

## **PUBLICACIONES DE 4<sup>er</sup> CURSO**

**Grado: Economía**

**Asignatura: ECONOMETRÍA III**

**Suplemento docente nº 1:  
Uso de los modelos econométricos**

**Profesor: Antonio Aznar**

**Departamento de ANÁLISIS ECONÓMICO**

**Curso Académico 2015/16**



**Facultad de  
Economía y Empresa  
Universidad Zaragoza**

## Suplemento Nº 1. Usos de los Modelos Econométricos

Vamos a distinguir tres grandes usos:

- Contraste empírico de teorías
- Formulación de predicciones
- Establecimiento de relaciones de causalidad entre pares de variables.

- **Contraste Empírico de Teorías**

Antes de entrar en los grandes enfoques que se han propuesto en Economía para contrastar y validar las teorías económicas vamos a hacer una breve referencia a las grandes líneas de fundamentación desarrolladas con carácter general dentro de la Epistemología o Metodología de la Ciencia.

Los principios que subyacen al proceso de evaluación empírica de teorías hoy vigente son el resultado de la confluencia de las dos grandes corrientes que dominaron el siglo XX. Estas dos corrientes son: el verificacionismo y el falsacionismo.

Para el **verificacionismo**, que esta asociado con el Positivismo Lógico y el Círculo de Viena, el objetivo es verificar la verdad de una teoría. Esta verificación hay que hacerla aplicando correctamente los procedimientos de la lógica formal a partir de la base sólida y objetiva que constituyen los hechos observados. Podemos hablar de verificacionismo en sentido fuerte y en sentido débil. En sentido fuerte, no puede haber ninguna contradicción entre lo que dice la teoría sobre cómo funciona la realidad y lo que reflejan los hechos. En sentido débil, la verificación se establece en términos de probabilidad, admitiendo, en algún caso, la posible contradicción entre lo que dice la teoría y los hechos. La probabilidad de esta contradicción deberá ser pequeña.

Para el **falsacionismo**, asociado principalmente con Popper, el acuerdo de la teoría con los hechos es importante pero no a cualquier precio. Previo a medir el grado de concordancia hay que exigirle a la teoría un aspecto formal: que sea muy informativa, que sea arriesgada, en definitiva que sea falsable. Una teoría puede perder interés si para lograr un buen ajuste con los hechos no permite discriminar lo que es relevante de lo que no lo es y, para esa teoría, todo es posible.

La consideración conjunta de las dos exigencias, un buen ajuste y el máximo contenido informativo, llevaron, a finales del siglo XX, a la formación de una estrategia de valoración de teorías, que llamaremos el Ideal Bacon-Descartes, caracterizada por los siguientes principios:

- Normalmente se evalúa no una proposición aislada sino un conjunto articulado de proposiciones que se generan dentro de lo que Lakatos llamó programas de investigación. Así, por ejemplo, podemos hablar del programa de Investigación Neoclásico o del Programa de Investigación Keynesiano.
- La evaluación se hace no poniendo una teoría frente a los hechos observados sino comparando como esa teoría explica los hechos relativamente a como lo hace la mejor competidora.
- El proceso de evaluación no es discreto sino continuo. Se evalúan trayectorias frente a las cuales una contradicción puntual con la evidencia disponible no tiene porque llevar al rechazo de la teoría.
- La referencia en la evaluación siempre es una definición del equilibrio entre las dos exigencias anteriormente comentadas: máximo contenido informativo

y buen ajuste con los hechos. Pero estas dos fuerzas se mueven en dirección contraria, cuanto más de una menos de otra. Por eso se hace necesaria la definición de equilibrio entre ambas. Lakatos lo formula así: “Una teoría A es preferible a una teoría B cuando la primera tiene un contenido adicional corroborado respecto a la teoría B”

Como ya hemos indicado, La **Validación** se refiere a las reglas que utiliza el científico para determinar cuando una teoría es aceptable. En Economía ha habido tres grandes tradiciones de validación ó fundamentación:

