CAPÍTULO 5

FORMAS DE LOS MODELOS

5.1 INTRODUCCIÓN.

En este capítulo, en primer lugar, teniendo en cuenta las diferentes estructuras univariantes comentadas en el Capítulo 4, se proponen diferentes modelos para ser estimados, contrastados y validados.

A continuación, se presta una atención especial a dos formas de modelos que son las más utilizadas en el trabajo aplicado: el modelo autoregresivo vectorial (VAR) y el modelo con mecanismo de corrección de error (MCE). Ambos serán estudiados en la Sección 5.3.

La Sección 5.4 está dedicada a analizar los diferentes procedimientos de estimación disponibles según sean los modelos considerados de los propuestos en la sección anterior.

Por último, en la Sección 5.5 se llevará a cabo un análisis de cómo utilizar los modelos estudiados previamente para derivar resultados acerca de los efectos derivados de la variación de una variable sobre otra u otras. Es lo que se llama análisis impulso-respuesta.

5.2 MODELOS MULTIVARIANTES DEFINIDOS A PARTIR DE LA ESTRUCTURA UNIVARIANTE DE LAS VARIABLES.

Sin pérdida de generalidad, en esta seccción vamos a prestar atención a modelos con sólo dos variables. La extensión a modelos con más variables es inmediata.

Sea $\varepsilon_t^{'} = (\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t})$ un proceso bivariante i.i.d. con vector de esperanzas igual a cero y la siguiente matríz de varianzas y covarianzas

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

Sea $u_t^{'} = (u_{1t}, u_{2t})$ un proceso bivariante estacionario tal que cumple:

$$A(L)u_t = \delta + \varepsilon_t \qquad (5.1)$$

en donde, $$A(L) = \begin{bmatrix} a_{11}(L) & a_{12}(L) \\ a_{21}(L) & a_{22}(L) \end{bmatrix} \qquad (5.2)$$

Los elementos de esta matríz son polinomios en L de orden p que podemos escribir como:

$$a(L) = 1 - a_{ii1}L - .... - a_{iip}L^p \qquad \text{i,j=1,2.}$$

$$a_{ij}(L) = -a_{ij1}L - .... - a_{ijp}L^p \qquad \text{i,j=1,2.}$$

Por el supuesto de estacionariedad, las raices de de la matriz en (5.2) están fuera del circulo unitario. δ es un vector de dos parámetros definido como: $\delta' = (\delta_1, \delta_2)$.

Sea y_t un vector de dos series temporales, $y_t = (y_{1t}, y_{2t})'$ Veamos, a continuación, los modelos que pueden pensarse para dar cuenta del comportamiento de ambas variables teniendo en cuenta la estructura univariante de las mismas.

A). Ninguna de las dos variables tiene tendencia.

Los modelos univariantes son:

$$y_{1t} = u_{1t}$$
$$y_{2t} = u_{2t}$$

Sean μ_1 y μ_2 los valores medios, respectivamente, de y_{1t} e y_{2t}. Tomando esperanzas en el modelo (5.1) se obtiene,

$$\begin{aligned} a_{11}(1)\mu_1 + a_{12}(1)\mu_2 &= \delta_1 \\ a_{21}(1)\mu_1 + a_{22}(1)\mu_2 &= \delta_2 \end{aligned} \qquad (5.3)$$

Si las medias de los dos elementos del proceso son diferentes de cero, entonces el modelo a estimar sería

$$\text{(M-1)}: \quad y_{1t} = \delta_1 + \phi_{111}y_{1t-1} + ...+ \phi_{11p}y_{1t-p} + \phi_{121}y_{2t-1} + ...+ \phi_{12p}y_{2t-p} + \varepsilon_{1t}$$

Observar que, en este caso, la notación cambia de los a_{ijk} a los ϕ_{ijk}.

Si la media de los dos elementos del proceso es cero, entonces sería el mismo modelo pero sin constante; en este caso, los dos elementos de δ son cero. Si la media del primer elemento del proceso es cero pero la media del segundo elemento es diferente de cero, entonces el modelo a considerar es el (M-1) sin constante pero cumpliendo la siguiente restricción adicional: $\phi_{12}(1) = 0$. En la literatura, el modelo (M-1) recibe el nombre de **modelo autorregresivo con retardos distribuidos**. Por el carácter dinámico del modelo se ha utilizado para analizar los efectos del cambio en una variabla sobre otra a lo largo del tiempo.

Reescribiendo el modelo en su forma más simple, tenemos,

$$y_t = \phi y_{t-1} + \beta x_t + u_t$$

en donde suponemos que $|\phi| < 1$.

Vamos a distinguir dos escenarios. En el primero, la variable x_t toma el mismo valor cualquiera que sea el periodo:

$$x_t = x_{t+1} = x_{t+2} = \dots\dots\dots$$

En el segundo, en el periodo t la variable experimenta un incremento de 1 unidad que se mantiene en periodos sucesivos.

$$x_t^* = x_t + 1 = x_{t+1}^* = x_{t+2}^* = \dots\dots\dots$$

El efecto que esta variación mantenida de x_t tiene sobre y_t se mide comparando, en cada periodo que sigue al periodo en que se produce el cambio, el valor que toma y_t en el primer escenario con el valor que toma en el segundo escenario.

Limitando la atención al periodo que se produce el cambio, hablaremos del Multiplicador Impacto definido como:

$$\frac{\partial y_t}{\partial x_t} = \beta$$

Pasados L periodos desde que se produce el cambio, podemos hablar del Multiplicador Acumulado que viene dado por:

$$\frac{\partial y_{t+L}}{\partial x_t} = \beta\left(1 + \phi + - + \phi^L\right) = \beta\frac{1-\phi^L}{1-\phi}$$

Por último, podemos hablar de Efecto Total o Multiplicador a Largo Plazo que es aquel que da cuenta de todo el efecto que se produce y que definimos como:

$$\frac{\partial y_{t+\infty}}{\partial x_t} = \frac{\beta}{1-\phi}$$

B). La variable dependiente no tiene ningún tipo de tendencia.

El modelo univariante es:

$$y_{1t} = u_{1t}$$

La esperanza de la perturbación puede ser cero o diferente de cero.

B-1). La variable explicativa tiene sólo una tendencia lineal.

El modelo univariante es:

$$y_{2t} = \lambda_{20} + \delta_{22}t + u_{2t}$$

en este caso, la esperanza de u_{2t} es cero. Utilizando el modelo (5.1), la relación a estimar sería

$$\text{(M-2)}: y_{1t} = \delta_1 + \phi_{111}y_{1t-1} + ... + \phi_{11p}y_{1t-p} + \phi_{121}u_{2t-1} + ... + \phi_{12p}u_{2t-p} + \varepsilon_{1t}$$

en donde $$u_{2t} = y_{2t} - \lambda_{20} - \delta_{22}t \qquad (5.4)$$

Si la perturbación u_{1t} tiene un valor medio igual a cero el modelo a considerar no tendría constante.

B-2). La variable explicativa tiene sólo una tendencia estocástica.

El modelo univariante es

$$y_{2t} = y_{2t-1} + u_{2t} \qquad (5.5)$$

A partir de (5.1), si la esperanza matemática de u_{1t} no es cero ($\delta_1 \neq 0$), entonces el modelo a considerar es

$$\text{(M-3)}: y_{1t} = \delta_1 + \phi_{111}y_{1t-1} + ... + \phi_{11p}y_{1t-p} + \phi_{121}\Delta y_{2t-1} + ... + \phi_{12p}\Delta y_{2t-p} + \varepsilon_{1t} \qquad (5.6)$$

Si la esperanza de u_{1t} es cero, entonces la constante desaparece del modelo.

B-3). La variable explicativa tiene las dos tendencias.

Si la esperanza matemática de u_{1t} es diferente de cero, entonces el modelo a estimar es el (M-3) escrito en (5.6). Si esta esperanza es cero, entonces el modelo a tener en cuenta será el (M-3) cumpliendo dos restricciones:

(M-4) : es el (M-3) con las restricciónes: $\delta_1 = 0$ y $\phi_{12}(1) = 0$.

C). La variable dependiente sólo tiene una tendencia lineal.

El modelo univariante es:

$$y_{1t} = \lambda_{10} + \delta_{11}t + u_{1t}$$

siendo la esperanza matemática de la perturbación igual a cero.

C-1). La variable explicativa no tiene tendencias.

Su modelo es,

$$y_{2t} = u_{2t}$$

en donde la esperanza de la perturbación puede ser cero o diferente de cero. Si la esperanza es cero ($\delta_2 = 0$) entonces a partir de (5.1) el modelo a estimar es :

(M-5): $u_{1t} = \phi_{111}u_{1t-1} + ... + \phi_{11p}u_{1t-p} + \phi_{121}y_{2t-1} + ... + \phi_{12p}y_{2t-p} + \varepsilon_{1t}$

en donde $$u_{1t} = y_{1t} - \lambda_{10} - \delta_{11}t \qquad (5.7)$$

Si la esperanza de u_{2t} es diferente de cero, el modelo a estimar es el (M-5) pero incorporando la restricción: $\phi_{12}(1) = 0$.

C-2). La variable explicativa tiene sólo una tendencia lineal.

El modelo univariante es:

$$y_{2t} = \lambda_{20} + \delta_{22}t + u_{2t}$$

Como en este caso las esperanzas de las dos perturbaciones son cero el modelo a estimar es

$$\text{(M-6)}: u_{1t} = \phi_{111}u_{1t-1} + ... + \phi_{11p}u_{1t-p} + \phi_{121}u_{2t-1} + ... + \phi_{12p}u_{2t-p} + \varepsilon_{1t}$$

C-3). La variable explicativa tiene sólo una tendencia estocástica.

El modelo univariante es

$$y_{2t} = y_{2t-1} + u_{2t} \qquad (5.8)$$

Como las esperanzas matemáticas de las dos perturbaciones son cero, el modelo a estimar es

$$(\text{M-7}): u_{1t} = \phi_{111} u_{1t-1} + ... + \phi_{11p} u_{1t-p} + \phi_{121} \Delta y_{2t-1} + ... + \phi_{12p} \Delta y_{2t-p} + \varepsilon_{1t} \qquad (5.9)$$

en donde u_{1t} ha sido definido en (5.7).

C-4). La variable explicativa tiene las dos tendencias.

El modelo univariante sería el mismo escrito en (5.8) pero ahora con $\delta_2 \neq 0$. Prestando atención a (5.3) y teniendo en cuenta que la media de u_{1t} es cero el modelo a estimar será el mismo que el escrito en (5.9) pero con una restricción en los parámetros

(M-8) es el (M-7) con la restricción: $\phi_{12}(1) = 0$.

D). La variable dependiente sólo tiene una tendencia estocástica.

El modelo univariante es:

$$y_{1t} = y_{1t-1} + u_{1t}$$

con la esperanza matemática de la perturbación igual a cero.

D-1). La variable explicativa no tiene tendencias.

Su modelo es,

$$y_{2t} = u_{2t}$$

en donde la esperanza de la perturbación puede ser cero o diferente de cero. Si la esperanza es cero ($\delta_2 = 0$) entonces a partir de (5.1) el modelo a estimar es :

$$(\text{M-9}): \Delta y_{1t} = \phi_{111} \Delta y_{1t-1} + ... + \phi_{11p} \Delta y_{1t-p} + \phi_{121} y_{2t-1} + ... + \phi_{12p} y_{2t-p} + \varepsilon_{1t}$$

Si la esperanza de u_{2t} es diferente de cero, el modelo a estimar es el (M-9) pero incorporando la restricción: $\phi_{12}(1) = 0$.

