PUBLICACIONES DE 4º CURSO

Curso: 4º

Grado: Economía

Asignatura: ECONOMETRÍA III

SOLUCIÓN EJERCICIOS PARTE 1

Profesores: Antonio Aznar y Mª Isabel Ayuda

Departamento de ANÁLISIS ECONÓMICO

Curso Académico 2015/16

Facultad de
Economía y Empresa
Universidad Zaragoza

SOLUCIONES EJERCICIOS PRIMERA PARTE

Ejercicio 1.1 (EJERCICIO 2.6, Stock-Watson)

Considerar la siguiente distribución de probabilidad conjunta entre situación laboral y titulación universitaria para el año 2008 en EE.UU.

	Desempleados (Y=0)	Empleados (Y=1)	Total
No universitario (X=0)	0,037	0,622	0,659
Universitario (X=1)	0,009	0,332	0,341
Total	0,046	0,954	1,000

Se pide:

a) La distribución de probabilidad, media y varianza de Y.
b) La distribución de probabilidad, media y varianza de X.
c) La distribución de probabilidad, media y varianza de Y dado X=0.
d) La distribución de probabilidad, media y varianza de Y dado X=1.
e) La covarianza y la correlación entre X e Y. ¿Son independientes?
f) Demuestre que la tasa de desempleo está dada por 1-E(Y).
g) Calcule la tasa de desempleo para (i) titulados universitarios y (ii) no universitarios.
h) Un miembro de esta población seleccionado aleatoriamente dice estar desempleado. ¿Cuál es la probabilidad de que este trabajador sea titulado universitario? ¿Y titulado no universitario?
i) Comprobar el cumplimiento de la Ley de Esperanzas Iteradas.

Solución Ejercicio 1.1

a) La distribución de probabilidad de Y viene recogida en las dos primeras columnas de la siguiente tabla:

Valores	Probabilidades p_i	$(Y_i - EY)^2$	$p_i \times (Y_i - EY)^2$
Y = 0	0,046	0,910	0,041
Y = 1	0,954	0,002	0,002
			0,043

La esperanza es:

$$E(Y) = \sum_{i=0}^{1} p_i \times Y_i = 0,046 \times 0 + 0,954 \times 1 = 0,954$$

Y la varianza:

$$Var(Y) = \sum_{i=0}^{1} p_i \times \left(Y_i - EY\right)^2 = 0,046 \text{ x } 0,910 + 0,954 \text{ x } 0,002 = 0,041+0,002=0,043$$

b) La distribución de probabilidad de X viene recogida en las dos primeras columnas de la siguiente tabla

Valores	Probabilidades p_i	$(X_i - EX)^2$	$p_i \times (X_i - EX)^2$
X = 0	0,659	0,116	0,076
X = 1	0,341	0,434	0,148
			0,225

La esperanza de X es:

$$E(X) = \sum_{i=0}^{1} p_i \times X_i = 0,659 \times 0 + 0,341 \times 1 = 0,341$$

En cuanto a la varianza:

$$Var(X) = \sum_{i=0}^{1} p_i \times \left(X_i - EX\right)^2 = 0,076+0,148=0,225$$

c) La distribución viene dada por las dos primeras columnas de la siguiente tabla.

Valores	Probabilidades $p_{i/0}$	$(Y_i - E(Y / X = 0))^2$	$p_{i/0} \times (Y_i - E(Y / X = 0))^2$
Y = 0	0,056	0,891	0,050
Y = 1	0,944	0,003	0,003
			0,053

Tener en cuenta que

$$p_{i/0} = \Pr o\left(Y = i / X = 0\right)$$ por lo que

$$p_{0/0} = \Pr o\left(Y = 0 / X = 0\right) = \frac{\Pr o\left(Y = 0, X = 0\right)}{\Pr o\left(X = 0\right)} = \frac{0,037}{0,659} = 0,056$$

$$p_{1/0} = \Pr o\left(Y = 1 / X = 0\right) = \frac{\Pr o\left(Y = 1, X = 0\right)}{\Pr o\left(X = 0\right)} = \frac{0,622}{0,659} = 0,944$$

La esperanza de esta distribución condicional es

$$E(Y / X = 0) = \sum_{i=0}^{1} p_{i/0} \times Y_i = 0,056 \times 0 + 0,944 \times 1 = 0,944$$

En cuanto a la varianza

$$Var(Y / X = 0) = \sum_{i=0}^{1} p_{i/0} \times \left(Y_i - E(Y / X = 0)\right)^2 = 0,050 + 0,003 = 0,053$$

d) La distribución viene dada por las dos primeras columnas de la siguiente tabla.