- La tradición de Mill-Robbins.
- La tradición de Hutchison-Friedman
- La síntesis de Keynes

• **Tradición Mill-Robbins.** Para los autores en esta corriente, la ciencia económica descansa esencialmente en unas pocas proposiciones generales que son el resultado de la observación o la introspección y que cualquier hombre, tan pronto como oye de ellas, las admite como algo familiar, a partir de las cuales se derivan las conclusiones que serán verdad en ausencia de causas perturbadoras. Podemos decir que, en Economía, tenemos acceso directo a los elementos últimos de nuestras generalizaciones. Las teorías son deducciones a partir de una serie de postulados. Y la mayor parte de estos postulados son todos ellos hipótesis con un contenido simple e indiscutible sobre la experiencia diaria acerca de cómo se administra la escasez de los bienes económicos. No necesitamos ni experimentos controlados ni procedimientos de contraste de tipo estadístico-econométrico para establecer su validez: son algo tan familiar en nuestra experiencia diaria que basta que sean enunciados para que sean reconocidos como obvios. En cuanto a los seguidores de esta línea, además del propio John Stuart Mill (1806-1873), destacan otros economistas del siglo XIX, como Ricardo, Cairnes y Senior, que también pertenecen a esta escuela. El autor más importante de esta corriente fue Robbins quien, en 1932, escribió la obra “Un Ensayo sobre la Naturaleza y Significado de la Ciencia Económica”. En fechas recientes los dos autores que han realizado aportaciones dentro de la tradición milliana han sido Hausman y Cartwright. Un tratamiento completo de estos desarrollos puede verse en Wade Hands (2001).

- **Tradición de Hutchison-Friedman**

Hutchison escribe en 1938, con 28 años, un libro titulado “El Significado y los Postulados Básicos de la Teoría Económica” que es considerado por muchos como la primera formalización de esta segunda tradición. Milton Friedman escribe en 1953 un trabajo titulado “La Metodología de la Economía Positiva” que es, sin duda, el trabajo de metodología más citado del siglo XX.

Para los autores en esta línea, la validación de un sistema teórico hay que hacerla mediante el contraste empírico de alguna parte de ese sistema utilizando procedimientos de contraste de tipo estadístico-econométrico que sean replicables. No vale la introspección ni la evidencia inmediata. Hay que huir del componente subjetivo y tratar de utilizar procedimientos objetivos.

- **La síntesis de Keynes**

Al lado de estas dos grandes corrientes de fundamentación, puede pensarse en una síntesis de ambas que es la que propone Keynes en su Teoría General, aunque es generacionalmente anterior a Hutchison y Friedman. Keynes comienza cuestionando

algunos de los supuestos en los que se apoya lo que llamó la Economía Clásica. Pero, a continuación, afirma que todo el ejercicio teórico solo tiene sentido si lleva a un modelo cuyos resultados expliquen mejor la realidad observada. Keynes escribe: “.., al parecer, después de Malthus los economistas profesionales permanecieron impasibles ante la falta de concordancia entre los resultados de su teoría y los hechos observados” “Puede suceder muy bien que la teoría clásica represente el camino que nuestra economía debería seguir; pero suponer que en realidad lo hace así es eliminar graciosamente nuestras dificultades. Tal optimismo es el causante de que se mire a los economistas como Cándidos que, habiéndose apartado de este mundo para cultivar sus jardines, predican que todo pasa del mejor modo en el más perfecto posible de los mundos, a condición de que dejemos las cosas en libertad” “Sostendré que los postulados de la teoría clásica solo son aplicables a un caso especial, y no en general, porque las condiciones que supone son un caso extremo de todas las posiciones posibles de equilibrio. Más aún las características del caso especial supuesto por la teoría clásica no son las de la sociedad económica en la que hoy vivimos, razón por la que sus enseñanzas engañan y son desastrosas si intentamos aplicarla a los hechos reales”. Nosotros, en este curso, vamos a propiciar una estrategia de validación más en línea con la propuesta de Hutchison-Friedman, pero sin olvidar el mensaje de Keynes. La razón de centrarnos en esa propuesta radica en que el trabajo de Friedman en 1953 constituye una formulación de lo que hemos llamado el Ideal Bacon-Descartes, adelantándose a su tiempo.

