# CAPÍTULO 5
## Ejercicio 5.1

Considerar el siguiente modelo:

$$y_t = x_{t-1} + u_{1t}$$
$$x_t = x_{t-1} + u_{2t}$$

en donde $u_1$ y $u_2$ son ruidos blancos. Se pide:

1). La esperanza y varianza no condicionada de $y_t$.

2). Especificar el vector de cointegración y las propiedades de la perturbación de la relación de cointegración. Obtener la forma con mecanismo de corrección de error del modelo.

3). ¿Como seran las propiedades del estimador MCO en la regresión de $y_t$ sobre $x_t$?. Justifique la respuesta.

**Solución**

1). Ver el Apartado 1 del Ejercicio 4.5.

2). Se demuestra facilmente la primera condición requerida de que las dos variables sean del mismo orden de integración y se ve que, en este caso, ambas son I(1). El vector de cointegración es ( 1, -1); la perturbación de la relación de cointegración es:

$$w_t = u_{1t} - u_{2t}$$

Los momentos de esta perturbación se obtienen de forma inmediata.
La forma MCE del modelo se obtiene restando a la primera relación $y_{t-1}$ quedando la segunda relación tal como esta.

3). El estimador MCO de la regresión indicada es,

$$\hat{\beta} = \frac{\sum y_t x_t}{\sum x_t^2} = \beta + \frac{\sum x_t w_t}{\sum x_t^2} = .....$$

Las propiedades de este estimador se obtienen derivando los órdenes de probabilidad y sus correspondientes convergencias en probabilidad del numerador y denominador del segundo término de la derecha. Para llevar a cabo esta derivación, hay que utilizar el Resultado 2.6.

---

## Ejercicio 5.2

Considerar el siguiente modelo:

$$x_t = \mu + x_{t-1} + u_t$$
$$y_t = \lambda x_t + v_t$$

en donde $u_t, v_t$ son ruidos blancos.Se pide:

## CAPÍTULO 5
## Ejercicio 5.2

1).Determinar el orden de integración de las dos variables y la convergencia de la expresión $\sum y_{t-1}u_t$ .
2). Determinar el tipo de tendencia que ambas variables tienen y dibujar, aproximadamente, el gráfico de la variable $x_t$ .
3). Escribir el modelo en forma de Mecanismo de Correccion de Error.
4). Derivar las propiedades del estimador MCO de $\lambda$ .

**Solución**

1). Sustituyendo sucesivamente se obtiene:

$$x_t = \mu t + \sum_1^t u_i = \mu t + \xi_t$$

se trata de un proceso que tiene una parte determinista y una variable que es I(1). Por lo tanto, la variable $x_t - \mu t$ es una variable I(1). En lo que respecta a $y_t$, se tiene que,

$$y_t = \lambda \mu t + \lambda \xi_t + v_t$$

Por lo que cabe hacer el mismo razonamiento que el realizado para $x_t$ . La convergencia que se pide está resuelta en el Apartado a) del Resultado 2.7.

2). Las dos series tienen tendencia estocástica y determinista y el gráfico se deriva fácilmente de las dos expresiones escritas en el apartado anterior.

3). La forma MCE puede escribirse como:

$$\Delta y_t = \delta_1 + \alpha_1 v_{t-1} + \sum_1^{p-1} \gamma_{11i} \Delta y_{t-i} + \sum^{p-1} \gamma_{12i} \Delta x_{t-i} + v_{1t}$$

$$\Delta x_t = \delta_2 + \alpha_2 v_{t-1} + \sum_1^{p-1} \gamma_{21i} \Delta y_{t-i} + \sum^{p-1} \gamma_{22i} \Delta x_{t-i} + v_{2t}$$

Se trata ahora de identificar el valor que toman los parámetros en el modelo propuesto en el ejercicio.