D-2). La variable explicativa tiene sólo una tendencia lineal.

El modelo univariante es:

$$y_{2t} = \lambda_{20} + \delta_{22} t + u_{2t}$$

Como en este caso las esperanzas de las dos perturbaciones son cero el modelo a estimar es

(M-10) : $\Delta y_{1t} = \phi_{111}\Delta y_{1t-1} + ... + \phi_{11p}\Delta y_{1t-p} + \phi_{121}u_{2t-1} + ... + \phi_{12p}u_{2t-p} + \varepsilon_{1t}$

en donde u_{2t} ha sido definido en (5.4).

D-3). La variable explicativa tiene sólo una tendencia estocástica.

El modelo univariante es

$$y_{2t} = y_{2t-1} + u_{2t}$$

En este caso, todo depende de si las variables están o no cointegradas. Si no están cointegradas, el modelo relevante es,

(M-11): $\Delta y_{1t} = \phi_{111}\Delta y_{1t-1} + ... + \phi_{11p}\Delta y_{1t-p} + \phi_{121}\Delta y_{2t-1} + ... + \phi_{12p}\Delta y_{2t-p} + \varepsilon_{1t}$

Si las variables están cointegradas, el modelo a considerar es la primera relación del modelo con mecanismo de corrección de error (MCE), que podemos escribir como:

(M-12): $$\Delta y_{1t} = \alpha_1 u_{1t-1} + \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{p-1}\gamma_{1ij}\Delta y_{it-j} + v_{1t}$$

en donde u_{1t} es la perturbación de la relación de cointegración.

D-4). La variable explicativa tiene las dos tendencias.

También en este caso lo importante es saber si las variables están cointegradas o no. Si no están cointegradas, el modelo a estimar es el modelo en primeras diferencias que cumple la restricción: $\phi_{12}(1) = 0$.

(M-13): $\Delta y_{1t} = \phi_{111}\Delta y_{1t-1} + ... + \phi_{11p}\Delta y_{1t-p} + \phi_{121}\Delta y_{2t-1} + ... + \phi_{12p}\Delta y_{2t-p} + \varepsilon_{1t}$ (5.10)

Si las variables están cointegradas, el modelo a considerar es la primera relación del modelo con mecanismo de corrección de error (MCE) similar al escrito en (5.10) pero en el que los parámetros cumplen unas retricciones que se veran en la sección siguiente.

(M-14): MCE restringido

D). La variable dependiente tiene las dos tendencias.

El modelo univariante es:

$$y_{1t} = y_{1t-1} + u_{1t}$$

pero ahora en (5.1) se cumple que $\delta_1 \neq 0$.

D-1). La variable explicativa no tiene tendencias.

Su modelo es,

$$y_{2t} = u_{2t}$$

en donde la esperanza de la perturbación puede ser cero o diferente de cero. A partir de (5.1) el modelo a estimar es el modelo (M-15)

$$\Delta y_{1t} = \delta_1 + \phi_{111}\Delta y_{1t-1} + ... + \phi_{11p}\Delta y_{1t-p} + \phi_{121} y_{2t-1} + ... + \phi_{12p} y_{2t-p} + \varepsilon_{1t}$$

D-2). La variable explicativa tiene sólo una tendencia lineal.

El modelo univariante es:

$$y_{2t} = \lambda_{20} + \delta_{22} t + u_{2t}$$

El modelo a estimar es

(M16): $\Delta y_{1t} = \delta_1 + \phi_{111}\Delta y_{1t-1} + ... + \phi_{11p}\Delta y_{1t-p} + \phi_{121} u_{2t-1} + ... + \phi_{12p} u_{2t-p} + \varepsilon_{1t}$

en donde u_{2t} ha sido definido en (5.4).

D-3). La variable explicativa tiene sólo una tendencia estocástica.

El modelo univariante es

$$y_{2t} = y_{2t-1} + u_{2t}$$

En este caso, todo depende de si las variables están o no cointegradas. Si no están cointegradas, el modelo relevante es el (M-17), que podemos escribir

$$\Delta y_{1t} = \delta_1 + \phi_{111}\Delta y_{1t-1} + ... + \phi_{11p}\Delta y_{1t-p} + \phi_{121}\Delta y_{2t-1} + ... + \phi_{12p}\Delta y_{2t-p} + \varepsilon_{1t}$$

Si las variables están cointegradas, el modelo a considerar es el modelo con mecanismo de corrección de error (MCE), que podemos escribir como:

(M-18): $$\Delta y_{1t} = \delta_{11}^{\bullet} + \alpha_1 u_{1t-1} + \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{p-1}\gamma_{1ij}\Delta y_{it-j} + v_{1t}$$

en donde u_{1t} es la perturbación de la relación de cointegración.

D-4). La variable explicativa tiene las dos tendencias.

También en este caso lo importante es saber si las variables están cointegradas o no. Si no están cointegradas, el modelo a estimar es el modelo en primeras diferencias (M-19)

$$\Delta y_{1t} = \delta_1 + \phi_{111}\Delta y_{1t-1} + ... + \phi_{11p}\Delta y_{1t-p} + \phi_{121}\Delta y_{2t-1} + ... + \phi_{12p}\Delta y_{2t-p} + \varepsilon_{1t}$$

Si las variables están cointegradas, el modelo a considerar es el modelo con mecanismo de corrección de error (MCE) similar al escrito en (5.10) pero en el que los parámetros cumplen unas retricciones que se veran en la sección siguiente.

(M-20): MCE restringido

5.3. MODELO VAR Y MODELO CON MECANISMO DE CORRECCION DE ERROR (MCE)

Supongamos dos variables, y_{1t} e y_{2t} que son integradas de orden 1, lo que denotamos con, I(1). (La definición del concepto del orden de integración puede verse en el Capítulo 4).

Consideremos la siguiente estructura:

$$y_{1t} = \beta y_{2t} + u_{1t} \tag{5.11}$$

$$\Delta y_{2t} = u_{2t} \tag{5.12}$$

$$u_{1t} = a_{111}u_{1t-1} + a_{112}u_{1t-2} + a_{121}u_{2t-1} + \varepsilon_{1t} \tag{5.13}$$

$$u_{2t} = a_{211}u_{1t-1} + a_{212}u_{1t-2} + a_{221}u_{2t-1} + \varepsilon_{2t} \tag{5.14}$$

ε_{1t} y ε_{2t} son dos variables estacionarias idénticamente e independientemente distribuidas como:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix} \sim N\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\right] \tag{5.15}$$

La primera relación escrita en (5.11) corresponde a la relación de cointegración entre las dos variables, siendo β el efecto a largo plazo de y_{2t} sobre y_{1t}.

Utilizando (5.11), (5.12) y (5.13) se obtiene:

$$(y_{1t} - \beta y_{2t}) = a_{111}(y_{1t-1} - \beta y_{2t-1}) + a_{112}(y_{1t-2} - \beta y_{2t-2})$$
$$+ a_{121}(y_{2t-1} - y_{2t-2}) + \varepsilon_{1t}$$

de donde resulta:

$$
\begin{aligned}
y_{1t} &= a_{111} y_{1t-1} + a_{112} y_{1t-2} + \beta y_{2t} + (a_{121} - \beta a_{111}) y_{2t-1} - \\
&\quad - (a_{121} + \beta \overset{a}{\cancel{p}}_{112}) y_{2t-2} + \varepsilon_{1t}
\end{aligned}
\tag{5.16}
$$

Esta es una relación en la que el valor de la variable y_{1t} se explica en función del valor contemporáneo de la variable y_{2t} y de los valores pasados de ambas variables.

A partir de (5.11), (5.12) y (5.14) se obtiene:

$$
\begin{aligned}
y_{2t} &= a_{211} y_{1t-1} + a_{212} y_{1t-2} + (1 - \beta a_{211} + a_{221}) y_{2t-1} - \\
&\quad - (a_{221} + \beta a_{212}) y_{2t-2} + \varepsilon_{2t}
\end{aligned}
\tag{5.17}
$$

Sustituyendo en (5.16) a y_{2t} por la expresión escrita en (5.17) se obtiene:

$$
\begin{aligned}
y_{1t} &= (a_{111} + \beta a_{211}) y_{1t-1} + (a_{112} + \beta a_{212}) y_{1t-2} + \\
&\quad + [\beta(1 - \beta a_{211} + a_{221}) + (a_{121} - \beta a_{111})] y_{2t-1} - \\
&\quad - [\beta(a_{221} + \beta a_{212}) + (a_{121} + \beta a_{112})] y_{2t-2} + \varepsilon_{1t} + \beta \varepsilon_{2t}
\end{aligned}
\tag{5.18}
$$

En forma más compacta las expresiones (5.18) y (5.17) pueden escribirse como:

$$
y_{1t} = \phi_{111} y_{1t-1} + \phi_{112} y_{1t-2} + \phi_{121} y_{2t-1} + \phi_{122} y_{2t-2} + v_{1t} \tag{5.19}
$$

$$
y_{2t} = \phi_{211} y_{1t-1} + \phi_{212} y_{1t-2} + \phi_{221} y_{2t-1} + \phi_{222} y_{2t-2} + v_{2t} \tag{5.20}
$$

Estas son las relaciones de un modelo VAR bivariante con 2 retardos. En general, puede hablarse de un modelo VAR n-variante con p retardos.

Es importante destacar que:

$$
\frac{\phi_{121} + \phi_{122}}{1 - \phi_{111} - \phi_{112}} = \beta \tag{5.21}
$$

y también:

$$
\frac{1 - \phi_{221} - \phi_{222}}{\phi_{211} + \phi_{212}} = \beta \tag{5.22}
$$

Una forma alternativa de escribir (5.19) es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
\Delta y_{1t} &= (\phi_{111} - 1) y_{1t-1} + \phi_{112} y_{1t-2} + \phi_{121} y_{2t-1} + \phi_{122} y_{2t-2} + v_{1t} = \\
&= (\phi_{111} + \phi_{112} - 1) y_{1t-1} - \phi_{112} \Delta y_{1t-1} + (\phi_{121} + \phi_{122}) y_{2t-1} - \phi_{122} \Delta y_{2t-1} + v_{1t} = \\
&= - \phi_{112} \Delta y_{1t-1} - \phi_{122} \Delta y_{2t-1} + (\phi_{111} + \phi_{112} - 1) \left(y_{1t-1} - \frac{\phi_{121} + \phi_{122}}{1 - \phi_{111} - \phi_{112}} y_{2t-1} \right) + v_{1t}
\end{aligned}
\tag{5.23}
$$

De la misma forma, (5.20) puede escribirse como:

$$\begin{aligned}\Delta y_{2t} &= (\phi_{211}+\phi_{212})y_{1t-1} - \phi_{212}\Delta y_{1t-1} + (\phi_{221}+\phi_{222}-1)y_{2t-1} - \\ &- \phi_{222}\Delta y_{2t-1} + v_{2t} = -\phi_{212}\Delta y_{1t-1} - \phi_{222}\Delta y_{2t-1} + \\ &+ (\phi_{211}+\phi_{212})\left(y_{1t-1} - \frac{1-\phi_{221}-\phi_{222}}{\phi_{211}+\phi_{212}} y_{2t-1} \right) + v_{2t}\end{aligned} \qquad (5.24)$$

Teniendo en cuenta (5.21) y (5.22), las relaciones (5.23) y (5.24) pueden escribirse como:

$$\Delta y_{1t} = \phi^{*}_{111}\Delta y_{1t-1} + \phi^{*}_{121}\Delta y_{2t-1} + \alpha_1\left(y_{1t-1} - \beta y_{2t-1}\right) + v_{1t} \qquad (5.25)$$

$$\Delta y_{2t} = \phi^{*}_{211}\Delta y_{1t-1} + \phi^{*}_{221}\Delta y_{2t-1} + \alpha_2\left(y_{1t-1} - \beta y_{2t-1}\right) + v_{2t} \qquad (5.26)$$

Estas son las dos relaciones del modelo con mecanismo de corrección de error (MCE). Destacar que, en este modelo, todas las variables son estacionarias. Destacar también, y sobre este punto volveremos después, que el modelo escrito en (5.25) y (5.26) es una versión restringida del modelo VAR escrito en (5.19) y (5.20) incorporando las restricciones escritas en (5.21) y (5.22).