- **Formulación de Predicciones**

Predecir es informar sobre el futuro utilizando la evidencia que se considere relevante y que esté disponible hasta el momento en que se formula la predicción.

Supongamos que estamos en el periodo  $T$  y que pretendemos informar sobre el valor que la variable  $y$  va a tomar en el periodo  $T+h$ ,  $y_{T+h}^*$ . Suponemos que toda la información relevante está recogida en el conjunto de información que llamamos  $I_T$ . Utilizando esta información relevante definimos el predictor como:

$$\hat{y}_T(h) = f(I_T) \quad (1.3.1)$$

Cuando se va a evaluar la calidad de una predicción hay que tener en cuenta que el predictor es una variable aleatoria. Decimos que un método de predicción es bueno cuando la esperanza matemática del predictor está próxima al valor que se predice y su varianza es menor que la de otros métodos alternativos. La proximidad de la esperanza al valor real se mide con el error de predicción,

$$e_T^*(h) = y_{T+h}^* - \hat{y}_T^*(h) \quad (1.3.2)$$

El asterisco informa siempre del valor concreto tomado por una variable aleatoria. A la hora de plantear un ejercicio de predicción es importante tener en cuenta los siguientes puntos

- Quién va a utilizar la predicción y para que.
- Qué nivel de detalle se requiere
- El horizonte temporal de predicción
- Nivel de exactitud requerido
- Recursos disponibles
- Urgencia y frecuencia con las que se necesitan las predicciones.

- Nivel de agregación deseado
- Todos aquellos aspectos que pueden ser relevantes para incorporar la predicción en el proceso de toma de decisiones.

Un punto importante a destacar es que no hay un solo procedimiento de predicción sino que hay una tipología muy amplia de métodos de predicción. Podemos distinguir tres grandes grupos de métodos de predicción:

- A) Métodos Subjetivos
- B) Estudios de Mercado
- C) Métodos Objetivos

#### **A) Métodos Subjetivos**

Son métodos basados en la información privilegiada que algunos agentes tienen sobre el fenómeno que se va a predecir. La base informativa es la experiencia acumulada de estos agentes. Normalmente, esta base informativa no está plasmada explícitamente en ningún documento. Dentro de estos métodos podemos distinguir

- Jurado de Opinión
- Método de Escenarios
- Método Delphi
- Analogía Histórica

#### **B) Estudios de Mercado**

En este caso, la información está dispersa en una población muy amplia y hace referencia a preferencias, intenciones y otros aspectos subjetivos. Lo primero que se hace es poner en marcha un proceso de recogida de información basado en las técnicas de muestreo que permite controlar la calidad de la información recogida. Esta información se procesa y se analiza y, posteriormente, se utiliza para informar sobre acontecimientos futuros en términos de predicciones.

#### **C) Métodos Objetivos**

En este caso, la base informativa está disponible en un documento objetivo y, para obtener la predicción, se procesa dicha información utilizando los modelos disponibles en la literatura estadística y econométrica. Distinguiremos dos grandes grupos:

- Modelos univariantes de series temporales
- Modelos Causales Multivariantes

#### **Modelos Univariantes de Series Temporales**

Para estos modelos la información relevante está constituida por el pasado de la variable que se predice. Dentro de los métodos univariantes distinguimos entre los paramétricos y los no paramétricos. Los primeros comienzan formulando una estructura estocástica de la variable que se predice. Dentro de cada uno de estos grupos se distinguen diferentes métodos según los componentes que tenga la variable a predecir. El tratamiento será diferente si la serie tiene tendencia o no y si tiene componente estacional o no. Los métodos paramétricos están relacionados con la metodología Box-Jenkins en torno a los modelos ARIMA regulares y estacionales. En lo que respecta a los no paramétricos, la mayor parte de ellos giran en torno a transformaciones tipo medias móviles o alisado exponencial según sea el tipo de serie.

