CAPÍTULO 2
Ejercicio 2.1

Considerar el siguiente modelo:

$$y_t = \beta x_t + u_{1t}$$
$$x_t = \delta + x_{t-1} + u_{2t}$$

en donde β y δ son constantes y u_{1t} y u_{2t} son ruidos blancos independientes entre sí. Sabiendo que el orden de probabilidad de $\sum tu_{2t}$ es $O(T^{\frac{3}{2}})$:

1). Derivar los órdenes de probabilidad de :

$$\sum x_t \quad y \quad \sum x_t^2$$

2). Analizar las propiedades del estimador MCO de β. En caso de que este estimador no sea insesgado derivar el sesgo.

Solución

1) Sustituyendo sucesivamente se obtiene

$$x_t = \delta t + \sum_1^t u_{2i} \qquad x_0 = 0$$

Por lo tanto,

$$\sum x_t = \delta \sum t + \sum_1^T \sum_1^t u_{2i}$$

Utilizando R.2.6.i) se ve que el término dominante es el primero de la derecha por lo que $\sum x_t$ es O(T^2).

De la misma manera,

$$\sum_1^T x_t^2 = \delta^2 \sum_1^T t^2 + \sum \xi_t^2 + 2\delta \sum_1^T t\xi_t \quad \text{con} \quad \xi_t = \sum_1^t u_{2i}$$

Utilizando los apartados a), f), e i) se ve que el término dominante es el primero por lo que $\sum x_t^2$ es O(T^3).

2). El estimador MCO es

$$\hat{\beta} = \frac{\sum x_t y_t}{\sum x_t^2} = \beta + \frac{\sum x_t u_{1t}}{\sum x_t^2} = \beta + \frac{1}{T^{\frac{3}{2}}} \frac{(\delta \sum tu_{1t} + \sum \xi_t u_{1t})/T^{\frac{3}{2}}}{\sum x_t^2 / T^3}$$

La convergencia del denominador ha sido derivada en el apartado anterior. Respecto al numerador, por los apartados d) y e), del R.2.6 se ve que el

CAPITULO 2
Ejercicio 2.1

término dominante es el primero y que es O($T^{\frac{3}{2}}$). Utilizando todos estos resultados se llega a

$$T^{\frac{3}{2}}(\hat{\beta}-\beta)\xrightarrow{d}\frac{\sigma_1(N(0,1)-\int W(r)dr)}{\frac{\delta^2}{3}}$$

Solo hemos encontrado el resultado asintótico. Es superconsistente y ponderando adecuadamente se puede hablar de una distribución asintótica.

Ejercicio 2.2

Considerar el siguiente modelo:

$$y_t = y_{t-1} + u_t$$

$$x_t = x_{t-1} + v_t$$

en donde u_t y v_t son ruidos blancos independientes entre sí.

Se estiman α y β con MCO utilizando el modelo:

$$y_t = \alpha + \beta x_t + e_t$$

1). Derivar las propiedades asintóticas de estos dos estimadores.

2). Derivar las propiedades asintóticas del estadístico t-ratio para la hipótesis nula: β=0.

3). Comentar las implicaciones que se derivan de los resultados obtenidos en los dos puntos anteriores.

Solución

1). Los estimadores MCO son:

$$\hat{\beta}=\frac{\sum x_t(y_t-\bar{y})}{\sum(x_t-\bar{x})^2}=\frac{\sum x_t y_t-\bar{y}\sum x_t}{\sum x_t^2-T\bar{x}^2}$$

$$\hat{\alpha}=\bar{y}-\hat{\beta}\bar{x}$$

CAPITULO 2
Ejercicio 2.2

Utilizando el Resultado 2.6 podemos escribir:

$$\hat{\beta} = \frac{\frac{1}{T^2}\sum x_t y_t - T^{-\frac{1}{2}}\bar{y}T^{-\frac{3}{2}}\sum x_t}{\frac{1}{T^2}\sum x_t^2 - \frac{1}{T}T\frac{1}{T}\bar{x}^2} = \frac{\int W_1(r)W_2(r)d(r) - \int W_1(r)d(r)\int W_2(r)d(r)}{\int W_2(r)^2 d(r) - \left[\int W_2(r)dr\right]^2} \xrightarrow{d} \beta^*$$

$$\hat{\alpha} = T^{\frac{1}{2}}(T^{-\frac{1}{2}}\bar{y} - \hat{\beta}T^{-\frac{1}{2}}\bar{x}) \xrightarrow{d} T^{\frac{1}{2}}\alpha^*$$

