TEMA 2:

VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

INDICE

- **VARIABLE ALEATORIA CONTINUA:**
  - **Función de densidad**
  - **Función de distribución**
- **CARACTERISTICAS DE UNA V. A. CONTINUA**
  - **Esperanza matemática**
  - **Propiedades**
- **DISTRIBUCIONES NOTABLES**
  - **Uniforme.**
  - **Exponencial**
  - **Normal**
- **APROXIMACIONES CONTINUAS A DISTRIBUCIONES DISCRETAS**
  - **Binomial – Normal**
  - **Poisson – Normal**

FUNCIÓN DE DENSIDAD

EJEMPLO INTRODUCTORIO

A continuación vamos a mostrar intuitivamente el concepto de función de densidad.

Nos basamos en el polígono de frecuencias y en el concepto frecuentista de la probabilidad, es decir, si el número de repeticiones del experimento aleatorio tiende a infinito la frecuencia tiende a ser la probabilidad (medida de incertidumbre).

Dado que estamos trabajando con variables continuas podemos reducir la amplitud de las clases hacia cero porque tendremos observaciones en cada clase.

Este doble proceso nos permite ver gráficamente el concepto de función de densidad.

FUNCIÓN DE DENSIDAD

EJEMPLO INTRODUCTORIO

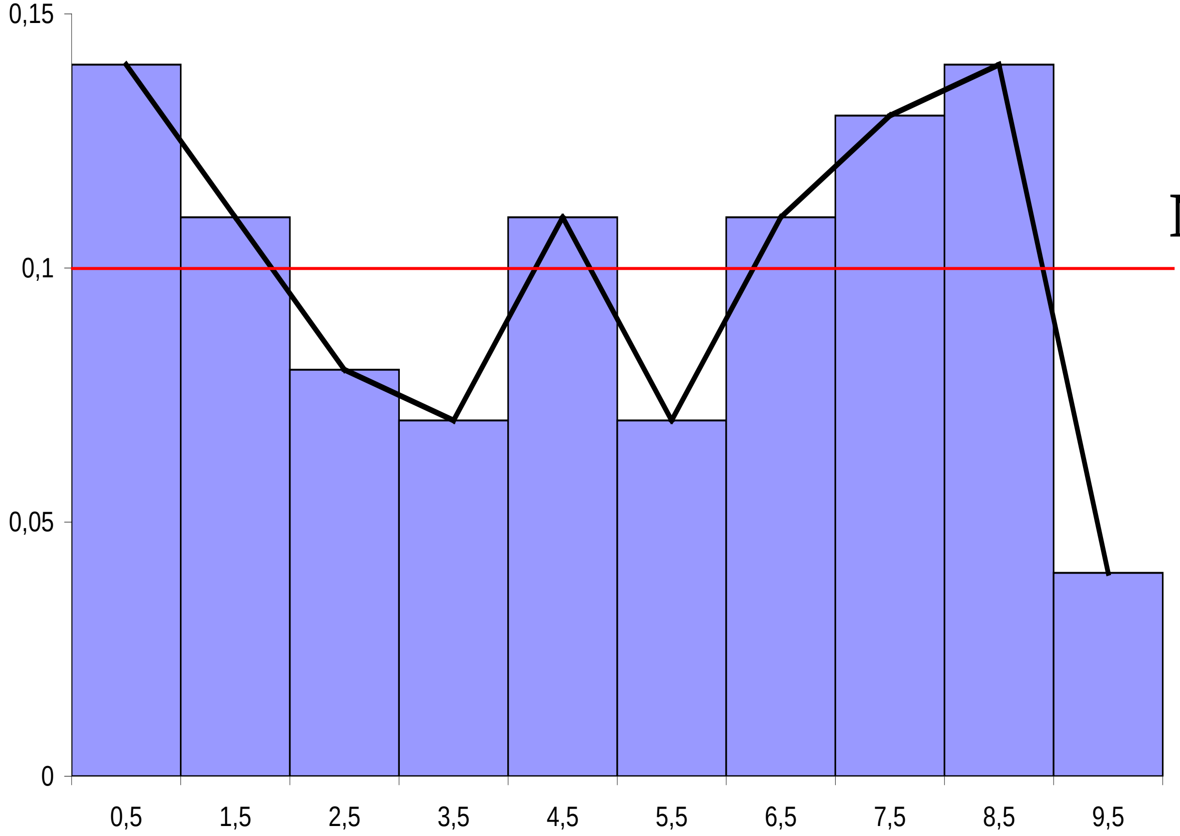
Sea **X el tiempo de espera de una persona hasta que llega su autobús**. Sabiendo que es una línea regular y que pasa cada diez minutos y la persona llega al azar a la parada del autobús, el tiempo de espera oscila aleatoriamente entre 0 y 10 minutos.

Observamos N personas y anotamos su tiempo para construir el histograma de la variable.