### Modelos causales multivariantes

En este caso la base informativa está formada por el pasado de la propia variable y el de otras variables. Los modelos que se utilizan formulan relaciones entre las diferentes variables. También en este caso podemos distinguir entre métodos paramétricos y métodos no paramétricos. Estos últimos no parten de una estructura estocástica del modelo y los dos más utilizados son el modelo input-output y modelo de Indicadores. Los métodos paramétricos parten de una estructura estocástica de las variables que forman parte del modelo y los más utilizados son

- Modelo Lineal General
- Modelo de Relaciones Simultáneas
- Modelo VAR
- Modelo CVAR, que es un modelo VAR con cointegración.

Un tratamiento más extenso de todos estos métodos puede encontrarse en Aznar y Trivez (1993) y en Aznar (1997).

Vamos a terminar haciendo referencia a una serie de reflexiones en torno a lo que Makridakis (1986, 1988) llama Metapredicción,

1. La incertidumbre respecto al futuro siempre va a estar presente en cualquier ejercicio predictivo. La finalidad de este no es tanto eliminar dicha incertidumbre como minimizarla.
2. Los economistas tienen que ser conscientes del tipo de realidad que la Economía estudia y trata de proyectar. Hutchison (1977) nos sitúa en el lugar apropiado: "Hay, sin embargo, generalizaciones útiles en la economía y las ciencias sociales que son descritas mejor como tendencias ya que en general no son tan precisas ni tan contrastables como las leyes propiamente dichas. **Tendencias, y no leyes**, es lo que el material de la economía y las ciencias sociales parecen proporcionar o han proporcionado hasta el momento.... A falta de leyes, todo lo que los economistas tienen son tendencias y deben de procurar sacar el máximo de ellas". Para ilustrar las dificultades con las que se topa el economista a la hora de utilizar las tendencias para predecir, analicemos una descomposición del error de predicción. Supongamos que tenemos T observaciones de dos variables para un periodo muestral en el que el modelo generador ha sido,

$$y_t = \beta x_t + u_t \quad t=1,2,\dots,T$$

Se trata de predecir el valor de la variable dependiente para el periodo T+h, suponiendo el siguiente modelo generador,

$$y_{T+h} = \beta_h x_{T+h}^* + u_{T+h}$$

El predictor es,

$$\hat{y}_T(h) = \hat{\beta} x_{T+h}^* \quad \text{con} \quad \hat{\beta} = \frac{\sum x_t y_t}{\sum x_t^2}$$

Vamos a suponer que el regresor y la perturbación están correlacionados lo cual hace que el estimador MCO no sea consistente pudiéndose escribir:

$$\hat{\beta} \xrightarrow{p} \beta + \frac{m_{xu}}{m_{xx}} = \beta^* \neq \beta, \quad \text{en donde } m_{xu} \text{ y } m_{xx} \text{ son los correspondientes}$$

momentos poblacionales.

El error de predicción -variable aleatoria- puede descomponerse de la siguiente manera

$$e_T(h) = y_{T+h} - \hat{y}_T(h) = \beta_h x_{T+h}^* + u_{T+h} - \hat{\beta} x_{T+h}$$

A continuación, sumamos y restamos sucesivamente  $\beta^* x_{T+h}$ ,  $\beta x_{T+h}$  y  $\beta_h x_{T+h}$  y agrupando términos se obtiene

$$e_T(h) = u_{T+h} + (\beta^* - \hat{\beta}) x_{T+h} + (\beta - \beta^*) x_{T+h} + (\beta_h - \beta) x_{T+h} + \beta_h (x_{T+h}^* - x_{T+h})$$

Esta descomposición pone de manifiesto las dificultades con las que se topa la Economía a la hora de informar sobre acontecimientos futuros. De los cinco términos de la derecha, el primero depende de la calidad de la especificación; el segundo depende de la dispersión con la que estimemos; la importancia del tercero depende de la falta de consistencia del estimador; el cuarto guarda relación con la importancia del cambio estructural, si tiene lugar y el quinto es consecuencia de la incertidumbre de los valores que van a tomar los regresores.