2). El estadístico t-ratio es

$$t = \frac{\hat{\beta}}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}} = \frac{\hat{\beta}\left(\sum\left(x_t - \bar{x}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\hat{\sigma}}$$

La convergencia del numerador se ha derivado en el apartado anterior. Respecto al denominador, hay que tener en cuenta que:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum \hat{u}_t^2}{T} \quad ; \quad \hat{u}_t = y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta}x_t$$

$$T^{-2}\sum \hat{u}_t^2 = T^{-2}\sum y_t^2 + \frac{T}{T}(T^{-\frac{1}{2}}\hat{\alpha})^2 + ...$$

A partír de estos resultados se ve que $\hat{\sigma}^2$ es O(T) y $\hat{\sigma}$ es $O(T^{\frac{1}{2}})$. Por lo tanto,

$$t = \frac{\hat{\beta}T^{\frac{1}{2}}\left(T^{-2}\sum\left(x_t - \bar{x}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}{T^{-\frac{1}{2}}\hat{\sigma}}$$

por lo que es O($T^{\frac{1}{2}}$).

3). Es el típico ejemplo de correlación espurea, porque el estimador MCO de β no converge a cero y el valor del estadístico t tiende a infinito.

CAPITULO 2

Ejercicio 2.3

Considerar el siguiente modelo:

$$y_t = \lambda + y_{t-1} + u_t$$

$$x_t = \delta + x_{t-1} + v_t$$

en donde u_t y v_t son ruidos blancos independientes entre sí.

Apartir del modelo:

$$y_t = \alpha + \beta x_t + e_t$$

se estiman α y β utilizando MCO.

1). Derivar las propiedades asintóticas de estos dos estimadores.

2). Derivar las propiedades asintóticas del estadístico t-ratio para la hipótesis nula: β=0.

3). Comentar las implicaciones que se derivan de los resultados obtenidos en los dos puntos anteriores.

Solución

1) Los estimadores MCO son los mismos definidos en el Ejercicio 2.2.

Tener en cuenta que

$$y_t = \lambda t + \xi_{1t} \quad \text{con} \quad \xi_{1t} = \sum u_{1t}$$

$$x_t = \delta t + \xi_{2t} \quad \text{con} \quad \xi_{2t} = \sum u_{2t}$$

$$x_t y_t = \lambda\delta t^2 + \lambda t \xi_{2t} + \delta t \xi_{1t} + \xi_{1t}\xi_{2t}$$

Utilizando el Resultado 2.6 se obtiene

$$T^{-2}\sum y_t \xrightarrow{d} \frac{\lambda}{2} \qquad \text{(apartados b) e i))}$$

$$T^{-2}\sum x_t \xrightarrow{d} \frac{\delta}{2} \qquad \text{(apartados b) e i))}$$

$$T^{-1}\bar{y} \xrightarrow{d} \frac{\lambda}{2} \qquad T^{-1}\bar{x} \xrightarrow{d} \frac{\delta}{2}$$

$$T^{-3}\sum x_t y_t \xrightarrow{d} \frac{\delta\lambda}{2} \quad \text{(apartados b), f) e i))}$$

Utilizando estos resultados se llega a

$$\hat{\beta} = \frac{T^{-3}\sum x_t y_t - T^{-1}\bar{y}T^{-2}\sum x_t}{T^{-3}\sum x_t^2 - \frac{T}{T}T^{-2}\bar{x}^2} \xrightarrow{d} \frac{\frac{\delta\lambda}{3} - \frac{\delta}{2}\frac{\lambda}{2}}{\frac{\delta^2}{3} - \frac{\delta^2}{4}} = \frac{\lambda}{\delta} = \beta^*$$

