PUBLICACIONES DE 4er CURSO

Grado: Economía

Asignatura: ECONOMETRÍA III

Tema 4: Variables no Estacionarias
Apartado 4.3: Formas de los Modelos: Modelos VAR y MCE

Grupos: 241, 242

Profesores: Antonio Aznar y M. Teresa Aparicio

Departamento de ANÁLISIS ECONÓMICO

Curso Académico 2014/15

Facultad de
Economía y Empresa
Universidad Zaragoza

ECONOMETRIA-III
FORMAS DE LOS MODELOS

1. Introducción

Partimos de dos variables, y_{1t} e y_{2t}, y se trata de conocer como especificar el modelo que explica la variable y_{1t} en función de la variable y_{2t}.Para llegar a esta especificación, hay que partir de lo que dice la teoría económica y de los resultados del análisis del orden de integración y de cointegración explicados en los apartados anteriores. Aunque el análisis lo limitamos a dos variables la extensión al caso general de k variables es inmediata.

A partir del análisis gráfico de las dos series podemos distinguir tres casos:

- Ninguna de las dos series tiene tendencia lineal
- Una de ellas tiene tendencia lineal
- Las dos tienen tendencia lineal

Dentro de cada uno de estos casos podemos distinguir subclases según sea el resultado de los contrastes del orden de integración y de contegración. Podemos distinguir tres dentro de cada uno de los tres anteriores:

- Ninguna de las dos series tienen tendencia estocástica, es decir, las dos son integradas de orden cero, son I(0).
- Sólo una de las dos tiene tendencia estocástica, es decir, es I(1).
- Las dos tienen tendencia estocástica, es decir, las dos son I(1).

En general, si una variable tiene una tendencia, del tipo que sea, y no está cointegrada con la de la otra variable, lo primero que hay que hacer es extraer esa tendencia y seguir en el proceso de especificación con la variable sin tendencia, es decir, con el residuo. Y teniendo en cuenta que el concepto de cointegración se ha desarrollado para relacionar las tendencias estocásticas, si una serie tiene tendencia determinista lo primero que se hace es eliminar su presencia y seguir el proceso de especificación con los residuos de la misma.

La forma correcta de extraer la tendencia determinista es mediante la regresión por MCO de la variable correspondiente sobre la variable tiempo. Sea el modelo,

$$y_{it} = \delta_{0i} + \delta_{1i} t + v_{it} \qquad i = 1,2 \qquad (4.3.1)$$

Entonces, la serie sin tendencia se define como,

$$\hat{v}_{it} = \hat{y}_{it} - \hat{\delta}_{0i} - \hat{\delta}_{1i} t \qquad (4.3.2)$$

En donde $\hat{\delta}_{0i}$ y $\hat{\delta}_{1i}$ son los estimadores MCO definidos como

$$\begin{bmatrix} \hat{\delta}_{0i} \\ \hat{\delta}_{1i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & \sum t \\ \sum_{1}^{T} t & \sum_{1}^{T} t^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{1}^{T} y_{it} \\ \sum_{1}^{T} t y_{it} \end{bmatrix}$$

El proceso de especificación sigue utilizando $\hat{v}_{it}$ en lugar de y_{it}, i=1,2.

En el caso en que la serie tenga una tendencia estocástica, en tonces el procedimiento más adecuado para extraer la tendencia consiste en tomar la primera diferencia de la serie. Cuando la serie no tiene tendencia determinista el resultado es

$$\Delta y_{it} = \Delta v_{it}$$

En el caso en la serie tenga tendencia determinista el resultado es

$$\Delta y_{it} = \delta_{1i} + \Delta v_{it}$$

Notar que en el análisis anterior solo se considera la posibilidad de una tendencia lineal y un orden de integración igual a uno. Al final de este apartado extenderemos el análisis a los casos de una tendencia cuadrática y a órdenes de integración superiores a uno.

2. Modelos VAR y MCE

Supongamos dos variables, y_{1t} e y_{2t} , integradas de orden 1. Suponemos que no tienen tendencia determinista.