4). El estimador MCO de $\lambda$ es

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum x_t y_t}{\sum x_t^2} = \lambda + \frac{\sum x_t v_t}{\sum x_t^2}$$

Para derivar la convergencia de este estimador hay que demostrar que el numerador es $O_p(T^{\frac{3}{2}})$ y que el denominador es $O_p(T^3)$ y se llega a la conclusión de que el esmador MCO de $\lambda$ es superconsistente con una tasa de convergencia que hay que determinar.

---

# CAPÍTULO 5

## Ejercicio 5.3

Para un sector,
se ha especificado el siguiente modelo:

$$V_t = \phi V_{t-1} + \beta_0 GP_t + \beta_1 GP_{t-1} + u_t$$

en donde $V_t y GP_t$ son , respectivamente, las ventas y los gastos de promoción.

1). Determinar cuál sería el efecto acumulado en los dos primeros periodos y el efecto a largo plazo sobre $V_t$ después de introducir un shock transitorio en $GP_t$ sabiendo que $|\phi| \prec 1$.

2). Repetir 1) suponiendo que el shock es permanente.

3). Repetir 1) y 2) suponiendo que $\phi = 1$.

4). Escribir el modelo en forma de mecanismo de corrección de error especificando los parámetros que, en este modelo, reflejan los efectos a corto y a largo plazo.

**Solución**

1). Sustituyendo dos veces se obtiene,

$$V_{T+2} = \phi^3 V_{T-1} + \beta_0 GP_{T+2} + (\beta_1 + \phi\beta_0) GP_{T+1} + \phi(\beta_1 + \phi\beta_0) GP_T + \phi^2 \beta GP_{T-1}$$

A partir de aquí, los efectos retardado y a largo plazo de un shock transitorio son

$$\acute{E}R(2) = \phi\left(\beta_1 + \phi\beta_0\right)$$

$$ER(\infty) = \phi^{\infty}(\beta_1 + \phi\beta_0)$$

2). Si el shock es permanente, entonces los efectos se obtienen sumando todos los coeficientes de la variable GP hasta T+2 si es el corto plazo y hasta $T + \infty$ si se busca definir el efecto a largo plazo.

3). Cuando $\phi = 1$ entonces los efectos de un shock transitorio coinciden a corto y a largo plazo y vienen dados por la expresión:

$$ER(2) = ER(\infty) = \beta_1 + \beta_0$$

Cuando el shock es permanente, los efectos son diferentes. El efecto a corto es

$$ER(2) = 3\beta_0 + 2\beta_1$$

demostrar que, en este caso, el efecto a largo plazo es infinito.

4). Se obtiene restando a ambos lados $V_{t-1}$ y sumando y restando en la parte de la derecha $\beta_0 GP_{t-1}$. Escribir la relación resultante.

---

## Ejercicio 5.4

Suponer el siguiente modelo:

$$y_{1t} = \beta_2 y_{2t} + \beta_3 y_{3t} + u_{1t}$$

$$y_{2t} = y_{2t-1} + u_{2t}$$

$$y_{3t} = y_{3t-1} + u_{3t}$$

# CAPÍTULO 5
## Ejercicio 5.4

$u_t^{'} = (u_{1t}, u_{2t}, u_{3t})$ con

$$u_{1t} = \rho_{111}u_{1t-1} + \rho_{112}u_{1t-2} + \rho_{121}u_{2t-1} + \rho_{131}u_{3t-1} + \varepsilon_{1t}$$

$$u_{2t} = \delta_2^{\bullet} + \rho_{221}u_{2t-1} + \rho_{231}u_{3t-1} + \varepsilon_{2t}$$

$$u_{3t} = \delta_3^{\bullet} + \rho_{321}u_{2t-1} + \rho_{331}u_{3t-1} + \varepsilon_{3t}$$

$\varepsilon_t$ es i.i. N(0, $\Sigma$). Se pide:

1). La forma de mecanismo de corrección de error del modelo.

