ANEXO 1. ENFOQUE ASINTÓTICO.

A.1.1. CONVERGENCIA EN PROBABILIDAD.

Definición A.1.1.: Sea $\{x_T\}$ una secuencia de variables aleatorias en el campo real. Si existe un número real c tal que para todo $\varepsilon > 0$, $P\left[|x_T - c| < \varepsilon\right] \to 1$ conforme $T \to \infty$, entonces se dice que x_T converge en probabilidad a c y se escribe como:

$$x_T \xrightarrow{p} c \text{ ó } \operatorname{plim} x_T = c$$

La constante c se llama límite en probabilidad.

Alternativamente, podemos definir la convergencia en probabilidad como:

$$\lim_{T\to\infty} P\left\{|x_T - c| > \varepsilon\right\} = 0$$

o bien: para todo $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$, existe un T tal que para todo t > T se tiene:

$$P\left(|x_T - c| > \varepsilon\right) < \delta$$

Definición A.1.2: Se dice que la secuencia de variables aleatorias $\{x_T\}$ converge en probabilidad a una variable aleatoria x y lo escribimos como:

$$x_T \xrightarrow{p} x \text{ ó } \operatorname{plim} x_T = x$$

si, conforme $T \to \infty$ para todo $\varepsilon > 0$ se cumple que:

$$P\left[|x_T - x| < \varepsilon\right] \to 1$$

Definición A.1.3: Una secuencia de matrices de variables aleatorias mxn $\{x_T\}$ se dice que converge en probabilidad a la matriz c de orden mxn si cada elemento de x_T converge en probabilidad al correspondiente elemento de c.

Definición A.1.4: Estimador Consistente: Sea $\{\theta_T\}$ una secuencia de estimadores de θ.

Se dice que θ_T es consistente cuando se cumple:

$$\theta_T \xrightarrow{p} \theta$$

A.1.2. CONVERGENCIA EN EL MOMENTO r-ÉSIMO

Definición A.1.5 Sea x_T una secuencia de variables aleatorias definidas en el campo real. Si existe un número real c tal que E($|x_T - c|^r$) $\underset{T\to\infty}{\to}$ 0 para algún r > 0, entonces x_T converge en el momento r-ésimo a c, y se escribe como $x_T \overset{\text{r.m.}}{\to}$ c.

El caso más común es cuando r = 2, y decimos que la convergencia es en media cuadrática y se escribe como $x_T \overset{\text{q.m.}}{\to}$ c. En este caso de r = 2, también se escribe l.i.m. x_T = c.

A.1.3. CONVERGENCIA EN DISTRIBUCIÓN

Definición A.1.6.: La secuencia de variables aleatorias $\{x_T\}$con las correspondientes funciones de distribución $\{F_T(x)\}$se dice que converge en distribución (algunos autores dicen "converge en ley") a la variable aleatoria x con función de distribución F, si y sólo si $F_T \to$ F en todos los puntos de continuidad de F. Este tipo de convergencia se denota por $x_T \overset{\text{d.}}{\to}$ x. (Algunos autores la escriben como $x_T \overset{\text{L.}}{\to}$ x). A F(x) se le llama la función de distribución límite o asintótica de $F_T(x)$.

Definición A.1.7.: Convergencia a una función: La secuencia de funciones $\{F_T\}$ converge a la función F si, y sólo si, para todo valor x en el dominio de F(x) y para todo $\varepsilon > 0$, existe un T_0 tal que $|F_T(x) - F(x)| < \varepsilon$ para T > T_0. Esta propiedad se escribe como: $F_T \to F$.

La definición requiere que, para cualquier valor de x, la diferencia entre F_T y F se haga arbitrariamente pequeña para un valor de T suficientemente grande.

A.1.4. RELACIONES ENTRE DEFINICIONES

Convergencia a una variable aleatoria

$$x_T \xrightarrow{\text{a.s.}} \text{x} \quad \Rightarrow \quad x_T \xrightarrow{p} \text{x} \quad \Rightarrow \quad x_T \xrightarrow{\text{d}} \text{x}$$

$$\Uparrow$$

$$x_T \xrightarrow{\text{q.m.}} \text{x}$$

Resultado A.1.1.: Si $x_T \xrightarrow{\text{q.m.}}$ c para algún r > 0, entonces $x_T \xrightarrow{p}$ c.