Consideremos la siguiente estructura:

$$y_{1t} = \beta y_{2t} + u_{1t} \qquad (4.3.3)$$

$$\Delta y_{2t} = u_{2t} \qquad (4.3.4)$$

$$u_{1t} = a_{111}u_{1t-1} + a_{112}u_{1t-2} + a_{121}u_{2t-1} + \varepsilon_{1t} \qquad (4.3.5)$$

$$u_{2t} = a_{211}u_{1t-1} + a_{212}u_{1t-2} + a_{221}u_{2t-1} + \varepsilon_{2t} \qquad (4.3.6)$$

ε_{1t} y ε_{2t} son dos variables estacionarias idénticamente e independientemente distribuidas como:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix} \sim N\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\right] \qquad (4.3.7)$$

La primera relación escrita en (4.3.3) corresponde a la relación de cointegración entre las dos variables, siendo β el efecto a largo plazo de y_{2t} sobre y_{1t}.

Utilizando (4.3.3), (4.3.4) y (4.3.5) se obtiene:

$$(y_{1t} - \beta y_{2t}) = a_{111}(y_{1t-1} - \beta y_{2t-1}) + a_{112}(y_{1t-2} - \beta y_{2t-2})$$
$$+ a_{121}(y_{2t-1} - y_{2t-2}) + \varepsilon_{1t}$$

de donde resulta:

$$\begin{aligned} y_{1t} = {} & a_{111}y_{1t-1} + a_{112}y_{1t-2} + \beta y_{2t} + (a_{121} - \beta a_{111})y_{2t-1} - \\ & - (a_{121} + \beta \rho_{112})y_{2t-2} + \varepsilon_{1t} \end{aligned} \qquad (4.3.8)$$

Esta es una relación en la que el valor de la variable y_{1t} se explica en función del valor contemporáneo de la variable y_{2t} y de los valores pasados de ambas variables.

A partir de (4.3.3), (4.3.4) y (4.3.6) se obtiene:

$$\begin{aligned} y_{2t} = {} & a_{211}y_{1t-1} + a_{212}y_{1t-2} + (1 - \beta a_{211} + a_{221})y_{2t-1} - \\ & - (a_{221} + \beta a_{212})y_{2t-2} + \varepsilon_{2t} \end{aligned} \qquad (4.3.9)$$

Sustituyendo en (4.3.8) a y_{2t} por la expresión escrita en (4.3.9) se obtiene:

$$\begin{aligned} y_{1t} &= (a_{111} + \beta a_{211}) y_{1t-1} + (a_{112} + \beta a_{212}) y_{1t-2} + \\ &\quad + [\beta(1 - \beta a_{211} + a_{221}) + (a_{121} - \beta a_{111})] y_{2t-1} - \\ &\quad - [\beta(a_{221} + \beta a_{212}) + (a_{121} + \beta a_{112})] y_{2t-2} + \varepsilon_{1t} + \beta \varepsilon_{2t} \end{aligned} \qquad (4.3.10)$$

En forma más compacta las expresiones (4.3.10) y (4.3.9) pueden escribirse como:

$$y_{1t} = \phi_{111} y_{1t-1} + \phi_{112} y_{1t-2} + \phi_{121} y_{2t-1} + \phi_{122} y_{2t-2} + v_{1t} \qquad (4.3.11)$$

$$y_{2t} = \phi_{211} y_{1t-1} + \phi_{212} y_{1t-2} + \phi_{221} y_{2t-1} + \phi_{222} y_{2t-2} + v_{2t} \qquad (4.3.12)$$

Estas son las relaciones de un modelo VAR bivariante con 2 retardos. En general, puede hablarse de un modelo VAR n-variante con p retardos.

Es importante destacar que:

$$\frac{\phi_{121} + \phi_{122}}{1 - \phi_{111} - \phi_{112}} = \beta \qquad (4.3.13)$$

y también:

$$\frac{1 - \phi_{221} - \phi_{222}}{\phi_{211} + \phi_{212}} = \beta \qquad (4.3.14)$$