Cuando en el modelo no hay cointegración, la especificación correcta es el modelo VAR en primeras diferencias que podemos escribir como,

$$\Delta y_{1t} = \phi^{*}_{111}\Delta y_{1t-1} + \phi^{*}_{121}\Delta y_{2t-1} + u_{1t}$$

$$\Delta y_{2t} = \phi^{*}_{211}\Delta y_{1t-1} + \phi^{*}_{221}\Delta y_{2t-1} + u_{2t}$$

A continuación, se va a generalizar el esquema anterior al caso en que hay n variables, una ralación de cointegración y el modelo incorpora elementos deterministas como una tendencia lineal.

Sea y_t un vector de n series temporales particionado como: $y'_t = \left(y_{1t} \quad y'_{2t}\right)$, en donde y_{1t} tiene *1* elemento e y'_{2t} tiene el resto de los *n-1* elementos. Suponer que el proceso generador de datos (PGD) de y'_t es el siguiente:

$$y_{1t} = \delta_0 + \delta_1 t + \beta' y_{2t} + u_{1t} \qquad (5.27)$$

$$y_{2t} = y_{2t-1} + u_{2t} \qquad (5.28)$$

en donde δ_0 y δ_1 son parámetros y β' es un vector *(n-1)* de parámetros de cointegracion ; además, suponemos que:

$$A(L)u_t = \delta_2^* + \varepsilon_t \tag{5.29}$$

donde $\delta_2^* = (0, \delta_2')$ $u_t' = (u_{1t}, u_{2t}')$, teniendo u_{2t}' *(n-1)* elementos, y siendo L el operador de retardos,tal que $L' z_t = z_{t-1}$, $A(L) = \sum A_i L^i$ con $A_0 = I_n$ y

$A_i = \begin{pmatrix} A_{11i} & A_{12i} \\ A_{21i} & A_{22i} \end{pmatrix}_{n \times n}$ $\quad$ *i =1,2,…p* con $A_{12p} = A_{22p} = 0.$

Además, suponemos que las raices de $|A(L)| = 0$ están fuera del circulo unitario.

Una última hipótesis es que $\varepsilon_t = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$ es i.i.d. con un vector de medias igual a cero y una matriz de varianzas y covarianzas igual a:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{10} \\ \sigma_{20} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \tag{5.49}$$

donde $\sigma_{10} = \sigma_{20}'$ es el vector *(n-1)* de covarianzas de u_{1t} con los elementos de u_{2t}.

Reescribimos (5.28) y (5.27) como:

$$H(L)y_t = \delta_0^* + \delta_1^* t + u_t \tag{5.30}$$

donde $\delta_0^{*'} = (\delta_0 \quad 0_{n-1}')$, $\delta_1^{*'} = (\delta_1 \quad 0_{n-1}')$ y:

$$H(L) = \begin{bmatrix} 1 & -\beta' \\ 0 & I_{n-1} - I_{n-1}L \end{bmatrix}$$

Después de premultiplicar (5.30) por A(L) y utilizando (5.29), obtenemos:

$$J(L)y_t = A(1)\delta_0^* + A(L)\delta_1^* t + \delta_2^* + \varepsilon_t \tag{5.31}$$

con $J(L)y_t = A(L)H(L) = J_0 + J_1 L + ... + J_i L^i + ...$ y donde:

$$A(1)\delta_0^* = \begin{bmatrix} a_{11}(1) \\ \vdots \\ a_{i1}(1) \\ \vdots \\ a_{n1}(1) \end{bmatrix} \delta_0$$

y
$$A(L)\delta_1^* t = \begin{bmatrix} \delta_1 a_{11}(1)t \\ \vdots \\ \delta_1 a_{i1}(1)t \\ \vdots \\ \delta_1 a_{n1}(1)t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \delta_1 \sum_{j=1}^{p} j a_{11j} \\ \vdots \\ \delta_1 \sum_{j=1}^{p} j a_{i1j} \\ \vdots \\ \delta_1 \sum_{j=1}^{p} j a_{n1j} \end{bmatrix} = h_1 t + h_2 \quad (5.32)$$

ya que $a_{i1}(L)\delta_1 t = \delta_1\left[1 + a_{i11}L + ... + a_{i1p}L^p\right]t = \delta_1\left[t + a_{i11}(t-1) + ... + a_{i1p}(t-p)\right]$

Sea J_0:

$$J_0 = \begin{bmatrix} 1 & -\beta' \\ 0 & I_{n-1} \end{bmatrix}$$

Premultiplicando (5.31) por J_0^{-1}, obtenemos:

$$y_t = \delta^* + \lambda^* t + \Phi(L)y_{t-1} + v_t \quad (5.33)$$

donde:

$$\delta^* = J_0^{-1}\left(A(1)\delta_0^* + \delta_2^* + h_2\right)$$

$$\lambda^* = J_0^{-1}h_1$$

$$\Phi(L) = \sum_{i=1}^{p} \Phi_i L^{i-1}$$

con $\Phi_i = -J_0^{-1}J_i$ y $v_t = J_0^{-1}\varepsilon_t$. La forma del modelo con mecanismo de corrección de error (ECM) puede escribirse:

$$\Delta y_t = \delta + \alpha(1 \quad -\beta')y_{t-1}^{+} + \sum \Gamma_i \Delta y_{t-i} + v_t \quad (5.34)$$

donde:

$$y_t^+ = \left(y_{1t} - \delta_0 - \delta_1 t,\ y_{2t}'\right)$$

con:

$$\alpha(1 \quad -\beta') = I_n - \Phi(1) = J_0^{-1}A(1)H(1) = \begin{bmatrix} 1 & \beta' \\ 0 & I_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}(1) & a_{1.}(1) \\ a_{2.}(1) & a_{22}(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\beta' \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}(1) + \beta' a_{2.}(1) & -a_{1.}(1)\beta' - \beta' a_{2.}(1)\beta' \\ a_{2.}(1) & -a_{2.}(1)\beta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(1) + \beta' a_{2.}(1) \\ a_{2.}(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\beta' \end{bmatrix}$$

y $\Gamma_i = \sum \Phi_j$ y donde δ y λ se definen de forma que (5.33) se sigue de (5.32). En concreto, tenemos:

$$\delta = \delta^* + \alpha(\delta_0 - \delta_1) \tag{5.35}$$

La tendencia lineal no aparece en (5.34) porque se cumple que

$$\lambda^* + \alpha\delta_1 = \alpha\delta_1 - \alpha\delta_1 = 0 \tag{5.36}$$

Utilizando este esquema, vamos a distinguir cuatro casos diferentes según sean las hipótesis que se hagan de los elementos deterministas del modelo tal como puede verse en Aznar y Ayuda (2004).

CASO 1: $\delta_0 = \delta_1 = \delta_2 = 0$. Variables alrededor de una constante; relación de cointegración sin constante y sin tendencia.

En este caso, el modelo es el escrito en (5.34), con:

$$\delta = 0 \text{ y } \ y_t^+ = y_t$$

CASO 2: $\delta_0 \neq 0; \delta_1 = \delta_2 = 0$. Variables alrededor de una constante; relación de cointegración con constante y sin tendencia.

$$\delta = J_0^{-1}A(1)\delta_0^* + \alpha\delta_0$$

$$y_t^{+\prime} = (y_{1t} - \delta_0, y_{2t}')$$

CASO 3: $\delta_0 \neq 0; \delta_1 = 0 , \delta_2 \neq 0$. Variables alrededor de una tendencia lineal cointegrada; relación de cointegración con constante y sin tendencia.

En este caso,

$$\delta = J_0^{-1}(A(1)\delta_0^* + \delta_2^*) + \alpha\delta_0$$
$$y_t^{+\prime} = (y_{1t} - \delta_0 , y_{2t}')$$

CASO 4: $\delta_0 \neq 0; \delta_1 \neq 0 , \delta_2 \neq 0$. Variables alrededor de una tendencia lineal ; relación de cointegración con constante y con tendencia.

En este caso, el modelo es el modelo general previamente derivado con y_t^+ tal como se ha definido en (5.34) y δ tal como se ha definido en (5.35).

5.4 ESTIMACION DE MODELOS CON VARIABLES NO ESTACIONARIAS.

Considerar el siguiente modelo,

$$y_{1t} = \beta y_{2t} + u_{1t} \tag{5.37}$$

$$y_{2t} = y_{2t-1} + u_{2t} \tag{5.38}$$

Para u_t suponemos un proceso como en (5.1) con $\delta = 0$ que reescribimos como

$$u_t = \Psi(L)\varepsilon_t \qquad \Psi(\mathrm{L}) = \mathrm{A(L)}^{-1}$$

A partir de (5.37), el estimador MCO de β puede escribirse como,

$$\hat{\beta} = \frac{\sum y_{2t} y_{1t}}{\sum y_{2t}^2} \tag{5.39}$$

Sustituyendo (5.37) se obtiene,

$$\hat{\beta} = \beta + \frac{\sum y_{2t} u_{1t}}{\sum y_{2t}^2} \tag{5.40}$$

Extendiendo los resultados del Capítulo 2 se demuestra fácilmente que el numerador de esta expresión hay que dividirlo por T para que converja mientras que al denominador hay que dividirlo por T^2 para lograr esa convergencia. El resultado al que se llega es que el estimador MCO de β definido en (5.39), es superconsistente o, lo que es equivalente, $T(\hat{\beta}-\beta)$ tiene un límite bien definido. La forma concreta de su distribución de probabilidad tiene cierta complejidad tal como puede verse en la Proposición 9.2 de Hamilton (1994). Nosotros, en este capítulo, vamos a derivar algunos resultados adoptando un marco más restringido.

