}\hat{U}_{-p} - \hat{U}_{-p}'X(X'X)^{-1}X'\hat{U}_{-p}] = \begin{pmatrix} 29 & -18 \\ -18 & 29 \end{pmatrix}$$

Definir $\hat{U}_{-p}$ y $\hat{U}'_{-P}$X utilizando los datos del problema.

CAPÍTULO 6
Ejercicio 6.4

2). Utilizando el mismo contraste, contrastar la hipótesis nula de homoscedasticidad frente a una alternativa del siguiente tipo: $\sigma_t^2 = (\alpha_0 + \alpha_1 t)^2$

3). Utilizando el mismo procedimiento contrastar la hipótesis nula de normalidad.

Solución

1). El estadístico LM puede escribirse como,

$$LM = \frac{1}{\hat{\sigma}_R^2}\hat{u}'\hat{U}_{-2}\left[\hat{U}'_{-2}M\hat{U}_{-2}\right]^{-1}\hat{U}'_{-2}\hat{u}$$

Para calcular este estadístico hay que tener en cuenta que

$$\hat{\sigma}_R^2 = \frac{\hat{u}'\hat{u}}{T} = 6{,}8$$

$$\hat{u}'\hat{U}_{-2} = \left(\sum \hat{u}_t\hat{u}_{t-1} \quad \sum \hat{u}_t\hat{u}_{t-2}\right) = \left(-19 \quad -4\right)$$

$$\hat{U}'_{-2}X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo se obtiene,

$$LM = \frac{1}{6{,}8}\left(-19 \quad -4\right)\begin{pmatrix} 29 & -18 \\ -18 & 29 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -19 \\ -4 \end{pmatrix} = 3{,}86$$

La región crítica del contraste es

$LM > \chi^2_{0,05} = 6$ (Explicar esta región crítica)

por lo que no se rechaza la hipótesis nula.

2).El contraste LM para cotrastar homoscedasticidad es

$$LM = \frac{1}{2}f'Z\left(Z'Z\right)^{-1}Z'f$$

Teniendo en cuenta que,

$$f_t = \frac{\hat{u}_t^2}{\hat{\sigma}^2} - 1$$

se llega a

$$f = \begin{pmatrix} -0{,}411 \\ 1{,}352 \\ 0{,}323 \\ -0{,}852 \\ -0{,}411 \end{pmatrix}; \quad \left(Z'Z\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 15 & 55 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1.1 & -.3 \\ -.3 & .1 \end{pmatrix}$$

Por otra parte se tiene también que

CAPÍTULO 6
Ejercicio 6.4

$$f'Z = \begin{pmatrix} 0 & -2.2 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo todos estos valores en la expresión del contraste se obtiene:

$$LM = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2.2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1.1 & -.3 \\ -.3 & .1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -2.2 \end{pmatrix} = .242$$

Por ser $\chi^2_{0,05} = 3$, la hipótesis nula de homoscedasticidad no sería rechazada.

3). El contraste LM es

$$LM = \frac{Tg_1^2}{6} + \frac{Tg_2^2}{24} = 0{,}5455$$

La hipótesis nula se aceptaría porque...............

Tener en cuenta que

$$g_1 = \frac{m_3}{m_2^{\frac{3}{2}}} = -0{,}4161$$

$$g_2 = \frac{m_4}{m_2^2} - 3 = -1{,}39$$

con, $m_i = \dfrac{\sum \hat{u}_t^i}{5}$

Interpretar g_1 y g_2.

Ejercicio 6.5

Un investigador intenta estimar el parámetro β en la relación:

$$y_t = \beta x_t + u_t$$

El investigador sospecha que en la observación t_0 existe un atípico en la variable dependiente de forma que en esa observación el modelo es:

$$y_{t_0} = \delta + \beta x_{t_0} + u_{t0}$$

Para estimar el parámetro se piensa en una de las siguientes estrategias.

A). Se estima β sustituyendo el valor de y en t_0 por 0.

B). Se estima β sustituyendo el valor de x en t_0 por 0.

