ECONOMETRIA III. PROBLEMAS CAPITULO 1.

1.1. Sea X una variable que se distribuye normalmente con media μ y varianza σ^2. Suponer que se han obtenido independientemente dos muestras aleatorias simples a partir de X, de tamaño T_1 y T_2, y con medias muestrales $\bar{X}_1$ y $\bar{X}_2$.

a) Un investigador pretende estimar μ y propone como estimadores alternativos:

$$\hat{\mu} = \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2}{2} \qquad \text{y} \qquad \tilde{\mu} = \frac{T_1\bar{X}_1 + T_2\bar{X}_2}{T_1 + T_2}$$

Comparar las propiedades de ambos estimadores.

b) En una etapa posterior pretende estimar μ^2 y propone los siguientes estimadores:

$$\bar{X}_1 \cdot \bar{X}_2\,; \qquad \left(\frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2}{2}\right)^2; \qquad \frac{\bar{X}_1^2 + \bar{X}_2^2}{2}$$

Comparar las propiedades de los tres estimadores.

SOLUCION PROBLEMA 1.1.

a) Ambos estimadores son insesgados, ya que

$$E\,(\hat{\mu}) = \frac{1}{2} E\left(\bar{X}_1 + \bar{X}_2\right) = \mu$$

$$E\,(\tilde{\mu}) = \frac{1}{T_1 + T_2}\left[T_1\, E\left(\bar{X}_1\right) + T_2\, E\left(\bar{X}_2\right)\right] = \mu$$

siendo sus varianzas:

$$Var\,(\hat{\mu}) = \frac{1}{4}\left[Var\left(\bar{X}_1\right) + Var\left(\bar{X}_2\right)\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{\sigma^2}{T_1} + \frac{\sigma^2}{T_2}\right] = \frac{\sigma^2\left(T_1 + T_2\right)}{4T_1\,T_2}$$

$$Var\,(\tilde{\mu}) = \frac{1}{(T_1 + T_2)^2}\left[T_1^2\,\frac{\sigma^2}{T_1} + T_2^2\,\frac{\sigma^2}{T_2}\right] = \frac{\sigma^2\left(T_1 + T_2\right)}{(T_1 + T_2)^2}$$

Dado que $\left(T_1 + T_2\right)^2 > 4\ T_1\ T_2$, dándose la igualdad cuando $T_1 = T_2$, ello implica que:

$$Var\,(\tilde{\mu}) < Var\,(\hat{\mu}) \ \text{ si } \ T_1 \neq T_2$$

b) Analizando, en primer lugar, la propiedad de insesgadez resulta:

$$E\,(\bar{X}_1 \cdot \bar{X}_2) = \mu^2$$

$$E\left(\frac{\bar{X}_1+\bar{X}_2}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}E\left[\bar{X}_1^2+\bar{X}_2^2+2\bar{X}_1\bar{X}_2\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{\sigma^2}{T_1}+\mu^2+\frac{\sigma^2}{T_2}+\mu^2+2\mu^2\right] =$$

$$\frac{1}{4}\left[\frac{\sigma^2}{T_1}+\frac{\sigma^2}{T_2}\right]+\mu^2$$

$$E\left(\frac{\bar{X}_1^2+\bar{X}_2^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{\sigma^2}{T_1}+\mu^2+\frac{\sigma^2}{T_2}+\mu^2\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\sigma^2}{T_1}+\frac{\sigma^2}{T_2}\right]+\mu^2$$

Por lo tanto, el mejor estimador es el primero por cuanto es el único insesgado.

1.2. Considerar una muestra aleatoria simple de T elementos obtenida a partir de una población con media μ y varianza σ^2. Se pide:

$Var\left(X_i - \bar{X}\right)$; $E\,(X_j\,\bar{X})$; $E\,[X_i(X_j - \bar{X})]$; $E\,[\bar{X}(X_j - \bar{X})]$;

$Cov\,[(X_i - \bar{X}),(X_j - \bar{X})]$

SOLUCION PROBLEMA 1.2.

$$Var\left(X_i - \bar{X}\right) = \text{Var}\ (X_i) + Var(\bar{X}) \text{ - } 2\ Cov\left(X_i, \bar{X}\right) = \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{T} - 2E\left[\left(X_i - \mu\right)\left(\bar{X} - \mu\right)\right]$$

$$= \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{T} - \frac{2}{T}E\left[\left(X_i - \mu\right)\left(\sum X_i - T\mu\right)\right] = \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{T} - \frac{2}{T}E\left[\left(X_i - \mu\right)^2\right]$$

$$= \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{T}$$

$$E\,(X_j\,\bar{X}) = E\left[X_j\left(\frac{X_1 + \cdots + X_T}{T}\right)\right] = \frac{1}{T}\ E\left(X_j^2 + \sum_{i \neq j} X_j X_i\right)$$

$$= \frac{1}{T}\ \left[\sigma^2 + \mu^2 + \left(T-1\right)\mu^2\right] = \frac{\sigma^2}{T} + \mu^2$$