Supongamos en primer lugar que $\Psi(L)=\Psi_0=I$ y que $\sigma_{12}=0$; esto significa que no hay ningún tipo de correlación serial en las perturbaciones y que tampoco existe correlación contemporánea entre dichas perturbaciones. Se sigue manteniendo el resultado de la superconsistencia. Pero hay otros resultados que merecen destacarse.En primer lugar, vamos a demostrar que y_{2t} es un regresor estrictamente exógeno. Estrictamente exógeno significa que $Cov(y_{2s},u_{1t})=0$ para todo t,s. La demostración de este resultado es la siguiente (Ver Hayashi (2000)) :

$$Cov(y_{2s},u_{1t})=Cov(y_{2,0}+\Delta y_{2,1}+...+\Delta y_{2,s},u_{1t})$$

$$=Cov(\Delta y_{2,1}+...+\Delta y_{2,s},u_{1t}) \quad \text{(ya que } \operatorname{cov}(y_{2,0},u_{1t})=0\text{)}$$

$$=Cov(u_{2,1}+...+u_{2,s},u_{1t}) \quad \text{(ya que } \Delta y_{2t}=u_{2t}\text{)}$$

$$=Cov(u_{2t},u_{1t}) \quad \text{(ya que no hay correlación serial)}$$

$$= 0 \quad \text{(ya que no hay correlación contemporánea).}$$

Este carácter estrictamente exógeno del regresor permite establecer el siguiente resultado:

$$(\sum y_{2t}u_{1t}/y_{2,1},y_{2,2},...y_{2,t})\approx N(0,\sigma_{11}\sum y_{2t}^2).$$

Por lo tanto, a partir de (5.40) podemos decir que el t-ratio

$$t=\frac{\hat{\beta}-\beta}{\sqrt{\sigma_{11}\sum y_{2t}^2}}=\frac{\sum y_{2t}u_{1t}}{\sqrt{\sigma_{11}\sum y_{2t}^2}}\approx N(0,1) \qquad (5.41)$$

Hay que destacar que esta distribución no depende de ningún parámetro desconocido por lo que puede utilizarse directamente. El problema que surge es que σ_{11} no es conocido y hay que estimarlo. El estimador que normalmente se utiliza es el estimador MCO definido a partir de (5.37):

$$\hat{\sigma}_{11} = \frac{\sum \hat{u}_{1t}^2}{T} \qquad\qquad \hat{u}_{1t} = y_{1t} - \hat{\beta} y_{2t} = u_{1t} - (\hat{\beta} - \beta) y_{2t} \qquad (5.42)$$

Se tiene que,

$$\sum \hat{u}_{1t}^2 = \sum u_{1t}^2 + (\hat{\beta} - \beta)^2 \sum y_{2t}^2 - 2(\hat{\beta} - \beta) \sum y_{2t} u_{1t}$$

La expresión de la derecha está dominada por el primer término ya que para su convergencia es necesario dividirlo por T mientras que los dos términos siguientes convergen sin ningún tipo de ajuste. Si dividimos por T esta expresión, el estimador MCO definido en (5.42) converge a σ_{11}. Por lo tanto, el estadístico $\tilde{t}$ definido como

$$\tilde{t} = \frac{(\hat{\beta} - \beta)/T}{\sqrt{\hat{\sigma}_{11} \sum y_{2t}^2 / T^2}} \xrightarrow{d} N(0,1) \qquad (5.43)$$

Consideremos ahora un segundo escenario con los mismos elementos que el primero excepto en lo que respecta a la correlación contemporánea; en este segundo escenario suponemos que : $\sigma_{12} \neq 0$. Aceptando esta hipótesis, el regresor en (5.37) ya no es estrictamente exógeno. Para solucionar este problema hay que tener en cuenta que se puede eescribir

$$u_{1t} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{22}} u_{2t} + v_t \qquad (5.44)$$

en donde se cumple que: $Cov(u_{2t}, v_t) = 0.$ (5.45)

Sustituyendo (5.44) en (5.37), se obtiene:

$$y_{1t} = \beta y_{2t} + \gamma \Delta y_{2t} + u_{1t} \qquad (5.46)$$

ya que $\Delta y_{2t} = u_{2t}$. Teniendo en cuenta (5.45), se cumple que $Cov(\Delta y_{2t}, v_t) = 0.$ Esto implica que también se cumple que : $Cov(y_{2t}, v_t) = 0.$ lo que establece que los regresores de (5.46) son estrictamente exógenos.

En este caso el estimador MCO de β se obtendría a partir de

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta} \\ \hat{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_{2t}^2 & \sum y_{2t} \Delta y_{2t} \\ & \sum \Delta y_{2t}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum y_{2t} y_{1t} \\ \sum \Delta y_{2t} y_{1t} \end{bmatrix} \qquad (5.47)$$

El estimador MCO sigue siendo superconsistente, es un estimador óptimo en el sentido de que no hay otro asintóticamente más eficiente y, además, permite contrastar hipótesis sobre β utilizando el estadístico t-ratio tal como se define en (5.43).

Vamos a considerar un tercer escenario en el cuál no sólo hay correlación contemporanea entre las perturbaciones sino también correlación serial. Eso se traduce en que no hay ningún tipo de restricción en los polinomios de retardos que definen el proceso estacionario de las perturbaciones aleatorias.

Supongamos que se cumple que:

$$u_{1t} = \sum_{j=-p}^{p} \gamma_j u_{2t-j} + v_t \tag{5.48}$$

en donde suponemos que $Cov(u_{2t-s}, v_t) = 0.$ (5.49)

En este caso el modelo que se estima es:

$$y_{1t} = \beta y_{2t} + \sum_{j=-p}^{p} \gamma_j \Delta y_{2t-j} + v_t \tag{5.50}$$

Definiendo el estimador MCO de β a partir de (5.50) se llega a los mismos resultados comentados en los dos escenarios previos: superconsistencia, eficiencia y posibilidad de utilizar el t-ratio definido en (5.43). Solamente cabe hacer una salvedad con referencia al uso del t-ratio: por estar v_t correlada serialmente, en lugar del estimador definido en (5.42) hay que utilizar el estimador de la varianza a largo plazo. Entre los varios estimadores disponibles, nosotros proponemos utilizal el basado en el siguiente modelo:

$$\hat{v}_t = \hat{\phi}_1 \hat{v}_{t-1} + \ldots + \hat{\phi}_p \hat{v}_{t-p} + \hat{e}_t \tag{5.51}$$

El estimador de la varianza a largo plazo que se propone es:

$$\hat{\lambda}_v^2 = \frac{\hat{\sigma}_e^2}{(1 - \hat{\phi}_1 - \ldots \hat{\phi}_p)^2} \tag{5.52}$$

Tras estos preliminares, vamos a hacer un planteamiento más general distinguiendo tres situaciones diferentes considerando, al mismo tiempo, el modelo general descrito en (5.27)-(5.29) y el modelo con dos variables descrito en (5.11)-(5.14). Siempre consideramos que nuestro objetivo es estimar los parámetros de la relación de cointegración.

1)Exogeneidad Extricta.

En el modelo general esta situación la caracterizamos con,

$$A_{12}(1)=0 \qquad A_{21}(1)=0 \quad \text{y} \qquad \Sigma_{12}=0$$

y, en el modelo con dos variables, estas restricciones son,

$$a_{112}=0 \qquad a_{211}+a_{221}=0 \quad \text{y} \qquad \sigma_{12}=0$$

habiendo establecido la equivalencia de notación: $\rho_{ijk}=a_{ijk}$.

En este marco de exogeneidad extricta, para estimar de forma óptima el parámetro de la relación de cointegración- estimador superconsistente y eficiente- basta aplicar MCO a,

$$y_{1t}=\beta y_{2t}+a_{111}u_{1t-1}+a_{112}u_{1t-2}+\varepsilon_{1t} \tag{5.53}$$

Una expresión equivalente a (5.53) es

$$y_{1t}=\beta y_{2t}+a_{111}y_{1t-1}+a_{112}y_{1t-2}-\beta a_{111}y_{2t-1}-\beta a_{112}y_{2t-2}+\varepsilon_{1t} \tag{5.54}$$

Se ve como este modelo tiene cinco parámetros pero sólo tres de ellos son libres. Otra expresión equivalente de (5.53) y (5.54) es,

$$y_{1t}=\beta y_{2t}-\frac{a_{111}+a_{112}}{1-a_{111}-a_{112}}\Delta y_{1t}-\frac{a_{112}}{1-a_{111}-a_{112}}\Delta y_{1t-1}+\frac{\beta(a_{111}+a_{112})}{1-a_{111}-a_{112}}\Delta y_{2t}$$

$$-\frac{\beta a_{112}}{1-a_{111}-a_{112}}\Delta y_{2t-1}+\varepsilon_t^{+} \tag{5.55}$$

También en este caso tenemos cinco parámetros con solo tres libres. Por lo tanto, cuando se supone exogeneidad extricta la relación de cointegración puede estimarse utilizando las relaciones (5.53), (5.54) ó (5.55), teniendo en cuenta las restricciones en ellas incorporadas.

2). Exogeneidad Débil.

Esta situación se caracteriza por: $A_{21}(1)=0$ y $\Sigma_{12}=0$. En el modelo con dos variables las condiciones son: $a_{211}+a_{212}=0$ y $\sigma_{12}=0$.

En este marco, la estimación óptima de la relación de cointegración se obtiene aplicando MCO a la relación,

$$y_{1t}=\beta y_{2t}+a_{111}u_{1t-1}+a_{112}u_{1t-2}+a_{121}u_{2t-1}+\varepsilon_{1t} \tag{5.56}$$

Una forma equivalente de este modelo es,

$$y_{1t} = \beta y_{2t} + a_{111} y_{1t-1} + a_{112} y_{1t-2} - (a_{121} - \beta a_{111}) y_{2t-1} - (a_{121} - \beta a_{112}) y_{2t-2} + \varepsilon_{1t} \quad (5.57)$$

También podemos escribirlo como,

$$y_{1t} = \beta y_{2t} - \frac{a_{111} + a_{112}}{1 - a_{111} - a_{112}} \Delta y_{1t} - \frac{a_{112}}{1 - a_{111} - a_{112}} \Delta y_{1t-1} + \frac{\beta(a_{111} + a_{112})}{1 - a_{111} - a_{112}} \Delta y_{2t}$$

$$\frac{\rho_{121} - \beta a_{112}}{1 - a_{111} - a_{112}} \Delta y_{2t-1} + \varepsilon_t^+ \quad (5.58)$$

Por lo tanto, podemos estimar β de forma óptima aplicando MCO no lineales a cualquiera de las tres relaciones escritas en (5.56), (5.57) ó (5.58).

3). No hay exogeneidad.

Cuando no hay evidencia a favor del cumplimiento de la hipótesis de exogeneidad, entonces la estimación eficiente de la relación de cointegración, requiere hacer uso de la información contenida en todo el sistema. Por un lado está el método de Máxima Verosimilitud (MV), como puede verse en Johansen (1995). Otra linea ha consistido en estimar los parámetros en una versión modificada de la relación de cointegración. Así, Phillips y Hansen (1990), proponen el método de los MCO modificados; Park (1990) propone el método de correlación canónica y Saikkonen (1991) propone utilizar el método de adelantos y retardos que consiste en aplicar MCO a la relación escrita en (5.50). En un estudio de simulación reciente por Caporale y Pittis (2004), en el que comparan 28 métodos de estimación diferentes, llegan a la conclusión de que un método que es simple y que tiene propiedades similares a los que mejor se comportan es lo que llaman el método de leads y lags (adelantos y retardos) con retardos distribuidos. Este método consiste en aplicar MCO al siguiente modelo

$$y_{1t} = \beta y_{2t} + \sum_{i=1}^{p-1} \phi_i \Delta y_{1t-i} + \sum_{j=-p+1}^{p-1} \gamma_j \Delta y_{2t-j} + v_t$$

(5.59)

La extensión a un modelo general con k+1 variables es inmediata. Supongamos un modelo del siguiente tipo,

$$y_t = \beta_1 x_{1t} + \cdots + \beta_k x_{kt} + u_{1t} \quad (5.60)$$

$$\Delta x_{jt} = u_{jt} \qquad j = 1, 2, \ldots k \quad (5.61)$$

Para las perturbaciones aleatorias hacemos las mismas hipótesis comentadas anteriormente. Extendiendo los resultados anteriores, la estimación óptima de la relación de cointegración se obtiene aplicando MCO a la siguiente relación:

$$y_t = \beta_1 x_{1t} + \ldots + \beta_k x_{kt} + \sum_{i=1}^{p-1} \phi_i \Delta y_{t-i} + \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=-p+1}^{p-1} \phi_{1ji} \Delta x_{jt-i} + \varepsilon_t$$

(5.62)

o, en forma matricial:

$$y = X\beta + [\Delta y \ \ \Delta X]\phi + \varepsilon \qquad (5.63)$$

en donde:

y: vector de T observaciones de la variable y.