C). Se estima β sustituyendo los valores de x e y en t_0 por 0.

D). Se estima β añadiendo como regresor una variable ficticia que toma el valor 1 en la observación t_0 y cero en el resto de las observaciones.

Se pide:

1). Definir los estimadores de las cuatro estrategias, demostrando si existe alguna coincidencia entre algunos de los estimadores.

CAPÍTULO 6
Ejercicio 6.5

2). Obtener la esperanza y varianza de dichos estimadores y comparar estos resultados con las propiedades del estimador MCO aplicado al modelo original sin modificar los datos.
3). Razonar cual de las cuatro estrategias debería recomendarse e indicar si podría pensarse en otra estrategia que fuera más satisfactoria diferente de las cuatro comentadas.

Solución

1). Los estimadores son:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum x_t y_t - x_{t_0} y_{t_0}}{\sum x_t^2}$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum x_t y_t - x_{t_0} y_{t_0}}{\sum x_t^2 - x_{t_0}^2} \qquad \hat{\beta}_3 = \hat{\beta}_2$$

El último estimador se obtiene de

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}_4 \\ \hat{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x_t^2 & \sum x_t d_t \\ & \sum d_t^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum x_t y_t \\ \sum d_t y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_2 \\ \dots \end{pmatrix}$$

2). Para obtener las propiedades tener en cuenta que,

$$\hat{\beta}_1 = \beta \frac{\sum_{t \neq t_0} x_t^2}{\sum x_t^2} + \frac{\sum_{t \neq t_0} x_t u_t}{\sum x_t^2}$$

Se ve que el estimador es sesgado (derivar el sesgo) con una varianza igual a:

$$E\left(\frac{\sum_{t \neq t_0} x_t u_t}{\sum x_t^2}\right)^2 = \dots\dots\dots$$

En lo que respecta al segundo estimador, se ve que es insesgado y que su varianza es igual a

$$Var(\hat{\beta}_2) = \frac{\sigma^2}{\sum_{t \neq t_0} x_t^2}$$

(demostrar estos dos resultados).

Por último, el estimador MCO puede escribirse como

$$\hat{\beta} = \beta + \frac{\delta x_{t_0}}{\sum x_t^2} + \frac{\sum x_t u_t}{\sum x_t^2}$$

A partir de aquí se ve que el estimador MCO es sesgado (derivar el sesgo) y que su varianza es menor que la del segundo estimador pero mayor que la del primero.

CAPÍTULO 6
Ejercicio 6.5

3). Con carácter general podemos decir que el segundo estimador es el único que es insesgado y el primero es el que tiene menor varianza. Cuando el número de observaciones es grande los tres estimadores tienden a ser insesgados y a tener la misma varianza por cumplirse

$$\frac{\sum_{t\neq t_0} x_t^2}{\sum x_t^2} \approx 1 \quad \text{y} \quad \frac{x_{t_0}^2}{\sum x_t^2} \approx 0 \, .$$

Las diferencias son relevantes cuando hay pocas observaciones. En este caso la mejor estrategia sería utilizar o bien el estimador $\hat{\beta}_2$ o bien utilizar el estimador MCO después de corregir el atípico.

Ejercicio 6.6

Suponer que para el modelo:

$$y_t = \phi y_{t-1} + \beta x_t + u_t$$

se va a contrastar la hipótesis nula de no autocorrelación frente a la alternativa de un proceso de segundo orden:

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \varepsilon_t$$

Para ello se va a utilizar el contraste de los Multiplicadores de Lagrange cuyo estadístico es:

$$\text{LM}= d(\tilde{\theta}_R)' I(\tilde{\theta}_R)^{-1} d(\tilde{\theta}_R)$$

Se pide:

1). Las ventajas e inconvenientes de utilizar el procedimiento LM frente al contraste de Durbin-Watson. Indicar como se calcularían los tamaños de los dos errores si se utiliza el contraste LM.

2). Escribir los elementos del vector $\tilde{\theta}_R$ en función de momentos muestrales. Escribir los dos primeros elementos del gradiente e indicar que elementos de este gradiente evaluados con los estimadores restringidos serían cero.