Una forma alternativa de escribir (4.3.11) es la siguiente:

$$\begin{aligned} \Delta y_{1t} &= (\phi_{111} - 1) y_{1t-1} + \phi_{112} y_{1t-2} + \phi_{121} y_{2t-1} + \phi_{122} y_{2t-2} + v_{1t} = \\ &= (\phi_{111} + \phi_{112} - 1) y_{1t-1} - \phi_{112} \Delta y_{1t-1} + (\phi_{121} + \phi_{122}) y_{2t-1} - \phi_{122} \Delta y_{2t-1} + v_{1t} = \\ &= - \phi_{112} \Delta y_{1t-1} - \phi_{122} \Delta y_{2t-1} + (\phi_{111} + \phi_{112} - 1) \left(y_{1t-1} - \frac{\phi_{121} + \phi_{122}}{1 - \phi_{111} - \phi_{112}} y_{2t-1} \right) + v_{1t} \end{aligned} \qquad (4.3.15)$$

De la misma forma, (4.3.12) puede escribirse como:

$$\begin{aligned}\Delta y_{2t} &= (\phi_{211}+\phi_{212})y_{1t-1} - \phi_{212}\Delta y_{1t-1} + (\phi_{221}+\phi_{222}-1)y_{2t-1} - \\ &- \phi_{222}\Delta y_{2t-1} + v_{2t} = -\phi_{212}\Delta y_{1t-1} - \phi_{222}\Delta y_{2t-1} + \\ &+ (\phi_{211}+\phi_{212})\left(y_{1t-1} - \frac{1-\phi_{221}-\phi_{222}}{\phi_{211}+\phi_{212}}y_{2t-1}\right) + v_{2t}\end{aligned} \qquad (4.3.16)$$

Teniendo en cuenta (4.3.13) y (4.3.14), las relaciones (4.3.15) y (4.3.16) pueden escribirse como:

$$\Delta y_{1t} = \phi^{*}_{111}\Delta y_{1t-1} + \phi^{*}_{121}\Delta y_{2t-1} + \alpha_1(y_{1t-1} - \beta y_{2t-1}) + v_{1t} \quad (4.3.17)$$

$$\Delta y_{2t} = \phi^{*}_{211}\Delta y_{1t-1} + \phi^{*}_{221}\Delta y_{2t-1} + \alpha_2(y_{1t-1} - \beta y_{2t-1}) + v_{2t} \quad (4.3.18)$$

Estas son las dos relaciones del modelo con mecanismo de corrección de error (MCE). Destacar que, en este modelo, todas las variables son estacionarias. Destacar también, y sobre este punto volveremos después, que el modelo escrito en (4.3.17) y (4.3.18) es una versión restringida del modelo VAR escrito en (4.3.11) y (4.3.12) incorporando las restricciones escritas en (4.3.13) y (4.3.14).

Cuando en el modelo no hay cointegración, la especificación correcta es el modelo VAR en primeras diferencias que podemos escribir como,

$$\Delta y_{1t} = \phi^{*}_{111}\Delta y_{1t-1} + \phi^{*}_{121}\Delta y_{2t-1} + u_{1t} \qquad (4.3.19)$$

$$\Delta y_{2t} = \phi^{*}_{211}\Delta y_{1t-1} + \phi^{*}_{221}\Delta y_{2t-1} + u_{2t} \qquad (4.3.20)$$

Resumiendo, podemos escribir

Forma Estructural:

$$y_{1t} = \beta y_{2t} + u_{1t} \qquad (4.3.3)$$

$$\Delta y_{2t} = u_{2t} \qquad (4.3.4)$$

$$u_{1t} = a_{111}u_{1t-1} + a_{112}u_{1t-2} + a_{121}u_{2t-1} + \varepsilon_{1t} \qquad (4.3.5)$$

$$u_{2t} = a_{211}u_{1t-1} + a_{212}u_{1t-2} + a_{221}u_{2t-1} + \varepsilon_{2t} \qquad (4.3.6)$$

Forma Reducida sin restricciones (VAR en niveles)

$$y_{1t} = \phi_{111}y_{1t-1} + \phi_{112}y_{1t-2} + \phi_{121}y_{2t-1} + \phi_{122}y_{2t-2} + v_{1t} \quad (4.3.11)$$

$$y_{2t} = \phi_{211}y_{1t-1} + \phi_{212}y_{1t-2} + \phi_{221}y_{2t-1} + \phi_{222}y_{2t-2} + v_{2t} \quad (4.3.12)$$