X: matriz $T \times k$ observaciones de los niveles de las k variables explicativas.

Δy: matriz $T \times (p-1)$ observaciones de los p-1 retardos del incremento de la variable endógena.

ΔX: matriz $T \times k(p-1)$ observaciones de los p retardos de los incrementos de las k variables.

β: vector de k parámetros.

ϕ: vector de $2k(p-1)$ parámetros.

ε_i: iid $N(0, \sigma^2)$.

El vector de estimadores MCO de los parámetros del modelo (5.63) puede escribirse como:

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta} \\ \hat{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'X & X'\Delta y & X'\Delta X \\ \Delta y'X & \Delta y'\Delta y & \Delta y'\Delta X \\ \Delta X'X & \Delta X'\Delta y & \Delta X'\Delta X \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X'y \\ \Delta y'y \\ \Delta X'y \end{bmatrix} \qquad (5.64)$$

Se demuestra fácilmente que los estimadores de β son superconsistentes mientras que los de ϕ son consistentes.

5.5 ANÁLISIS IMPULSO-RESPUESTA.

En esta sección, se continúa con el análisis iniciado en la Sección 5.2 extendiéndolo a un marco más general en el que se consideran diferentes tipos de impulso y se tienen en cuenta tanto modelos estacionarios como no estacionarios.

Suponer un vector $y = (y_1 ....y_n)$ cuyo comportamiento en el tiempo viene dado por un determinado PGD. Suponer también que en el periodo T se produce un cambio no previsto por el normal funcionamiento del PGD en una de las variables del vector, digamos la y_l. Este cambio no previsto en la variable y_l se transmite a la misma variable y al resto de las variables en el mismo periodo T y en periodos sucesivos. Al cambio no previsto lo llamaremos impulso y a los efectos que se derivan para todas las variables lo llamaremos respuesta.

El análisis impulso-respuesta persigue determinar los efectos que, sobre las variables del vector, se producen como consecuencia de la introducción de un impulso en una de las variables. Estos efectos dependerán de dos factores:

(i). El tipo de impulso que estemos considerando.

(ii). La forma que adopte el PGD.

Para ilustrar lo que se pretende hacer con este tipo de análisis consideraremos, en primer lugar, un modelo univariante muy simple que escribiremos como:

$$y_t = \delta + \phi y_{t-1} + u_t \qquad (5.66)$$

en donde δ y ϕ son constantes y u_t es un ruido blanco con varianza σ^2.

A partir de este modelo caben varias aproximaciones según que $|\phi| < 1$ -estacionario- o que $\phi = 1$ -no estacionario-. Además, cabe pensar en varias formas de impulso según sea el supuesto que se haga respecto al cambio del PGD.

Siempre vamos a suponer que el impulso se concreta en un cambio en la constante del modelo; es decir, el impulso se concreta en que la constante en uno o varios periodos a partir de uno considerado como periodo base, pasa de δ a δ^*; en general, siempre supondremos que la diferencia entre las dos es una unidad. Los cambios que experimenta la variable - la respuesta – se obtienen comparando cuales habrían sido los valores que la variable toma en una serie de periodos si no se produce ningún cambio con los que toma después de producirse el cambio.

Distinguiremos dos tipos de impulsos.

Definición 5.1. (Impulso Transitorio). En el caso del Impulso Transitorio (IT), la constante varía en un periodo pero, en los siguientes, dicha constante vuelve a su valor original. Esta situación puede representarse de la siguiente manera:

$$y_t = \delta + \phi y_{t-1} + u_t \qquad t = 1,2,\dots,T-1$$

$$y_t = \delta^* + \phi y_{t-1} + u_t \qquad t = T$$

$$y_t = \delta + \phi y_{t-1} + u_t \qquad t = T+1, T+2, \dots\dots$$

Definición 5.2. (Impulso Permanente). En el caso del Impulso Permanente (IP) la constante cambia en un periodo y el nuevo valor lo mantiene en todos los periodos que siguen. El proceso resultante es:

$$y_t = \delta + \phi y_{t-1} + u_t \qquad t = 1,2,\dots,T-1$$

$$y_t = \delta^* + \phi y_{t-1} + u_t \qquad t = T, T+1, \dots$$

Para determinar el efecto que, sobre el valor de la variable en T+h, produce un cambio en la constante en T, hay que tener en cuenta que:

$$\begin{aligned} y_{T+h} &= \delta + \phi y_{T+h-1} + u_{T+h} = \\ &= \delta + \phi\delta + \phi^2 y_{T+h-2} + u_{T+h} + \phi u_{T+h-1} = \\ &= \delta + \phi\delta + \phi^2\delta + \phi^3 y_{T+h-3} + u_{T+h} + \phi u_{T+h-1} + \phi^2 u_{T+h-2} = (5.67) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= \delta + \phi\delta + \phi^2\delta + \dots + \phi^h\delta + \phi^{h+1} y_{T-1} + \sum_{i=0}^{h} \phi^i u_{T+h-i} \end{aligned}$$

A partir de esta expresión, podemos derivar el cambio que se produce en y_{T+h} como consecuencia del cambio introducido en la constante en el periodoT. Considerar las siguientes definiciones:

Definición 5.3. Efecto Retardado y Efecto a Largo Plazo. El Efecto Retardado h periodos mide los efectos que, un cambio en la constante en el periodo T, produce en el valor de la variable en el periodo T+h. Denominaremos este efecto como: ER(h). El Efecto a Largo Plazo es el Efecto Retardado para $h = \infty$.

Para el modelo escrito en (5.66), y teniendo en cuenta la expresión (5.67), se pueden definir los dos efectos para los casos en que se asuma un impulso transitorio o un impulso permanente.

Impulso Transitorio.

El Efecto Retardado h periodos viene dado por:

$$\text{ER (h)}= \phi^{h-1}$$

Y el Efecto a Largo Plazo

$$\text{ER } (\infty)= \phi^{\infty} = 0$$

Impulso Permanente.

El Efecto Retardado h periodos viene dado por:

$$\text{ER (h)}= 1+\phi+......+\phi^{h}$$

Y el Efecto a Largo Plazo

$$\text{ER } (\infty)= 1+\phi+....+\phi^{\infty} = \frac{1}{1-\phi}$$

Para un modelo no estacionario con $\phi = 1$, los resultados son bastante diferentes.

En el caso de un Impulso Transitorio se tiene que

$$\text{ER (h) =1} \qquad ; \quad \text{ER } (\infty)= 1$$

En el caso de un Impulso Permanente , las respuestas vienen dadas por

$$\text{ER (h) = h} \qquad ; \quad \text{ER } (\infty)= \infty$$

Se ve que en este marco no estacionario, el efecto a largo plazo de un impulso permanente es infinito. Eso explica que, en lo sucesivo, cuando se considere un marco no estacionario, solo se analice el caso en que el impulso es transitorio.

Considerar ahora un marco multivariante en el que se toma un vector, y_t , con n variables de entre las que tomaremos dos de ellas, y_{jt} e y_{lt} . El objeto de nuestro análisis es determinar la respuesta que experimenta y_{jt} en el periodo T+h como consecuencia de introducir un shock en y_{lt} en el periodo T. Para llevar a cabo este análisis vamos a redefinir algunos de los conceptos previamente introducidos y considerar otros nuevos.

Definición 5.4. Efecto Retardado y Efecto a Largo Plazo. El Efecto Retardado h periodos de la variable y_{lt} sobre la variable y_{jt} da cuenta de la respuesta que experimenta la variable y_j en el periodo T+h como consecuencia de una variación introducida en la variable y_l en el periodo T. El efecto lo denotaremos como $ER_l^j(h)$ y lo escribiremos como

$$ER_l^j(h) = \frac{\partial y_{jT+h}}{\partial y_{lT}} \qquad (5.68)$$

El Efecto a Largo Plazo de y_l sobre y_j viene dado por: $ER_l^j(\infty)$.

Un aspecto importante a destacar en este marco multivariante es que cuando introducimos un cambio en la variable y_l en el periodo T, la propia variable y_l va cambiando en los periodos que siguen a T como consecuencia de ese primer cambio y de los efectos que se desencadenan en el sistema; estos cambios en la variable y_l en los periodos T+1, T+2,… dependerán de la forma que adopta la estructura del modelo. Por lo tanto, tiene sentido analizar cuál es el cambio experimentado por la variable y_j en T+h en relación al cambio experimentado por y_l en ese mismo periodo, siendo ambos cambios consecuencia del cambio original introducido sobre la variable y_l en T.

Definición 5.5. Efecto Unitario Retardado y Efecto Unitario a Largo Plazo

Estos conceptos son los mismos que los introducidos en la Definición 5.4, pero poniendo en relación la variación experimentada por las dos variables en T+h. Así, el Efecto Unitario Retardado se define como

$$EUR_l^j(h) = \frac{\dfrac{\partial y_{jT+h}}{\partial y_{lT}}}{\dfrac{\partial y_{lT+h}}{\partial y_{lT}}} \qquad (5.69)$$

El Efecto Unitario a Largo Plazo viene dado por $EUR_l^j(\infty)$.

Examinemos a continuación la forma que adoptan estos conceptos considerando tres modelos diferentes.

1. Modelo VAR estacionario con variables en niveles.

Suponer que y_t es un vector con n variables que sigue el siguiente modelo

$$y_t = \delta + \Phi y_{t-1} + u_t$$

en donde δ es un vector de n constantes, Φ es una matriz de orden n de parámetros y u_t es un vector de perturbaciones aleatorias que tienen media cero y matriz de varianzas y covarianzas igual a Σ. Sustituyendo sucesivamente se obtiene

$$y_T = \delta + \Phi y_{T-1} + u_T$$
$$y_{T+1} = \delta + \Phi\delta + \Phi^2 y_{T-1} + u_{T+1} + \Phi u_T$$
$$-----------------------$$
$$y_{T+h} = \delta + \Phi\delta + ... + \Phi^h\delta + \Phi^{h+1} y_{T-1} + \sum_{i=0}^{h} \Phi^i u_{T+h-i}$$

A partír de estas expresiones, se pueden definir las respuestas de la variable y_{jt} ante cambios introducidos en la variable y_{lt}.

Impulso Transitorio.

El Efecto Retardado h periodos y el Efecto a Largo Plazo de y_{lt} sobre y_{jt} vienen dados, respectivamente, por

$$ER_l^j(h) = (\Phi^h)_{jl} \qquad \text{y} \qquad ER_l^j(\infty) = (\Phi^\infty)_{jl} = 0$$

en donde $()_{jl}$ indica el elemento jl-ésimo de la matriz dentro del paréntesis.