Comenzaremos con N=100 datos y aumentamos hasta 50.000 datos. Por otro lado, al aumentar el número de datos podemos ir disminuyendo la amplitud de las clases porque ninguna se quedará vacía.

FUNCIÓN DE DENSIDAD

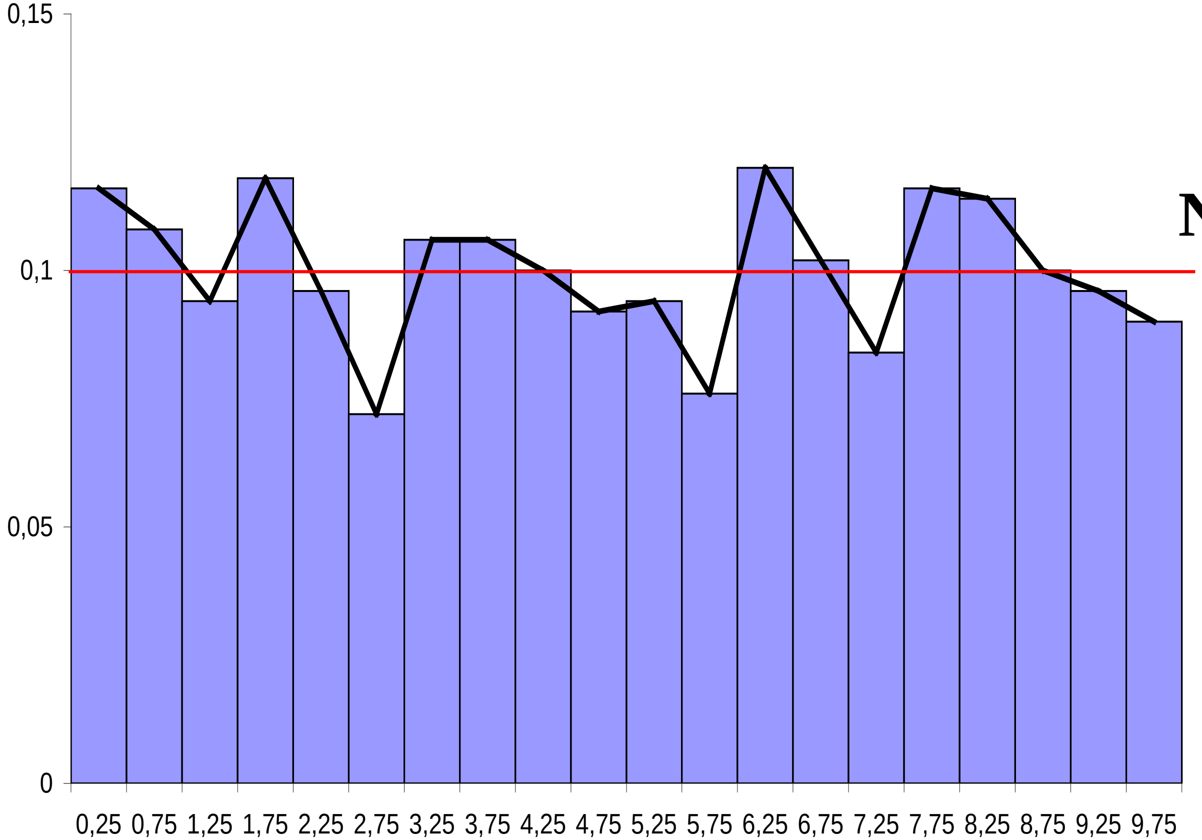
