PUBLICACIONES DE 4^er^ CURSO

Grado: Economía

Asignatura: ECONOMETRÍA III

Suplemente docente nº 3: Contrastes de esfericidad

Profesores: Antonio Aznar

Departamento de ANÁLISIS ECONÓMICO

Curso Académico 2015/16

Facultad de
Economía y Empresa
Universidad Zaragoza

Decimos que un modelo es esférico cuando su perturbación aleatoria

i. No tiene autocorrelación.
ii. Es homocedástica y
iii. Sigue una distribución Normal.

Para poder concluir que un modelo es esférico necesitamos procedimientos de contraste que utilizando la evidencia disponible permitan rechazar o no las hipótesis nulas asociadas con las características mencionadas. Todo contraste es el resultado de un proceso en tres etapas:

1. Definición del estadístico del contraste
2. Derivar la distribución de probabilidad del estadístico de contraste bajo la hipótesis nula (H_0).
3. Determinar la regla de decisión.

1. Definición del estadístico de contraste

Habiendo especificado la hipótesis nula se trata de establecer una medida de cumplimiento por parte de los datos de las restricciones asociadas con dicha hipótesis nula. Entre los numerosos criterios que se han propuesto en la literatura para establecer esa medida el más utilizado ha sido el de los Multiplicadores de Lagrange. Supongamos que la verosimilitud de la muestra depende de un vector de m parámetros, θ, y que la hipótesis nula especifica que estos m parámetros cumplen r restricciones. El estadístico del contraste de los Multiplicadores de Lagrange toma la forma siguiente:

$$LM = d\left(\hat{\theta}_R\right)' I\left(\hat{\theta}_R\right) d\left(\hat{\theta}_R\right)$$

En donde $d\left(\hat{\theta}_R\right)$ es el gradiente evaluado con los estimadores máximo-verosímiles restringidos y $I\left(\hat{\theta}_R\right)$ es la matriz de información evaluada, también, con los estimadores restringidos.

2. **Derivación de la distribución de probabilidad del estadístico del contraste bajo** H_0.

La derivación de la distribución de probabilidad del estadístico depende del estadístico concreto por el que se haya optado. Centrándonos en los Multiplicadores de Lagrange un resultado bien conocido es que, bajo H_0,

$$LM \sim \chi^2(r)$$

Por lo tanto, el estadístico LM sigue, bajo la hipótesis nula, una distribución chi-cuadrado con r grados de libertad.

3. **Determinación de la regla de decisión**

La especificación de la regla de decisión dependerá de los resultados obtenidos en las dos etapas anteriores. Hay dos formas equivalentes para determinar la regla de decisión:

- **Calculando el p-valor.** La hipótesis nula se rechaza si p-valor$<\varepsilon$ en donde ε es el nivel de significación adoptado.
- **Especificando la Región Crítica.** Considerando el caso del LM, la hipótesis nula se rechazará si $LM > \chi^2_\varepsilon(r)$.

i.- HOMOCEDASTICIDAD

El incumplimiento de la hipótesis de homocedasticidad, heterocedasticidad se produce cuando la varianza de la perturbación aleatoria no es constante a lo largo de las unidades de observación. Es decir, $\mathrm{var}(u_i) = \sigma_i^2$. Los procedimientos propuestos para contrastar la hipótesis nula de homocedasticidad son de dos tipos: no constructivos y constructivos. Los primeros intentan determinar simplemente si hay heterogeneidad en las varianzas; los segundos contrastan también las causas de la heterogeneidad adoptando, de partida, un modelo que determina la varianza. Comenzaremos presentando los segundos.