2). Derivar el Efecto Unitario a Largo Plazo de $y_3$ sobre $y_1$ ($ERT_3^1(\infty)$).

3). Derivar las condiciones que garantizan que el $\mathrm{ERT}_3^1(\infty)$ coincide con el coeficiente de $\boldsymbol{y}_3$ en la relación de cointegración.

4). Suponer que $\rho_{111} = \rho_{112} = 0$ y que $\rho_{231} = \rho_{321} = 0$. Derivar en este caso el Efecto Unitario a Largo Plazo de $y_3$ sobre $y_1$. Indicar bajo qué condiciones coincidiría este efecto con el coeficiente de $\boldsymbol{y}_3$ en la relación de cointegración.

### Solución

1). La forma de mecanismo de corrección de error es

$$\Delta y_{1t} = \delta_1 + \alpha_1 u_{1t-1} + \sum_1^{p-1}\gamma_{11i}\Delta y_{1t-i} + \sum_1^{p-1}\gamma_{12i}\Delta y_{2t-i} + \sum_1^{p-1}\gamma_{13i}\Delta y_{3t-i} + v_{1t}$$

$$\Delta y_{2t} = \delta_2 + \alpha_2 u_{1t-1} + \sum_1^{p-1}\gamma_{21i}\Delta y_{1t-i} + \sum_1^{p-1}\gamma_{22i}\Delta y_{2t-i} + \sum_1^{p-1}\gamma_{23i}\Delta y_{3t-i} + v_{2t}$$

$$\Delta y_{3t} = \delta_3 + \alpha_3 u_{1t-1} + \sum_1^{p-1}\gamma_{31i}\Delta y_{1t-i} + \sum_1^{p-1}\gamma_{32i}\Delta y_{2t-i} + \sum_1^{p-1}\gamma_{33i}\Delta y_{3t-i} + v_{3t}$$

Se trata ahora de derivar los parámetros de estas expresiones. Para la primera, basta sustituir las expresiones de $y_{2t}$ , $y_{3t}$ y $u_{1t}$ en la primera relación, obteniendose los siguientes resultados. La primera relación del proceso autoregresivo puede escribirse como:

$$y_{1t} - \beta_2 y_{2t} - \beta_3 y_{3t} = \rho_{111}u_{1t-1} + \rho_{112}u_{1t-2} + \rho_{121}u_{2t-1} + \rho_{131}u_{3t-1} + \varepsilon_{1t}$$

**CAPÍTULO 5**
**Ejercicio 5.4**

sumando y restando $\rho_{112}u_{1t-1}$ se obtiene

$$y_{1t} = \beta_2 y_{2t} + \beta_3 y_{3t} + (\rho_{111} + \rho_{112})u_{1t-1} - \rho_{112}(u_{1t-1} - u_{1t-2}) + \rho_{121}u_{2t-1} + \rho_{131}u_{3t-1} + \varepsilon_{1t}$$

$$\begin{aligned} y_{1t} &= \beta_2\delta_2^{\bullet} + \beta_3\delta_3^{\bullet} + \beta_2 y_{2t-1} + \beta_3 y_{3t-1} + (\rho_{111} + \rho_{112})u_{1t-1} - \rho_{112}\Delta y_{1t-1} + \\ &+ (\rho_{121} + \beta_2\rho_{112} + \beta_2\rho_{221} + \beta_3\rho_{321})\Delta y_{2t-1} + \\ &+ (\rho_{131} + \beta_3\rho_{112} + \beta_2\rho_{231} + \beta_3\rho_{331})\Delta y_{3t-1} + \varepsilon_{1t} \end{aligned}$$

y restando a ambos lados $y_{1t-1}$ se obtiene,

$$\Delta y_{1t} = \delta_1 + (\rho_{111} + \rho_{112} - 1)u_{1t-1} + \gamma_{111}\Delta y_{1t-1} + \gamma_{121}\Delta y_{2t-1} + \gamma_{131}\Delta y_{3t-1} + v_{1t}$$

de donde las equivalencias son inmediatas

$$\delta_1 = \beta_2\delta_2^{\bullet} + \beta_3\delta_3^{\bullet}$$

$$\alpha_1 = \rho_{111} + \rho_{112} - 1$$

$\gamma_{111} = ......; \gamma_{11i} = 0$, para i=2,… p-1.