3) Cada situación hay que tratarla de forma específica y diferente. Hay que distinguir según sea el tipo de variable, el horizonte de predicción, la información disponible, la frecuencia y urgencia requeridas, los medios disponibles para calcular la predicción, etc. No se puede esperar la misma calidad predictiva si el horizonte es a corto plazo que si es a largo plazo.

4) Como ya hemos comentado, hay numerosos métodos de predicción y en cada situación hay que aplicar el que sea más conveniente. A corto plazo, es posible pensar en métodos que se limiten a extrapolar el pasado más reciente. Pero, a medio plazo, esos métodos ya plantearán problemas.

5) Hay que ser cuidadosos sobre como se presentan los resultados de un ejercicio predictivo. En principio, es importante destacar que la predicción son dos números: el primero es el valor predicho y el segundo se refiere a la amplitud del intervalo formado por los valores que, en torno al valor predicho, se consideran como aceptables habiendo tomado un nivel de significación a priori.

- **Establecimiento de relaciones de Causalidad entre pares de variables**

Decimos que la variable  $x$  causa a la variable  $y$ , si controlando la variable  $x$  podemos controlar la variable  $y$ . Y esto no solo cualitativamente sino también cuantitativamente; es decir si podemos determinar la magnitud del cambio inducido en  $y$  como consecuencia de un cambio unitario en  $x$ .

Podemos decir que en un grupo de variables relacionadas con un fenómeno seguramente que existen relaciones de causalidad entre la mayor parte de la parejas de variables que se pueden formar, unas en sentido más fuerte y otras de tipo más débil. Pero el problema es aflorar, sacar a la superficie esas relaciones causales porque, en principio, todo determina a todo y la causalidad bivalente queda camuflada ya que somos observadores pasivos.

La forma en que se ha resuelto este problema en otras ciencias como la medicina y la agricultura ha sido mediante experimentos aleatorizados. De forma aleatoria se distribuyen las unidades objeto de estudio en dos grupos de forma que la composición de ambos es muy similar. A continuación se aplica un estímulo a las unidades de uno

de los grupos y la causalidad podrá determinarse comparando los resultados de ambos grupos. El ejemplo tipo son dos parcelas de cultivo que son vecinas y, por lo tanto, tienen las mismas características de suelo y condiciones meteorológicas. A una se aplica fertilizante y a la otra no. La causalidad vendrá dada por los diferentes rendimientos obtenidos en las dos parcelas.

Pero estos ejercicios son difíciles de llevar a cabo en Economía, porque somos observadores pasivos y los datos nos vienen dados.

Para resolver estos problemas la Econometría ha desarrollado dos grandes estrategias, la primera que va de lo específico a lo general y la segunda que va de lo general a lo específico. En la primera estrategia, se parte del modelo más simple que pone en relación las dos variables cuya causalidad se estudia. Según sean los resultados que se van obteniendo se van incorporando nuevas variables como regresores hasta que se llega a una especificación en la que la estimación del parámetro de interés se le puede asignar una interpretación causal. Como puede verse en el Capítulo 9 de la Parte Segunda, los conceptos de exogeneidad estricta y variable instrumental juegan un papel clave para poder hacer esa interpretación causal. Una descripción completa de esta estrategia puede encontrarse en el libro de Stock y Watson (2012).

En lo que respecta a la segunda estrategia, la que propugna ir de lo general a lo específico, el punto de partida es una modelización estocástica sin restricciones de un conjunto de variables. En esta primera etapa el objetivo es que los datos hablen por sí mismos sin ningún tipo de limitaciones. En las etapas sucesivas se trata de ver si restricciones con contenido económico sugeridas por la Teoría Económica no distorsionan de forma relevante y pueden ser incorporadas. En esta estrategia el modelo VAR y la causalidad en el sentido de Granger son dos referencias básicas. Ver Juselius (2006).