Suponer el Modelo Lineal General

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{1i} + \ldots + \beta_k X_{ki} + u_i \qquad (1)$$

Para la varianza suponemos el siguiente modelo

$$\sigma_i^2 = h\left(\alpha_1 + \alpha_2 Z_{2i} + ... + \alpha_p Z_{pi}\right) \qquad (2)$$

En donde h(.) es una función muy general con la única restricción que solo puede tomar valores positivos. La hipótesis nula de homocedasticidad se formula así

$$H_0 : \alpha_2 = \alpha_3 = ... = \alpha_p = 0 \qquad \text{((p-1) restricciones) (3)}$$

Para contrastar esta hipótesis nula se han propuesto diferentes versiones del contaste LM, según la forma adoptada por (2).

i.1 El contraste LM de Breuch-Pagan

Se define en el siguiente proceso:

1. Se estima el modelo (1) con MCO y se obtienen los correspondientes residuos, $\hat{u}_i$.

2. Se estima con MCO la siguiente regresión auxiliar

$$\hat{u}_i^2 = \alpha_1 + \alpha_2 Z_{2i} + ... + \alpha_p Z_{pi} + v_i \qquad (4)$$

3. Se define el estadístico de contraste como: BP=nR^2, en donde R^2 es el coeficiente de determinación de la regresión auxiliar. Por ser una versión del LM, este estadístico, bajo la hipótesis nula, sigue una distribución χ^2 con (p-1) grados de libertad.
4. La hipótesis nula de homocedasticidad se rechaza si $BP > \chi_\varepsilon^2\left(p-1\right)$. Equivalentemente, la hipótesis nula se rechaza si el p-valor es inferior al nivel de significación adoptado, ε.

i.2 El Contraste LM de Glesjer

El contraste es el mismo y solo cambia la regresión auxiliar que, ahora, toma la forma siguiente

$$\left|\hat{u}_i\right| = \alpha_1 + \alpha_2 Z_{2i} + ... + \alpha_p Z_{pi} + v_i$$

i.3 El contraste LM de Harvey-Godfrey

Sigue siendo el mismo contraste con la siguiente regresión auxiliar

$$\ln(\hat{u}_{ï}^{2}) = \alpha_1 + \alpha_2 Z_{2i} + ... + \alpha_p Z_{pi} + v_i$$

i.4 El Contraste LM de White

El proceso sigue siendo el mismo pero la regresión auxiliar en este caso es (suponiendo solo dos regresores)

$$\hat{u}_{ï}^{2} = \alpha_1 + \alpha_2 Z_{2i} + \alpha_3 Z_{3i} + \alpha_4 Z_{2i}^{2} + \alpha_5 Z_{3i}^{2} + \alpha_6 Z_{2i} Z_{3i} + v_i$$

Notar que, en este caso, los grados de libertad son 5 y no 2. En general, los grados de libertad de la χ^2 serán 2p+p(p-1)/2.

i.5 El Contraste de Goldfeld y Quandt

La hipótesis alternativa de heteroscedasticidad es:

$$\sigma_i^2 = \sigma^2 f(X_{mi})$$

La varianza crece (decrece) con los valores de X_{mi}.

Procedimiento:

1. Ordenar la muestra de acuerdo a X_{mi}.
2. Eliminar las c observaciones centrales: $\left(\frac{T-c}{2}\right) + c + \left(\frac{T-c}{2}\right)$
3. Estimar el modelo para la primera y la última submuestra: SR_1 y SR_2
4. Obtención del estadístico de contraste, considerando que SR2 > SR1:

$$GQ = \frac{SR_2}{SR_1} \sim F_{\varepsilon\left(\frac{T-c}{2} - k;\frac{T-c}{2} - k\right)}$$

5. Fijado un nivel de significación ε, la regla de actuación será la siguiente:

- $GQ < F_{\varepsilon}^{\left(\frac{T-c}{2}-k;\frac{T-c}{2}-k\right)} \Rightarrow$ no rechazo de la hipótesis nula de homoscedasticidad

- En caso contrario rechazamos la hipótesis nula de homocedasticidad.