Histogramas y Polígonos de frecuencias



Nº observaciones=100
Amplitud=1

FUNCIÓN DE DENSIDAD

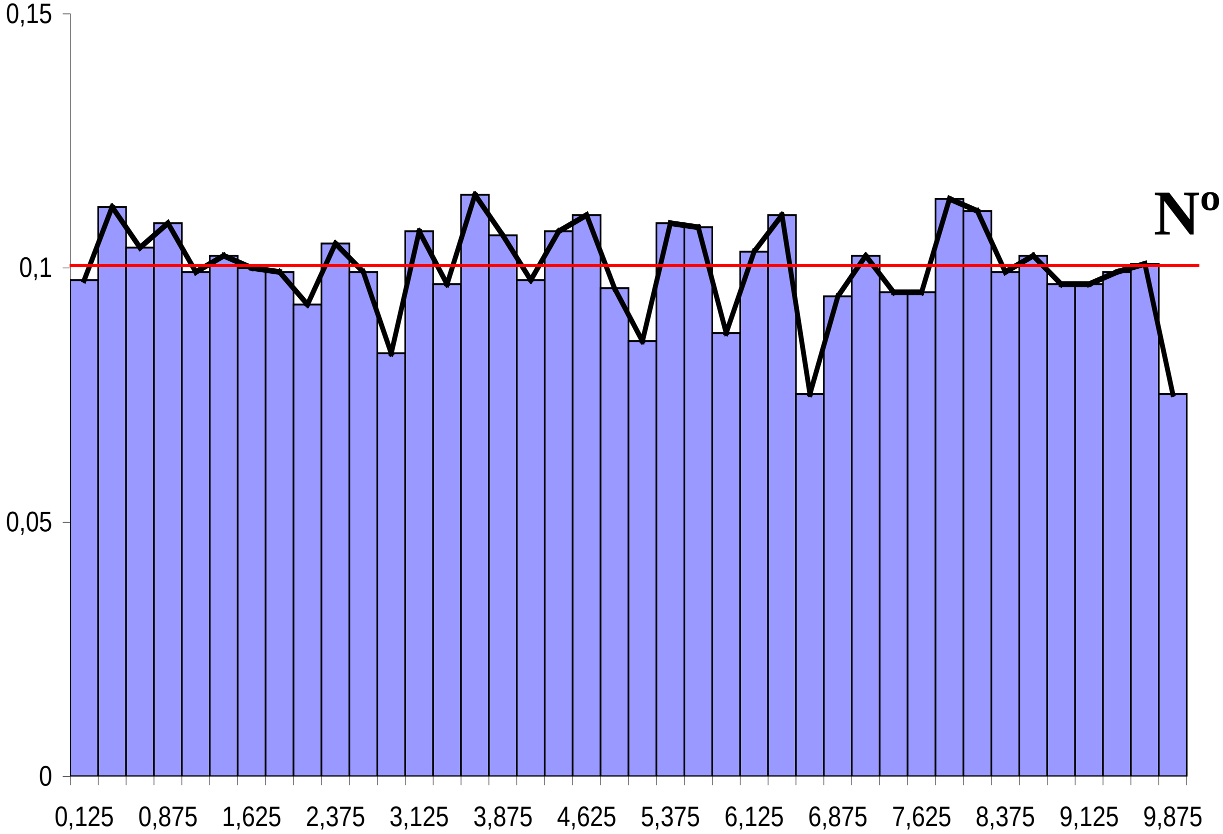
Histogramas y Polígonos de frecuencias



Nº observaciones=500
Amplitud=0,5