Forma Reducida Con Restricciones (MCE)

$$\beta = \frac{\phi_{121} + \phi_{122}}{1 - \phi_{111} - \phi_{112}} = \frac{1 - \phi_{221} - \phi_{222}}{\phi_{211} + \phi_{212}}$$

$$\Delta y_{2t} = \phi^{*}_{211}\Delta y_{1t-1} + \phi^{*}_{221}\Delta y_{2t-1} + \alpha_2\left(y_{1t-1} - \beta y_{2t-1}\right) + v_{2t} \quad (4.3.17)$$

$$\Delta y_{2t} = \phi^{*}_{211}\Delta y_{1t-1} + \phi^{*}_{221}\Delta y_{2t-1} + \alpha_2\left(y_{1t-1} - \beta y_{2t-1}\right) + v_{2t} \quad (4.3.18)$$

Modelo VAR en primeras diferencias

$$\Delta y_{1t} = \phi^{*}_{111}\Delta y_{1t-1} + \phi^{*}_{121}\Delta y_{2t-1} + u_{1t} \quad (4.3.19)$$

$$\Delta y_{2t} = \phi^{*}_{211}\Delta y_{1t-1} + \phi^{*}_{221}\Delta y_{2t-1} + u_{2t} \quad (4.3.20)$$

3. Formas de los Modelos para la Especificación

En esta sección vamos a estudiar las formas de los modelos que son apropiadas para los casos comentados en la Introducción.

3.1 **Ninguna de las series tiene tendencia determinista**

El modelo apropiado dependerá de si las series tienen o no tendencia estocástica.

3.1.1 **Ninguna de las dos series tiene tendencia estocástica**

Las variables no necesitan de ninguna transformación y el modelo adecuado es la primera relación del modelo VAR en niveles, escrito en (4.3.11), y que, para el caso general de p retardos, puede reescribirse como,

$$y_{1t} = \phi_0 + \phi_{111} y_{1t-1} + ... + \phi_{11p} y_{1t-p} + \phi_{121} y_{2t-1} + ... + \phi_{12p} y_{2t-p} + e_{1t} \tag{4.3.21}$$

Suponemos que la perturbación es un ruido blanco y es la misma que la v_{1t} escrita en (4.3.11).

3.1.2. Una de las dos variables tiene tendencia estocástica

Supongamos que la variable que tiene tendencia estocástica es y_{1t}. El modelo apropiado sería,

$$\Delta y_{1t} = \phi_0 + \phi_{111} \Delta y_{1t-1} + ... + \phi_{11p} \Delta y_{1t-p} + \phi_{121} y_{2t-1} + ... + \phi_{12p} y_{2t-p} + e_{1t} \tag{4.3.22}$$

3.1.2 **Las dos variables tienen tendencia estocástica**

En este caso hay que distinguir entre si las variables están cointegradas o no. Si las variables no están cointegradas el modelo apropiado es

$$\Delta y_{1t} = \phi_0 + \phi_{111} \Delta y_{1t-1} + ... + \phi_{11p} \Delta y_{1t-p} + \phi_{121} \Delta y_{2t-1} + ... + \phi_{12p} \Delta y_{2t-p} + e_{1t} \tag{4.3.23}$$

Si las variables están cointegradas, entonces el modelo apropiado es la primera relación del modelo MCE que reescribimos como

$$\begin{aligned} \Delta y_{1t} = {} & \phi_0 + \alpha_1 (y_{1t-1} - \beta y_{2t-1}) + \\ & \phi_{111} \Delta y_{1t-1} + ... + \phi_{11p-1} \Delta y_{1t-p+1} + \\ & \phi_{121} \Delta y_{2t-1} + ... + \phi_{12p-1} \Delta y_{2t-p+1} + e_{1t} \end{aligned} \tag{4.3.24}$$

3.2 **Una de las dos variables tiene tendencia determinista**

Sea y_{1t} la variable con tendencia determinista. Los modelos en esta sección son similares a los vistos en la sección anterior pero cambiando la variable y_{1t} original por sus residuos definidos en (4.3.2). Si ninguna de las variables tiene tendencia estocástica el modelo apropiado es,

$$\hat{v}_{1t} = \phi_0 + \phi_{111}\hat{v}_{1t-1} + ... + \phi_{11p}\hat{v}_{1t-p} + \phi_{121}y_{2t-1} + ... + \phi_{12p}y_{2t-p} + e_{1t} \tag{4.3.25}$$