$$E\,[X_i(X_j - \bar{X})] = E\left[(X_i X_j) - (X_i \bar{X})\right] = -\frac{\sigma^2}{T}$$

$$E\,[\bar{X}(X_j - \bar{X})] = E\left[\bar{X}\,X_j - \bar{X}^2\right] = 0$$

$$Cov\,[(X_i - \bar{X}),(X_j - \bar{X})] = E\left\{\left[\left(X_i - \bar{X}\right) - E\left(X_i - \bar{X}\right)\right]\left[\left(X_j - \bar{X}\right) - E\left(X_j - \bar{X}\right)\right]\right\}$$

$$= E\left[(X_i - \bar{X})\,(X_j - \bar{X})\right] = E\left[X_i X_j - X_i \bar{X} - \bar{X}\,X_j + \bar{X}^2\right] = -\frac{\sigma^2}{T}$$

1.3. Suponer que la variable *y* esta relacionada con la variable *x* según el modelo:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i \qquad u_i \sim \text{iid N}(0,\ \sigma^2) \qquad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (1)$$

Un investigador agrupa las observaciones en *G* grupos y toma el promedio de las dos variables en los grupos, considerando el modelo:

$$\overline{y}_g = \beta_0 + \beta_1 \overline{x}_g + \overline{u}_g \qquad \overline{u}_g = \frac{\sum_{j=1}^{n_g} u_{gj}}{n_g} \qquad n_1 + n_2 + \cdots + n_G = n \qquad (2)$$

en donde $\overline{y}_g$, $\overline{x}_g$ y $\overline{u}_g$ son os promedios respectivos. Se pide:

i) Derivar las propiedades de $\overline{u}_g$.

ii) Derivar la distribución de probabilidad del estimador por mínimos cuadrados ponderados de β_1 a partir del modelo (2). (Tener en cuenta que $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{g=1}^{G} n_g \overline{x}_g$).

iii) Derivar la distribución de probabilidad del estimador MCO de β_1 a partir del modelo (1) y compararla con la obtenida para el estimador definido en ii). (Tener en cuenta que $\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 = \sum_{g=1}^{G} n_g \left(\overline{x}_g - \overline{x}\right)^2 + \sum_{g=1}^{G}\sum_{j=1}^{n_g}\left(x_{gj} - \overline{x}_g\right)^2$).

SOLUCION PROBLEMA 1.3.

i) $E\,(\overline{u}_g) = E\left(\dfrac{\sum_{j=1}^{n_g} u_{gj}}{n_g}\right) = 0$

$$Var\,(\overline{u}_g) = \frac{1}{n_g^2}\left[Var\left(u_{g1}\right) + \cdots + Var\left(u_{gn_g}\right)\right] = \frac{\sigma^2}{n_g}$$

ii) El estimador por mínimos cuadrados ponderados es el estimador MCO obtenido a partir de un modelo transformado que soluciona el problema de heteroscedasticidad presente en la especificación (2). La transformación consiste en premultiplicar el modelo (2) por $\sqrt{n_g}$,resultando:

$$\sqrt{n_g}\ \overline{y}_g = \beta_0\sqrt{n_g} + \beta_1\sqrt{n_g}\,\overline{x}_g + \sqrt{n_g}\,\overline{u}_g \Rightarrow y^* = X^*\beta + u^*$$

donde $u^* \sim$ iid N (0, σ^2) y las nuevas variables se definen como:

$$y^* = \begin{pmatrix} \sqrt{n_1}\,\overline{y}_1 \\ \sqrt{n_2}\,\overline{y}_2 \\ \vdots \\ \sqrt{n_G}\,\overline{y}_G \end{pmatrix} \qquad\qquad X^* = \begin{pmatrix} \sqrt{n_1} & \sqrt{n_1}\,\overline{x}_1 \\ \sqrt{n_2} & \sqrt{n_2}\,\overline{x}_2 \\ \vdots & \vdots \\ \sqrt{n_G} & \sqrt{n_G}\,\overline{x}_G \end{pmatrix}$$

El estimador por mínimos cuadrados ponderados es:

$$\hat{\beta}_P = \left(X^{*\prime} X^* \right)^{-1} X^{*\prime} y^*$$

y para obtener la expresión concreta de $\hat{\beta}_{1P}$ se debe tener en cuenta que:

$$X^{*\prime} X^* = \begin{pmatrix} n & \sum_{g=1}^{G} n_g \overline{x}_g \\ \sum_{g=1}^{G} n_g \overline{x}_g & \sum_{g=1}^{G} n_g \overline{x}_g^2 \end{pmatrix}$$

$$\left(X^{*\prime} X^* \right)^{-1} = \frac{1}{n \sum_{g=1}^{G} n_g \overline{x}_g^2 - \left(\sum_{g=1}^{G} n_g \overline{x}_g \right)^2} \cdot \begin{pmatrix} \sum_{g=1}^{G} n_g \overline{x}_g^2 & -\sum_{g=1}^{G} n_g \overline{x}_g \\ -\sum_{g=1}^{G} n_g \overline{x}_g & n \end{pmatrix}$$

$$X^{*\prime} y^* = \begin{pmatrix} \sum_{g=1}^{G} n_g \overline{y}_g \\ \sum_{g=1}^{G} n_g \overline{y}_g \overline{x}_g \end{pmatrix}$$

$$\hat{\beta}_{1P} = \frac{n \sum_{g=1}^{G} n_g \overline{y}_g \overline{x}_g - \sum_{g=1}^{G} n_g \overline{x}_g \sum_{g=1}^{G} n_g \overline{y}_g}{n \sum_{g=1}^{G} n_g \overline{x}_g^2 - \left(\sum_{g=1}^{G} n_g \overline{x}_g \right)^2} \tag{3}$$

