CAPÍTULO 7
Ejercicio 7.1

Suponer el siguiente modelo:

$$y_t = \beta + u_t$$

en donde β es un parámetro.

1). Definir el predictor óptimo para un periodo y dos periodos hacia delante suponiendo que u_t es un ruido blanco. Obtener la esperanza y varianza de los correspondientes errores de predicción.

2). Repetir lo indicado en 1) suponiendo ahora que u_t es un proceso de medias móviles de orden 1.

3). Definir una predicción por intérvalo un periodo hacia delante suponiendo que u_t es un ruido blanco N(0 , 1).

4). Derivar la esperanza y varianza del predictor MCO y del error de predicción suponiendo que u_t es un ruido blanco.

Solución

1). El predictor óptimo para cualquier horizonte de predicción,h , viene dado por (demostrar este resultado):

$$\hat{y}_T(h) = E(y_{T+h} / I_T)$$

Aplicando esta fórmula a nuestro enunciado resulta,

$$\hat{y}_T(h) = \beta \quad \text{para todo h.}$$

El error de predicción será

$$e_T(h) = y_{T+h} - \hat{y}_T(h) = u_{T+h}$$

Las propiedades se derivan de forma inmediata.

2). Si $u_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$, el predictor será,

$$\hat{y}_T(h) = \beta + E(u_{T+h} / I_T)$$

En este caso, $e_T(1)$ y $e_T(2)$ no coinciden.

3). Por ser $e_T(1) \approx N(0, \sigma^2)$, el intérvalo será

$$\beta \pm N_{\frac{\varepsilon}{2}} \sigma$$

4). El predictor MCO es

$\hat{y}_T(1) = \hat{\beta} = \bar{y}$ por lo que las propiedades del predictor seran las propiedades de la media(derivar estas propiedades).El error de predicción MCO es,

CAPÍTULO 7
Ejercicio 7.1

$$\hat{e}_T(1) = \beta + u_{T+1} - \beta - \bar{u}$$

derivandose los momentos de forma directa.

Ejercicio 7.2

Suponer que el PGD viene dado por:

$$y_t = .5y_{t-1} + u_t$$

en donde u_t es un ruido blanco.

1). Para uno y dos periodos hacia delante definir los predictores óptimos.

2). Definir los correspondientes errores de predicción y derivar la esperanza y varianza de estos errores.

3). Derivar el predictor óptimo para el periodo T+h haciendo $h \to \infty$. Obtener para este caso el error de predicción, su media y su varianza.

Solución

1). El predictor óptimo se define como,

$$\hat{y}_T(h) = E(y_{T+h} / I_T)$$

Por ejemplo,

$$\hat{y}_T(2) = 0{,}5^2 y_T$$

2). Los errores de predicción son:

$$e_T(1) = u_{T+1}$$

$$e_T(2) = u_{T+2} + 0{,}5u_{T+1}$$

Las propiedades estocásticas de estos dos errores se derivan de forma inmediata.

3). El predictor sería

$\hat{y}_T(h) = 0{,}5^h y_T$ y el error de predicción,

$$e_T(h) = \sum_{i=0}^{\infty} 0{,}5^i u_{T+h-i}$$

Por lo que la esperanza del error es cero y la varianza es igual a:

$$Var(e_T(h)) = \frac{\sigma^2}{0{,}75}$$

CAPÍTULO 7
Ejercicio 7.3

Demostrar que el error de predicción definido a partir de un modelo econométrico puede descomponerse en cinco componentes . Interpretar cada uno de ellos e indicar como puede relativizarse la importancia de los mismos.

Solución

Puede encontrarse la solución al final del Capítulo 0.