Prueba: Primero una versión generalizada de la Desigualdad de Chebyshev: Sea x una variable aleatoria con E ($|x|^r$) finita para algún r > 0. Entonces para cualquier valor δ y cualquier valor c, se tiene que:

$$\text{P}\ \{|x-c| > \delta\} \leq \frac{E\ |x - c|^r}{\delta^r}$$

Si $x_T \xrightarrow{\text{m.s.}}$ c, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$, existe un T_0 tal que $E(x_T - c)^2 < \delta^2 \varepsilon$ para todo $T \geq T_0$. Esto asegura que:

$$\frac{E(x_T - c)^2}{\delta^2} < \varepsilon \qquad \text{para } T \geq T_0$$

Utilizando la desigualdad de Chebyshev:

$$\text{P}\ \{|x_T - c| > \delta\} < \varepsilon$$

para $T \geq T_0$, de forma que $x_T \xrightarrow{p}$ c. ν

Resultado A.1.2.: Si $x_T \xrightarrow{p}$ x entonces $x_T \xrightarrow{\text{d}}$ x. Es decir, convergencia en probabilidad implica convergencia en distribución.

Prueba: Ver Fuller (1976, pág. 194). ν

Resultado A.1.3.: Sea $\{x_T\}$ una secuencia de vectores de k variables aleatorias y g(.) una funcion continua: $R^k \to R^1$ que no depende de T. Entonces:

(a) Si $\mathbf{x}_t \xrightarrow{p} \mathbf{c}$ en donde **c** es un vector de k constantes, $g(\mathbf{x}_t) \xrightarrow{p} g(\mathbf{c})$

(b) Si $\mathbf{x}_t \xrightarrow{p} \mathbf{x}$ en donde **x** es un vector de k variables aleatorias,

$g(\mathbf{x}_t) \xrightarrow{d.} g(\mathbf{x})$.

Prueba: Ver Rao (1973, pág. 119) y White (1984, pág. 24). ν

Una implicación inmediata de este resultado es que las operaciones aritméticas habituales preservan la convergencia en probabilidad.

Resultado A.1.4.: Sean $\{x_t\}$ e $\{y_t\}$ dos secuencias de variables aleatorias y sean c y d dos constantes arbitrarias. Entonces:

(a) $x_t \xrightarrow{p} c$ e $y_t \xrightarrow{p} d \Rightarrow x_t + y_t \xrightarrow{p} c+d$.

(b) $x_t \xrightarrow{p} c$ e $y_t \xrightarrow{p} d \Rightarrow x_t \times y_t \xrightarrow{p} c \times d$.

(c) $x_t \xrightarrow{p} c$ e $y_t \xrightarrow{p} d \Rightarrow \frac{x_t .}{y_t} \xrightarrow{p} \frac{c}{d}$ $d \neq 0$.

Prueba: Se sigue directamente de la aplicación del resultado A.1.3.. ν

El Resultado A.1.3. se puede extender también a matrices.

Resultado A.1.5: Sea $\{\mathbf{X}_T\}$ una secuencia de matrices de orden k de variables aleatorias que converge a una matriz **C** del mismo orden. Entonces:

$$\mathbf{X}_T^{-1} \xrightarrow{p} \mathbf{C}^{-1}.$$

Prueba: Basta con aplicar el Resultado A.1.3. ν

Analicemos ahora la convergencia de expresiones que combinan diferentes tipos de convergencia.

Resultado A.1.6. Sean $\{\mathbf{x}_T\}$ e $\{\mathbf{y}_T\}$ secuencias de vectores de k variables aleatorias y sea **x** un vector de variables aleatorias y **d** un vector de constantes, ambos del mismo orden k. Entonces se tiene que:

$$(a)\ \text{Si } \mathbf{x}_T \xrightarrow{p} \mathbf{x} \ \text{ e } \ \mathbf{y}_T \xrightarrow{d.} \mathbf{d} \ \Rightarrow\ \mathbf{x}_T + \mathbf{y}_T \xrightarrow{d.} \mathbf{x} + \mathbf{d}.$$

$$(b)\ \text{Si } \mathbf{x}_T \xrightarrow{d.} \mathbf{x} \ \text{ e } \ \mathbf{y}_T \xrightarrow{p} \mathbf{0} \ \Rightarrow\ \mathbf{x}_T \times \mathbf{y}_T \xrightarrow{p} \mathbf{0}.$$

Prueba: Ver Rao (1973, pág. 119) y Hayashi (2000, pág. 92). ν

El siguiente resultado extiende el resultado anterior a matrices.