$\gamma_{121} = ......; \gamma_{12i} = 0$, para i=2,… p-1.

$\gamma_{131} = ......; \gamma_{13i} = 0$, para i=2,… p-1.

$$v_{1t} = \varepsilon_{1t} + \beta_2\varepsilon_{2t} + \beta_3\varepsilon_{3t}$$

Se trata de derivar y justificar estas expresiones y las correspondientes a las otras dos relaciones.

2). La expresión general del efecto es

$$EUR_3^1(\infty) = \frac{\beta'_{21.}(B_{22})_{.l}}{(B_{22})_{ll}} = \frac{(\beta_2\beta_3)(B_{22})_{.3}}{(B_{22})_{33}}$$

En este caso se tiene que,

$$A(1) = \begin{pmatrix} 1 - \rho_{111} - \rho_{112} & \begin{pmatrix} -\rho_{121} & -\rho_{131} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 - \rho_{221} & -\rho_{231} \\ -\rho_{321} & 1 - \rho_{331} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}(1) & A_{12}(1) \\ A_{21}(1) & A_{22}(1) \end{pmatrix}$$

Por la forma que adopta la matriz se tiene que,

$$B_{22} = A_{22}(1)^{-1}$$

## CAPÍTULO 5
### Ejercicio 5.4

Sustituyendo se llega al efecto

$$EUR_3^1(\infty) = \frac{\beta_2 \rho_{231} + \beta_3(1 - \rho_{221})}{1 - \rho_{221}}$$

3). Las condiciones son inmediatas a partir de la exprasión derivada en el apartado anterior.

4). Las condiciones dadas garantizan que el resultado siempre se cumple.

---

### Ejercicio 5.5

Rudebusch(1999), utilizando 62 datos anuales del Producto Nacional Bruto ( $y_t$ ) correspondientes a USA, estima dos modelos, uno del tipo estacionario en torno a una tendencia determinista (TS ) y el otro estacionario en primeras diferencias (DS ). Los resultados que obtiene son los siguientes : (Entre paréntesis aparecen las desviaciones típicas estimadas )

<u>Modelo TS</u>

$$\underset{(.27)}{y_t = .819} + \underset{(.0019)}{.0056}\,t + \underset{(.121)}{1.24}\,y_{t-1} - \underset{(.121)}{.419}\,y_{t-2} + \hat{u}_t \qquad \hat{\sigma}_u = .0583$$

<u>Modelo DS</u>

$$\Delta y_t = \underset{(.009)}{.019} + \underset{(.124)}{.341}\Delta y_{t-1} + \hat{v}_t \qquad \hat{\sigma}_v = .0618$$

Rudebusch argumenta que los dos modelos son aparentemente muy similares si atendemos a los estadísticos habituales pero que, pese a esa similitud, incorporan implicaciones muy diferentes en lo que respecta a las consecuencias que, sobre el valor de la serie, tiene la introducción de un shock en el periodo T. Se pide:

1).Estudiar y determinar en ambos modelos cuál es el efecto de un shock transitorio en T sobre los periodos que le siguen prestando una atención especial para el caso en que el horizonte temporal es infinito.

2). Repetir 1) en el caso en que el shock es permanente.