Si la primera variable tiene también tendencia estocástica, entonces el modelo apropiado es,

$$\Delta\hat{v}_{1t} = \phi_0 + \phi_{111}\Delta\hat{v}_{1t-1} + ... + \phi_{11p}\Delta\hat{v}_{1t-p} + \phi_{121}y_{2t-1} + ... + \phi_{12p}y_{2t-p} + e_{1t} \tag{4.3.26}$$

Si la primera variable solo tiene tendencia determinista y la segunda solo tiene tendencia estocástica entonces el modelo apropiado es

$$\hat{v}_{1t} = \phi_0 + \phi_{111}\hat{v}_{1t-1} + ... + \phi_{11p}\hat{v}_{1t-p} + \phi_{121}\Delta y_{2t-1} + ... + \phi_{12p}\Delta y_{2t-p} + e_{1t} \tag{4.3.27}$$

Si las dos variables tuvieran tendencia estocástica y no estuvieran cointegradas, el modelo apropiado es,

$$\Delta\hat{v}_{1t} = \phi_0 + \phi_{111}\Delta\hat{v}_{1t-1} + ... + \phi_{11p}\Delta\hat{v}_{1t-p} + \phi_{121}\Delta y_{2t-1} + ... + \phi_{12p}\Delta y_{2t-p} + e_{1t} \tag{4.3.28}$$

Si las dos variables están cointegradas, entonces el modelo apropiado es

$$\begin{aligned} \Delta\hat{v}_{1t} = {} & \phi_0 + \alpha_1(\hat{v}_{1t-1} - \beta y_{2t-1}) + \\ & \phi_{111}\Delta\hat{v}_{1t-1} + ... + \phi_{11p-1}\Delta\hat{v}_{1t-p+1} + \\ & \phi_{121}\Delta y_{2t-1} + ... + \phi_{12p-1}\Delta y_{2t-p+1} + e_{1t} \end{aligned} \tag{4.3.29}$$

3.3 **Las dos variables tienen tendencia determinista**

Los modelos apropiados a cada situación son similares a los vistos en las dos secciones anteriores pero cambiando las variables originales por los residuos definidos en (4.3.2).

Si las variables no tienen tendencia estocástica el modelo apropiado es

$$\hat{v}_{1t} = \phi_0 + \phi_{111}\hat{v}_{1t-1} + ... + \phi_{11p}\hat{v}_{1t-p} + \phi_{121}\hat{v}_{2t-1} + ... + \phi_{12p}\hat{v}_{2t-p} + e_{1t} \tag{4.3.30}$$

Si la primera tiene tendencia estocástica pero no la segunda, el modelo es,

$$\Delta\hat{v}_{1t} = \phi_0 + \phi_{111}\Delta\hat{v}_{1t-1} + ... + \phi_{11p}\Delta\hat{v}_{1t-p} + \phi_{121}\hat{v}_{2t-1} + ... + \phi_{12p}\hat{v}_{2t-p} + e_{1t} \qquad (4.3.31)$$

Si las dos tienen tendencia estocástica, entonces la especificación correcta depende de si están o no cointegradas. Si no lo están el modelo es

$$\Delta\hat{v}_{1t} = \phi_0 + \phi_{111}\Delta\hat{v}_{1t-1} + ... + \phi_{11p}\Delta\hat{v}_{1t-p} + \phi_{121}\Delta\hat{v}_{2t-1} + ... + \phi_{12p}\Delta\hat{v}_{2t-p} + e_{1t} \qquad (4.3.32)$$

Cuando las dos variables están cointegradas el modelo a utilizar es el siguiente,

$$\begin{aligned} \Delta\hat{v}_{1t} = \phi_0 + \alpha_1(\hat{v}_{1t-1} - \beta\hat{v}_{2t-1}) + \\ \phi_{111}\Delta\hat{v}_{1t-1} + ... + \phi_{11p-1}\Delta\hat{v}_{1t-p+1} + \\ \phi_{121}\Delta\hat{v}_{2t-1} + ... + \phi_{12p-1}\Delta\hat{v}_{2t-p+1} + e_{1t} \end{aligned} \qquad (4.3.33)$$