Resultado A.1.7. Sean $\{\mathbf{x}_T\}$ y **x** vectores definidos como en el Resultado A.1.6.. Sea $\{\mathbf{A}_T\}$ una secuencia de matrices de variables aleatorias de orden k y sea **A** una matriz de constantes de orden k. Entonces:

$$(a)\ \text{Si } \mathbf{x}_T \xrightarrow{d.} \mathbf{x} \ \text{ y } \ \mathbf{A}_T \xrightarrow{p} \mathbf{A} \ \Rightarrow\ \mathbf{A}_T\mathbf{x}_T \xrightarrow{d.} \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

$$(b)\ \text{Si } \mathbf{x}_T \xrightarrow{d.} \mathbf{x} \ \text{ y } \ \mathbf{A}_T \xrightarrow{p} \mathbf{A} \ \Rightarrow \mathbf{x}'_T\, \mathbf{A}_T\mathbf{x}_T \xrightarrow{d.} \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}.$$

Prueba: Ver Hayashi (2000, pág.92).

Resultado A.1.8. Suponer que α_T es una secuencia de números reales no estocásticos que tiende a infinito con T, θ es un número fijo y $\alpha_T\ (x_T - \theta) \xrightarrow{d.}$ x. Sea g una función que posee al menos dos derivadas continuas.

Entonces:

$$\alpha_T\ \left[g(x_T) - g(\theta)\right] \xrightarrow{d.} g'(\theta)x$$

Prueba: Ver Greenberg y Webster (1983, pág.15). ν

La extensión vectorial se presenta en el siguiente resultado

Resultado A.1.9. Sea $\{\mathbf{x}_T\}$ una secuencia de vectores de k variables aleatorias tal que, $\mathbf{x}_T \xrightarrow{p} \mathbf{q}$ en donde **q** es un vector de k constantes y, además, $\sqrt{T}\,(\mathbf{x}_T - \mathbf{q}) \xrightarrow{d.} \mathbf{z}$ en donde **z** es un vector de r variables aleatorias. Sea **g** (.) un vector de r funciones: $R^k \to R^r$, cuyas primeras derivadas son continuas. Sea **G** (**q**) la matriz de primeras derivadas de **g**(.) respecto a **q** , es decir,

$$\mathbf{G(q)} \equiv \frac{\partial g(.)}{\partial q}$$

Entonces se tiene que

$$\sqrt{T}\ [\ \mathbf{g}\ (\ \mathbf{x}_T\ )\text{-}\mathbf{g}\ (\mathbf{q})]\ \xrightarrow{d.}\ \mathbf{G}\ (\mathbf{q})\mathbf{z}$$

En particular, si $\sqrt{T}$ ($\mathbf{x}_T$- **q**) $\xrightarrow{d.}$ N (0, Σ), entonces

$$\sqrt{T}\ [\ \mathbf{g}\ (\ \mathbf{x}_T\ )\text{-}\mathbf{g}\ (\mathbf{q})]\ \xrightarrow{d.} N\ (\ 0,\ \mathbf{G(q)}\,\Sigma\,\mathbf{G(q)}'\ ]$$

Veamos ahora algunos subproductos de estos resultados para su posible uso en posteriores derivaciones.

<u>Resultado A.1.10</u>.Sean {x_T} e {y_T} secuencias de variables aleatorias. Supongamos que $x_T \xrightarrow{d.}$ x en donde x es una variable aleatoria. Entonces, si (x_T-y_T) $\xrightarrow{p} 0$ se sigue que $y_T \xrightarrow{d.}$ x.

<u>Prueba</u>: Ver Fuller (1976, pág. 194).

<u>Resultado A.1.11.</u> Sean x_{iT} , i = 1, 2 ... n, n secuencias de variables aleatorias, tales que el escalar $\lambda_1 x_{1T}$ + ... + $\lambda_n x_{nT}$ converge en distribución a $\lambda_1 x_1$ + ... + $\lambda_n x_n$ para cualquiera valores reales (λ_1 ... λ_n). Entonces el vector $\mathbf{x}_T$= (x_{1T} ... x_{nT})' converge en distribución al vector: **x** = (x_1 , ..., x_n)'.