Sustituyendo en (3) la expresión de $\overline{x}$ dada en el apartado ii) del enunciado, resulta:

$$\hat{\beta}_{1P} = \frac{\sum_{g=1}^{G} n_g \overline{y}_g \overline{x}_g - \overline{x} \sum_{g=1}^{G} n_g \overline{y}_g}{\sum_{g=1}^{G} n_g (\overline{x}_g - \overline{x})^2} = \frac{\sum_{g=1}^{G} n_g (\overline{x}_g - \overline{x}) \overline{y}_g}{\sum_{g=1}^{G} n_g (\overline{x}_g - \overline{x})^2} \tag{4}$$

Para obtener las propiedades de este estimador, se parte de la expresión (4) rescribiéndola como:

$$\hat{\beta}_{1P} = \frac{\sum_{g=1}^{G} n_g (\overline{x}_g - \overline{x}) (\beta_0 + \beta_1 \overline{x}_g + \overline{u}_g)}{\sum_{g=1}^{G} n_g (\overline{x}_g - \overline{x})^2} = \beta_1 + \frac{\sum_{g=1}^{G} n_g (\overline{x}_g - \overline{x}) \overline{u}_g}{\sum_{g=1}^{G} n_g (\overline{x}_g - \overline{x})^2}$$

$$E(\hat{\beta}_{1P}) = \beta_1$$

$$Var(\hat{\beta}_{1P}) = E\left[\frac{\sum_{g=1}^{G} n_g (\overline{x}_g - \overline{x}) \overline{u}_g}{\sum_{g=1}^{G} n_g (\overline{x}_g - \overline{x})^2}\right]^2 = \frac{\sigma^2}{\sum_{g=1}^{G} n_g (\overline{x}_g - \overline{x})^2}$$

iii) El estimador MCO de β_1 obtenido a partir del modelo (1) es insesgado y con varianza dada por:

$$Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} n_g (x_i - \overline{x})^2}$$

Para efectuar la comparación entre varianzas basta tener en cuenta la expresión de $\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2$ dada en el apartado iii) del enunciado, deduciéndose directamente que:

$$Var(\hat{\beta}_1) \leq Var(\hat{\beta}_{1P})$$

dándose la igualdad cuando $\sum_{j=1}^{n_g}\left(x_{gj} - \overline{x}_g\right)^2 = 0$, $\forall$g, es decir, cuando las *x* adoptan el mismo valor dentro de cada grupo.

1.4. Suponer que el proceso generador de los datos es:

$$y_t = \alpha + \beta x_t + u_t$$

en donde u_t es una perturbación aleatoria que cumple las hipótesis ideales.

Obtener la esperanza y varianza de los estimadores siguientes:

a) $\hat{\beta}_1 = \dfrac{\sum y_t}{\sum x_t}$ b) $\hat{\beta}_2 = \dfrac{\sum y_t - T\alpha}{\sum x_t}$

c) $\hat{\beta}_3 = \dfrac{\sum \frac{y_t}{x_t}}{T}$ d) $\hat{\beta}_4 = \dfrac{\sum \frac{y_t^*}{x_t^*}}{T}$

Las variables con asterisco representan desviaciones con respecto a la media.

SOLUCION PROBLEMA 1.4.

a) $$E(\hat{\beta}_1) = \frac{1}{\sum x_t} E\left[y_1 + y_2 + \cdots y_T\right] = \frac{T\alpha}{\sum x_t} + \beta$$

$$Var(\hat{\beta}_1) = E\left[\frac{\sum y_t}{\sum x_t} - \frac{T\alpha}{\sum x_t} - \beta\right]^2 = \frac{1}{\left(\sum x_t\right)^2} E\left[\sum y_t - T\alpha - \beta \sum x_t\right]^2 = \frac{T\sigma^2}{\left(\sum x_t\right)^2}$$

b) $$E(\hat{\beta}_2) = \frac{1}{\sum x_t} E\left[T\alpha + \beta \sum x_t + \sum u_t - T\alpha\right] = \beta$$

$$Var(\hat{\beta}_2) = E\left[\frac{\sum y_t - T\alpha}{\sum x_t} - \beta\right]^2 = \frac{1}{\left(\sum x_t\right)^2} E\left[\sum y_t - T\alpha - \beta \sum x_t\right]^2 = \frac{T\sigma^2}{\left(\sum x_t\right)^2}$$