ii. NO AUTOCORRELACIÓN

En un modelo diremos que existe autocorrelación cuando los términos de la perturbación aleatoria correspondientes a diferentes observaciones están correlacionados, es decir:

$$\mathrm{cov}(u_i u_j) \neq 0, \forall\, i \neq j$$

ii.1. DETECCIÓN DE LA AUTOCORRELACIÓN

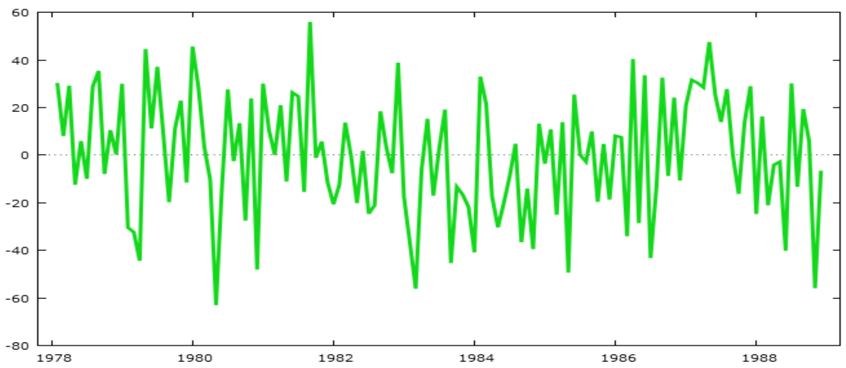
ii.1.1. ANÁLISIS GRÁFICO

- Gráficos de los residuos

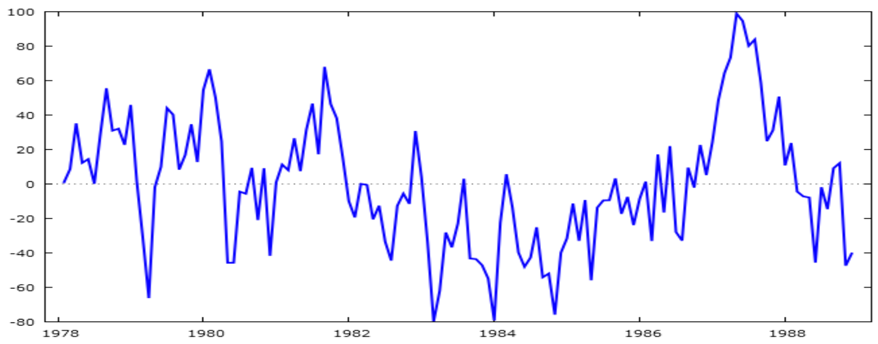
Ejemplos: Si en el modelo:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \ldots + \beta_k X_{kt} + u_t = \mathbf{x}_t'\boldsymbol{\beta} + u_t$$

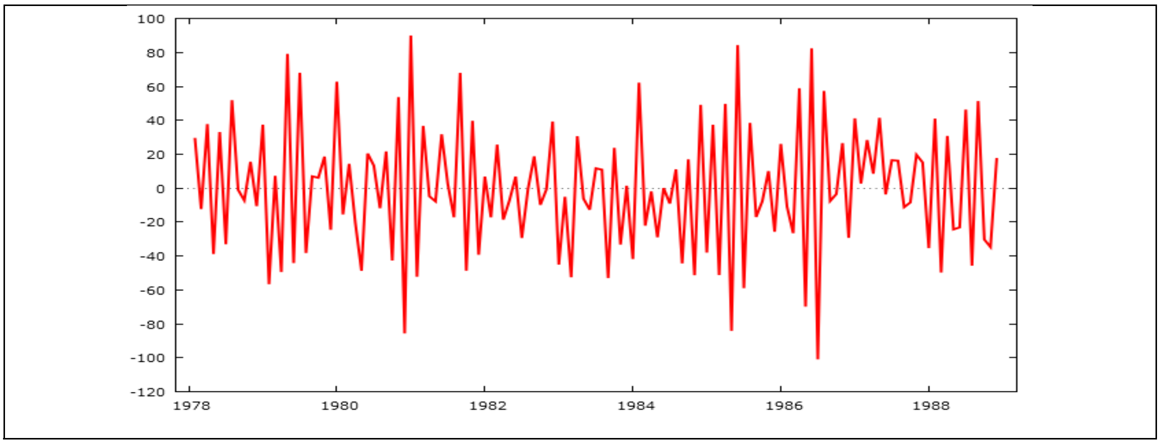
$u_t \sim ARMA(0,0)$ o RuidoBlanco $\rightarrow$ Sin autocorrelación