<u>Prueba:</u> Ver Rao (1973, pág.123). ν

<u>Resultado A.1.12</u>. Sea g (.) una función racional y sean $x_{iT} \xrightarrow{d.} x_i$ e $y_{jT} \xrightarrow{p} \alpha_j$, i=1,2….n y j=1,2…..m, entonces la distribución límite de g(x_{1T}, x_{2T},….x_{nT}, y_{1T}, ….,y_{Tm}) es la misma que la de g (x_1, ……,x_n, α_1........α_m).

<u>Prueba</u>: Ver Amemiya (1985, pág. 89).

A.1.5. VERSIONES DE LA LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS Y DEL TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE

Sea {x_T} una secuencia de variables aleatorias y $\{\bar{x}_T\}$ la correspondiente secuencia de medias muestrales definiendo la media, para cada T, como:

$$\bar{x}_T = \frac{\sum_{t=1}^{T} x_t}{T}$$

La Ley de los Grandes Números se ocupa de estudiar la convergencia de la secuencia de medias muestrales. Nosotros, en este trabajo, limitaremos nuestra atención a la convergencia en probabilidad. El Teorema Central del Límite se ocupa de la convergencia en distribución de la expresión $\sqrt{T}\left(\bar{x}_T - E\bar{x}_T\right)$.

Resultado A.1.13: (Teorema de Khintchine): Sea $x_1 \ldots x_T$ una secuencia de variables aleatorias independientes, todas ellas con la misma distribución (i.i.d.) con media μ.

Entonces se cumple que: $\bar{x}_T \xrightarrow{p} \mu$.

Prueba: Ver White (1984, pág. 30) ν

Resultado A.1.14. Sea $x_1 \ldots x_T$ una secuencia de variables aleatorias independientes, todas ellas con media μ y varianza σ^2. Entonces se cumple que: $\bar{x}_T \xrightarrow{p} \mu$.

Prueba: Resultados standar son:

$$E\,\bar{x}_T = \mu \qquad \text{y} \qquad \mathrm{Var}(\bar{x}_T) = \frac{\sigma^2}{T}$$

A partir de estos resultados se demuestra que $\bar{x}_T$ converge en error cuadrático medio a μ y haciendo uso del resultado A.1.1. se llega al resultado requerido.

Veamos ahora dos versiones simples del Teorema Central del Límite.

Resultado A.1.15. (Lindeberg-Levy): Sea $\{x_T\}$una secuencia de variables aleatorias distribuidas idéntica e independientemente (i.i.d.).

Si $\mathrm{Var}(x_T) = \sigma^2 < \infty,\ \sigma^2 \neq 0$ entonces:

$$\sqrt{T}\ \frac{\bar{x}_T - \mu}{\sigma} = T^{-1/2}\ \frac{\sum (x_t - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{d.} N(0,1)$$

También se suele escribir:

$$\sqrt{T}\left(\bar{x}_T - \mu\right) \xrightarrow{p} N\left(0,\sigma^2\right) \qquad \text{ó} \qquad \bar{x}_T \xrightarrow{d.} N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{T}\right)$$

Prueba: Ver Greenberg y Webster (1983, pág.18). ν

La generalización vectorial es:

Resultado A.1.16: Sea {$\mathbf{x}_T$} una secuencia de vectores aleatorios con k elementos, todos ellos independientes e igualmente distribuidos con vector de medias **q** y matriz de varianzas y covarianzas **B**. Entonces:

$$\sqrt{T}\,(\bar{x}_T - \mathbf{q}) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum (\mathbf{x}_T - \mathbf{q}) \xrightarrow{d.} N(\mathbf{0}, \mathbf{B}).$$

Prueba: Se sigue utilizando el Resultado A.1.11 y siguiendo las lineas apuntadaas por en Hayashi(2000). Sea **h** un vector de k números reales arbitrarios. Entonces {$\mathbf{h}'\mathbf{x}_T$} es una secuencia de variables aleatorias escalares con E($\mathbf{h}'\mathbf{x}_T$)=$\mathbf{h}'\mathbf{q}$ y Var($\mathbf{h}'\mathbf{x}_T$)=$\mathbf{h}'\mathbf{B}\mathbf{h}$. Utilizando el Resultado A.1.15 se tiene que

$$\sqrt{T}(\mathbf{h}'\bar{x}_T - \mathbf{h}'\mathbf{q}) = \mathbf{h}'\sqrt{T}(\bar{x}_T - \mathbf{q}) \xrightarrow{d.} N(\mathbf{0}, \mathbf{h}'\mathbf{B}\mathbf{h}).$$

Esto se cumple para cualquier vector **h** por lo que aplicando el Resultado A.1.11 se llega al resultado requerido. ν

A.1.6. ORDEN DE PROBABILIDAD

Definición A.1.8 (orden de magnitud): Sea $\{a_T\}$ una secuencia de números reales y sea $\{g_T\}$ una secuencia de números reales positivos.