Veamos ahora ambas estrategias con un poco más de detalle.

Como hemos dicho, en la primera estrategia se parte del modelo simple entre las dos variables cuya causalidad se quiere estudiar

$$y_t = \beta x_t + u_t \quad t=1,2,\dots,T \quad (1)$$

Si la variable  $x_t$  es independiente de la perturbación aleatoria, es estrictamente exógena como veremos en el Apartado 3.3, entonces a la estimación MCO de  $\beta$  se le puede asignar una interpretación causal. Si la influencia es pequeña entonces estadísticamente no será significativa y no podremos detectar la causalidad. Si es una influencia causal grande entonces podría encontrarse una relación causal significativa pero entonces el problema es como saber que la variable  $x$  es estrictamente exógena. Como veremos en los capítulos 6 y 9 hay muchas razones que pueden poner en duda la exogeneidad del regresor en (1). En estos capítulos se estudian los cinco casos en los que el regresor no es estrictamente exógeno: variable omitida, forma funcional errónea, sesgo de selección muestral relaciones simultáneas y errores en variables. La solución parece girar en torno al uso de variables instrumentales. Pero el uso de estas variables plantea similares problemas porque tienen que relacionarse con la variable de interés y, al mismo tiempo, ser independientes de la perturbación. ¿De donde sacamos la información sobre la independencia? Solo queda el recurso de la información a priori.



Si consideramos el segundo enfoque, **de lo general a lo específico**, el punto de partida es un modelo VAR. Se supone en principio una forma estructural que toma la forma siguiente,

$$y_t = \theta x_t + \beta_{11} y_{t-1} + \beta_{12} x_{t-1} + \varepsilon_{1t} \quad (2)$$

$$x_t = \gamma y_t + \beta_{21} y_{t-1} + \beta_{22} x_{t-1} + \varepsilon_{2t} \quad (3)$$

A continuación, obtenemos la forma reducida

$$y_t = \pi_{11} y_{t-1} + \pi_{12} x_{t-1} + v_{1t} \quad (4)$$

$$x_t = \pi_{21} y_{t-1} + \pi_{22} x_{t-1} + v_{2t} \quad (5)$$

$$\pi_{11} = \frac{\beta_{11} + \theta\beta_{21}}{1 - \theta\gamma} \quad \pi_{12} = \frac{\beta_{12} + \theta\beta_{22}}{1 - \theta\gamma}$$

$$\pi_{21} = \frac{\gamma\beta_{11} + \beta_{21}}{1 - \theta\gamma} \quad \pi_{22} = \frac{\gamma\beta_{12} + \beta_{22}}{1 - \theta\gamma}$$

$$v_{1t} = \frac{\varepsilon_{1t} + \theta\varepsilon_{2t}}{1 - \theta\gamma} \quad v_{2t} = \frac{\gamma\varepsilon_{1t} + \varepsilon_{2t}}{1 - \theta\gamma}$$

$$Cov(v_{1t}, v_{2t}) = \frac{\gamma\sigma_1^2 + \theta\sigma_2^2}{(1 - \theta\gamma)^2}$$

Suponemos que  $\varepsilon'_t = (\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t})$  es una secuencia de ruidos blancos con media cero y matriz de varianzas y covarianzas

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

Dada la definición de  $v'_t = (v_{1t}, v_{2t})$  su media es cero y su matriz de varianzas y covarianzas puede escribirse como

$$\Omega = \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{12} & \omega_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{(1 - \theta\gamma)^2} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 + \theta^2\sigma_2^2 & \gamma\sigma_1^2 + \theta\sigma_2^2 \\ - & \gamma^2\sigma_1^2 + \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

Hay que destacar que la forma reducida del VAR tiene 7 parámetros y que todos ellos están identificados. Por otra parte, la forma estructural tiene 8 parámetros por lo que se requiere una restricción a priori para poder identificar sus parámetros.