$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t \quad con\ \rho > 0 \rightarrow$ Autocorrelación positiva



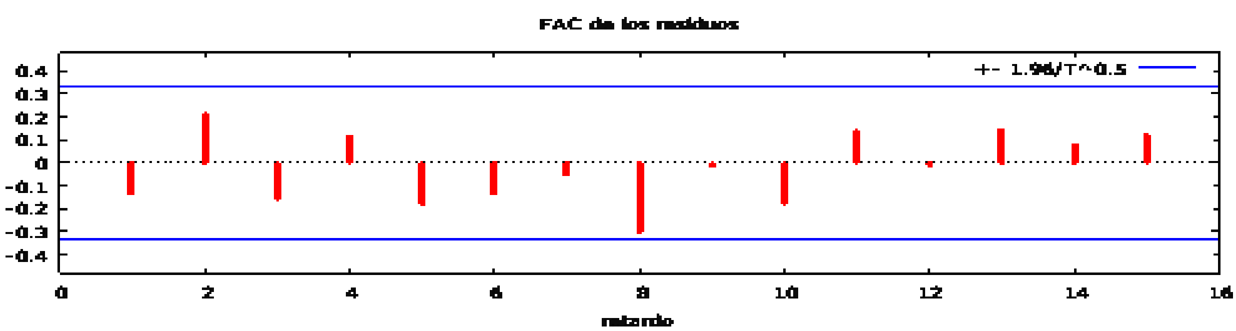
$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t \quad con\ \rho < 0 \rightarrow$ Autocorrelación negativa



- Correlogramas

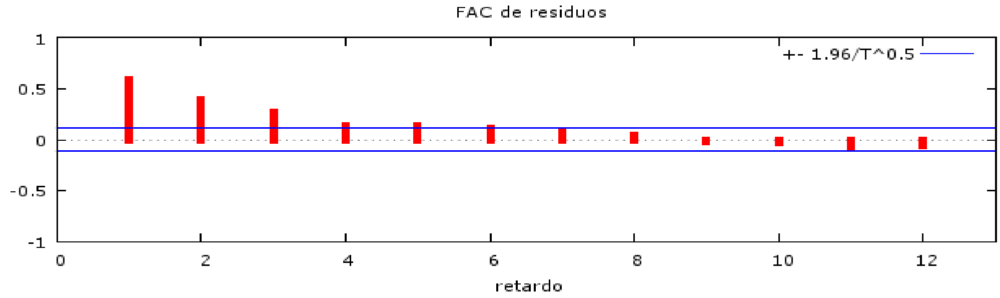
Si no existe autocorrelación los valores de la Función de Autocorrelación de la serie de residuos del modelo objeto de análisis [FACM($\hat{u}$)], deben ser no significativos (se acepta que son cero estadísticamente). Es decir, todos deben estar dentro de las bandas azules→ Si algún valor supera las bandas, entonces diremos que hay autocorrelación porque los residuos no son ruido blanco (ARMA(0,0)).

Ejemplo residuos sin autocorrelación (Ruido Blanco):

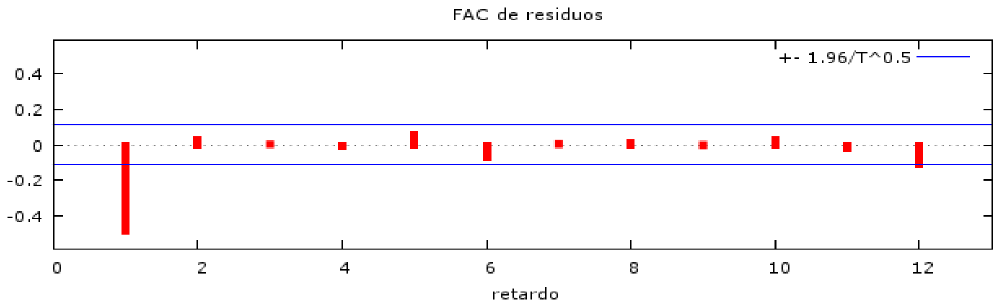


Ejemplo de residuos con autocorrelación:

Ejm 1, Orden 1: AR(1): $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$



Ejm 2: Orden 1: MA(1): $u_t = \varepsilon_t + \rho \varepsilon_{t-1}$.



ii.1.2. CONTRASTE DE DURBIN-WATSON

Desarrollan un contraste de autocorrelación bajo el supuesto:

$$Y_t = \mathbf{x}_t' \boldsymbol{\beta} + u_t$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t, \qquad |\rho| < 1$$

i) Hipótesis nula y alternativa

$$H_0 : \rho = 0$$

$H_A^+ : \rho > 0 \quad H_A^- : \rho < 0$

ii) Construcción del estadístico

1. Se estima el modelos original y se obtienen los residuos $\hat{u}_t$ y sus retardos $\hat{u}_{t-1}$

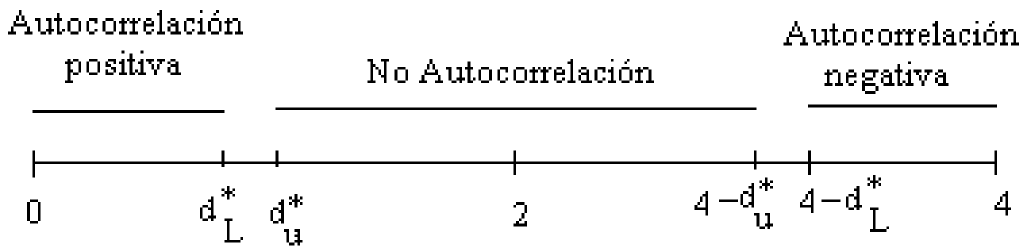
2. El cálculo exacto del estadístico es:

$$\boxed{d = \frac{\sum_{t=2}^{T} (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t^2}}$$

Pero normalmente se calcula: $\boxed{d = 2(1 - \hat{\rho})}$

donde: $$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^{T} \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t^2}$$

iii) Estrategia de contraste



NOTAS:

Ventajas:

- Es un contraste EXACTO

Inconvenientes:

- Papel de la constante
- Sólo contrasta AR(1)
- Las variables explicativas deben ser no estocásticas
- Zonas de indeterminación
- Problemas de potencia en modelos dinámicos

2.1.3. CONTRASTE h DE DURBIN

Suponiendo un modelo dinámico

$$Y_t = \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 Y_{t-2} + \ldots + \beta_r Y_{t-r} + \beta_{r+1} X_{1t} + \ldots + \beta_k X_{k-r,t} + u_t$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t, \quad |\rho| < 1$$

i) Hipótesis nula y alternativa

$$H_0 : \rho = 0$$

$$H_A^+ : \rho > 0 \qquad H_A^- : \rho < 0$$

ii) Construción del estadístico

El contraste *h* de Durbin:

$$h = \hat{\rho}\sqrt{\frac{T}{1 - TV\hat{a}r(\hat{\beta}_1)}} \underset{as}{\sim} N(0,1)$$

iii) Estrategia del contraste. Fijado un nivel de significación ε :

$0 \leq h \leq N_{\varepsilon} \quad \Rightarrow$ aceptación de la hipótesis nula de no autocorrelación frente a la hipótesis alternativa de autocorrelación positiva.

$h > N_{\varepsilon} \quad \Rightarrow$ autocorrelación positiva.

$-N_{\varepsilon} \leq h \leq 0 \Rightarrow$ aceptación de la hipótesis nula de no autocorrelación frente a la hipótesis alternativa de autocorrelación negativa.