Valores	Probabilidades $p_{i/1}$	$(Y_i - E(Y / X = 1))^2$	$p_{i/1} \times (Y_i - E(Y / X = 0))^2$
Y = 0	0,026	0,948	0,025
Y = 1	0,974	0,001	0,001
			0,026

En este caso,

$$p_{0/1} = \Pr o\left(Y = 0 / X = 1\right) = \frac{\Pr o\left(Y = 0, X = 1\right)}{\Pr o\left(X = 1\right)} = \frac{0,009}{0,341} = 0,026$$

La esperanza es

$$E(Y / X = 1) = \sum_{i=0}^{1} p_{i/1} \times Y_i = 0,026 \times 0 + 0,974 \times 1 = 0,974$$

Y la varianza

$$Var(Y / X = 1) = \sum_{i=0}^{1} p_{i/1} \times \left(Y_i - E(Y / X = 1)\right)^2 = 0,025 + 0,001 = 0,026$$

e) La covarianza es

$$Cov(X,Y) = \sigma_{XY} = E\left[(X - EX)(Y - EY)\right] = \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}(X_i - EX)(Y_j - EY)\, p_{ij} =$$

$$= 0,341 \times 0,954 \times 0,037 + 0,341 \times 0,046 \times 0,622 + 0,659 \times 0,954 \times 0,009 +$$
$$0,659 \times 0,046 \times 0,33 = 0,038$$

$$Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{0,038}{0,474 \times 0,207} = 0,387$$

Teniendo en cuenta que

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = 0,474$$
$$\sigma_Y = \sqrt{Var(Y)} = 0,207$$

Para que dos variables sean independientes se tiene que cumplir que

$$p_{ij} = p_{i.} \times p_{.j}$$

$$p_{i/j} = p_{i.}$$

Es decir, que cada una de las probabilidades conjuntas sea igual al producto de las probabilidades marginales. Multiplicando estas probabilidades marginales la tabla que se obtiene es la siguiente

	Y = 0	Y = 1
X = 0	0,030	0,628
X = 1	0,015	0,325

Hay ligeras diferencias por lo que podemos decir que no son independientes. ¿Contrastar?

f) La tasa de desempleo es la probabilidad de estar desempleado o, equivalentemente, 1 menos la probabilidad de estar empleado que ya hemos demostrado que era igual a E(Y). Por lo tanto, la tasa de desempleo es igual a

1-E(y)= 1-0,954=0,046

g) En este caso, la información relevante está en las esperanzas de las distribuciones condicionales.

(I) Universitarios: 1-E(Y/X=1)=1-0,974=0,026

(II) No universitarios: 1-E(Y/X=0)=1-0,944=0,056

h) La probabilidad de que sea titulado universitario es

$$\Pr o(X=1/Y=0)=\frac{\Pr o\left(X=1,Y=0\right)}{\Pr o\left(Y=0\right)}=\frac{0,009}{0,046}=0,196$$

y la probabilidad de no ser universitario

$$\Pr o(X=0/Y=0)=\frac{\Pr o\left(X=0,Y=0\right)}{\Pr o\left(Y=0\right)}=\frac{0,037}{0,046}=0,804$$

i) Tomando Y la Ley puede escribirse como,

$$E\left(Y\right)=E\left(Y/X=0\right)\times\Pr o\left(X=0\right)+E\left(Y/X=1\right)\times\Pr o\left(X=1\right)$$

Sustituyendo se obtiene,

E(Y)=0,944 × 0,659+0,974 × 0,341=0,954

Que es el valor obtenido anteriormente.