CAPITULO 2

Ejercicio 2.3

Respecto al estimador de α tenemos,

$$\hat{\alpha} = T\frac{\bar{y}}{T} - \hat{\beta}T\frac{\bar{X}}{T} \Rightarrow T^{-1}\hat{\alpha} \xrightarrow{d} \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{\delta}\frac{\delta}{2} = 0.$$

2) El t-ratio toma la misma forma vista en el ejercicio anterior. Ahora podemos escribir:

$$T^{-3}\sum \hat{u}_t^2 = T^{-3}\sum y_t^2 + \frac{T}{T}(\frac{\hat{\alpha}}{T})^2 + \hat{\beta}^2 T^{-3}\sum y_t^2 + \ldots\ldots$$

Este resultado nos permite decir que $\hat{\sigma}$ es O(T). Por lo tanto,

$$t = \frac{\hat{\beta}T^{\frac{1}{2}}(T^{-3}\sum(x_t - \bar{x})^2)^{\frac{1}{2}}}{T^{-1}\hat{\sigma}} \xrightarrow{d} T^{\frac{1}{2}}\frac{\beta^*\delta}{\lambda - \delta\beta^*}$$

3). Se ve que el estimador MCO de β no converge a cero y que el t-ratio tiende a infinito por lo que se tendera a aceptar dependencia entre y y x cuando realmente no hay ningún tipo de relación entre ambas variables.

Ejercicio 2.4

Suponer que el proceso generador de datos es:

$$y_t = \alpha + \beta x_t + u_t \qquad (1)$$

en donde u_t es un ruido blanco con varianza σ^2.

No se dispone de observaciones sobre x y, en su lugar, utilizamos otra variable no estocástica, z. Es decir, estimamos:

$$y_t = \alpha + \beta z_t + u_t^* \qquad (2)$$

Se pide:

1). Las propiedades, media y varianza, de los estimadores MCO de α y β definidos a partir de (2), indicando como dependen dichas propiedades de la pendiente de la regresión de x sobre z.

2). Demostrar que la esperanza del residuo MCO definido a partir de (2), u_t^*, es diferente de cero pero que se cumple que: $E(\frac{\sum u_t^*}{T}) = 0$.

CAPITULO 2
Ejercicio 2.4
Solución

1). El estimador MCO de β a partír de (2) es

$$\hat{\beta} = \frac{\sum(y_t - \bar{y})(z_t - \bar{z})}{\sum(z_t - \bar{z})^2} = \beta \frac{\sum(x_t - \bar{x})(z_t - \bar{z})}{\sum(z_t - \bar{z})^2} + \frac{\sum u_t(z_t - \bar{z})}{\sum(z_t - \bar{z})^2}$$

Por lo tanto,

$$\hat{\beta} \approx N(\beta b_{xz}, \frac{\sigma^2}{\sum(z_t - \bar{z})^2})$$

en donde, $b_{xz} = \dfrac{\sum(x_t - \bar{x})(z_t - \bar{z})}{\sum(z_t - \bar{z})^2}$

Por otra parte, se tiene que

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{z} = \alpha + \beta\bar{x} + \bar{u} - \beta b_{xz}\bar{z} - \bar{z}\frac{\sum(z_t - \bar{z})u_t}{\sum(z_t - \bar{z})^2}$$

de donde se obtiene

$$\hat{\alpha} \approx N`(\alpha + \beta(\bar{x} - b_{xz}\bar{z}), \sigma^2(\frac{1}{T} + \frac{\bar{z}^2}{\sum(z_t - \bar{z})^2}))$$

2). Los residuos se definen como

$$\hat{u}_t^* = \alpha + \beta x_t + u_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta} z_t$$

Por lo que $E\hat{u}_t^* = -\beta(\bar{x} - b_{xz}\bar{z}) + \beta x_t - \beta b_{xz} z_t \neq 0$

Siguiendo los mismos principios se demuestra el segundo resultado de este apartado.