FUNCIÓN DE DENSIDAD

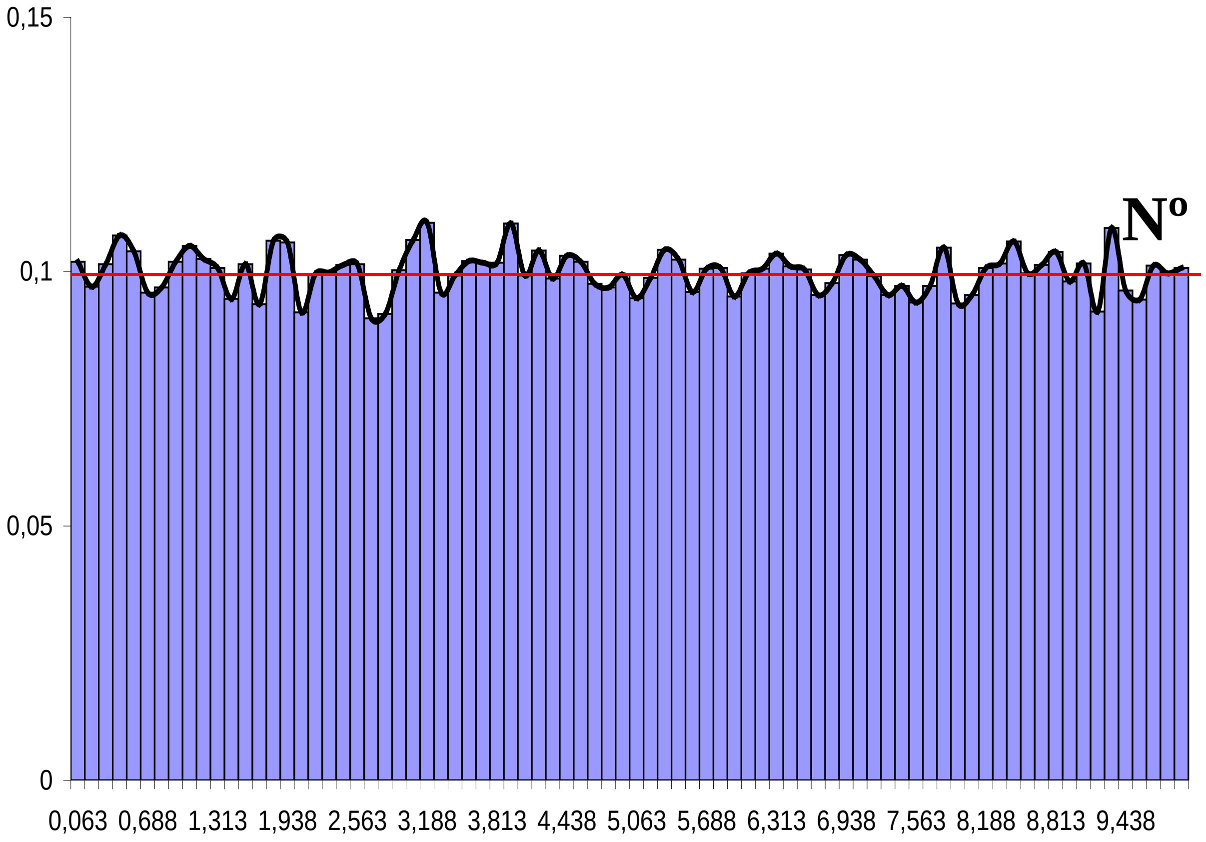
Histogramas y Polígonos de frecuencias



Nº observaciones=5000
Amplitud=0,25

FUNCIÓN DE DENSIDAD

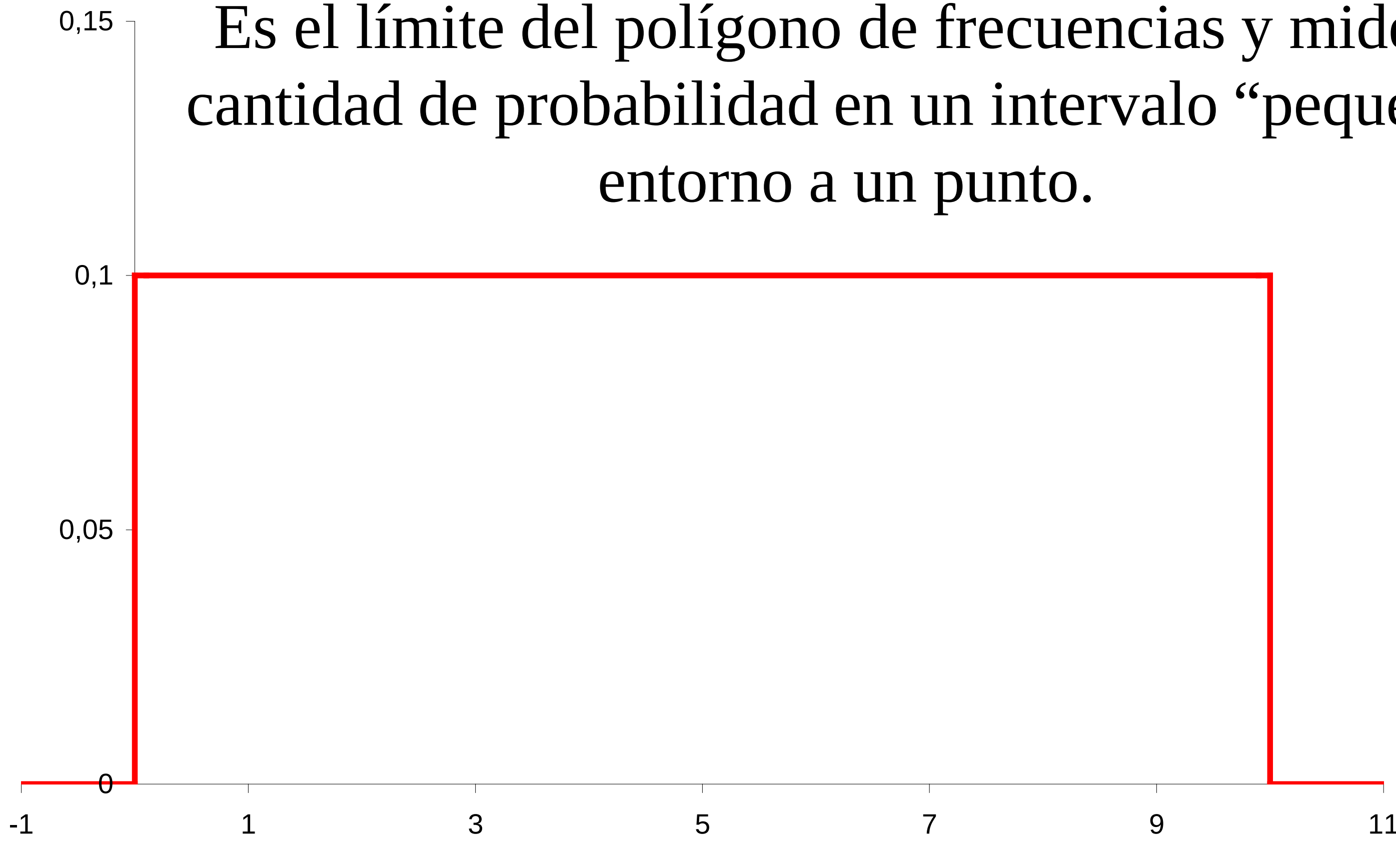
Histogramas y Polígonos de frecuencias