Ejercicio 7.4

Para el modelo con un regresor:

$$y_t = \beta x_t + u_t$$

en donde u es un ruido blanco. Utilizando las observaciones muestrales, los errores de predicción MCO para T+1 y T+2 hechos en T y en T+1 respectivamente, son los siguientes:

$$e_T(1) = y_{T+1} - \hat{\beta}_1 x_{T+1}$$

$$e_{T+1}(1) = y_{T+2} - \hat{\beta}_2 x_{T+2}$$

en donde $\hat{\beta}_1$ es el estimador MCO utilizando información hasta T y $\hat{\beta}_2$ es el estimador con información hasta T+1. Se pide:

1). La esperanza de $e_T^2(1)$.

2). La varianza de $e_{T+1}^2(1)$.

3). Demostrar la independencia de $e_T(1) y e_{T+1}(1)$.

Solución

1) y 2). Podemos escribir,

$$e_T(1) = y_{T+1} - \hat{y}_T(1) = u_{T+1} - \frac{\sum x_t u_t}{\sum x_t^2} x_{T+1}$$

Suponiendo normalidad, se tiene que,

$$e_T(1) \approx N(0, \sigma^2(1 + \frac{x_{T+1}^2}{\sum x_t^2}))$$

A partir de los resultados anteriores se llega a:

$$\left(\frac{e_T(1)}{\sigma (1 + \frac{x_{T+1}^2}{\sum x_t^2})^{\frac{1}{2}}} \right)^2 \approx \chi^2(1)$$

CAPÍTULO 7
Ejercicio 7.4

Se puede escribir,

$$e_T(1)^2 = \sigma^2 (1 + \frac{x_{T+1}^2}{\sum x_t^2}) \chi^2(1)$$

A partir de esta expresión se puede obtener la esperanza y varianza de $e_T^2(1)$ usando $E\chi^2(1) = 1$ y $Var(\chi^2(1)) = 2$

3). Tener en cuenta que,

$$\hat{\beta}_1 = \beta + \frac{\sum x_t u_t}{\sum x_t^2}$$

$$\hat{\beta}_2 = \beta + \frac{\sum x_t u_t + x_{T+1} u_{T+1}}{\sum x_t^2 + x_{T+1}^2}$$

A partir de estas expresiones tenemos,

$$Cov(e_T(1), e_{T+1}(1)) = E(e_T(1) e_{T+1}(1)) = E\left[(u_{T+1} - \frac{\sum x_t u_t}{\sum x_t^2} x_{T+1})(u_{T+2} - \frac{\sum x_t u_t + x_{T+1} u_{T+1}}{\sum x_t^2 + x_{T+1}^2} x_{T+2}) \right]$$

Teniendo en cuenta que las u son ruidos blancos, se tiene que

$$Cov(e_T(1), e_{T+1}(1)) = E\left[(\frac{\sum x_t u_t}{\sum x_t^2} x_{T+1})(\frac{\sum x_t u_t}{\sum x_t^2 + x_{T+1}^2} x_{T+2}) - (u_{T+1}) \frac{x_{T+1} u_{T+1}}{\sum x_t^2 + x_{T+1}^2} x_{T+2}) \right] = 0$$

Ejercicio 7.5

Suponer dos modelos:

M1: $y_t = \beta_1 x_{1t} + u_{1t}$

M2: $y_t = \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + u_{2t}$

en donde u_{1t} y u_{2t} son ruidos blancos. Sean e_{p1} y e_{p2} los errores de predicción MCO de ambos modelos para un periodo extramuestral.Obtener:

1). Ee_{p1} y Ee_{p2} suponiendo que el PGD es M2.

2). Ee_{p2} suponiendo que genera los datos M1.

CAPÍTULO 7
Ejercicio 7.5

3). $E(e_{p1}^2 - e_{p2}^2)$ generando los datos M2.

4). $Var(e_{p1}^2)$ y $Var(e_{p2}^2)$ generando los datos M2.