En el sentido de Granger se dice que la variable  $x$  causa a la variable  $y$  y cuando la predicción de  $y$ , utilizando el error cuadrático medio de predicción, es mejor cuando se

tiene en cuenta el pasado de  $x$  al lado de toda la información que se considere relevante. Podemos decir que  $x$  ayuda a predecir  $y$ .

Para formalizar y ver las implicaciones de la propuesta de Granger consideremos algunos aspectos de notación. Sean  $\{A_i; i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  toda la información relevante;  $\bar{A}_i = \{A_j, j < i\}$  la información pasada y  $\bar{\bar{A}}_i = \{A_j, j = i\}$  la información contemporánea. Similarmente,  $\bar{X}_i, \bar{Y}_i, \bar{\bar{X}}_i, \bar{\bar{Y}}_i$ . Sea  $\sigma^2(y / B)$  el error cuadrático medio de predicción definido como

$$\sigma^2(y / B) = E[y_{T+h} - \hat{y}_T(h) / B]^2$$

siendo  $B$  la base informativa en cada caso.

**Definición 1.** La variable  $x$  no causa en el sentido de Granger a la variable  $y$ , cuando

$$\sigma^2(y / \bar{A}) = \sigma^2(y / \bar{A} - \bar{X})$$

Utilizando el sistema (4)-(5) esto es equivalente a no rechazar la hipótesis nula.  $H_0 : \pi_{12} = 0$ .

**Definición 2.**  $x$  no causa a  $y$  instantáneamente si

$$\sigma^2(y / \bar{A}, \bar{\bar{X}}) = \sigma^2(y / \bar{A})$$

En el sistema (4)-(5) esto es equivalente a o bien no rechazar  $\omega_{12} = 0$  o bien si este valor se rechaza, la hipótesis nula  $\theta = 0$  no se rechaza.

**Definición 3.**  $x$  no causa a  $y$  si

$$\sigma^2(y / \bar{A}, \bar{\bar{X}}) = \sigma^2(y / \bar{A} - \bar{X})$$

Es decir, si se cumplen las dos definiciones previas.

**Definición 4.**  $x$  causa unidireccionalmente a  $y$  en el sentido de Granger si

- $x$  causa a  $y$  en el sentido de Granger, es decir, si

$$\sigma^2(y / \bar{A}) < \sigma^2(y / \bar{A} - \bar{X})$$

O, equivalentemente, si la hipótesis nula  $\pi_{12} = 0$  es rechazada.

- y no causa a  $x$  en el sentido de Granger, es decir si

$$\sigma^2(x / \bar{A}) = \sigma^2(x / \bar{A} - \bar{Y})$$

O, equivalentemente, si la hipótesis nula  $\pi_{21} = 0$  no es rechazada.

**Definición 5.**  $x$  causa a  $y$  unidireccionalmente e instantáneamente si

- Existe correlación contemporánea entre  $x$  e  $y$ , esto es

$$\omega_{12} = Cov(v_{1t}, v_{2t}) \neq 0$$

- Además se cumple que  $\theta \neq 0$  y  $\gamma = 0$ .

**Definición 6.**  $X$  causa unidireccionalmente a  $y$  si

- $x$  causa a  $y$  unidireccionalmente en el sentido de Granger y, además,
- $x$  causa a  $y$  unidireccionalmente e instantáneamente.

Notar que para establecer la causalidad unidireccional es necesario apelar a la información a priori para identificar los parámetros de la forma estructural. Volvemos a necesitar algo más que los datos para poder establecer una relación causal unidireccional.

### La Función Impulso-Respuesta

La Función Impulso-Respuesta es otro enfoque utilizado para derivar relaciones de causalidad unidireccionales. En forma compacta, el modelo (2)-(3) puede escribirse como

$$\Gamma z_t = Bz_{t-1} + \varepsilon_t \quad (6)$$

en donde  $z_t' = (y_t, x_t)$  y  $\varepsilon_t' = (\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t})$ . Premultiplicando por  $\Gamma^{-1}$  se obtiene