Nº observaciones=50.000
Amplitud=0,125

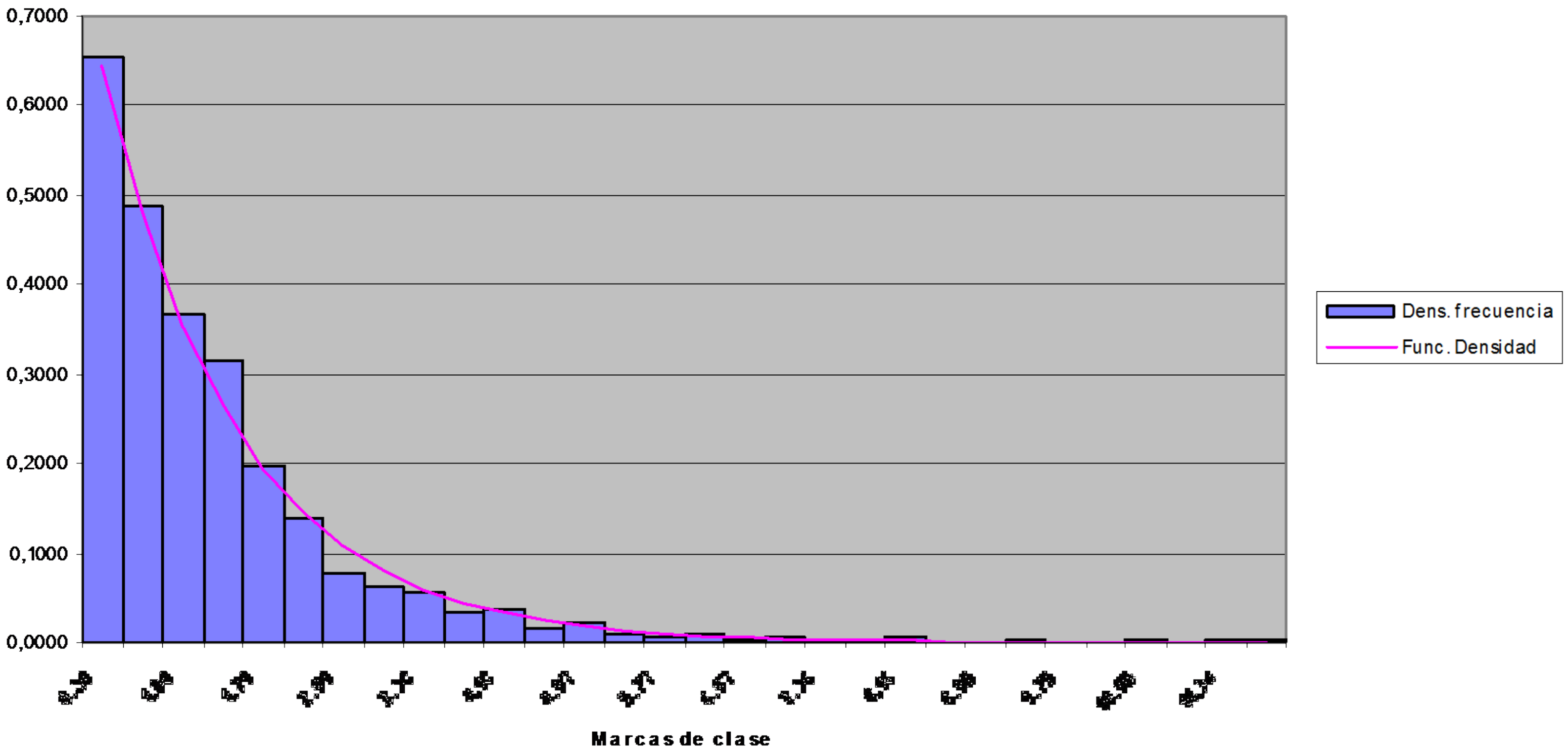
Función de densidad

Es el límite del polígono de frecuencias y mide la cantidad de probabilidad en un intervalo "pequeño" entorno a un punto.