3). Suponer que $\hat{u}'\hat{u}$=12, y que $\hat{u}'\hat{U}_{-p}$=(6 0) con T=10. Indicar como deberían ser los elementos que faltan del estadístico LM para que la hipótesis nula fuera rechazada, sabiendo que el punto crítico es igual a 5.99.

CAPÍTULO 6
Ejercicio 6.6

Solución

1).Los incovenientes del Durbin-Watson son

-Diseñado para un AR(1) como alternativa.
-No es potente con modelos dinámicos.
-Existe una zona de indeterminación.
-Para este modelo no se ha derivado la distribución de probabilidad.

El contraste LM no presenta estos problemas pero tiene una justificación asintótica. Los ejercicios de simulación parecen mostrar que su comportamiento sigue siendo bueno para todo tamaño muestral, pero no es una justificación de carácter general.

En lo que respecta a los errores, asintóticamente el nivel de significación será el especificado a priori y, por ser consistente, el tamaño del error tipo 2 tenderá a cero. En muestras finitas resulta difícil aproximar los tamaños.

2). El vector $\hat{\theta}_R$ tiene 5 elementos,

$$\hat{\theta}_R = \begin{pmatrix} \hat{\phi}_R \\ \hat{\beta}_R \\ \hat{\rho}_{1R} \\ \hat{\rho}_{2R} \\ \hat{\sigma}_R^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (X'X)^{-1}X'y \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{\hat{u}'\hat{u}}{T} \end{pmatrix}$$

Los dos primeros elementos del gradiente se obtienen derivando el logaritmo de la función de verosimilitud por ϕ y β respectivamente. La función de verosimilitud es

$$l(\theta) = -\frac{T}{2}\log(2\pi) - \frac{T}{2}\log\sigma_\varepsilon^2 - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\sum \varepsilon_t^2$$

en donde

$$\sum \varepsilon_t^2 = (\tilde{y} - \tilde{X}\beta^\bullet)'(\tilde{y} - \tilde{X}\beta^\bullet)$$

siendo $\tilde{y}_t = y_t - \rho_1 y_{t-1} - \rho_2 y_{t-2}$ y lo mismo con las dos variables incluidas en X. Los dos primeros elementos del gradiente serán

$$\frac{\partial l(\theta)}{\partial \phi} = \frac{\sum \tilde{y}_{t-1}\varepsilon_t}{\sigma_\varepsilon^2}$$

$$\frac{\partial l(\theta)}{\partial \beta} = \frac{\sum \tilde{x}_t\varepsilon_t}{\sigma_\varepsilon^2}$$

3). El estadístico LM puede escribirse como

CAPÍTULO 6
Ejercicio 6.6

$$LM = \frac{1}{\hat{\sigma}_R^2} \hat{u}'\hat{U}_{-2}\left[\hat{U}'_{-2}M\hat{U}_{-2}\right]^{-1}\hat{U}'_{-2}\hat{u} =$$

$$\frac{1}{\frac{12}{10}}\begin{pmatrix}6 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 \\ 0\end{pmatrix} = 30a_{11}$$

Luego, se rechaza siempre que, $a_{11} > \frac{5.99}{30} = .199$

Ejercicio 6.7

Supongamos el modelo lineal:

$$y_t = \beta x_t + u_t$$

con $E u_t = 0$ $\quad$ $Cov(u_t\, u_{t'}) = 0$ $\quad$ $Var(u_t) = \sigma_t^2$

1). Definir el estimador MCO de β y derivar su media y su varianza.

2). Si suponemos que: $\sigma_t^2 = \sigma^2 z_t^2$ y dividimos el modelo original por z_t se obtiene:

$$\frac{y_t}{z_t} = \beta\frac{x_t}{z_t} + \frac{u_t}{z_t}$$

Aplicar MCO a este nuevo modelo derivar la media y varianza del nuevo estimador de β y compararlo con el obtenido en 1).