## CAPÍTULO 5
## Ejercicio 5.5

### Solución

1). Sustituyendo sucesivamente se obtiene

$$y_{T+1} = (\phi_1^2 + \phi_2)y_{T-1} + \phi_1\phi_2 y_{T-2} + u_{T+1} + \phi_1 u_T$$

$$y_{T+2} = \dots\dots\dots + u_{T+2} + \phi_1 u_{T+1} + (\phi_1^2 + \phi_2)u_T$$

$$y_{T+3} = \dots\dots\dots + u_{T+3} + \phi_1 u_{T+2} + (\phi_1^2 + \phi_2)u_{T+1} + (\phi_1^3 + 2\phi_1\phi_2)u_T$$

El efecto de un shock transitorio en T después de pasados h periodos viene dado por el coeficiente de $u_T$ en la expresión de $y_{T+h}$. Para los dos modelos considerados en este ejercicio, los efectos de un shock transitorio según el periodo son los siguientes:

| Periodo | Coeficiente | Modelo TS | Modelo DS |
|---|---|---|---|
| 1 | $\phi_1$ | 1.24 | 1.34 |
| 2 | $\phi_1^2 + \phi_2$ | 1.12 | 1.46 |
| 3 | | | |
| $\vdots$ | | | |
| 10 | | | |
| 15 | | | |
| $\infty$ | | | |

Comentar el diferente comportamiento de los dos modelos a lo largo de los diferentes periodos.

2). El efecto de un shock permanente es la suma de los efectos de un shock transitorio. En este caso, el contraste del comportamiento seguido por los dos modelos es más evidente.

---

## Ejercicio 5.7

Una compañía de seguros utiliza para la previsión de accidentes el siguiente modelo ARMA ( 1, 1) en donde $y_t$ es el número de siniestros:

$$y_t = .3y_{t-1} + u_t - .7u_{t-1}$$

1). ¿ Se pude afirmar que dicho modelo constituye un proceso lineal discreto? ¿ Es estacionario? ¿ Es invertible?.

## CAPÍTULO 5
## Ejercicio 5.7

2). Calcular E($y_t$), los coeficientes de la función de autocovarianza $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ y los correspondientes de la función de autocorrelación, $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3$ . Si $y_{71} = -5$,¿$y_{72}$ tendera a estar por encima o por debajo de cero?. Justifique la respuesta.

3). Reescribir el proceso en forma autorregresiva dando valores numéricos para $\pi_1, \pi_2, \pi_3$ .¿Cuál es el orden de la autorregresión?

4). Dibujar, aproximadamente, el gráfico de la serie y el correlograma.

### Solución

**1).** Es un proceso lineal discreto porque puede escribirse como

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i u_{t-i} \quad \text{(determinar } \psi_i\text{)}$$

con $\sum \psi_i$ y $\sum \psi_i^2$ finitos.

2). La esperanza es cero. Los valores de la función de autocovarianza son

$$\gamma_0 = Ey_t^2 = 0.3^2\gamma_0 + \sigma^2 + ......=1.17$$

$$\gamma_j = Ey_t y_{t-j} = .3\gamma_{j-1} - .7Ey_{t-1}u_{t-1} \quad \text{si j=1}$$

$$= .3\gamma_{j-1} \quad \text{si j>1}$$

La función de autocorrelación adopta la forma siguiente:

$$\rho_j = \frac{\gamma_j}{\gamma_0}$$

Estará por encima o por debajo de la media según sea el signo de $\gamma_1$.

3). Sustituyendo sucesivamente los valores de $u_{t-j}$ se llega a

$$y_t = \sum_{1}^{\infty} \pi_i y_{t-i} + u_t \quad \text{con } \pi_i = \theta^i(\phi + \theta) \text{ (derivar esta expresión)}$$

4). El gráfico de la serie seran ondas en torno a cero y el correlograma son palos negativos amortiguados.

---

# CAPÍTULO 5
## Ejercicio 5.8

**Ejercicio 5.8**

Considerar los dos procesos siguientes:

$$x_t = u_t$$

$$y_t = \phi y_{t-1} + u_t - \theta u_{t-1}$$

1). Dibujar, aproximadamente, el gráfico de cada uno de los dos procesos y el de los correlogramas respectivos.