Ejercicio 1.2

Sea X una variable aleatoria discreta que puede tomar n valores $x_1, x_2, \ldots x_n$ con una función de distribución de probabilidad, f(x), tal que $f\left(x_i\right)=P\left(X=x_i\right)$. Por ser una probabilidad se cumple que $0\leq f\left(x\right)\leq 1$ y,

$$f\left(x_1\right)+\ldots+f\left(x_n\right)=\sum_x f\left(x\right)=1$$

Se pide

1) Definir la esperanza y varianza de X y de una función dada de esa variable g(X).
2) Sea a una constante. Derivar $E(a)$ y $Var(a)$.
3) Sean a y b constantes. Derivar $E(aX+b)$ y $Var(aX+b)$.

Solución Ejercicio 1.2

1) La esperanza de X es

μ_X = E(X) = $\sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) = \sum_x x f(x)$

Y la varianza,

Var(X)= $\sum_x \left[x - E(X)\right]^2 f(x)$

La esperanza y varianza de g(X) son

E[g(X)]= $\sum_x g(x) f(x)$

Var[g(X)]= $\sum_x \left[g(x) - E(g(X))\right]^2 f(x)$

2) $E(a) = \sum_x af(x) = a\sum_x f(x) = a$

$$Var(a) = \sum_x (a-a)^2 f(x) = 0$$

3)

$$E(aX+b) = \sum_x (ax+b) f(x) = \sum_x (ax) f(x) + \sum_x bf(x) =$$

$$a\sum_x xf(x) + b\sum_x f(x) = aE(X) + b$$

$$\text{var}(aX+b) = \sum_x \left[ax + b - E(aX+b)\right]^2 f(x) = \sum_x \left[a(x - E(X))\right]^2 f(x) =$$

$$= a^2 \sum_x (x - E(X))^2 f(x) = a^2 \text{var}(X)$$

Ejercicio 1.3

Sean X e Y dos variables aleatorias con una función de probabilidad conjunta f(x,y). Se pide:

1. Obtener la esperanza y varianza de g(X,Y), en donde g(X,Y) es una función de ambas variables.
2. Obtener E(X+Y) y Var(X+Y).
3. Sean a y b constantes. Obtener $E(aX+bY)$y $Var(aX+bY)$.
4. Demostrar que $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Solución Ejercicio 1.3

1) La esperanza es

$$E[g(X,Y)] = \sum_x \sum_y g(x,y) f(x,y)$$

Y la varianza

$$Var\left[g(X,Y)\right] = \sum_x \sum_y \left[g(x,y) - E(g(X,Y))\right]^2 f(x,y)$$

2)

$$E(X+Y)=\sum_x\sum_y(x+y)f(x,y)=\sum_x x\sum_y f(x,y)+\sum_y y\sum_x f(x,y)=$$
$$=\sum_x xf(x)+\sum_y yf(y)=E(X)+E(Y)$$
$$Var(X+Y)=\sum_x\sum_y\left[(x+y)-E(X+Y)\right]^2 f(x,y)=$$
$$=\sum_x\sum_y\left[\left(x-E(X)\right)+\left(y-E(Y)\right)\right]^2 f(x,y)=$$
$$=\sum_x\sum_y[x-E(X)]^2 f(x,y)+\sum_x\sum_y[y-E(Y)]^2 f(x,y)+$$
$$+2\sum_x\sum_y[x-E(X)][y-E(Y)]\,f(x,y)=$$
$$=Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y)$$

aplicando los mismos principios vistos en la derivación de la esperanza.