En lo que respecta a los efectos unitarios la expresión es:

$$EUR_l^j(h) = \frac{ER_l^j(h)}{ER_l^l(h)}$$

En este caso, el Efecto Unitario a Largo Plazo no está definido porque tanto el numerador como el denominador se hacen cero.

Impulso Permanente.

Los efectos retardado y a largo plazo de un impulso permanente vienen dados, respectivamente, por

$$ER_l^j(h) = (\Phi + \Phi^2 + ... + \Phi^h)_{jl}$$
$$ER_l^j(h) = (\Phi + \Phi^2 + ... + \Phi^\infty)_{jl} = \left[\Phi(I - \Phi)^{-1}\right]_{jl}$$

En lo que respecta a los efectos unitarios, las expresiones son

$$EUR_l^j(h) = \frac{ER_l^j(h)}{ER_l^l(h)}$$

$$EUR_l^j(\infty) = \frac{ER_l^j(\infty)}{ER_l^l(\infty)}$$

El análisis se puede extender fácilmente al caso en que el orden del proceso autoregresivo sea p en lugar de 1, ya que todo proceso de orden p siempre se puede escribir como un proceso de primer orden.

Considerar el siguiente modelo de orden p

$$y_t = \delta + \Phi_1 y_{t-1} + \ldots\ldots + \Phi_p y_{t-p} + u_t$$

Equivalentemente, este modelo puede escribirse como

$$\begin{bmatrix} y_t \\ y_{t-1} \\ \vdots \\ y_{t-p+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi_1 & \cdots & \cdots & \Phi_p \\ I_n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \cdots & I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ y_{t-2} \\ \vdots \\ y_{t-p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

En forma compacta esta expresión puede escribirse como

$$y_t^* = \delta^* + \Phi y_{t-1}^* + u_t^*$$

Se ve claramente que todos los resultados anteriores se pueden extender a este caso teniendo en cuenta solamente la forma particular que adopta la matríz Φ .

2. Modelo VAR con variables I(1) y sin cointegración.

Partimos de un vector de n variables, y_t , todas ellas integradas de orden 1. Además, suponemos que no hay cointegración entre ellas. Con estos supuestos, el modelo VAR(p) en niveles puede escribirse como un modelo VAR (p-1) en primeras diferencias que podemos escribir como

$$\Delta y_t = \delta + \Gamma_1 \Delta y_{t-1} + \ldots\ldots + \Gamma_{p-1} \Delta y_{t-p+1} + u_t$$

Una expresión equivalente es la siguiente

$$\begin{bmatrix} y_t \\ \Delta y_t \\ \vdots \\ \vdots \\ \Delta y_{t-p+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta \\ \delta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_n & \Gamma_1 & \cdots & \cdots & \Gamma_{p-1} \\ 0 & \Gamma_1 & \cdots & \cdots & \Gamma_{p-1} \\ 0 & I_n & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ \Delta y_{t-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \Delta y_{t-p-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_t \\ u_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.70)$$

y, en forma compacta

$$y_t^* = \delta^* + D y_{t-1}^* + u_t^* \quad (5.71)$$

A partir de esta expresión, el análisis se puede llevar a cabo de forma similar a como se ha hecho con los modelos anteriores. Sustituyendo sucesivamente se obtiene

$$y_{T+h}^* = \delta^* + D\delta^* + \ldots + D^h \delta^* + D^{h+1} y_{T-1}^* + \sum_{i=0}^{h} D^i u_{T+h-i}$$

Antes de pasar a determinar los efectos, considerar la siguiente partición de la matriz D

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}$$

en donde $D_{11} = I_n$; $D_{12} = \lfloor \Gamma_1 \quad \Gamma_2 \quad \cdots \quad \Gamma_{p-1} \rfloor$ y las otras matrices se definen correspondientemente.

Algunas potencias sucesivas de la matriz D son las siguientes

$$D^2 = \begin{bmatrix} D_{11}^{(2)} & D_{12}^{(2)} \\ D_{21}^{(2)} & D_{22}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11}^2 & D_{11}D_{12} + D_{12}D_{22} \\ 0 & D_{22}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & D_{12}(I + D_{22}) \\ 0 & D_{22}^2 \end{bmatrix}$$

En general, se tiene que

$$D^h = \begin{bmatrix} D_{11}^{(h)} & D_{12}^{(h)} \\ D_{21}^{(h)} & D_{22}^{(h)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & D_{12}(I + D_{22} + \ldots\ldots + D_{22}^h) \\ 0 & D_{22}^h \end{bmatrix}$$

y cuando el horizonte temporal se hace infinito se obtiene

$$D^\infty = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & D_{12}(I - D_{22})^{-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A partir de estas expresiones, podemos determinar los efectos que, sobre y_{jt} , se derivan de introducir un impulso en la variable y_{lt} , limitando el análisis a un <u>impulso transitorio.</u>

El efecto retardado h periodos y el efecto a largo plazo son, respectivamente,

$$
\begin{aligned}
ER_l^j(h) &= (D_{11}^{(h)})_{jl} + (D_{12}^{(h)})_{jl} = \left[D_{12}(I + D_{22} + \ldots + D_{22}^h) \right]_{jl} \\
ER_l^j(\infty) &= (A)_{jl} + (B)_{jl} = \left[D_{12}(I - D_{22})^{-1} \right]_{jl}
\end{aligned}
$$

En cuanto a los efectos unitarios, las expresiones son

$$
EUR_l^j(h) = \frac{ER_l^j(h)}{ER_l^l(h)}
$$

$$
EUR_l^j(\infty) = \frac{ER_l^j(\infty)}{ER_l^l(\infty)}
$$

<u>3. Modelo VAR con variables I(1) que están cointegradas.</u>

Ya hemos comentado que la existencia de cointegración introduce restricciones en los parámetros del modelo VAR y que el modelo con mecanismo de corrección de error es aquel modelo que incorpora estas restricciones.

La forma general del modelo con mecanismo de corrección de error es

$$
\Delta y_t = \delta + \alpha\beta' y_{t-1} + \Gamma_1 \Delta y_{t-1} + \ldots. + \Gamma_{p-1} \Delta y_{t-p+1} + u_t
$$

Una forma alternativa de escribir este modelo es

$$
\begin{bmatrix} y_t \\ \Delta y_t \\ \Delta y_{t-1} \\ \vdots \\ \Delta y_{t-p+2} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \delta \\ \delta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}
+
\left[\begin{array}{c|cccc}
I + \alpha\beta' & \Gamma_1 & \cdots & \cdots & \Gamma_{p-1} \\
\alpha\beta' & \Gamma_1 & \cdots & \cdots & \Gamma_{p-1} \\
0 & I_n & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & I_n & 0
\end{array} \right]
\begin{bmatrix} y_{t-1} \\ \Delta y_{t-1} \\ \Delta y_{t-2} \\ \vdots \\ \Delta y_{t-p+1} \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} u_t \\ u_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}
$$

A partir de esta formulación se puede llegar a la misma expresión compacta escrita en (5.71) pero teniendo en cuenta que la matriz D adopta una forma muy diferente.

En concreto, ahora se tiene que $D_{11} = \left[I + \alpha\beta^{'}\right]$, $D_{12} = \left[\Gamma_1 \quad \cdots \quad \Gamma_{p-1}\right]$ y de la misma manera las matrices D_{21} y D_{22}, tal como puede verse en la última expresión.

También podemos escribir

$$D^h == \begin{bmatrix} D_{11}^{(h)} & D_{12}^{(h)} \\ D_{21}^{(h)} & D_{22}^{(h)} \end{bmatrix}$$

en donde: $D_{ij}^{(h)} = D_{i1}^{(h-1)} D_{1j} + D_{i2}^{(h-1)} D_{2j}$. Se puede demostrar que los elementos de esta matriz convergen conforme h tiende a infinito, pudiendose escribir

$$D^h \xrightarrow{h\to\infty} \begin{bmatrix} A & B \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

A partir de estas expresiones se pueden definir los efectos retardado y a largo plazo de y_{lt} sobre y_{jt}.En primer lugar, supondremos que los modelos escritos proceden del modelo estructural escrito en (5.72)-(5.74). Supondremos, además, que la variable y_{lt} pertenece al segundo subgrupo, y_{2t}, mientras que la variable j-ésima pertenece al primer grupo de variables. Como puede verse en (5.72), al variar y_{lt} todas las variables del primer grupo varían contemporáneamente de acuerdo con los correspondientes coeficientes de las relaciones de cointegración: $\beta_{1l}, \ldots . \beta_{rl}$.

Por lo tanto, el Efecto Retardado y el Efecto a Largo Plazo vienen dados, respectivamente, por

$$ER_l^j(h) = (D_{11}^{(h)})_{jl} + \sum_{i=1}^{r} \beta_{il} (D_{11}^{(h)})_{ji} + (D_{12}^{(h)})_{jl} + \sum_{i=1}^{r} \beta_{il} (D_{12}^{(h)})_{ji}$$

$$ER_l^j(\infty) = (A)_{jl} + \sum_{i=1}^{r} \beta_{il} (A)_{ji} + (B)_{jl} + \sum_{i=1}^{r} \beta_{il} (B)_{ji}$$

Respecto a los efectos unitarios las definiciones son

$$EUR_l^j(h) = \frac{ER_l^j(h)}{ER_l^l(h)}$$

$$EUR_l^j(\infty) = \frac{ER_l^j(\infty)}{ER_l^l(\infty)}$$

Analicemos ahora algunos ejemplos, tomando tres modelos diferentes.

Modelo 1. Modelo VAR estacionario .

$$\begin{aligned} y_{jt} &= \delta_j + \phi_{jj} y_{jt-1} + \phi_{jl} y_{lt-1} + u_{jt} \\ y_{lt} &= \delta_l + \phi_{lj} y_{jt-1} + \phi_{ll} y_{lt-1} + u_{lt} \end{aligned}$$

En forma matricial el modelo puede escribirse como:

$$y_t = \delta + \Phi y_{t-1} + u_t$$

y si sustituimos secuencialmente los retardos de y se llega a

$$y_{T+h} = \delta + ... + \Phi^h \delta + \Phi^{h+1} y_{T-1} + u_{T+h} + \Phi u_{T+h-1} + ... + \Phi^h u_T$$

Por ser estacionario el modelo, las raices de Φ están fuera del circulo unitario por lo que se cumple que $\Phi^h \to 0$ conforme $h \to \infty$. A partir de estos resultados se tiene que, para un impulso transitorio

$$ER_l^j(h) = (\Phi^h)_{jl} \qquad \text{y} \qquad ER_j^l(\infty) = 0$$

En lo que respecta al efecto unitario podemos escribir

$$EUR_l^j(h) = \frac{ER_l^j(h)}{ER_l^l(h)}$$

Cabe destacar que este cociente no se puede definir cuando h tiende a infinito.

Modelo 2. Modelo VAR con variables integradas de orden 1 y sin cointegración.

El modelo lo escribimos como

$$\begin{aligned} \Delta y_{jt} &= \delta_j + \phi_{jj} \Delta y_{jt-1} + \phi_{jl} \Delta y_{lt-1} + u_{jt} \\ \Delta y_{lt} &= \delta_l + \phi_{lj} \Delta y_{jt-1} + \phi_{ll} \Delta y_{lt-1} + u_{lt} \end{aligned}$$

A partir de esta expresión podemos escribir

$$\begin{bmatrix} y_{jt} \\ y_{lt} \\ \Delta y_{jt} \\ \Delta y_{lt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_j \\ \delta_l \\ \delta_j \\ \delta_l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & \phi_{jj} & \phi_{lj} \\ 0 & 1 & \phi_{lj} & \phi_{ll} \\ 0 & 0 & \phi_{jj} & \phi_{jl} \\ 0 & 0 & \phi_{lj} & \phi_{ll} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{jt-1} \\ y_{lt-1} \\ \Delta y_{jt-1} \\ \Delta y_{lt-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{jt} \\ u_{lt} \\ u_{jt} \\ u_{lt} \end{bmatrix}$$

o, en forma más compacta

$$y_t^* = \delta^* + Dy_{t-1}^* + v_t^*$$

La matriz D se puede particionar como

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}$$

en donde D_{11} es $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y el resto de las matrices se ajustan a esta definición.