2). Calcular su función de autocovarianzas cruzadas.¿Se puede sacar alguna conclusión respecto a la dirección de la causalidad?.

3). Calcular la función de autocorrelación cruzada entre ambas series.

**Solución**

1). La función de autocovarianza de $y_t$ es

$\gamma_1 = Ey_t y_{t-1} = \phi\gamma_0 - \theta\sigma^2$ (demostrar este resultado).

$\gamma_j = \phi^j \gamma_{j-1}$ para j>1 (demostrar)

La función de autocorrelación es

$$\rho_j = \frac{\gamma_j}{\gamma_0}$$

La representación gráfica de los procesos y de las correspondientes funciones de autocorrelación son inmediatas.

2). La expresión general de la función de autocorrelación cruzada es

$$\gamma_{xy}(k) = Ex_t y_{t+k}$$

$$\gamma_{xy}(-k) = Ex_t y_{t-k}$$

Se puede demostrar que para valores positivos de k la función toma valores diferentes de cero (calcular los valores para k=0,1 y 2.), mientras que, para valores negativos, el valor siempre es cero. Esto se puede interpretar como que hay causalidad de x a y pero no de y a x.

3). La función de autocorrelación cruzada es

# CAPÍTULO 5
## Ejercicio 5.8

$$\rho_{xy}(k) = \frac{\gamma_{xy}(k)}{\sigma_x \sigma_y}$$

la misma expresión sería para valores negativos de k. Hay que obtener los valores de esta función para k=0, 1 y 2. También demostrar que

$$\rho_{xy}(k) = \phi \rho_{xy}(k-1).$$

---

## Ejercicio 5.9

Considerar el siguiente modelo

$$y_t = \beta_2 y_{2t} + u_{1t}$$
$$\Delta y_{2t} = u_{2t}$$

con $u_{1t} = \rho_1 u_{1t-1} + \rho_2 u_{1t-2} + \varepsilon_{1t}$ y $u_{2t} = \delta_2 + \rho u_{2t-1} + \varepsilon_{2t}$ en donde $\varepsilon_t = (\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t})$ es un vector de ruidos blancos. Se pide:

1) Las formas VAR y de mecanismo de corrección de error del modelo.

2) El Efecto Retardado para h=1,2. de un shock transitorio en $y_{2t}$ sobre $y_{1t}$.

3) El Efecto Unitario a Largo Plazo de un shock transitorio en $y_{2t}$ sobre $y_{1t}$ .

**Solución**

1). La forma general del MCE puede verse en el Apartado 1) del Ejercicio 5.4.Particularizando a nuestro modelo, podemos escribir,

$$\Delta y_{1t} = \delta_1 + \alpha_1 u_{1t-1} + \gamma_{111}\Delta y_{1t-1} + \gamma_{121}\Delta y_{2t-1} + v_{1t}$$
$$\Delta y_{2t} = \delta_2 + \alpha_2 u_{1t-1} + \gamma_{211}\Delta y_{1t-1} + \gamma_{221}\Delta y_{2t-1} + v_{2t}$$

Se trata de llegar a los coeficientes de este modelo. Por ejemplo,

$\delta_1 = \beta_2 \delta_2^{\bullet}$, $\alpha_1 = \rho_1 + \rho_2 - 1$, $\gamma_{111} = -\rho_2$ y así sucesivamente se pueden obtener el resto de los coeficientes del modelo.La forma VAR se obtiene descomponiendo los incrementos y agrupando términos.