3). Suponer que, para estimar la varianza del estimador MCO de β, se utiliza la siguiente expresión:

$$\hat{Var}(\hat{\beta}) = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum x_t^2}$$

Derivar y comentar las propiedades de este estimador.

Solución

1). El estimador MCO es,

$$\hat{\beta} = \frac{\sum x_t y_t}{\sum x_t^2} = \beta + \frac{\sum x_t u_t}{\sum x_t^2}$$

A partir de esta expresión se obtiene(demostrarlo)

$$E\hat{\beta} = \beta$$

CAPÍTULO 6
Ejercicio 6.7

$$Var(\hat{\beta}) = \frac{\sum x_t^2 \sigma_t^2}{(\sum x_t^2)^2}$$

1). El estimador ponderado será

$$\beta^{\bullet} = \frac{\sum \left[\left(\frac{y_t}{z_t} \right) \left(\frac{x_t}{z_t} \right) \right]}{\sum \left(\frac{x_t}{z_t} \right)^2} = \beta + \frac{\sum \frac{x_t}{z_t} v_t}{\sum (\frac{x_t}{z_t})^2}$$

Se ve que el estimador es insesgado y que su varianza es

$$Var(\beta^{\bullet}) = \frac{\sigma^2}{\sum \left(\frac{x_t}{z_t} \right)^2}$$

Teniendo en cuenta que $\sigma_t^2 = \sigma^2 z_t^2$ llegamos a,

$$\frac{Var(\beta^{\bullet})}{Var(\hat{\beta})} = \frac{\frac{\sigma^2}{\sum (\frac{x_t}{z_t})^2}}{\frac{\sigma^2 \sum x_t^2 z_t^2}{(\sum x_t^2)^2}} = \frac{(\sum x_t^2)^2}{\sum (\frac{x_t}{z_t})^2 \sum x_t^2 z_t^2} = \frac{(\sum a_t b_t)^2}{\sum a_t^2 \sum b_t^2} < 1$$

3). La varianza estimada es,

$$V\hat{a}r(\hat{\beta}) = \frac{\hat{u}'\hat{u}}{(T-1)\sum x_t^2}$$

Para llegar al resultado, derivar que,

$$E\sum \hat{u}_t^2 = E(\sum x_t^2 (\beta - \hat{\beta})^2) + E(\sum u_t^2) + 2\sum x_t E((\beta - \hat{\beta}) u_t)$$

Haciendo los cálculos se obtiene

$$E\sum \hat{u}_t^2 = E(\sum x_t^2 (\frac{\sum x_t u_t}{\sum x_t^2})^2) + \sum \sigma_t^2 - 2\sum x_t \frac{x_t \sigma_t^2}{\sum x_t^2} = \sum \sigma_t^2 - \frac{\sum x_t^2 \sigma_t^2}{\sum x_t^2}$$

6.8). Suponer que dos investigadores utilizan el modelo lineal general con k regresores pero los resultados que obtienen indican que el modelo sufre algún problema de especificación. El primero de los investigadores cree que el problema reside en la autocorrelación por lo que propone contrastar que no existe autocorrelación frente a la alternativa de un proceso de primer orden. El segundo investigador cree que el problema reside en haber omitido una variable relevante por lo que propone contrastar si su

coeficiente es o no significativo en un modelo extendido.
1). Indicar como se llevarían a cabo ambos contrastes.
2). Suponiendo que el segundo investigador tuviera razón, ¿Podría obtener el primero una potencia similar a la que alcanza el segundo en su proceso de contraste?. Comentar en que casos podría darse esa coincidencia.
3). A la luz de los resultados anteriores, comentar la siguiente afirmación de Davidson y MacKinnon (1985): “Este ejemplo muestra con claridad que nunca debemos rechazar una hipótesis en favor de la alternativa que estamos contrastando. Cuando obtenemos un valor significativo en un contraste de autocorrelación o para cualquier otro tipo de contraste de falta de especificación, lo único que aprendemos es que nuestra hipótesis nula es muy improbable que sea correcta. Pero no podemos decir nada respecto al modelo que realmente generó los datos”.