c) $$E(\hat{\beta}_3) = E\left[\frac{\alpha + \beta x_1 + u_1}{x_1} + \frac{\alpha + \beta x_2 + u_2}{x_2} + \cdots + \frac{\alpha + \beta x_T + u_T}{x_T}\right] = \alpha \frac{1}{T} \sum \frac{1}{x_t} + \beta$$

$$Var(\hat{\beta}_3) = E\left[\alpha \frac{1}{T} \sum \frac{1}{x_t} + \beta + \frac{1}{T} \sum \frac{u_t}{x_t} - \alpha \frac{1}{T} \sum \frac{1}{x_t} - \beta\right]^2 = \frac{\sigma^2}{T^2} \sum \frac{1}{x_t^2}$$

d) $$E(\hat{\beta}_4) = \frac{1}{T} E\left[\frac{\beta x_1^* + u_1 - \overline{u}}{x_1^*} + \frac{\beta x_2^* + u_2 - \overline{u}}{x_2^*} + \cdots + \frac{\beta x_T^* + u_T - \overline{u}}{x_T^*}\right] = \beta + \frac{1}{T} E\left(\sum \frac{u_t - \overline{u}}{x_t^*}\right)$$

$$= \beta$$

$$Var(\hat{\beta}_4) = E\left[\beta + \frac{1}{T} \sum \frac{u_t - \overline{u}}{x_t^*} - \beta\right]^2 = \frac{1}{T^2} E\left(\sum \frac{u_t - \overline{u}}{x_t^*}\right)^2$$

Para un término genérico, por ejemplo el i-esimo, de los elevados al cuadrado resulta:

$$E\left(\frac{u_i-\bar{u}}{x_i^*}\right)^2=\frac{1}{x_i^{*2}}\left(\sigma^2-\frac{\sigma^2}{T}\right)$$

con lo cual, considerando los T términos elevados al cuadrado se obtiene:

$$\frac{(T-1)}{T}\sigma^2\sum\frac{1}{x_t^{*2}} \qquad \text{(A)}$$

Análogamente, para un término genérico, por ejemplo el (i, j), de los elevados al cuadrado resulta:

$$E\left[\frac{(u_i-\bar{u})}{x_i^*}\frac{(u_j-\bar{u})}{x_j^*}\right]=\frac{1}{x_i^*x_j^*}\left(-\frac{\sigma^2}{T}\right)$$

de modo que para el conjunto de términos correspondientes a los dobles productos se tiene que:

$$2\left(-\frac{\sigma^2}{T}\right)\sum_{i<j}\frac{1}{x_i^*x_j^*} \qquad \text{(B)}$$

Atendiendo a los resultados (A) y (B) la varianza del estimador $\hat{\beta}_4$ es:

$$Var\,(\hat{\beta}_4)=\frac{1}{T^2}\left[\frac{(T-1)}{T}\sigma^2\sum\frac{1}{x_t^{*2}}-2\frac{\sigma^2}{T}\sum_{i<j}\frac{1}{x_i^*x_j^*}\right]$$

1.5. Supongamos el modelo:

$$y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u - \overline{u}$$

en donde u cumple las hipótesis habituales y suponemos que las variables están medidas en desviaciones respecto a sus medias. Los parámetros β_1 y β_2 son estimados utilizando MCO y estimadores restringidos (MCR) suponiendo: β_1 = β_2 = β. Se pide:

1. Demostrar que los estimadores restringidos equivalen a una media ponderada de los estimadores MCO.
2. Demostrar que el estimador insesgado más eficiente de β coincide con la media ponderada en caso de que se cumpla la restricción.

SOLUCION PROBLEMA 1.5.

1. El estimador MCR es el obtenido tras aplicar MCO al modelo que incorpora la restricción. En este caso, tal modelo es:

$$y = \beta(x_1 + x_2) + u - \overline{u}$$

y, por tanto:

$$\hat{\beta}_{MCR} = \frac{\sum\left(x_{1t} + x_{2t}\right)y_t}{\sum\left(x_{1t} + x_{2t}\right)^2} = \frac{m_{1y} + m_{2y}}{m_{11} + m_{22} + 2m_{12}}$$

Por otra parte, los estimadores MCO resultan de la resolución de la resolución del siguiente sistema de ecuaciones normales:

$$\sum y_t x_{1t} = \hat{\beta}_1 \sum x_{1t}^2 + \hat{\beta}_2 \sum x_{2t} x_{1t} \Rightarrow m_{1y} = m_{11}\hat{\beta}_1 + m_{12}\hat{\beta}_2$$

$$\sum y_t x_{2t} = \hat{\beta}_1 \sum x_{1t} x_{2t} + \hat{\beta}_2 \sum x_{2t}^2 \Rightarrow m_{2y} = m_{12}\hat{\beta}_1 + m_{22}\hat{\beta}_2$$