# CAPÍTULO 5
## Ejercicio 5.9

2). El modelo lo podemos escribir como,

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \\ \Delta y_{1t} \\ \Delta y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1 + 1 & -\alpha_1\beta_2 & \gamma_{111} & \gamma_{121} \\ 0 & 1 & 0 & \gamma_{221} \\ \alpha_1 & -\alpha_1\beta_2 & \gamma_{111} & \gamma_{121} \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_{221} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1t-1} \\ y_{2t-1} \\ \Delta y_{1t-1} \\ \Delta y_{2t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{1t} \\ v_{2t} \\ v_{1t} \\ v_{2t} \end{pmatrix}$$

en una forma más compacta podemos escribirlo como

$$y_t^{\bullet} = \delta^{\bullet} + Dy_{t-1}^{\bullet} + v_t^{\bullet}$$

A partír de esta expresión se tiene que,

$$y_{T+1}^{\bullet} = \delta^{\bullet} + Dy_T^{\bullet} + v_{T+1}^{\bullet}$$

$$y_{T+2}^{\bullet} = \delta^{\bullet} + D\delta^{\bullet} + D^2 y_T^{\bullet} + v_{T+2}^{\bullet} + Dv_{T+1}^{\bullet}$$

Al variar $y_{2t}$ en T, por la relación de cointegración variará tambien $y_{1t}$ en ese mismo periodo; el efecto último sobre $y_{1t}$ en T+1 tendra en cuenta estas dos variaciones a traves de los correspondientes elementos de la matriz D. Así, tendremos,

$$ER_2^1(1) = D_{11}\beta_2 + D_{12} + D_{13}\beta_2 + D_{14}$$

$$ER_2^1(2) = (D^2)_{11}\beta_2 + (D^2)_{12} + (D^2)_{13}\beta_2 + (D^2)_{14}$$

Para calcular el efecto en T+1 basta sustituir los terminos de la matriz D llegandose a

$$ER_2^1(1) = \beta_2(1+\rho)$$

Para obtener el efecto retardado en T+2, hace falta disponer de los elementos de la matriz $D^2$. Podemos escribir

$$D^2 = \begin{pmatrix} D_{11}^{(2)} & D_{12}^{(2)} \\ D_{21}^{(2)} & D_{22}^{(2)} \end{pmatrix}$$

en donde

$$D_{11}^{(2)} = D_{11}D_{11} + D_{12}D_{21} = \begin{pmatrix} (\rho_1+\rho_2)^2 - \alpha_1\rho_2 & -(1+\rho_1)\alpha_1\beta_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## CAPÍTULO 5
## Ejercicio 5.9

$$D_{12}^{(2)} = D_{11}D_{12} + D_{12}D_{22} = \begin{pmatrix} -\rho_1\rho_2 & \rho_1\rho_2\beta_2 + \beta_2(\rho + \rho^2) \\ 0 & \rho + \rho^2 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo, el efecto retardado para T+2 es,

$$ER_2^1(2) = \beta_2(1 + \rho + \rho^2)$$

3). Para obtener el efecto unitario a largo plazo puede seguirse una estrategia similar a la seguida en el apartado anterior, a partir de:

$$D^{h\to\infty} = \begin{pmatrix} A & B \\ L & M \end{pmatrix}$$

El efecto unitario sería:

$$EUR_2^1(\infty) = \frac{a_{11}\beta_2 + a_{12} + b_{11}\beta_2 + b_{12}}{a_{21}\beta_2 + a_{22} + b_{21}\beta_2 + b_{22}}$$

Pero el cálculo de los elementos de A y B es bastante dificil por lo que resulta más cómodo seguir la linea seguida en el Ejercicio 5.4 y utilizar la expresión:

$$EUR_2^1(\infty) = \frac{\beta'_{21.}(B_{22})_{.l}}{(B_{22})_{ll}}$$

Teniendo en cuenta que, en este ejercicio, se tiene que

$$A(1) = \begin{pmatrix} 1 - \rho_1 - \rho_2 & 0 \\ 0 & 1 - \rho_2 \end{pmatrix}$$

por lo que,

$$B_{22} = \frac{1}{1 - \rho_2}$$

El efecto unitario resultante es:

$$EUR_2^1(\infty) = \beta_2$$