Solución

1). Sea x_1 el vector de observaciones de la variable incluida en el primer modelo y sea X la matriz de observaciones de las dos variables incluidas en el segundo modelo. Tendremos,

$$e_{p1} = y_{p1} - \hat{\beta}_1 x_{p1}$$

$$Ee_{p1} = \beta_2 x_{p2} - B_{12}\beta_2 x_{p2} = h_{12p}$$

Para el segundo modelo se tiene que,

$$e_{p2} = y_p - x_p^{'}\beta - x_p^{'}(X^{'}X)^{-1}X^{'}u_2 = u_{p2} - x_p^{'}(X^{'}X)^{-1}X^{'}u_2$$

por lo que,

$$Ee_{p2} = 0\,.$$

2). Si genera el primer modelo se tiene que

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ 0 \end{pmatrix} + (X^{'}X)^{-1}X^{'}u_1$$

por lo que la esperanza sigue siendo cero.

CAPÍTULO 7
Ejercicio 7.5

3). Resultado general de la Teoria Estadística. Para una distribución $\chi^2(k,\lambda^2)$, en donde k son los grados de libertad y λ^2 es el parámetro de no centralidad, se tiene que:

$$E\chi^2(k,\lambda^2) = k + \lambda^2$$

$$Var(\chi^2(k,\lambda^2) = 2(k + 2\lambda^2)$$

Veamos como aplicar estos resultados a nuestro ejercicio; Si genera los datos el segundo modelo se tiene que,

$$e_{p1}^2 = (\sigma_2^2(1+\frac{x_{p1}^2}{\sum x_{1t}^2}))\chi^2(1,\frac{h_{12p}^2}{\sigma_2^2(1+\frac{x_{p1}^2}{\sum x_{1t}^2})})$$

A partir de esta expresión, los resultados que se piden para e_{p1}^2 se obtienen de forma inmediata. Para e_{p2}^2 los resultados se obtienen a partir de:

$$\frac{e_{p2}^2}{\sigma_2^2(1+x_p^{'}(X^{'}X)^{-1}x_p} \approx \chi^2(1)$$

Ejercicio 7.6

Sean A_t y P_t los valores observados y predichos.El Error Cuadrático Medio de Predicción lo definimos como:

ECMP=$\frac{1}{T}\sum(A_t - P_t)^2$

CAPÍTULO 7
Ejercicio 7.6

Demostrar que este estadístico puede escribirse, alternativamente, como:

$$\text{ECM}=(\overline{P}-\overline{A})^2+(1-R_{AP}^2)\sigma_A^2+(1-\hat{\beta})^2\sigma_P^2$$

o bien como:

$$\text{ECM}=(\overline{P}-\overline{A})^2+2(1-R_{AP})\sigma_A\sigma_P+(\sigma_p-\sigma_A)^2$$

en donde $\overline{A}$ y $\overline{P}$ son las medias de los valores observados y predichos, respectivamente; $\sigma_A^2 y \sigma_P^2$ son las respectivas varianzas; R_{AP} es el coeficiente de correlación entre ambas variables y $\hat{\beta}$ es el estimador MCO de β en el modelo:

$$A_t=\alpha+\beta P_t+u_t$$

Solución

Genéricamente podemos escribir,

$$\overline{A}=\frac{\sum A_t}{T} \quad ; \quad \sigma_A^2=\frac{\sum A_t^2}{T}-\overline{A}^2$$

$$\sigma_{AP}=\frac{\sum A_tP_t}{T}-\overline{A}\overline{P} \quad ; \quad R_{AP}=\frac{\sigma_{AP}}{\sigma_A\sigma_P}; \quad \hat{\beta}=\frac{\sigma_{AP}}{\sigma_P^2}$$

El ECM puede escribirse como:

$$ECM=\frac{\sum(A_t-P_t)^2}{T}=\frac{1}{T}\sum A_t^2+\frac{1}{T}\sum P_t^2-\frac{2}{T}\sum A_tP_t$$

sumando y restando $\overline{A}^2$, $\overline{P}^2$ y $2\overline{A}\overline{P}$ y agrupando términos se obtiene,

$$ECM=(\overline{A}-\overline{P})^2+\sigma_A^2+\sigma_P^2-2\sigma_{AP}$$

Al primer resultado se llega sumando y restando $\hat{\beta}\sigma_{AP}$.