Sustituyendo las expresiones obtenidas para m_{1y} y m_{2y} en la formula de $\hat{\beta}_{MCR}$, resulta:

$$\hat{\beta}_{MCR} = \frac{\left(m_{11} + m_{12}\right)\hat{\beta}_1 + \left(m_{12} + m_{22}\right)\hat{\beta}_2}{m_{11} + m_{22} + 2m_{12}} = \theta\ \hat{\beta}_1 + (1 - \theta)\ \hat{\beta}_2$$

donde la ponderación θ viene dada por:

$$\theta = \frac{m_{11} + m_{12}}{m_{11} + m_{22} + 2m_{12}}$$

2. Se parte de un estimador genérico que sea media ponderada de $\hat{\beta}_1$ y $\hat{\beta}_2$ como, por ejemplo:

$$\hat{\beta}^* = w_1\hat{\beta}_1 + w_2\hat{\beta}_2$$

el cual será insesgado siempre que $w_1 + w_2 = 1$. Por tanto, el estimador genérico insesgado se puede escribir como:

$$\hat{\beta}^* = w\hat{\beta}_1 + (1-w)\hat{\beta}_2$$

El objetivo es obtener las ponderaciones w que hagan que este estimador sea el más eficiente, es decir, el de menor varianza entre los insesgados. Teniendo en cuenta que:

$$Var\,(\hat{\beta}^*) = w^2\,Var(\hat{\beta}_1) + (1-w)^2\,Var(\hat{\beta}_2) + 2w(1-w)\,Cov(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$$

igualando a cero $\dfrac{d\,Var(\hat{\beta}^*)}{d\,w}$ se obtiene la ponderación correspondiente al estimador eficiente y que viene dada por:

$$w = \frac{Var(\hat{\beta}_2) - Cov(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)}{Var(\hat{\beta}_1) + Var(\hat{\beta}_2) - 2Cov(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)}$$

Para obtener su expresión concreta, se tiene en cuenta que:

$$V\,(\hat{\beta}) = \sigma^2\left(X'X\right)^{-1} = \sigma^2\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}^{-1}$$

con lo cual:

$$w = \frac{m_{11} + m_{12}}{m_{11} + m_{22} + 2m_{12}}$$

que es, precisamente, la ponderación obtenida en el primer apartado.

1.7. Para el modelo $y = X\beta + u$ se tiene la siguiente información:

$$X'X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \qquad X'y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \sigma^2 = 1$$

Se pide:

1. Obtener las estimaciones MCO de β y calcular la covarianza entre $\hat{\beta}_1$ y $\hat{\beta}_2$.
2. Calcular los estimadores restringidos de β_1 y β_2 con la restricción $\beta_2 = 0$. Calcular la covarianza entre $\hat{\beta}_{1R}$ y $\hat{\beta}_{2R}$. Obtener la diferencia entre la suma de cuadrados de los residuos restringidos y la de los residuos MCO. En caso de que $\hat{\beta}_1$ y $\hat{\beta}_{1R}$ no difieran ¿tiene alguna utilidad la información de que $\beta_2 = 0$?.
3. Demostrar que los estimadores restringidos de β_1 y β_2 dado $\beta_1 + \beta_2 = 0$, se pueden obtener a partir de la regresión de y sobre $\left(x_{1t} - x_{2t}\right)$.
4. Obtener la predicción puntual MCO y por intervalo de y_0 y de $E(y_0)$ con un nivel de confianza del 95% suponiendo que para el periodo extramuestral se sabe que $x_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$.

<u>SOLUCION PROBLEMA 1.7.</u>

1. A partir de las expresiones habituales:

$$\hat{\beta} = \left(X'X\right)^{-1} X'y \qquad\qquad V(\hat{\beta}) = \sigma^2 \left(X'X\right)^{-1}$$

utilizando la información suministrada, se obtiene:

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Cov(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = -\frac{1}{3}$$

2. Introduciendo la restricción en el modelo, de modo que resulta:

$$y = X_1\beta_1 + u$$

los estimadores restringidos son:

$$\hat{\beta}_{1R} = 1 \qquad\qquad \hat{\beta}_{2R} = 0$$

La expresión de la matriz de varianzas y covarianzas de los estimadores restringidos viene dada por:

$$V(\hat{\beta}_R) = V(\hat{\beta}) - \sigma^2 \left(X'X\right)^{-1} R'\left[R\left(X'X\right)^{-1} R'\right]^{-1} R\left(X'X\right)^{-1}$$

donde R = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$. Teniendo en cuenta los datos del problema y los resultados del apartado anterior se obtiene:

$$\text{Cov}(\hat{\beta}_{1R}, \hat{\beta}_{2R}) = 0$$

La diferencia entre la suma de cuadrados de los residuos restringidos (suma residual restringida) y la de los residuos MCO (suma residual sin restringir) viene dada por:

$$\hat{u}_R'\hat{u}_R - \hat{u}'\hat{u} = \left(\hat{\beta} - \hat{\beta}_R\right)' X'X \left(\hat{\beta} - \hat{\beta}_R\right)$$

dado que en este caso:

$$\left(\hat{\beta} - \hat{\beta}_R\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ambas sumas residuales coinciden.