Las potencias sucesivas de D pueden escribirse como

$$D^2 = \begin{bmatrix} I & D_{12} + D_{12}D_{22} \\ 0 & D_{22}^2 \end{bmatrix}$$

$$D^3 = \begin{bmatrix} I & D_{12} + D_{12}D_{22} + D_{12}D_{22}^2 \\ 0 & D_{22}^3 \end{bmatrix}$$

En general, podemos escribir

$$D^h = \begin{bmatrix} I & D_{12} + D_{12}D_{22} + ...+ D_{12}D_{22}^{h-1} \\ 0 & D_{22}^h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11}^{(h)} & D_{12}^{(h)} \\ 0 & D_{22}^{(h)} \end{bmatrix}$$

y para h=∞

$$D^\infty = \begin{bmatrix} I & D_{12}(I - D_{22})^{-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A partir de esta expresión obtenemos

$$ER_l^j(h) = (D_{12}^{(h)})_{jl}$$

$$EA_l^j(\infty) = (B)_{jl} = b_{jl}$$

En lo que respecta a los efectos unitarios se tiene que

$$EUR_l^j(h) = \frac{ER_l^j(h)}{ER_l^l(h)} = \frac{(D_{12}^{(h)})_{jl}}{1 + (D_{12}^{(h)})_{ll}}$$

$$EUR_l^j(\infty) = \frac{ER_l^j(\infty)}{ER_l^l(\infty)} = \frac{b_{jl}}{1 + b_{ll}}$$

<u>Modelo 3</u>. Modelo VAR con variables integradas de orden 1 con cointegración y causalidad unidireccional.

El modelo del que partimos es

$$\begin{aligned} y_{jt} &= \beta y_{lt} + u_{jt} \\ \Delta y_{lt} &= u_{lt} \end{aligned}$$

$$\text{con} \quad u_{lt} = \rho u_{lt-1} + \varepsilon_{lt}$$

El modelo en forma de mecanismo de corrección de error es

$$\begin{aligned} \Delta y_{jt} &= -(y_{jt-1} - \beta y_{lt-1}) + \beta\rho\Delta y_{lt-1} + u_{jt} + \beta\varepsilon_{lt} \\ \Delta y_{lt} &= \rho\Delta y_{lt-1} + \varepsilon_{lt} \end{aligned}$$

Para este modelo la matriz D adopta la forma siguiente

$$D = \begin{bmatrix} 0 & \beta & 0 & \beta\rho \\ 0 & 1 & 0 & \rho \\ -1 & \beta & 0 & \beta\rho \\ 0 & 0 & 0 & \rho \end{bmatrix}$$

Las submatrices superiores de las sucesivas potencias de D pueden escribirse como

$$D_{11}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad D_{12}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & \beta\rho + \beta\rho^2 \\ 0 & \rho + \rho^2 \end{bmatrix}$$

$$D_{11}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad D_{12}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & \beta\rho + \beta\rho^2 + \beta\rho^3 \\ 0 & \rho + \rho^2 + \rho^3 \end{bmatrix}$$

Repitiéndolo sucesivamente para h= ∞ se tiene que

$$D_{11}^{(\infty)} = A = \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad D_{12}^{(\infty)} = B = \begin{bmatrix} 0 & \beta\dfrac{\rho}{1-\rho} \\ 0 & \dfrac{\rho}{1-\rho} \end{bmatrix}$$

A partir de estos resultados obtenemos

$$ER_l^j(h) = \beta(1 + \rho + ... + \rho^h)$$

$$ER_l^j(\infty) = \frac{\beta}{1-\rho}$$

Respecto a los efectos unitarios se tiene que

$$\text{EUR}_l^j(h) = \frac{\beta(1+\rho+...+\rho^h)}{1+\rho+...+\rho^h} = \beta \quad ; \qquad \text{EUR}_l^j(\infty) = \beta$$

Un hecho importante a destacar es que, para este modelo, cualquiera que sea el horizonte temporal h el efecto unitario de un impulso en T es siempre el mismo y coincide con el coeficiente de la relación de cointegración.

Podríamos seguir con otros ejemplos pero parece más útil derivar una expresión general que nos permita conocer el efecto a largo plazo de una variable sobre otra, cualquiera que sea el modelo con cointegración que consideremos.

Suponer que $\boldsymbol{y_t}$ es un vector de n variables aleatorias, todas ellas I (1). Particionamos este vector como: $y_t = \left(y_{1t}^{'}, y_{2t}^{'}\right)^{'}$ en donde el primer subvector tiene r elementos y el segundo n-r. El sistema lo escribimos como

$$\begin{aligned} y_{1t} &= \beta_2^{'} y_{2t} + u_{1t} \\ y_{2t} &= y_{2t-1} + u_{2t} \end{aligned} \qquad (5.72)\text{-}(5.73)$$

en donde $\beta_2^{'}$ es una matriz de orden r.(n-r) de los coeficientes de las relaciones de cointegración. Para $u_t = (u_{1t}^{'}, u_{2t}^{'})$ asumimos que

$$\text{A(L)}\, u_t = \delta + \varepsilon_t \qquad (5.74)$$

Con $\delta = (0, \delta_2)$; A(L) = $\sum_{i=1}^{p} A_i L^i$ con $A_0 = I_n, A_i = \begin{bmatrix} A_{11i} & A_{12i} \\ A_{21i} & A_{22i} \end{bmatrix}$ (n.n), i=1,2….p con $A_{12p} = A_{22p}$ =0, ajustandose la partición a la comentada anteriormente. Además, suponemos que que las raices de $|A(L)| = 0$ están fuera del círculo unitario. Finalmente, suponemos que $\boldsymbol{\varepsilon_t}$ es una secuencia de vectores de n elementos que se distribuyen identica e independientemente con vector de medias cero y matriz de varianzas y covarianzas Σ>0. A partir de estas expresiones es facil derivar las formas VAR y de mecanismo de corrección de error del modelo. Sean $\mu = (\mu_1^{'}, \mu_2^{'})$ las esperanzas de Δy_{1t} y Δy_{2t} respectivamente y sean μ_{1j}, μ_{2l} las esperanzas de $\Delta y_{jt}, \Delta y_{lt}$, respectivamente. En este caso, el Efecto Unitario a Largo Plazo, $EUR_l^j(\infty)$ viene dado por

$$EUR_l^j(\infty) = \frac{\partial \mu_{1j}}{\partial \mu_{2l}}$$

Tomando esperanzas en ambos lados del modelo de las perturbaciones se tiene que

$$A(1)\begin{bmatrix} \mu_1^{\bullet} \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \delta_2 \end{bmatrix}$$

en donde $\mu_1^{\bullet}$ es el vector de esperanzas de u_{1t}. Utilizando las s últimas filas de este sistema se tiene

$$\mu_2 = B_{22}\delta_2$$

en donde

$$\mathrm{A}(1)^{-1} = B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{B}_{22} = (A_{22}(1) - A_{21}(1)A_{11}(1)^{-1}A_{12}(1))^{-1}$$

Por otra parte, utilizando las relaciones de cointegración, se tiene que

$$\Delta y_{1t} = \beta_2^{'}\Delta y_{2t} + u_{1t} - u_{1t-1}$$

de donde obtenemos

$$\mu_1 = \beta_2^{'}\mu_2$$

Combinando todos estos resultados se llega a

$$\mu_1 = \beta_2^{'}B_{22}\delta_2$$

por lo que el Efecto Unitario a Largo Plazo de la variable l-ésima sobre la variable j-ésima vendra dado por

$$EUR_l^j(\infty) = \frac{\beta_{2j.}^{'}(B_{22})_{.l}}{(B_{22})_{ll}} \qquad (5.75)$$

en donde $\beta_{2j.}^{'}$ es la fila j-ésima de $\beta_2^{'}$, $(..)_{.l}$ es la columna l-ésima de la matriz entre paréntesis y $(..)_{ll}$ es el ll-ésimo de la matriz entre paréntesis.

Utilizando esta última expresión podemos derivar condiciones suficientes para que el efecto a largo plazo de y_{lt} sobre y_{jt} coincida con el coeficiente de la primera variable en la relación de cointegración correspondiente a la segunda. Las condiciones son:

- o bien todos los coeficientes de $\beta^{'}_{2j.}$,excepto el correspondiente a y_{lt} ,son cero o bien todos los elementos de $(B_{22})_{.l}$ excepto el correspondiente a la variable y_{lt} son cero. ó ambas.

Se ve directamente que la segunda parte de la condición se satisface cuando $A_{21}(1)=0$ y, al mismo tiempo, cuando todos elementos de la columna de $A_{22}(1)$ correspondiente a $\boldsymbol{y_{lt}}$ son cero excepto el correspondiente a esa misma variable.

Modelo 4.

Considerar el siguiente modelo trivariante

$$\begin{aligned}
y_{1t} &= \beta_2 y_{2t} + \beta_3 y_{3t} + u_{1t} \\
\Delta y_{2t} &= u_{2t} \\
\Delta y_{3t} &= u_{3t}
\end{aligned}$$

con $u_{1t} = \varepsilon_{1t}, u_{2t} = \delta_2 + \rho u_{2t-1} + \varepsilon_{2t}, u_{3t} = \delta_3 + \varepsilon_{3t}$, siendo los ε ruidos blancos con una matriz de varianzas y covarianzas que es diagonal. El modelo con mecanismo de corrección de error toma la forma siguiente

$$\begin{aligned}
\Delta y_{1t} &= \delta_1 - (y_{1t-1} - \beta_2 y_{2t-1} - \beta_3 y_{3t-1}) + \beta_2 \rho \Delta y_{3t-1} + v_{1t} \\
\Delta y_{2t} &= \delta_2 + \rho \Delta y_{3t-1} + v_{2t} \\
\Delta y_{3t} &= \delta_3 + v_{3t}
\end{aligned}$$

en donde, $\delta_1 = \beta_2\delta_2 + \beta_3\delta_3, v_{1t} = \varepsilon_{1t} + \beta_2\varepsilon_{2t} + \beta_3\varepsilon_{3t}, v_{2t} = \varepsilon_{2t}, v_{3t} = \varepsilon_{3t.}$

A partir de los desarrollos de este capítulo, podemos escribir

$$\begin{bmatrix} y_t \\ \Delta y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta \\ \delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \beta_2 & \beta_3 & 0 & 0 & \beta_2\rho \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \rho \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \beta_2 & \beta_3 & 0 & 0 & \beta_2\rho \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ \Delta y_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_t \\ v_t \end{bmatrix}$$