Hemos comentado que en el análisis de las secciones anteriores se consideraba que la tendencia era lineal con respecto al tiempo. Si del análisis gráfico se concluye que la tendencia es cuadrática entonces el modelo generador es,

$$y_{it} = \delta_{0i} + \delta_{1i}t + \delta_{2i}t^2 + v_{it} \qquad i = 1,2 \qquad (4.3.34)$$

Y los correspondientes residuos,

$$\hat{v}_{it} = \hat{y}_{it} - \hat{\delta}_{0i} - \hat{\delta}_{1i}t - \hat{\delta}_{2i}t^2 \qquad (4.3.35)$$

En donde $\hat{\delta}_{0i}, \hat{\delta}_{1i}\ y\ \hat{\delta}_{2i}$ son los estimadores MCO. Tener en cuenta que, en este caso, la primera diferencia no basta para eliminar la influencia del tiempo ya que,

$$\Delta y_{it} = \delta_{1i} - \delta_{2i} + 2\delta_{2i}t$$

$$\Delta^2 y_{it} = 2\delta_{2i}$$

En lo que respecta al orden de integración podemos considerar casos en los que las variables tienen un orden superior a uno. En lo que sigue vamos a suponer que las variables no tienen

tendencia determinista. Si la tuvieran los modelos serian los mismos pero cambiando las variables originales por los residuos definidos en (4.3.2) o (4.3.35).
Supongamos que las dos variables son I(2). Diremos que las dos variables estan cointegradas si la perturbación de la relacion lineal entre las dos variables es I(0). Para lograr una mejor interpretación economica excluimos la posibilidad de cointegración con una perturbación I(1). Si las variables no estan cointegradas el modelo a especificar seria,

$$\begin{aligned}\Delta^2 y_{1t} &= \phi_0 + \phi_{111}\Delta^2 y_{1t-1} + ... + \phi_{11p}\Delta^2 y_{1t-p} + \\ &\quad \phi_{121}\Delta^2 y_{2t-1} + ... + \phi_{12p}\Delta^2 y_{2t-p} + e_{1t}\end{aligned} \tag{4.3.36}$$

Si las dos variables estan cointegradas el modelo a especificar es

$$\begin{aligned}\Delta^2 y_{1t} &= \phi_0 + \alpha_1(y_{1t-1} - \beta y_{2t-1}) + \\ &\quad \phi_{111}\Delta^2 y_{1t-1} + ... + \phi_{11p-1}\Delta^2 y_{1t-p+1} + \\ &\quad \phi_{121}\Delta^2 y_{2t-1} + ... + \phi_{12p-1}\Delta^2 y_{2t-p+1} + e_{1t}\end{aligned} \tag{4.3.37}$$

Supongamos ahora que la primera variable es I(1) y la segunda es I(2). En este caso decimos que las dos variables estan cointegradas si la returbación: $y_{1t} - \beta\Delta y_{2t}$ es I(0). Si las variables no estan cointegradas el modelo a considerar seria,

$$\begin{aligned}\Delta y_{1t} &= \phi_0 + \phi_{111}\Delta y_{1t-1} + ... + \phi_{11p}\Delta y_{1t-p} + \\ &\quad \phi_{121}\Delta^2 y_{2t-1} + ... + \phi_{12p}\Delta^2 y_{2t-p} + e_{1t}\end{aligned} \tag{4.3.38}$$

Si las variables estan cointegradas el modelo apropiado es

$$\begin{aligned}\Delta y_{1t} &= \phi_0 + \alpha_1(y_{1t-1} - \beta\Delta y_{2t-1}) + \\ &\quad \phi_{111}\Delta y_{1t-1} + ... + \phi_{11p-1}\Delta y_{1t-p+1} + \\ &\quad \phi_{121}\Delta^2 y_{2t-1} + ... + \phi_{12p-1}\Delta^2 y_{2t-p+1} + e_{1t}\end{aligned} \tag{4.3.39}$$