Aunque en este planteamiento $\hat{\beta}_1$ y $\hat{\beta}_{1R}$ no difieran, esto no significa que el conocimiento de que $\beta_2 = 0$ no tenga utilidad. En concreto, si se calculan las varianzas de ambos estimadores resulta:

$$Var(\hat{\beta}_1) = 0{,}66$$

$$Var(\hat{\beta}_{1R}) = 0{,}5$$

Es decir, la precisión del estimador restringido es mayor (menor varianza) como resultado de que se dispone de mayor información que en el caso de la estimación sin restricciones.

3. Introduciendo la restricción en el modelo, resulta:

$$y = \beta_1(X_1 - X_2) + u$$

resultando directo observar que los estimadores restringidos de β_1 y se pueden obtener a partir de la regresión de y_t sobre $\left(x_{1t} - x_{2t}\right)$. Tales estimadores son:

$$\hat{\beta}_{1R} = \frac{1}{2} \qquad \hat{\beta}_{2R} = -\frac{1}{2}$$

4. La predicción puntual para y_0 y para $E(y_0)$ coincide y viene dada por:

$$\hat{y}_0 = x_0'\hat{\beta} = 2$$

Predicción por intervalo para $E(y_0)$:

$$\hat{y}_0 \pm N_{0,025}\sqrt{\sigma^2 x_0' \left(X'X\right)^{-1} x_0} \Rightarrow (-\ 0,77\ ;\ 4,77)$$

Predicción por intervalo para y_0:

$$\hat{y}_0 \pm N_{0,025}\sqrt{\sigma^2 (1 + x_0' \left(X'X\right)^{-1} x_0)} \Rightarrow (-\ 1,39\ ;\ 5,39)$$

1.8. Suponer el siguiente modelo:

$$y_t = \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + u_t \qquad\qquad u \sim N(0, \sigma^2 I_T)$$

con:

$$X'X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}; \qquad X'y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \sigma^2 = 1$$

1. Escribir las ecuaciones normales, calcular los estimadores MCO, $\hat{\beta}$, y su matriz de varianzas y covarianzas.
2. Se estima el modelo con la restricción $\beta_2 = 0$. Calcular los estimadores restringidos, $\hat{\beta}_R$, su matriz de varianzas y covarianzas y la diferencia entre la suma de los cuadrados de los residuos restringidos y la de los residuos MCO.
3. Suponer que se quiere estimar por intervalo la relación $\psi'\beta$ en donde $\psi' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$. Adoptando un nivel de significación del 5% se pide determinar la amplitud de los intervalos correspondientes a los estimadores MCO y restringidos. (Asuma que la información a priori es cierta).

<u>SOLUCION PROBLEMA 1.8.</u>

1. Las ecuaciones normales vienen dadas por la expresión $X'X\,\hat{\beta} = X'y$, de modo que atendiendo a la información proporcionada se obtiene:

$$\frac{1}{3}\,\hat{\beta}_1 - \frac{1}{3}\,\hat{\beta}_2 = 1$$

$$-\frac{1}{3}\,\hat{\beta}_1 + \frac{4}{3}\,\hat{\beta}_2 = 1$$

Los estimadores MCO $\hat{\beta} = \left(X'X\right)^{-1} X'y$ se concretan como:

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

y su matriz de varianzas y covarianzas:

$$V(\hat{\beta}) = \sigma^2 \left(X'X\right)^{-1} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Teniendo en cuenta la restricción, los estimadores MCR serán los MCO aplicados al modelo:

$$y = X_1 \; \beta_1 + u_1$$

resultando:

$$\hat{\beta}_{1R} = \frac{1}{1/3} = 3 \qquad \hat{\beta}_{2R} = 0$$

Por otra parte:

$$V(\hat{\beta}_R) = V(\hat{\beta}) - \sigma^2 \left(X'X\right)^{-1} R' \left[R\left(X'X\right)^{-1} R' \right]^{-1} R\left(X'X\right)^{-1}$$

donde R = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$V(\hat{\beta}_R) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La diferencia entre la suma de cuadrados de los residuos restringidos (suma residual restringida) y la de los residuos MCO (suma residual sin restringir) viene dada por:

$$\hat{u}_R'\hat{u}_R - \hat{u}'\hat{u} = \left(\hat{\beta} - \hat{\beta}_R\right)' X'X \left(\hat{\beta} - \hat{\beta}_R\right) = 4$$

3. Si se desea estimar la combinación lineal $\psi'\beta$, el estimador MCO de la misma será $\psi'\hat{\beta}$, el cual es insesgado y con matriz de varianzas y covarianzas:

$$V(\psi'\hat{\beta}) = \sigma^2 \;\; \psi'\left(X'X\right)^{-1} \psi$$

Con lo cual, la estimación por intervalo vendrá dada por:

$$\psi'\hat{\beta} \;\pm\; N_{\varepsilon/2} \;\; \sigma \;\; \sqrt{\psi'\left(X'X\right)^{-1} \psi}$$

donde:

$$\psi'\left(X'X\right)^{-1} \psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_{11}$$

por lo tanto, la amplitud del intervalo correspondiente al estimador MCO es:

$$\pm\ N_{\varepsilon/2}\ \sigma\ \sqrt{a_{11}}$$

Por otra parte, el estimador MCR de la combinación lineal $\psi'\beta$ es $\psi'\hat{\beta}_R$ cuya matriz de varianzas y covarianzas es:

$$V\ (\psi'\hat{\beta}_R) = \sigma^2\ [\psi'\left(X'X\right)^{-1}\psi\ -\ \psi'\left(X'X\right)^{-1} R'\left[R\left(X'X\right)^{-1} R'\right]^{-1} R\left(X'X\right)^{-1}\psi\,] = \sigma^2\ A$$

y, en consecuencia, la amplitud del intervalo correspondiente al estimador MCR será:

$$\pm\ N_{\varepsilon/2}\ \sigma\ \sqrt{A}$$

siendo:

$$A = a_{11}\ -\ \frac{a_{12}a_{21}}{a_{22}} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{22}}$$

Con los datos disponibles, las amplitud del intervalo correspondiente al estimador MCO se concreta en:

$$\pm\ 1{,}96\ \sqrt{4}\ = 1{,}96 \cdot 2$$

y la relativa al estimador MCR:

$$\pm\ 1{,}96\ \sqrt{\frac{4\cdot 1 - 1}{1}} = 1{,}96\ \sqrt{3}$$

lo que permite concluir que en caso de no disponer de información sobre β (MCO), la amplitud del intervalo será mayor que en el caso de disponer de ella (MCR).

1.9. Suponer que el modelo que genera los datos es: $y_t = \beta x_t + u_t$ en donde la perturbación cumple las hipótesis ideales. Considerar los siguientes tres estimadores:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum x_t y_t}{\sum x_t^2} \qquad \hat{\beta}_2 = \frac{\sum y_t}{\sum x_t} \qquad \hat{\beta}_3 = \frac{\sum x_t^* y_t^*}{\sum x_t^{*2}}$$

en donde las variables con asterisco son desviaciones con respecto a las medias.

1) Obtener el sesgo y la varianza de los tres estimadores.

2) Demostrar que $Cov\ (\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = Var\ (\hat{\beta}_1) > 0$ y que el coeficiente de correlación entre $\hat{\beta}_1$ y $\hat{\beta}_2$ es $\rho_{12} = \left[\frac{Var(\hat{\beta}_1)}{Var(\hat{\beta}_2)}\right]^{1/2}$. Demostrar que si se define $\hat{\beta} = \alpha\ \hat{\beta}_1 + (1 - \alpha)\ \hat{\beta}_2$, el valor de α que minimiza la varianza de este estimador es 1.

3) Demostrar que $Cov\ (\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3) = 0$ y que la combinación de estos dos estimadores que minimiza la varianza es $\hat{\beta} = \rho_{12}^2\ \hat{\beta}_2 + (1 - \rho_{12}^2)\ \hat{\beta}_3 = \hat{\beta}_1$.

<u>SOLUCION PROBLEMA 1.9.</u>

1.

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum x_t(\beta x_t + u_t)}{\sum x_t^2} = \beta + \frac{\sum x_t u_t}{\sum x_t^2}$$

$E\ (\hat{\beta}_1) = \beta \Rightarrow$ Sesgo $(\hat{\beta}_1) = 0$

$$Var\ (\hat{\beta}_1) = E\left(\frac{\sum x_t u_t}{\sum x_t^2}\right)^2 = \frac{\sigma^2}{\sum x_t^2}$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum(\beta x_t + u_t)}{\sum x_t} = \beta + \frac{\sum u_t}{\sum x_t}$$

$E\ (\hat{\beta}_2) = \beta \Rightarrow$ Sesgo $(\hat{\beta}_2) = 0$

$$Var\ (\hat{\beta}_2) = E\left(\frac{\sum u_t}{\sum x_t}\right)^2 = \frac{T\sigma^2}{\left(\sum x_t\right)^2}$$

$$\hat{\beta}_3 = \frac{\sum x_t^* (\beta x_t^* + u_t - \overline{u})}{\sum x_t^{*2}} = \beta + \frac{\sum x_t^* u_t}{\sum x_t^{*2}}$$

$E\ (\hat{\beta}_3) = \beta \Rightarrow$ Sesgo $(\hat{\beta}_3) = 0$

$$Var\ (\hat{\beta}_3) = E\left[\frac{\sum x_t^* u_t}{\sum x_t^{*2}}\right]^2 = \frac{\sigma^2}{\sum x_t^{*2}}$$

2.

$$Cov\ (\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = E\left[\frac{\sum x_t u_t}{\sum x_t^2} \cdot \frac{\sum u_t}{\sum x_t}\right] = \frac{\sigma^2}{\sum x_t^2} = Var\ (\hat{\beta}_1) > 0$$

$$\rho_{\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2} = \frac{Cov(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)}{\sqrt{Var(\hat{\beta}_1)}\ \sqrt{Var(\hat{\beta}_2)}} = \frac{Var(\hat{\beta}_1)}{\sqrt{Var(\hat{\beta}_1)}\ \sqrt{Var(\hat{\beta}_2)}} = \left(\frac{Var(\hat{\beta}_1)}{Var(\hat{\beta}_2)}\right)^{1/2}$$