3)
$$E(aX+bY)=\sum_x\sum_y(ax+by)f(x,y)=a\sum_x\sum_y xf(x,y)$$
$$+b\sum_x\sum_y yf(x,y)=aE(X)+bE(Y)$$

$$Var(aX+bY)=\sum_x\sum_y\left[(ax+by)-E(aX+bY)\right]^2 f(x,y)$$
$$=\sum_x\sum_y\left[\left(ax-E(aX)\right)+\left(by-E(bY)\right)\right]^2 f(x,y)=$$
$$=a^2\sum_x\sum_y[x-E(X)]^2 f(x,y)+b^2\sum_x\sum_y[y-E(Y)]^2 f(x,y)+$$
$$+2ab\sum_x\sum_y[x-E(X)][y-E(Y)]\,f(x,y)=$$
$$=a^2Var(X)+b^2Var(Y)+2abCov(X,Y)$$

4) Tener en cuenta que

$$E(XY)=\sum_x\sum_y(xy)\,f(x,y)$$

$$E(X)E(Y)=\sum_x xf(x)\sum_y yf(y)$$

Solamente serán iguales si X e Y son independientes, es decir, si se cumple f(x,y)=f(x)f(y). En este caso,

$$E(XY) = \sum_x \sum_y (xy)\, f(x,y) = \sum_x x f(x) \sum_y y f(y)$$

Ejercicio 1.4

Sean dos variables aleatorias X con esperanza μ_X y varianza σ_X^2 e Y con esperanza μ_Y y varianza σ_Y^2, cuya covarianza es $\sigma_{X,Y}$ y *a* y *b* dos parámetros. Se pide calcular:

a) $E(a+bY)$

b) $Var(a+bY)$

c) $E(aX+bY)$

d) $Var(aX+bY)$

e) $Var(aX-bY)$

f) $E(Y^2)$

g) $Cov(a+bX, Y)$

h) $E(XY)$

i) $Cov(\bar{Y}, Y_j)$ donde $\bar{Y}$ se ha obtenido de una m.a.s. de Y, de tamaño muestral T.

Solución Ejercicio 1.4

a) $E(a+bY) = a + bE(Y) = a + b\mu_y$

b) $Var(a+bY) = b^2 Var(Y) = b^2\sigma_y^2$

c) $E(aX+bY) = aE(X) + bE(Y) = a\mu_X + b\mu_Y$

d) $Var(aX+bY) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y) + 2ab\, Cov(X,Y) =$
$= a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2 + 2ab\,\sigma_{XY}$

e) $Var(aX-bY) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y) - 2ab\, Cov(X,Y) =$
$= a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2 - 2ab\,\sigma_{XY}$

f) $E(Y^2) = Var(Y) + (E(Y))^2 = \sigma_Y^2 + \mu_Y^2$

g) $Cov(a+bX, Y) = E(((a+bX) - E(a+bX))(Y - E(Y))) =$
$= E(b(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)) = bCov(X,Y) = b\sigma_{XY}$

h) $E(XY) = Cov(X,Y) + E(X)E(Y) = \sigma_{XY} + \mu_X\mu_Y$

i) $$Cov(\bar{Y},Y_j)=E\left[\left(\bar{Y}-E(\bar{Y})\right)\left(Y_j-E(Y_j)\right)\right]=E\left[\left(\frac{\sum Y_i}{T}-\mu_Y\right)\left(Y_j-\mu_Y\right)\right]=\frac{\sigma_Y^2}{T}$$

Ejercicio 1.5 (Ejercicio 2.22, Stock-Watson)

Supóngase que se dispone de una cantidad de dinero para invertir-por simplicidad 1 $- y se está planificando colocar una fracción w en un fondo de inversión colectiva en acciones y el resto, en un fondo de inversión colectiva en bonos. Supóngase que 1 $ invertido en acciones genera una rentabilidad R_s el primer año y que 1 $ invertido en bonos genera una rentabilidad R_b. Supóngase que R_s es aleatoria con media 0,08 (8%) y desviación típica de 0,07, y que R_b es aleatoria con media 0,05(5%) y desviación típica 0,04. La correlación entre R_s y R_b es 0,25. Si se coloca una fracción w del dinero en el fondo de acciones y el resto 1-w en el fondo de bonos, entonces la rentabilidad de la inversión es $R=wR_s+(1-w)R_b$.

a) Calcule la media y la varianza de R suponiendo que w = 0,5.

b) ¿Qué valor de w hace la media de R lo más grande posible? ¿Cuál es la desviación típica de R para ese valor de w?

c) ¿Cuál es el valor de w que minimiza la desviación típica de R?