$$z_t = Az_{t-1} + v_t \quad (7)$$

en donde

$$v_t = \begin{bmatrix} v_{1t} \\ v_{2t} \end{bmatrix} = \Gamma^{-1} \varepsilon_t = \frac{1}{1 - \theta\gamma} \begin{bmatrix} 1 & \theta \\ \gamma & 1 \end{bmatrix} \varepsilon_t = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_{1t} + \theta\varepsilon_{2t}}{1 - \theta\gamma} \\ \frac{\gamma\varepsilon_{1t} + \varepsilon_{2t}}{1 - \theta\gamma} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Sustituyendo sucesivamente en (7) se obtiene

$$z_t = \sum_0^{\infty} A^i v_{t-i} = \sum_0^{\infty} A^i \Gamma^{-1} \varepsilon_{t-i} \quad (9)$$

y definiendo

$$\Phi_i = A^i \Gamma^{-1} = \frac{1}{1 - \theta\gamma} A^i \begin{bmatrix} 1 & -\theta \\ -\gamma & 1 \end{bmatrix}$$

(9) puede escribirse como

$$z_t = \sum_0^{\infty} \Phi_i \varepsilon_{t-i} = \sum_0^{\infty} \begin{bmatrix} \phi_{11}(i) & \phi_{12}(i) \\ \phi_{21}(i) & \phi_{22}(i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t-i} \\ \varepsilon_{2t-i} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Los cuatro conjuntos de coeficientes  $\phi_{11}(i), \phi_{12}(i), \phi_{21}(i)$  y  $\phi_{22}(i)$  se llaman funciones de impulso-respuesta. Teniendo en cuenta que los  $\varepsilon$  son independientes entre si, cualquier variación en uno de ellos tiene unos efectos en cada una de las variables que viene dado por los correspondientes  $\phi$ . Por ejemplo, el efecto acumulado de una variación de  $\varepsilon_{2t}$ , es decir de  $x_t$ , después de pasados n periodos viene dado por

$$\sum_{i=0}^n \phi_{12}(i)$$

Parece resolverse el problema de la causalidad unidireccional. Pero se trata de un espejismo porque para llegar a la expresión (10) es necesario conocer la matriz  $\Gamma$  y ya hemos comentado que no todos elementos de esta matriz están identificados debido a

que en la matriz de varianzas y covarianzas de las  $v$  hay tres términos diferentes y tenemos que derivar los valores de cuatro parámetros, los dos de la matriz de varianzas y covarianzas de las  $\varepsilon$  y los dos que resultan después de normalizar de la matriz  $\Gamma$ . Por lo tanto, para definir las funciones impulso-respuesta necesitamos información a priori. Supongamos que  $\gamma = 0$ , entonces a partir de (8) podemos escribir

$$\varepsilon_{1t} = v_{1t} - \theta v_{2t}$$

$$\varepsilon_{2t} = v_{2t}$$

Ahora los parámetros están identificados y podemos determinar la causalidad de  $x$  sobre  $y$ . Podemos modificar  $v_{2t}$  y, por lo tanto,  $\varepsilon_{2t}$  sin modificar  $\varepsilon_{1t}$  ya que:  $Cov(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}) = 0$ . Tener en cuenta que, como puede verse en el sistema (7), la modificación de  $v_{2t}$  es equivalente a la modificación de  $x_t$ . Pero todo esto es consecuencia de suponer, es decir, identificar, con  $\gamma = 0$ . Podríamos haber identificado el sistema suponiendo que  $\theta = 0$  y los resultados serían diferentes.

## Referencias

- Aznar, A. y F. J. Trivez (1993)** "Métodos de Predicción en Economía". Ariel.
- Aznar, A. (1997)** "¿Se puede predecir en Economía?" Cuadernos Económicos de la Facultad de Ciencias Económicas.
- Makridakis, S. (1988)**: "Metaforecasting. Ways of improving forecasting accuracy and usefulness". International Journal of Forecasting, 4, 467-491.
- Juselius, K. (2006)**: "The Cointegrated VAR Model". Oxford University Press.
- Stock, J.H. y M.M. Watson (2012)**: "Introducción a la Econometría". Pearson.