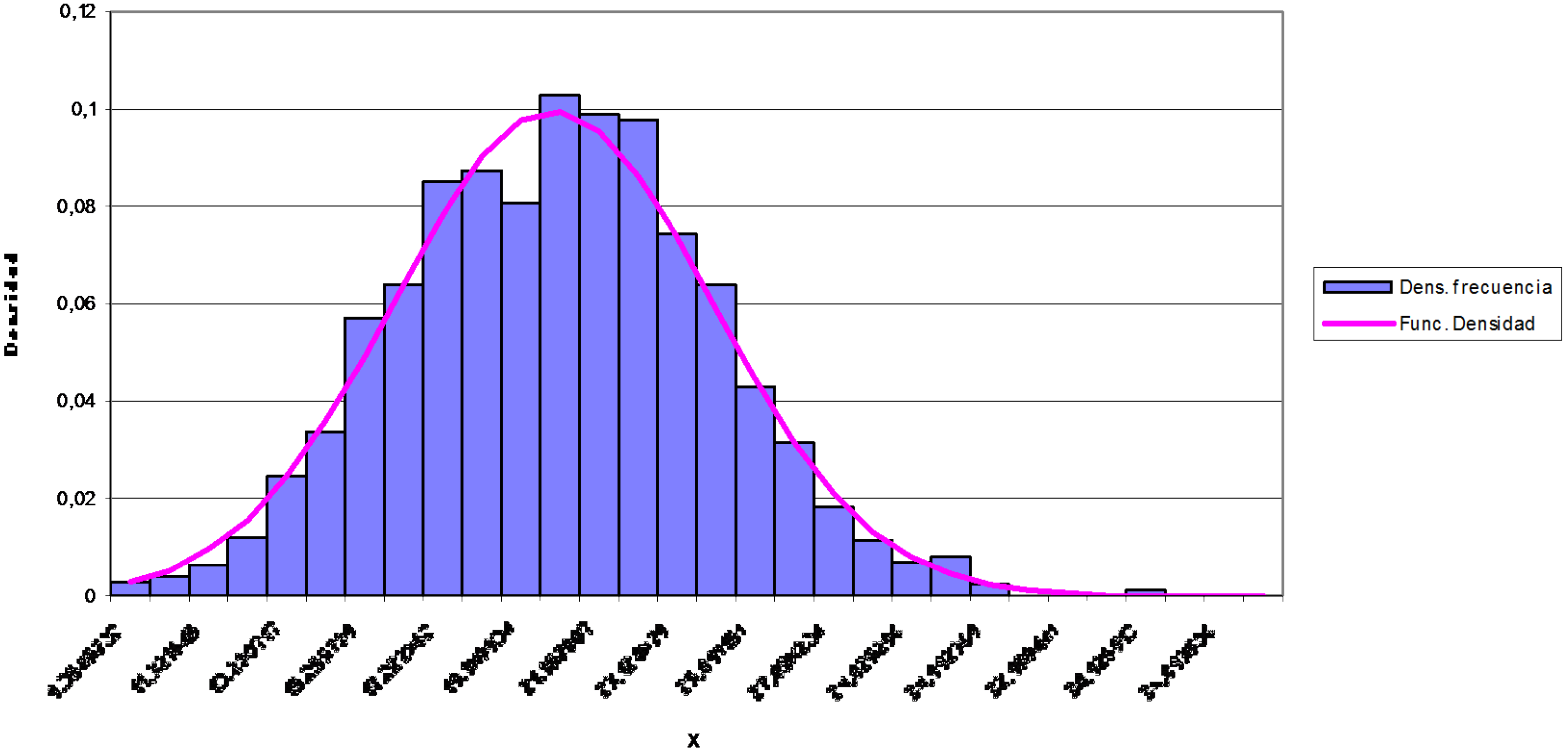
FUNCIÓN DE DENSIDAD

Función de densidad (distribución exponencial)



FUNCIÓN DE DENSIDAD

Función de densidad (distribución normal)



VARIABLE CONTINUA

Una variable aleatoria X se dice continua si tiene asociada una **función de densidad** que indica la cantidad de probabilidad que se distribuye en cada punto del espacio.

Se denota por *f(x)* y es una función no negativa y el área que encierra con el eje de abscisas es uno.

La función de densidad no representa una probabilidad, no obstante, f(x)dx se interpreta como la probabilidad infinitesimal de que la variable X tome valores dentro del intervalo (x-0.5dx,x+0.5dx).

FUNCIÓN DE DENSIDAD

Propiedades:

1.- $f(x) \geq 0$

2.- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Recordar que:

a) $P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

b) $P\{X = x\} = 0 \qquad \forall x \in \Re$

c) $P\{X \in A\} = \int_A f(x)dx \qquad \forall A \in B$

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN

La función de distribución de una variable aleatoria continua puede expresarse como:

$$F(x) = P\{X \le x\} = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \qquad \forall x \in \Re$$

donde *f* es la función de densidad de la variable aleatoria X. Por lo tanto, podemos decir que:

$$f(x) = F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{P(x \le X \le x+h)}{h}$$

F(x) tiene las mismas propiedades que en el caso discreto.

ESPERANZA MATEMÁTICA

Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad f(x), y sea la función

$$g : \Re \to \Re \quad \text{tal que}$$

$$\begin{array}{ccccc} \Omega & \xrightarrow{X} & \Re & \xrightarrow{g} & \Re \\ \varpi & \mapsto & X(\omega) & \mapsto & g(X(\omega)) \end{array}$$

Se llama **esperanza de la variable aleatoria g(X)** a la siguiente expresión:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$$

Es el promedio de los valores que tomaría la función g(x) si repitiésemos infinitas veces el experimento aleatorio.

CARACTERÍSTICAS PRINCIPALES

- **MEDIA, Valor esperado o Esperanza de X**:

$$\boxed{\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx}$$

Es el centro de gravedad de la distribución y nos indica la situación de la variable en la recta real (habrá valores por debajo y por encima de μ)

- **VARIANZA**:

$$\boxed{Var(X) = \sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx}$$

Indica la dispersión de la variable, es decir, la variabilidad o amplitud de la misma. A mayor varianza tendremos mayor incertidumbre.