Solución Ejercicio 1.5

a) Tener en cuenta que

$E(R)=wE(R_s)+(1-w)E(R_b)=0,5.0,08+0,5.0,05=0,065$

Es decir, un 6,5%.

$$Var\left(R\right)=w^2\sigma_s^2+\left(1-w\right)^2\sigma_b^2+2w\left(1-w\right)\sigma_{s,b}$$

En donde

$$\sigma_s^2=Var\left(R_s\right),\sigma_b^2=Var\left(R_b\right),\sigma_{s,b}=Cov\left(R_s,R_b\right)$$

Por otra parte,

$$\sigma_{s,b}=Corr\left(R_s,R_b\right)\sigma_s\sigma_b=0,25.0,07.0,04=0,0007$$

Sustituyendo en la expresión de la varianza se obtiene

Var(R)= 0,25$\times$ 0,0049+0,25$\times$ 0,0016+0,5$\times$ 0,0007 = 0,0019

b) El valor de w que hace la media lo más grande posible es w = 1. En este caso la desviación típica de R es la de R_s

c) Derivando la expresión de la varianza de R respecto a w e igualando a cero se obtiene:

$$2w\sigma_s^2 - 2(1-w)\sigma_b^2 + 2(1-2w)\sigma_{s,b}$$

De donde se obtiene que

$$w = \frac{\sigma_b^2 - \sigma_{s,b}}{\sigma_s^2 + \sigma_b^2 - 2\sigma_{s,b}} = \frac{0,0009}{0,0051} = 0,1764$$

Ejercicio 1.6

Una muestra de T = 5 observaciones con los siguientes valores {1,2,4,2,1} se ha obtenido siguiendo un proceso aleatorio a partir de una población con distribución normal:

$$f(y_t;\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(y_t-\mu)^2}{2\sigma^2} \right]$$

con parámetros μ y σ^2.

a) Suponer que la varianza es conocida e igual a la unidad y que el parámetro desconocido es $\theta = \{\mu\}$.

- **(1)** Derivar el logaritmo de la función de verosimilitud, el gradiente y la matriz de segundas derivadas.
- **(2)** Derivar y calcular el estimador MV, $\tilde{\theta}$.
- **(3)** Calcular $l(\tilde{\theta}), d(\tilde{\theta})$ y $H(\tilde{\theta})$.

b) Repetir (a) para el caso en que la varianza es desconocida, $\theta = \{\sigma^2\}$ y la media es conocida igual a 2.

c) Repetir (a) cuando tanto la media como la varianza son desconocidos, $\theta = \{\mu, \sigma^2\}$.

Solución Ejercicio 1.6

a) La función de verosimilitud puede escribirse como

$$L(\theta) = (2\pi)^{-\frac{T}{2}} \exp\left\{ -\frac{\sum (y_t-\mu)^2}{2} \right\}$$

(1) El logaritmo es

$$l(\theta) = -\frac{T}{2}\log(2\pi) - \frac{\sum_1^T (y_t-\mu)^2}{2}$$

El gradiente es

$$d(\theta) = \frac{\partial l(\theta)}{\partial \mu} = \sum (y_t - \mu)$$

En este caso, la matriz de segundas derivadas tiene un solo elemento

$$H(\theta) = -T$$

(2) El estimador MV de μ se obtiene igualando a cero el gradiente

$$\tilde{\mu} = \bar{y} = \frac{1+2+4+2+1}{5} = 2$$

(3) El valor estimado del logaritmo de la función de verosimilitud es

$$l\left(\tilde{\theta}\right) = -\frac{5}{2}\log\left(2\pi\right) - \frac{\sum\left(y_t - 2\right)^2}{2} = -7,594$$

El valor del gradiente será cero y el valor de la segunda derivada será el mismo escrito anteriormente porque no depende del parámetro.

b) **(1)** El logaritmo de la función de verosimilitud es

$$l\left(\theta\right) = -\frac{T}{2}\log\left(2\pi\sigma^2\right) - \frac{\sum\left(y_t - 2\right)^2}{2\sigma^2}$$

y el gradiente toma la forma

$$d\left(\theta\right) = \frac{\partial l\left(\theta\right)}{\partial \sigma^2} = -\frac{T}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum\left(y_t - 2\right)^2$$