Decimos que el orden de magnitud de a_T es menor que el de g_T y lo escribimos como:

$$a_T = o(g_T)$$

$$\text{Si se cumple que: } \lim_{T\to\infty} \frac{a_T}{g_T} = 0$$

Decimos que el orden de magnitud de a_T es como máximo g_T y lo escribimos como:

$$a_T = O(g_T)$$

Si existe un número real M tal que:

$$g_T^{-1}|a_T| = M \quad \text{para todo } T \geq T_0$$

$$ó \lim \frac{|a_T|}{g_T} = M$$

<u>Definición A.1.9.</u>: Una matriz es de orden o(T^λ) ó O(T^λ) si cada elemento de la matriz es o(T^λ) ó O(T^λ).

<u>Resultado A.1.17.</u>: Sean $\{a_T\}$ y $\{b_T\}$ secuencias de números reales y sean $\{f_T\}$ y $\{g_T\}$ secuencias de números reales positivos.

(i) Si $a_T = o(f_T)$ y $b_T = o(g_T)$, entonces

$a_T b_T = o(f_T g_T)$; $|a_T|^s = o(f_T^s)$ para s > 0

$a_T + b_T = o(\max\{f_T, g_T\})$

(ii) Si $a_T = O(f_T)$ y $b_T = O(g_T)$, entonces

$a_T b_T = O(f_T g_T)$; $|a_T|^s = O(f_T^s)$ para s > 0

$a_T + b_T = O(\max\{f_T, g_T\})$

(iii) Si $a_T = o(f_T)$ y $b_T = O(g_T)$, entonces

$a_T b_T = o(f_T g_T)$

<u>Prueba:</u> Ver White (1984, pág. 15). ν

<u>Definición A.1.10.</u>: Sea $\{x_T\}$ una secuencia de variables aleatorias y sea $\{g_T\}$ una secuencia de números positivos reales.

Decimos que $\{x_T\}$ tiene un orden de probabilidad menor que g_T y lo escribimos como $x_T = o_p(g_T)$ cuando:

$$\frac{x_T}{g_T} \xrightarrow{p} 0$$

Decimos que $\{x_T\}$ tiene como máximo un orden de probabilidad g_T y lo escribimos como $x_T = O_p(g_T)$ si para todo $\varepsilon > 0$, existe un número real positivo M_ε tal que:

$$P\left\{|x_T| \geq M_\varepsilon . g_T\right\} \leq \varepsilon$$

Se dice también que x_T está acotada en probabilidad por g_T.

Una matriz es de un orden de probabilidad dado cuando lo es cada elemento de esa matriz.

Resultado A.1.18.: Sean $\{f_T\}$ y $\{g_T\}$ secuencias de números reales positivos y sean $\{x_T\}$ y $\{y_T\}$ secuencias de variables aleatorias

(i) Si $x_T = o_p(f_T)$ e $y_T = o_p(g_T)$, entonces

$x_T y_T = o_p(f_T x g_T)$; $|x_T|^s = o_p(f_T^s)$ para s > 0

$x_T + y_T = o_p(\max\{f_T, g_T\})$

(ii) Si $x_T = O_p(f_T)$ e $y_T = O_p(g_T)$, entonces

$x_T y_T = O_p(f_T x g_T)$; $|x_T|^s = O_p(f_T^s)$

$x_T + y_T = O_p(\max\{f_T, g_T\})$

(iii) Si $x_T = o_p(f_T)$ e $y_T = O_p(g_T)$, entonces

$x_T y_T = O_p(f_T g_T)$

Prueba: Ver White (1984, pág. 26). ν

Resultado A.1.19: (Regla del Producto): Sean $\{\mathbf{A}_T\}$ y $\{\mathbf{b}_T\}$ secuencias de matrices aleatorias de órdenes respectivos, k x k y k x 1. Si $\{\mathbf{A}_T\}$ es $o_p(1)$ y $\{\mathbf{b}_T\}$ es $O_p(1)$ entonces $\{\mathbf{A}_T \mathbf{b}_T\}$es $o_p(1)$.