$h < -N_{\varepsilon} \quad \Rightarrow$ autocorrelación negativa.

ii.1.4. CONTRASTE LM DE BREUSCH-GODFREY

Puede aplicarse a modelos ESTÁTICOS O DINÁMICOS

<u>ESTÁTICO:</u> $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + ... + \beta_k X_{kt} + u_t$ (1)

$$\begin{cases} u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + ... + \rho_p u_{t-p} + \varepsilon_t \\ u_t = \varepsilon_t - \rho_1 \varepsilon_{t-1} + \rho_2 \varepsilon_{t-2} + ... + \rho_p \varepsilon_{t-p} \end{cases}$$

i) Hipótesis nula y alternativa

$$H_0 : \rho_1 = ... = \rho_p = 0 \quad No\ autocorrelacion$$
$$H_1 : Autocorrelacion$$

ii) Construcción del estádistico:

1.- Estimar por MCO (1) y obtener los residuos $\hat{u}_t$

2.- Calcular el R^2 de la siguiente regresión:

$$\hat{u}_t = \alpha_1 + \alpha_2 X_{2t} + \ldots + \alpha_k X_{kt} + \alpha_{k+1}\hat{u}_{t-1} + \ldots + \alpha_{k+p}\hat{u}_{t-p} + \eta_t$$

que lo denotaremos R^2 (X, $\hat{u}$)

3.- Cálculo del estadístico: $LM_p = TR^2\left(X, \hat{u}\right) \underset{as}{\sim} \chi^2(p)$

Este estadístico puede expresarse como: $LM_p = T\sum_{j=1}^{p} r_j^2 \underset{as}{\sim} \chi^2(p)$

Siendo r_j el coeficiente de autocorrelación de orden j de los residuos MCO de (1)

DINÁMICO:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \ldots + \beta_k X_{kt} + \gamma_1 Y_{t-1} + \gamma_2 Y_{t-2} + \ldots . \gamma_r Y_{t-r} + u_t \qquad (2)$$

$$\begin{cases} u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \ldots + \rho_p u_{t-p} + \varepsilon_t \\ u_t = \varepsilon_t - \rho_1 \varepsilon_{t-1} + \rho_2 \varepsilon_{t-2} + \ldots + \rho_p \varepsilon_{t-p} \end{cases}$$

i) Hipótesis nula y alternativa

$$H_0 : \rho_1 = \ldots = \rho_p = 0 \quad No\ autocorrelacion$$

$$H_1 : Autocorrelacion$$

ii) Construcción del estadístico

1.- Estimar por MCO (2) y obtener los residuos $\hat{u}_t$

2.- Calcular el R^2 de la siguiente regresión:

$$\hat{u}_t = \alpha_1 + \alpha_2 X_{2t} + \ldots + \alpha_k X_{kt} + \gamma_1 Y_{t-1} + \gamma_2 Y_{t-2} + \ldots . \gamma_r Y_{t-r} + \alpha_{k+1}\hat{u}_{t-1} + \ldots + \alpha_{k+p}\hat{u}_{t-p} + \eta_t$$

que lo denotaremos R^2 (X, $\hat{u}$)

3.- Cálculo del estadístico: $LM_p = TR^2\left(X, \hat{u}\right) \underset{as}{\sim} \chi^2(p)$

iii.- NORMALIDAD

Suponemos que la perturbación del modelo sigue una distribución normal.

iii.1. CONTRASTE DE NORMALIDAD: JARQUE-BERA

i) Hipótesis nula y alternativa

H_0 : *NORMALIDAD*

H_1 : *NO NORMALIDAD*

i) Cálculo del estadísitico

$$\boxed{JB = T\left[\frac{g_1^{\ 2}}{6} + \frac{g_2^{\ 2}}{24}\right] \underset{as}{\sim} \chi^2(2)}$$

Donde g_1 y g_2 son los coeficientes de asimetría y curtosis de los residuos MCO, respectivamente:

$$g_1 = \frac{\sum \hat{u}_t^3}{\tilde{\sigma}^3}; \quad g_2 = \frac{\sum \hat{u}_t^4}{\tilde{\sigma}^4} - 3$$

ii) Estrategia de contraste. Fijado un nivel de significación ε.

$JB \leq \chi^2_{\varepsilon}(2) \Rightarrow$ No rechazo de la hipótesis nula de normalidad

$JB > \chi^2_{\varepsilon}(2) \Rightarrow$ rechazo de la hipótesis nula de normalidad