Ejercicio 2.5

Considerar el siguiente modelo:

$$\mathrm{y_t + x_t = v_t} \qquad (1 - \rho_1 L)\mathrm{v_t} = \varepsilon_{1t}$$
$$\mathrm{x_t - x_{t-1}} = \varepsilon_{2t}$$

con:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix} \approx \mathrm{i.i.d.N}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}\right]$$

Se pide:

1). Suponiendo que $|\rho_1| \prec 1$, la esperanza y varianza de $\mathrm{v_t, y_t}$ y $\mathrm{x_t}$. Dibujar, aproximadamente, el gráfico y el correlograma de v_t.

2). Suponiendo que $|\rho_1| \prec 1$, la esperanza y varianza condicionadas a la información del periodo anterior de v_t.

CAPITULO 2
Ejercicio 2.5

3). Suponiendo ahora que $\rho_1 = 1$ obtener la esperanza y varianza de Δy_t e Δx_t y de la distribución condicional de Δy_t dado Δx_t.

4). Para $\rho_1 = 1$ demostrar que el estimador MCO de Δy_t sobre Δx_t es un estimador sesgado del coeficiente de x en la primera relación del modelo.Demostrar también que , asintóticamente, el sesgo coincide con el coeficiente de Δx_t en la esperanza de la distribución condicional de Δy_t dado Δx_t.

Solución

1). En este caso, v_t es estacionario por lo que,

$$\mathrm{E}v_t = \rho_1 E v_t + E\varepsilon_{1t} = 0$$

$$\sigma_v^2 = \rho_1^2 \sigma_v^2 + \sigma_1^2 = \frac{\sigma_1^2}{1-\rho_1^2}$$

Respecto a x_t podemos escribir,

$$x_t = x_0 + \sum_1^t \varepsilon_{2i}$$

por lo que

$$Ex_t = x_0 = 0 \quad \text{y} \quad \sigma_x^2 = t\sigma_2^2$$

Para y_t se tiene,

$$Ey_t = 0$$

$$\sigma_y^2 = \sigma_x^2 + \sigma_v^2 - 2\,\mathbf{cov}(x_t, v_t)$$

Solo resta derivar la covarianza.

$$Cov(x_t, v_t) = E((\sum_1^t \varepsilon_{2i})(\sum_0^\infty \psi_i \varepsilon_{1t-i})) = \sigma_{12}(1 + \psi_1 + \psi_2 + ... + \psi_{t-1})$$

2). Los momentos condicionales son

$$E(v_t / I_{t-1}) = \rho_1 v_{t-1}$$

$$Var(v_t / I_{t-1}) = \sigma_1^2$$

3). Tener en cuenta que:

$$\Delta y_t = \varepsilon_{1t} - \varepsilon_{2t}$$

por lo que,

CAPITULO 2
Ejercicio 2.5

$$\begin{pmatrix}\Delta y_t \\ \Delta x_t\end{pmatrix} \approx N\left[\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_{12} & \sigma_{12}-\sigma_2^2 \\ - & \sigma_2^2\end{pmatrix}\right]$$

La cuestión se resuelve considerando el siguiente resultado:

$$\text{Si} \quad x = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \approx N\left[\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}\Sigma_{11} & \Sigma_{12}\\ \Sigma_{12} & \Sigma_{22}\end{pmatrix}\right]$$

Entonces, la distribución del primer subvector dado el segundo viene dada por

$$x_1 / x_2 \approx N\left[\mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x_2-\mu_2), \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{12}\right]$$

A partír de esta formulación, la esperanza condicional de Δy_{1t} dado Δx_t puede escribirse como

$$\left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_2^2} - 1\right)\Delta x_t$$

4). El estimador converge de la siguiente manera

$$\hat{\beta} = \frac{\sum \Delta y_t \Delta x_t}{\sum \Delta x_t^2} \xrightarrow{p} \frac{\sigma_{12}}{\sigma_2^2} - 1$$

Ejercicio 2.7

Suponer el modelo:

$$y_t = \phi y_{t-1} + \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + u_{1t}$$
$$x_t = \delta + \rho x_{t-1} + u_{2t}$$

u_{1t} y u_{2t} son ruidos blancos independientes entre si. Se pide:

1). Las condiciones que deben cumplir los parámetros del modelo para que las dos variables sean estacionarias en sentido debil. Suponiendo que se cumplen estas dos condiciones, derivar la media y la varianza de las dos variables. Derivar, también, la función de autocorrelación de x_t y dibujar, aproximadamente, el correlograma.