Al segundo resultado se llega sumando y restando $2\sigma_A\sigma_P$

Ejercicio 7.8

Suponer que y_t está generada por un modelo ARIMA (p, d),siendo la media del modelo ARMA igual a cero. Para un horizonte temporal de pre-

dicción igual a h= 1, 2 y 4 periodos obtener el predictor óptimo y el correspondiente error de predicción, su media y varianza en los siguientes casos:

CAPÍTULO 7
Ejercicio 7.8

1). d=1, p=0, q=0.
2). d=1,p=0, q=1.
3). d=1,p=1, q=0.
4). d=1,p=1, q=1.

Solución

1).El proceso puede escribirse como:

$$\Delta y_t = \varepsilon_t$$

Para el horizonte h el predictor es:

$$\hat{y}_T(h) = y_T$$

y el error de predicción

$$e_T(h) = \varepsilon_{T+1} + ... + \varepsilon_{T+h}$$

Los momentos se obtienen de forma directa.

2). El modelo puede escribirse como,

$$\Delta y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

y los predictores y errores de predicción

$$\hat{y}_T(1) = y_T - \theta_1 \varepsilon_T \quad ; \quad e_T(1) = \varepsilon_{T+1}$$

$$\hat{y}_T(2) = \hat{y}_T(1) \;\; ; \;\; e_T(2) = \varepsilon_{T+1} + \varepsilon_{T+2} - \theta_1 \varepsilon_{T+1}$$

$$\hat{y}_T(3) = \hat{y}_T(2) \;\; ; \;\; e_T(3) = e_T(2) + \varepsilon_{T+3} - \theta_1 \varepsilon_{T+2}$$

y,en general:

$$\hat{y}_T(h) = \hat{y}_T(h-1) + \varepsilon_{T+h} - \theta_1 \varepsilon_{T+h-1}$$

3). El modelo es

$\Delta y_t = \phi \Delta y_{t-1} + \varepsilon_t$ o bien $y_t = (1+\phi) y_{t-1} - \phi y_{t-2} + \varepsilon_t$

Los predictores y errores de predicción son

$$\hat{y}_T(1) = (1+\phi) y_T - \phi y_{T-1} \;\; ; \quad e_T(1) = \varepsilon_{T+1}$$

$$\hat{y}_T(2) = (1+\phi)\hat{y}_T(1) - \phi y_T \quad ; \;\; e_T(2) = (1+\phi) e_T(1) + \varepsilon_{T+2}$$

y, en general,

$$\hat{y}_T(h) = (1+\phi)\hat{y}_T(h-1) - \phi \hat{y}_T(h-2) \;\; ;$$

$$e_T(h) = (1+\phi) e_T(h-1) - \phi e_T(h-2) + \varepsilon_{T+h}$$

Los momentos se obtienen de forma directa.

4). El modelo puede escribirse como:

$$\Delta y_t = \phi \Delta y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

Para $h \geq 2$ el predictor y el error de predicción son

CAPÍTULO 7
Ejercicio 7.8

$$\hat{y}_T(h) = (1+\phi)\hat{y}_T(h-1) - \phi\hat{y}_T(h-2)$$

$$e_T(h) = (1+\phi)e_T(h-1) - \phi e_T(h-2) + \varepsilon_{T+h} - \theta_1\varepsilon_{T+h-1}$$

Teniendo en cuenta que,

$$\hat{y}_T(1) = (1+\phi)y_T - \phi y_{T-1} - \theta_1\varepsilon_T\,; \quad e_T(1) = \varepsilon_{T+1}\,.$$