Se tiene que

$$\alpha = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \beta' = \begin{bmatrix} 1 & -\beta_2 & -\beta_3 \end{bmatrix}; \alpha\beta' = \begin{bmatrix} -1 & \beta_2 & \beta_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta_2\rho \\ 0 & 0 & \rho \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En este caso se tiene que

$$A = D_{11}^{(h)} = D_{11} = \begin{bmatrix} 0 & \beta_2 & \beta_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = D_{12}^{(h)} = D_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta_2\rho \\ 0 & 0 & \rho \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A partir de estas expresiones, los efectos retardados pueden escribirse como

$$ER_3^1(h) = ER_3^1(\infty) = \beta_2\rho + \beta_3$$

y los efectos unitarios

$$EUR_3^1(h) = EUR_3^1(\infty) = \frac{\beta_2\rho + \beta_3}{1} = \beta_2\rho + \beta_3$$

Alternativamente, estos efectos pueden obtenerse a partir de la expresión escrita en (5.75), que, eneste caso , puede reescribirse como

$$EUR_3^1(\infty) = \frac{\begin{pmatrix} \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix}(B_{22})_{.3}}{(B_{22})_{33}}$$

En este caso se tiene que : $A(L)u_t = \delta + \varepsilon_t$ pude escribirse como

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\rho L \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \\ u_{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \varepsilon_{3t} \end{bmatrix}$$

por lo que

$$A(1)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -\rho\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad ; \; A(1)^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \rho\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=B$$

$$(B_{22})_{.3}=\begin{bmatrix}\rho\\ 1\end{bmatrix} \qquad ; \qquad (B_{22})_{33}=1$$

Por lo tanto, el Efecto Unitario a Largo Plazo es

$$EUR_3^1(\infty)=\frac{\begin{pmatrix}\beta_2 & \beta_3\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\rho\\ 1\end{bmatrix}}{1}=\beta_2\rho+\beta_3$$

EJERCICIOS

5.1). Considerar el siguiente modelo:

$$y_t = x_{t-1} + u_{1t}$$
$$x_t = x_{t-1} + u_{2t}$$

en donde u_1 y u_2 son ruidos blancos. Se pide:

a). La esperanza y varianza no condicionada de y_t.

b). La esperanza y varianza condicionada respecto al periodo anterior de y_t.

c). Especificar el vector de cointegracion y las propiedades de la perturbación de la relación de cointegración.

d). Obtener la forma con mecanismo de correccion de error.

e). ¿Como seran las propiedades del estimador MCO de y_t sobre x_t?.

Justifique la respuesta.

5.2). Considerar el siguiente modelo:

$$x_t = \mu + x_{t-1} + u_t$$
$$y_t = \lambda x_t + v_t$$

en donde u_t, v_t son ruidos blancos.Se pide:

1). Determinar el orden de integracion de las dos variables.

2). Determinar el tipo de tendencia que ambas variables tienen y derivar el orden de probabilidad de $\sum x_t y_t$.

3). Escribir el modelo en forma de Mecanismo de Correccion de Error.

4). Derivar las propiedades del estimador MCO de λ .

5.3). Para un sector se ha especificado el siguiente modelo:

$$V_t = \phi V_{t-1} + \beta_0 GP_t + \beta_1 GP_{t-1} + u_t$$

en donde V_t y GP_t son , respectivamente, las ventas y los gastos de promoción.

1). Determinar cuál sería el efecto retardado pasados los dos primeros periodos y el efecto a largo plazo sobre V_t después de introducir un shock transitorio en GP_t sabiendo que $|\phi| < 1$.

2). Repetir 1) suponiendo que el shock es permanente.

3). Repetir 1) y 2) suponiendo que $\phi = 1$.

4). Escribir el modelo en forma de mecanismo de corrección de error especificando los parámetros que, en este modelo, reflejan los efectos a corto y largo plazo.

5.4). Suponer el siguiente modelo:

$$y_{1t} = \beta_2 y_{2t} + \beta_1 y_{3t} + u_{1t}$$
$$y_{2t} = y_{2t-1} + u_{2t}$$
$$y_{3t} = y_{3t-1} + u_{3t}$$
$$u_t^{'} = (u_{1t}, u_{2t}, u_{3t}) \qquad \text{con}$$
$$u_{1t} = \rho_{111} u_{1t-1} + \rho_{112} u_{1t-2} + \rho_{121} u_{2t-1} + \rho_{131} u_{3t-1} + \varepsilon_{1t}$$
$$u_{2t} = \delta_2^{\bullet} + \rho_{221} u_{2t-1} + \rho_{231} u_{3t-1} + \varepsilon_{2t}$$
$$u_{3t} = \delta_3^{\bullet} + \rho_{321} u_{2t-1} + \rho_{331} u_{3t-1} + \varepsilon_{3t}$$

ε_t es i.i. N(0, Σ). Se pide:

1). La forma de mecanismo de corrección de error del modelo.

2). Derivar el Efecto Unitario a Largo Plazo de y_3 sobre y_1. ($EUR_3^1(\infty)$) .

3). Derivar las condiciones que garantizan que el $EUR_3^1(\infty)$ coincide con el coeficiente de $\boldsymbol{y}_3$ en la relación de cointegración.

4). Suponer que $\rho_{111} = \rho_{112} = 0$ y que $\rho_{231} = \rho_{321} = 0$. Derivar en este caso el Efecto Unitario a Largo Plazo de y_3 sobre y_1.

5.5). Rudebusch(1999), utilizando 62 datos anuales del Producto Nacional Bruto (y_t) correspondientes a USA, estima dos modelos, uno del tipo estacionario en torno a una tendencia determinista (TS) y el otro estacionario en primeras diferencias (DS). Los resultados que obtiene son los siguientes : (Entre paréntesis aparecen las desviaciones típicas estimadas)

Modelo TS

$$\underset{}{y_t} = \underset{(.27)}{.819} + \underset{(.0019)}{.0056}\, t + \underset{(.121)}{1.24}\, y_{t-1} - \underset{(.121)}{.419}\, y_{t-2} + \hat{u}_t \qquad \hat{\sigma}_u = .0583$$

Modelo DS

$$\Delta y_t = \underset{(.009)}{.019} + \underset{(.124)}{.341}\Delta y_{t-1} + \hat{v}_t \qquad \hat{\sigma}_v = .0618$$

Rudebusch argumenta que los dos modelos son aparentemente muy similares si atendemos a los estadísticos habituales pero que, pese a esa similitud, incorporan implicaciones muy diferentes en lo que respecta a las consecuencias que, sobre el valor de la serie, tiene la introducción de un shock en el periodo T. Se pide:

1).Estudiar y determinar en ambos modelos cuál es el efecto de un shock transitorio en T sobre los periodos que le siguen prestando una atención especial para el caso en que el horizonte temporal es infinito.

2). Repetir 1) en el caso en que el shock es permanente.

5.6). Considerar el siguiente modelo:

$$y_{1t} = \beta y_{2t} + u_{1t} \qquad (1)$$

$$\Delta y_{2t} = u_{2t} \qquad (2)$$

con:

$$\begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix} \sim \text{i.i.d.}N\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}\right]$$

Se pide:

1). Estimar β utilizando el estimador máximo-verosimil con información completa. Derivar las propiedades de este estimador:

2). Estimar β utilizando el estimador MCO en la relación (1). Derivar las propiedades de este estimador.

3). Estimar β utilizando en (1)-(2) el estimador de los mínimos cuadrados en dos etapas. Derivar las propiedades de este estimador.

4). Comparar las propiedades de los estimadores definidos en los tres apartados anteriores. Indicar como sería el resultado de la comparación en el caso en que: $\sigma_{12} = 0$.

5.7). Una compañía de seguros utiliza para la previsión de accidentes el siguiente modelo ARMA (1, 1) en donde y_t es el número de siniestros:

$$y_t = .3y_{t-1} + u_t - .7u_{t-1}$$

1). ¿ Se pude afirmar que dicho modelo constituye un proceso lineal discreto? ¿ Es estacionario? ¿ Es invertible?.

2). Calcular E(y_t), los coeficientes de la función de autocovarianza

$$\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$$

y los correspondientes de la función de autocorrelación,

$$\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3 \ .$$

Si $y_{71} = -5$, ¿y_{72} tendera a estar por encima o por debajo de cero?. Justifique la respuesta.

3). Reescribir el proceso en forma autorregresiva dando valores numéricos para π_1, π_2, π_3 ¿Cuál es el orden de la autorregresión?

4). Dibujar, aproximadamente, el gráfico de la serie y el correlograma.

5.8). Considerar los dos procesos siguientes:

$$x_t = u_t$$
$$y_t = \phi y_{t-1} + u_t - \theta u_{t-1}$$

1). Dibujar, aproximadamente, el gráfico de cada uno de los dos procesos y el de los correlogramas respectivos.

2). Calcular su función de autocovarianzas cruzadas.¿Se puede sacar alguna conclusión respecto a la dirección de la causalidad?.

3). Calcular la función de autocorrelación cruzada entre ambas series.

--

5.9) Considerar el siguiente modelo

$$y_t = \beta_2 y_{2t} + u_{1t}$$
$$\Delta y_{2t} = u_{2t}$$

con $u_{1t} = \rho_1 u_{1t-1} + \rho_2 u_{1t-2} + \varepsilon_{1t}$ y $u_{2t} = \delta_2 + \rho u_{2t-1} + \varepsilon_{2t}$ en donde $\varepsilon_t = (\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t})$ es un vector de ruidos blancos. Se pide:

1) Las formas VAR y de mecanismo de corrección de error del modelo.

2) El Efecto Retardado para h=1,2. de un shock transitorio en y_{2t} sobre y_{1t} .

3) El Efecto Unitario a Largo Plazo de un shock transitorio en y_{2t} sobre y_{1t} .

5.10). Suponer el siguiente modelo estructural,

$$
\begin{aligned}
y_{1t} &= \delta_1^* t + \beta y_{2t} + u_{1t} \\
y_{2t} &= y_{2t-1} + u_{2t}
\end{aligned}
$$

con

$$
\begin{aligned}
u_{1t} &= \rho_{12} u_{2t-1} + \varepsilon_{1t} \\
u_{2t} &= \rho_{22} u_{2t-1} + \varepsilon_{2t}
\end{aligned}
$$

y $\varepsilon_t' = (\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}) \approx N(0,\Sigma)$. Se pide:

1). Derivar, matricialmente, la forma MCE del modeloy escribir la relación que, en este modelo, corresponde a Δy_{1t}.

2). Si la forma MCE la escribimos como en (5.34)

$$\Delta y_t = \delta + \alpha(1 \quad -\beta') y_{t-1}^+ + \sum \Gamma_i \Delta y_{t-i} + v_t$$

Definir $\delta, \alpha, y_{t-1}^+, \Gamma_i, v_t$ en función de los parámetros y variables del modelo estructural.

3). Escribir la forma MCE del modelo si no hubiera ningún tipo de tendencia determinista en el modelo.

5.11) . La tasa de inflación de un determinado país sigue el siguiente modelo: $y_t = 2 + 0{,}4 y_{t-1} + u_t$ en donde la perturbación es un ruido blanco con varianza igual a la unidad.

1) Calcular la media y varianza del proceso. Dibujar, aproximadamente, el gráfico de la serie.

2) Calcular la autocovarianza de orden 2. Dibujar, aproximadamente, el correlograma de la serie.

3) Suponiendo que el estimador empleado para calcular el valor del coeficiente es el MCO, derivar la esperanza y varianza de este estimador. Derivar también las condiciones bajo las cuales el estimador es consistente.

4) Obtener el predictor óptimo dos periodos hacia delante. Obtener la media y varianza del correspondiente error de predicción.