2). Suponiendo que los parámetros cumplen las condiciones que garantizan la estacionariedad, se estiman los parámetros de la primera relación utilizando los estimadores MCO ¿Son esos estimadores insesgados? ¿ Son eficientes para todo tamaño muestral? Derivar las propiedades asintóticas de estos estimadores.

3). Suponiendo que los parámetros del modelo son conocidos definir el predictor óptimo de y_{T+2} situados en T. Derivar el error de predicción correspondiente,su media y su varianza.

CAPITULO 2
Ejercicio 2.7
Solución

1). Las condiciones para la estacionaridad débil son:

$|\phi| < 1$ para y ; $|\rho| < 1$ para x.

Aceptando estacionariedad, los momentos se obtienen así

$$\mu_x = Ex_t = \frac{\delta}{1-\rho} \qquad \sigma_x^2 = \frac{\sigma_2^2}{1-\rho^2}$$

$$\mu_y = \frac{(\beta_1 + \beta_2)\mu_x}{1-\phi^2}$$

$$\sigma_y^2 = \frac{(\beta_1^2 + \beta_2^2)\sigma_x^2 + \sigma_1^2 + 2\phi\beta_1 Cov(y_{t-1}, x_{t-1}) + 2\phi\beta_2 Cov(y_{t-1}, x_{t-2}) + 2\beta_2\beta_1\gamma_1}{1-\phi^2}$$

en donde, teniendo en cuenta que,

$$y_t = \sum^{\infty} \psi_i x_{t-i}$$

se llega a

$$Cov(y_{t-1}, x_{t-1}) = \psi_0\gamma_0 + \psi_1\gamma_1 + \ldots\ldots = \sum_0^{\infty}\psi_i\gamma_i$$

$$Cov(y_{t-1}, x_{t-2}) = \psi_0\gamma_1 + \psi_1\gamma_0 + \ldots\ldots = \psi_0\gamma_1 + \psi_1\gamma_0 + \sum_2^{\infty}\psi_i\gamma_{i-1}$$

γ_j es el valor j-ésimo de la función de autocovariaza de x definido como

$$\gamma_j = Cov(x_t, x_{t-j}) = \rho^j \sigma_x^2$$

Los valores de la función de autocorrelación vienen dados por

$$\rho_j = \rho^j$$

2). Los estimadores MCO son:

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\phi} \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = (X'X)^{-1}X'y$$

en donde X es la matriz $T \times 3$ de observaciones de los regresores del modelo. Hay que destacar que la perturbación aleatoria no está correlacionada contemporáneamente con los regresores pero sí lo está en forma retardada. Por ello, los estimadores serán sesgados en muestras pequeñas y poco puede decirse respecto a la eficiencia.

Dado que los regresores son estacionarios, se cumplen los resultados 2.3, 2.4 y 2.5, por lo que podemos decir que los estimadores MCO son consistentes y que siguen la siguiente distribución asintótica:

$$\sqrt{T}(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2 Q^{-1})$$

CAPITULO 2

Ejercicio 2.7

3). Podemos escribir,

$$y_{T+2} = \phi y_{T+1} + \beta_1 x_{T+1} + \beta_2 x_T + u_{1T+2} = \phi^2 y_T + \phi\beta_1 x_T + \phi\beta_2 x_{T-1} + \phi u_{1T+1} + \beta_1\delta + \beta_1 \rho x_T + \beta_1 u_{2T+1} + \beta_2 x_T + u_{1T+2}$$

El predictor óptimo se define como:

$$y_T(2) = E(y_{T+2} / I_T)$$

El error de predicción es:

$$e_T(2) = u_{1T+2} + \phi u_{1T+1} + \beta_1 u_{2T+1}$$

Apartir de esta expresión los momentos del error de prediccion se obtienen de forma inmediata.