El elemento de segunda derivada es

$$H\left(\theta\right) = \frac{\partial^2 l\left(\theta\right)}{\partial (\sigma^2)^2} = \frac{T}{2\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^6}\sum\left(y_t - 2\right)^2$$

(2) El estimador MV se obtiene igualando a cero el gradiente, $d\left(\tilde{\theta}\right) = 0,$ siendo el estimador

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{\sum\left(y_t - 2\right)^2}{T} = \frac{\left(1-2\right)^2 + \left(2-2\right)^2 + \left(4-2\right)^2 + \left(2-2\right)^2 + \left(1-2\right)^2}{5} = 1,2$$

(3) Los valores estimados son:

$$l\left(\tilde{\theta}\right) = -\frac{5}{2}\log\left(2\pi 1,2\right) - \frac{\sum\left(y_t - 2\right)^2}{2\times 1,2} = \text{-7,55}$$

$$d\left(\tilde{\theta}\right) = 0$$

$$H\left(\tilde{\theta}\right) = \frac{5}{2(1,2)^2} - \frac{1}{1,2^3}\sum\left(y_t - 2\right)^2 = \text{-1,736}$$

c) **(1)** La función de verosimilitud es:

$$L\left(\theta; y_1, y_2, \dots, y_T\right) = \left(2\pi\sigma^2\right)^{-\frac{T}{2}} \exp\left[-\frac{\sum_1^T\left(y_t - \mu\right)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Y su logaritmo:

$$l\left(\theta\right) = -\frac{T}{2}\log\left(2\pi\sigma^2\right) - \frac{\sum_1^T\left(y_t - \mu\right)^2}{2\sigma^2}$$

El gradiente es un vector de dos elementos:

$$d(\theta)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial l(\theta)}{\partial \mu}\\ \dfrac{\partial l(\theta)}{\partial \sigma^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sigma^2}\sum(y_t-\mu)\\ -\dfrac{T}{2\sigma^2}+\dfrac{1}{2\sigma^4}\sum(y_t-\mu)^2\end{bmatrix}$$

Por último, la matriz de segundas derivadas es:

$$H(\theta)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \mu^2} & \dfrac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \mu \partial \sigma^2}\\ & \dfrac{\partial^2 l(\theta)}{\partial (\sigma^2)^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{T}{\sigma^2} & -\dfrac{1}{\sigma^4}\sum(y_t-\mu)\\ & \dfrac{T}{2\sigma^4}-\dfrac{1}{\sigma^6}\sum(y_t-\mu)^2\end{bmatrix}$$

(2) Los estimadores MV se obtienen igualando los elementos del gradiente a cero. Estos estimadores son:

$$\tilde{\mu}=\frac{1}{T}\sum y_t \qquad \tilde{\sigma}^2=\frac{1}{T}\sum(y_t-\bar{y})^2$$

Para obtener las estimaciones MV basta sustituir los cinco valores muestrales en estas expresiones:

$$\tilde{\mu}=\frac{1+2+4+1+2}{5}=2$$

$$\tilde{\sigma}^2=\frac{(1-2)^2+(2-2)^2+(4-2)^2+(2-2)^2+(1-2)^2}{5}=1,2$$

(3) El logaritmo de la función de verosimilitud evaluado con las estimaciones MV es:

$$l(\tilde{\theta})=-\frac{T}{2}\log(2\pi\tilde{\sigma}^2)-\frac{\sum_1^T(y_t-\bar{y})^2}{2\tilde{\sigma}^2}=-\frac{5}{2}\log(2\pi 1,2)-\frac{5}{2}=-2,55$$

Los elementos del gradiente evaluados con las estimaciones MV son cero porque es la condición necesaria para obtener los estimadores MV.
En lo que respecta a la matriz de segundas derivadas

$$H(\tilde{\theta})=\begin{bmatrix}-\dfrac{5}{1,2} & -\dfrac{1}{1,2^2}\sum(y_t-\bar{y})\\ . & \dfrac{5}{2(1,2)^2}-\dfrac{1}{1,2^3}\sum(y_t-\bar{y})^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4,16 & 0\\ 0 & -1,736\end{bmatrix}$$