La varianza del estimador $\hat{\beta} = \alpha\ \hat{\beta}_1 + (1 - \alpha)\ \hat{\beta}_2$ es:

$$Var\ (\hat{\beta}) = \alpha^2\ Var\ (\hat{\beta}_1) + (1-\alpha)^2\ Var\ (\hat{\beta}_2) + 2\ \alpha (1 - \alpha)\ Cov\ (\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) =$$

$$2\ \alpha\ Var\ (\hat{\beta}_1)\ -\ \alpha^2\ Var\ (\hat{\beta}_1)\ +\ (1-\alpha)^2\ Var\ (\hat{\beta}_2)$$

entonces para obtener el valor de α que minimiza tal varianza se resuelve:

$$\frac{d\ Var(\hat{\beta})}{d\ \alpha} = 0$$

llegándose a :

$$Var\ (\hat{\beta}_1)\ -\ Var\ (\hat{\beta}_2) = \alpha\ [Var\ (\hat{\beta}_1)\ -\ Var\ (\hat{\beta}_2)]$$

con lo cual el valor $\alpha = 1$ es el que minimiza la varianza del estimador $\hat{\beta}$.

3.

$$Cov\ (\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3) = E\left[\frac{\sum u_t}{\sum x_t} \cdot \frac{\sum x_t^* u_t}{\sum x_t^{*2}}\right] = \frac{\sigma^2 \sum x_t^*}{\sum x_t \sum x_t^{*2}} = 0$$

Dada la combinación $\hat{\beta} = \alpha\ \hat{\beta}_2\ + (1\ -\ \alpha)\ \hat{\beta}_3$ se trata de demostrar que la mínima varianza corresponde al valor de la ponderación (valor de α) $\alpha\ =\ \rho_{12}^2\ =\ \dfrac{Var(\hat{\beta}_1)}{Var(\hat{\beta}_2)}$, tal y como se ha obtenido en el apartado 2.

La varianza de la combinación lineal es:

$$Var\ (\hat{\beta}) = \alpha^2\ Var\ (\hat{\beta}_2) + (1-\alpha)^2\ Var\ (\hat{\beta}_3) + 2\ \alpha (1\ -\ \alpha)\ Cov\ (\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3) =$$

$$\alpha^2\ Var\ (\hat{\beta}_2) + (1-\alpha)^2\ Var\ (\hat{\beta}_3)$$

entonces para obtener el valor de α que minimiza tal varianza se resuelve:

$$\frac{d\ Var(\hat{\beta})}{d\ \alpha} = 0$$

llegándose a :

$$\alpha\ Var\ (\hat{\beta}_2) =\ Var\ (\hat{\beta}_3)\ -\ \alpha\ \ Var\ (\hat{\beta}_3) \Rightarrow$$

$$\alpha\ =\ \frac{Var(\hat{\beta}_3)}{Var(\hat{\beta}_2)+Var(\hat{\beta}_3)}\ =\ \frac{\sigma^2 / \sum x_t^{*2}}{\dfrac{T\sigma^2}{\left(\sum x_t\right)^2} + \dfrac{\sigma^2}{\sum x_t^{*2}}}\ =\ \frac{\sigma^2 \left(\sum x_t\right)^2}{\sigma^2\ T \sum x_t^2}$$

Por otro lado:

$$\rho_{12}^2\ =\ \frac{Var(\hat{\beta}_1)}{Var(\hat{\beta}_2)}\ =\ \frac{\sigma^2 / \sum x_t^2}{\dfrac{T\sigma^2}{\left(\sum x_t\right)^2}}\ =\ \frac{\sigma^2 \left(\sum x_t\right)^2}{\sigma^2\ T \sum x_t^2}\ =\ \alpha$$

Con lo cual queda demostrado que la ponderación que minimiza la varianza de la combinación lineal planteada es $\alpha\ =\ \rho_{12}^2$.

Por último, para demostrar que $\hat{\beta}\ =\ \rho_{12}^2\ \hat{\beta}_2\ +\ (1\ -\ \rho_{12}^2)\ \hat{\beta}_3\ =\ \hat{\beta}_1$, se sustituyen las correspondientes expresiones obteniendo:

$$\hat{\beta}\ =\ \frac{\left(\sum x_t\right)^2}{T\sum x_t^2} \cdot \frac{\sum y_t}{\sum x_t} + \frac{T\sum x_t^2 - \left(\sum x_t\right)^2}{T\sum x_t^2} \cdot \frac{\sum x_t^* y_t^*}{\sum x_t^{*2}} =$$

$$\frac{\sum x_t \sum y_t + T\sum x_t^* y_t^*}{T\sum x_t^2} = \frac{\sum x_t \sum y_t + T\sum x_t\, y_t - \sum x_t \sum y_t}{T\sum x_t^2} =$$

$$\frac{\sum x_t y_t}{\sum x_t^2} = \hat{\beta}_1$$