Ejercicio 2.8

Suponer el modelo:

$$\begin{aligned} c_t &= \beta y_t + u_t \\ y_t &= c_t + a_t \end{aligned} \qquad (1)\text{-}(2)$$

en donde c_t, y_t y a_t son, respectivamente, consumo, renta y gasto autónomo; u_t es un ruido blanco. Se supone que a_t no es aleatorio.

1). Obtener la forma reducida del modelo, las medias, varianzas y covarianza de c_t e y_t y la media y varianza de c_t dada y_t.

2). Estimar β aplicando MCO en (1). Derivar las propiedades de este estimador tanto en muetras pequeñas como asintóticamente y determinar el signo del sesgo en caso de que exista.

3). Estimar β utilizando el estimador de los mínimos cuadrados en dos eta- y derivar las propiedades de este estimador.

Solución

1). La forma reducida es,

$$y_t = \frac{a_t}{1-\beta} + \frac{u_t}{1-\beta}$$

$$c_t = \frac{\beta a_t}{1-\beta} + \frac{u_t}{1-\beta}$$

Las medias y varianzas son:

CAPITULO 2
Ejercicio 2.8

$$\begin{pmatrix} y_t \\ c_t \end{pmatrix} \approx N\left[\begin{pmatrix} \dfrac{a_t}{1-\beta} \\ \dfrac{\beta a_t}{1-\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\sigma^2}{(1-\beta)^2} & \dfrac{\sigma^2}{(1-\beta)^2} \\ \dfrac{\sigma^2}{(1-\beta)^2} & \dfrac{\sigma^2}{(1-\beta)^2} \end{pmatrix}\right]$$

Par la distribución condicional vamos a considerar el siguiente resultado

$$\text{Si} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \approx N\left[\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{12} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}\right]$$

Entonces la distribución del primer subvector dado el segundo viene dada por

$$x_1 / x_2 \approx N\left[\mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x_2 - \mu_2), \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{12}\right]$$

Aplicandolo a nuestro caso se obtiene

$$c_t / y_t \approx N(y_t - a_t, 0)$$

2). En este marco, los momentos muestrales convergen a los momentos poblacionales. Además, los momentos muestrales entre a_t y cualquiera de las variables aleatorias convergen a cero. Por ejemplo,

$$T^{-1}\sum a_t u_t \xrightarrow{p} 0$$

Así, a partir de la primera relación de la forma reducida tenemos

$$T^{-1}\sum y_t u_t \xrightarrow{p} \frac{\sigma_u^2}{1-\beta}$$

Por lo tanto, las variables y_t y u_t no son asintóticamente independientes.

De la misma manera podemos escribir

$$T^{-1}\sum y_t^2 \xrightarrow{p} \frac{\sigma_a^2 + \sigma_u^2}{(1-\beta)^2}$$

Utilizando estas expresiones la convergencia del estimador MCO de β es la siguiente

$$\hat{\beta} = \beta + \frac{\sum y_t u_t}{\sum y_t^2} \xrightarrow{p} \beta + \frac{(1-\beta)\sigma_u^2}{\sigma_a^2 + \sigma_u^2}$$

Se puede derivar el signo del sesgo y su importancia en cuantía.

3). El estimador en dos etapas toma la forma siguiente

$$\beta^* = \frac{\sum c_t y_t^*}{\sum y_t^{*2}}$$

en donde,

$$y_t^* = \hat{\delta} a_t = \frac{\sum y_t a_t}{\sum a_t^2} a_t$$

CAPITULO 2

Ejercicio 2.8

Se ve que

$$\hat{\delta} \xrightarrow{p} \frac{1}{1-\beta}$$

La convergencia del estimador bietápico es

$$\beta* = \frac{\hat{\delta}\sum c_t a_t}{\hat{\delta}^2 \sum a_t^2} \xrightarrow{p} \beta$$