Prueba: Ver White (1984, pág. 26). ν

A.1.7. OTROS TEMAS

Resultado A.1.20: Sea $\{x_T\}$ un proceso estacionario en covarianza con momentos dados por:

$Ex_T = \mu$

$E(x_T = -\mu)\,(x_{T-j} - \mu) = \gamma_j$

con autocovarianzas sumables en sentido absoluto tal que:

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\gamma_j| < \infty$$

Entonces se tiene que:

(a) $\bar{x}_T \xrightarrow{m.s} \mu$

(b) $\lim_{T\to\infty} \left\{TE(\bar{x}_T - \mu)^2\right\} = \sum_{j=\infty}^{\infty} \gamma_j$

Prueba: Ver Hamilton (1994, pág. 188). ν

Teorema Central Del Límite Para Procesos Estacionarios

Resultado A.1.21.: Sea $x_T = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$ en donde $\{\varepsilon_T\}$ es una secuencia de variables aleatorias i.i.d con $E\,\varepsilon_t^2 < \infty$ y $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$. Entonces:

$$\sqrt{T}\ (\bar{x}_T - \mu) \xrightarrow{d} N(0, \sum_{j=\infty}^{\infty} \gamma_j)$$

Prueba: Ver Hamilton (1994, pág. 195). ν

Definición A.1.11: (Martingala en Diferencias). Sea x_T una secuencia de variables aleatorias. Sea $\mathbf{\Omega}_t$ la información disponible hasta t, incluyendo los valores pasados y contemporáneos de x. $\{x_T\}$ es una martingala en diferencias si:

$$E(x_T / \mathbf{\Omega}_{T-1}) = 0$$

Resultado A.1.22: Suponer que $\{x_T\}$ es una secuencia de martingala en diferencias y sea la media del proceso definida como: $\bar{x}_T = \frac{1}{T}\sum x_t$.

Suponer que (a) E $x_t^2 = \sigma_t^2 > 0$ con $\frac{1}{T}\Sigma\sigma_t^2 \to \sigma^2 > 0$, (b) E $|x_t|^r < \infty$ para algún r > 2 y todo t y (c) $\frac{1}{T}\sum x_t^2 \xrightarrow{p} \sigma^2$. Entonces $\sqrt{T}\ \bar{x}_T \xrightarrow{d}$ N(0, σ^2).

Prueba: Ver White (1984, pág. 130). ν

Resultado A.1.23: Sea $\{\boldsymbol{y}_t\}_{t=1}^{\infty}$ una secuencia de martingala en diferencias vectorial n-dimensional con $\bar{\boldsymbol{y}}_T = \frac{1}{\boldsymbol{T}}\sum \boldsymbol{y}_t$. Suponer que (a) $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{y}_t\boldsymbol{y}_t') = \boldsymbol{\Omega}_t$ es una matriz definida positiva con $\frac{1}{\boldsymbol{T}}\sum \boldsymbol{\Omega}_t \to \boldsymbol{\Omega}$; (b) $E(y_{it}y_{jt}y_{lt}y_{mt}) < \infty$ para todo t, i, j, l, m (incluso para i = j = l = m) ; (*c*) $\frac{1}{\boldsymbol{T}}\sum \boldsymbol{y}_t\boldsymbol{y}_t' \xrightarrow{p} \boldsymbol{\Omega}$. Entonces $\sqrt{\boldsymbol{T}}\ \bar{\boldsymbol{y}}_T \xrightarrow{d} \boldsymbol{N}(0, \boldsymbol{\Omega})$.

Prueba: Ver Hamilton (1994, pág. 194). ν

Definición A.1.12.: Suponer que $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ es el vector de estimadores del vector de parámetros $\boldsymbol{\theta}$, y que se cumple que $\sqrt{T}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{d}$ N(0, V). Entonces decimos que $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ es asintóticamente normal con una matriz asintótica de varianzas y covarianzas igual a:

$$\text{Asy. Var}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{1}{T} V$$

Definición A.1.13.: El vector $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ es asintóticamente eficiente si la matriz asintótica de varianzas y covarianzas de cualquier otro estimador asintóticamente normal supera la de $\hat{\boldsymbol{\theta}}$.