Ejercicio 1.7

Supongamos una serie temporal compuesta de *T* extracciones *iid* a partir de la siguiente distribución de probabilidad de Piosson:

$$f(y_t;\theta)=\frac{\theta^{y_t}\exp[-\theta]}{y_t!}, \qquad y_t=0,1,2,3,....$$

donde $\theta>0$ es un parámetro desconocido
Se pide:

a) La función de verosimilitud y su logaritmo y los valores de ambas para los diez primeros valores enteros del parámetro si $y_1 = 8$, $y_2 = 3$ e $y_3 = 4$.
b) El gradiente y el elemento de información.
c) La cota de Cramer-Rao comentando la utilidad de la misma.
d) El estimador máximo-verosímil y sus propiedades.

Solución Ejercicio 1.7

a) Notar que se trata de una variable discreta. Por ser independientes las observaciones muestrales, la función de verosimilitud se puede escribir como:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{T} f(\theta; y_t) = \frac{\theta^{\sum y_t} \exp[-T\theta]}{y_1! y_2! \ldots\ldots y_T!}$$

El logaritmo de la función de verosimilitud es:

$$l(\theta) = \ln\theta \sum y_t - T\theta - \ln(y_1! \ldots. y_T!)$$

Suponer ahora las tres observaciones, T=3, con valores 8, 3 y 4. Teniendo en cuenta que $y_1! y_2! y_3! = 5806080$ y que $\ln(y_1! y_2! y_3!) = 15{,}57$ los valores de las dos funciones pueden verse en la siguiente tabla.

Valor de θ	$L(\theta)$	$l(\theta)$
1	8,5749E-09	-18,5744
2	1,3989E-05	-11,1772
3	0,0003	-8,0952
4	0,0011	-6,7800
5	**0,0016**	**-6,4328**
6	0,0012	-6,6980
7	0,0006	-7,3857
8	0,0002	-8,3827
9	6,6650E-05	-9,6160
10	1,6116E-05	-11,0356

Como puede verse en esta tabla el máximo valor de ambas funciones corresponde al valor del parámetro igual a 5. Por eso se dice que este valor es la estimación máximo-verosímil. Luego demostraremos analíticamente este resultado.

b) El gradiente, que es la primera derivada del logaritmo respecto al parámetro, toma la forma siguiente,

$$d(\theta) = \frac{\partial l(\theta)}{\partial\theta} = \frac{1}{\theta}\sum y_t - T$$

La segunda derivada con respecto al parámetro es

$$H(\theta) = \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial\theta^2} = -\frac{\sum y_t}{\theta^2}$$

La matriz de Información (en este caso, el elemento de información porque es un escalar) toma la forma siguiente

$$I(\theta) = -EH(\theta) = \frac{\sum Ey_t}{\theta^2} = \frac{T}{\theta}$$

c) La cota de Cramer-Rao es igual a la inversa de la matriz de información, es decir:

Cota de Cramer-Rao= $I(\theta)^{-1}$

Este concepto es importante porque establece el nivel mínimo de varianza que puede alcanzar un estimador insesgado. Es la forma de determinar cuando un estimador insesgado es eficiente.

En un marco asintótico decimos que un estimador consistente, $\tilde{\theta}$, es eficiente si la matriz de varianzas y covarianzas de $\sqrt{T}(\tilde{\theta} - \theta)$ es igual a:

$$\lim\left[T^{-1}I(\theta)\right]^{-1}$$

d) Los estimadores MV son aquellos que maximizan la función de verosimilitud. La condición necesaria para maximizar esta función es que las primeras derivadas de su logaritmo con respecto a los parámetros sean iguales a cero. O, equivalentemente, son aquellos valores de los parámetros que hacen que los elementos del gradiente sean cero. Es decir, son aquellos que hacen que:

$$d(\tilde{\theta}) = 0$$

En nuestra ilustración podemos escribir:

$$\frac{1}{\tilde{\theta}}\sum y_t - T = 0$$

De donde el estimador máximo-verosimil es:

$$\tilde{\theta} = \frac{\sum y_t}{T} = \overline{y}$$

Notar que la estimación máximo-verosímil del parámetro en el ejemplo con tres observaciones es (8+4+3)/3=5, que es el valor que maximizaba tanto la función de verosimilitud como su logaritmo.

Veamos las propiedades de este estimador. Teniendo en cuenta que $Ey_t = \theta$ y que $Var(y_t) = \theta$ entonces se tiene que:

$$E\tilde{\theta} = \frac{\sum Ey_t}{T} = \theta$$

Por lo tanto, es un estimador insesgado. En cuanto a la varianza se tiene que, por ser independientes:

$$Var(\tilde{\theta}) = \frac{1}{T^2}\sum Var(y_t) = \frac{\theta}{T}$$

Se ve que se trata de un estimador eficiente porque su varianza coincide con la inversa del elemento de información.

Ejercicio 1.8 (Ejercicio 3.1, Stock-Watson)

En una población, $\mu_Y = 100$ y $\sigma_Y^2 = 43.0$. Utilice el teorema central del límite para contestar las siguientes preguntas:

a) En una muestra aleatoria de tamaño $n = 100$, hallar $\Pr(\bar{Y} < 101)$.
b) En una muestra aleatoria de tamaño $n = 64$, hallar $\Pr(101 < \bar{Y} < 103)$.
c) En una muestra aleatoria de tamaño $n = 165$, hallar $\Pr(\bar{Y} > 98)$.

Solución Ejercicio 1.8 (Ejercicio 3.1, Stock-Watson)

El teorema central del límite sugiere que cuando el tamaño muestral (n) es grande, la distribución de la media muestral ($\bar{Y}$) es aproximadamente $N\left(\mu_Y, \sigma_{\bar{Y}}^2\right)$ con $\sigma_{\bar{Y}}^2 = \frac{\sigma_Y^2}{n}$. Dada una población $\mu_Y = 100$, $\sigma_Y^2 = 43.0$, tenemos:

a) $n = 100$, $\sigma_{\bar{Y}}^2 = \frac{\sigma_Y^2}{n} = \frac{43}{100} = 0.43$, y

$$\Pr(\bar{Y} < 101) = \Pr\left(\frac{\bar{Y} - 100}{\sqrt{0.43}} < \frac{101 - 100}{\sqrt{0.43}}\right) = \Pr\left(N(0,1) < \frac{101 - 100}{\sqrt{0.43}}\right) \approx \Phi(1.525) = 0.9394.$$

b) $n = 64$, $\sigma_{\bar{Y}}^2 = \frac{\sigma_Y^2}{n} = \frac{43}{64} = 0.6719$, y

$$\Pr(101 < \bar{Y} < 103) = \Pr\left(\frac{101 - 100}{\sqrt{0.6719}} < \frac{\bar{Y} - 100}{\sqrt{0.6719}} < \frac{103 - 100}{\sqrt{0.6719}}\right) = \Pr\left(\frac{101 - 100}{\sqrt{0.6719}} < N(0,1) < \frac{103 - 100}{\sqrt{0.6719}}\right)$$
$$\approx \Phi(3.6599) - \Phi(1.2200) = 0.9999 - 0.8888 = 0.1111.$$

c) $n = 165$, $\sigma_{\bar{Y}}^2 = \frac{\sigma_Y^2}{n} = \frac{43}{165} = 0.2606$, y

$$\Pr(\bar{Y} > 98) = 1 - \Pr(\bar{Y} \leq 98) = 1 - \Pr\left(\frac{\bar{Y} - 100}{\sqrt{0.2606}} \leq \frac{98 - 100}{\sqrt{0.2606}}\right) = 1 - \Pr\left(N(0,1) \leq \frac{98 - 100}{\sqrt{0.2606}}\right)$$
$$\approx 1 - \Phi(-3.9178) = \Phi(3.9178) = 1.0000 \text{ (redondeando a cuatro decimales).}$$