CARACTERÍSTICAS

Propiedades: $\forall a,b \in \mathbf{R}$; g, h funciones

1. $E[a\,h(x) + b\,g(x)] = a\,E[h(x)] + b\,E[g(x)]$
2. $E(a\,X + b) = a\,E(X) + b$
3. $Var(a\,X + b) = a^2\,Var(X)$
4. ***Tipificación de variables***: Sea X una variable aleatoria con media μ y varianza σ^2

   Definimos la variable aleatoria Z como: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

entonces, Z es una variable tipificada que cumple que

$E(Z) = 0$ y $Var(Z)=1$.

5. **(Fórmula abreviada de la varianza)**

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

6. La media minimiza el error cuadrático medio de predicción
7. $E[aX+bY] = aE[X]+ bE[X]$
8. $Var(aX+bY) = a^2Var(X)+b^2Var(Y)+2abCov(X,Y)$

PARALELISMO ENTRE DISTRIBUCIONES DISCRETAS Y CONTINUAS

	Discretas	**Continuas**
Soporte	Toman un número finito o infinito numerable de valores	Toman valores comprendidos dentro de um intervalo
Su distribución de probabilidad se describe a partir de	$D_X = \{x \in \mathbf{R}: p(x)>0\}$ **soporte** $p(x) = P(X=x)$ $p(x)$ **función de probabilidad o cuantía** Verifica $p(x)\geq 0,\ \sum_{u\in D_X} p(u) = 1$	$D_X = \{x \in \mathbf{R}: f(x)>0\}$ **soporte** $f(x)dx \approx P\left(x - \frac{dx}{2} < X \leq x + \frac{dx}{2}\right)$ $f(x)$ **función de densidad** Verifica $f(x)\geq 0,\ \int_{-\infty}^{\infty} f(u)du = 1$
Función de distribución	$F(x) = P(X\leq x) = \sum_{u\leq x} p(u)$ Constante a trozos con saltos en los puntos del soporte	$F(x) = P(X\leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$ Continua y derivable $F'(x) = f(x)$
Cálculo de probabilidades	$P(X\in A) = \sum_{u\in A} p(u)$	$P(X\in A) = \int_{A} f(u)du$
Esperanza Matemática	$E[g(X)] = \sum_{u\in D_X} g(u)p(u)$	$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)f(u)du$
Cuantiles (0<p<1)	$x_p \in \mathbf{R} : F^-(x_p) \leq p \leq F(x_p)$ donde $F^-(x) = \lim_{u\to x^-} F(u)$	$x_p \in \mathbf{R} : F(x_p) = p$
Moda	$Mo \in \mathbf{R}: p(Mo) = \max_{x\in D_X} p(x)$	$Mo \in \mathbf{R}: f(Mo) = \max_{x\in D_X} f(x)$

DISTRIBUCIÓN UNIFORME

Diremos que una variable aleatoria X se distribuye según una **distribución uniforme en el intervalo [a,b] con a<b**, y lo pondremos X~U[a,b], si su función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a \le X \le b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Características: $E[X] = \dfrac{a+b}{2}$ $\qquad Var[X] = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

Si X es una variable aleatoria con función de distribución F entonces U = F(X) ~ U([0,1])

(**Fundamento de la simulación estocástica**)

DISTRIBUCIONES NOTABLES

DISTRIBUCIÓN UNIFORME

DISTRIBUCIONES NOTABLES

DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

La distribución exponencial es el tiempo aleatorio hasta que se produce una ocurrencia de un suceso en un proceso de Poisson.

Si $T \sim Exp(\lambda)$, T representa el tiempo de espera hasta observar la ocurrencia del primer suceso. (tiempo – continua)

DISTRIBUCIONES NOTABLES

Ejemplos

- Tiempo que transcurre desde que un cliente entra en un establecimiento hasta que sale
- Tiempo que le cuesta a un alumno ir a casa desde la Facultad
- Tiempo transcurrido en una parada de autobús desde que se ha ido un autobús hasta que llega el siguiente
- Tiempo de desempleo de un trabajador desde un su último trabajo hasta el siguiente
- Tiempo transcurrido desde que un producto se vende hasta que se estropea
- Tiempo transcurrido entre dos transacciones de un activo financiero
- Tiempo de supervivencia de una persona o de una empresa
- Tiempo transcurrido entre dos ocasiones de compra de una familia

DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

Diremos que una variable aleatoria X se distribuye según una **exponencial de parámetro λ, con λ>0**, y lo pondremos X~Exp(λ), si su función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } 0 \leq X \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Características:

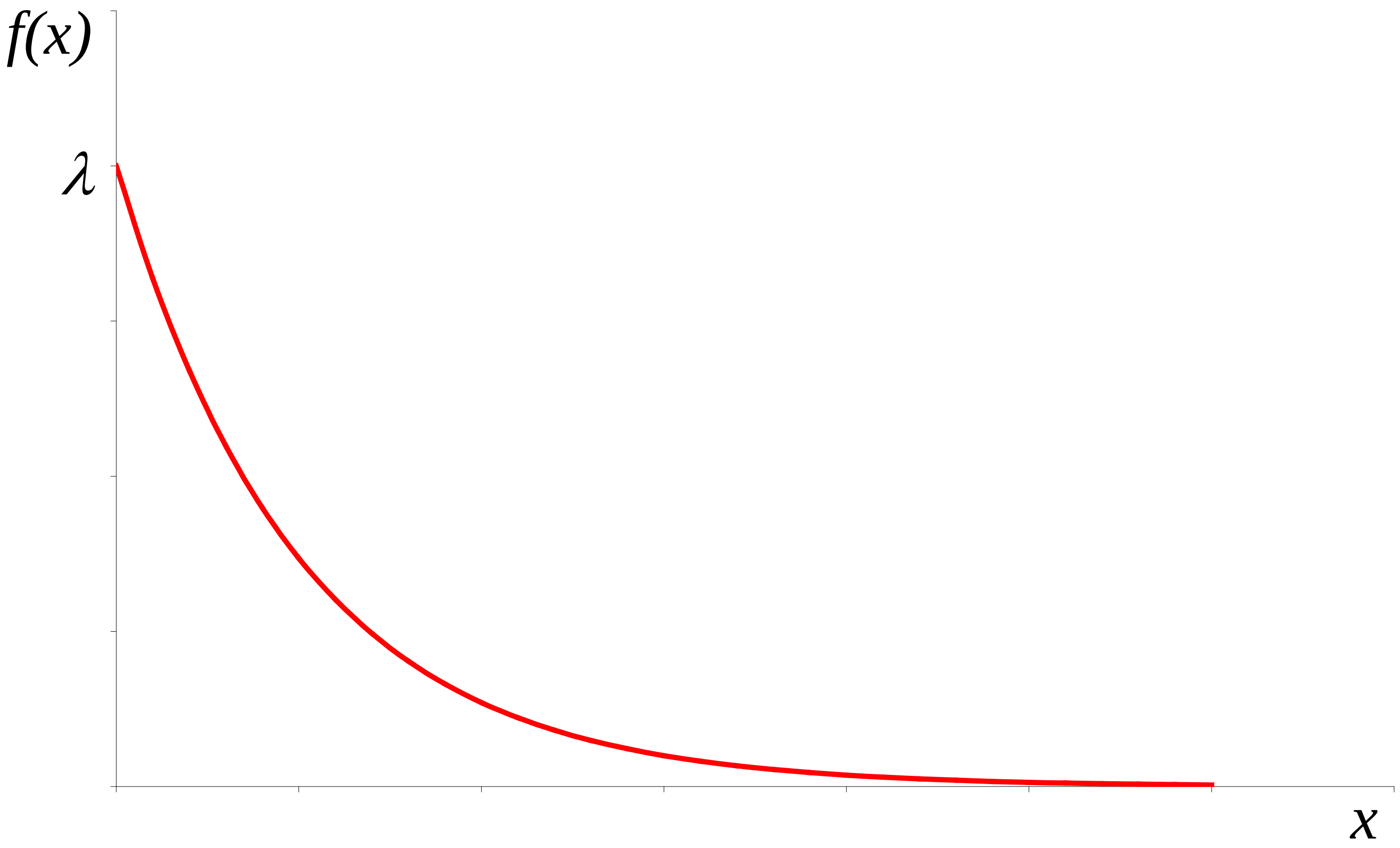
$$E[X] = \frac{1}{\lambda} \qquad V[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$

(**Falta de memoria**): Si X~Exp(λ), ∀x,h>0

$$P(X > x + h \mid X > x) = P(X > h)$$

DISTRIBUCIONES NOTABLES

DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL



DISTRIBUCIONES NOTABLES

DISTRIBUCIÓN NORMAL

Es la ley de probabilidad más utilizada

- La distribución normal proporciona una buena aproximación a una gran cantidad de variables: coeficiente de inteligencia, estatura, rendimientos, resistencia, peso, ...
- Es una buena aproximación para otras distribuciones: Binomial, Poisson, ...
- En Inferencia Estadística se resuelven fácilmente muchos problemas bajo la hipótesis de normalidad

- **TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE**

Cuando los resultados de un experimento son debidos a un conjunto muy grande de factores independientes, que actúan sumando sus efectos, siendo cada efecto individual de poca importancia respecto al conjunto, es esperable que los resultados sigan una distribución normal.

DISTRIBUCIÓN NORMAL

Diremos que una variable aleatoria X se distribuye según una **normal de parámetros μ y σ²**, y lo pondremos X~N(μ,σ), si su función de densidad es

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad \text{si } -\infty < x < \infty$$

Diremos que una variable aleatoria X se distribuye según una **normal estándar**, y lo pondremos X~N(0,1) si X sigue una distribución normal con media 0 y varianza 1. Su función de densidad viene dada por

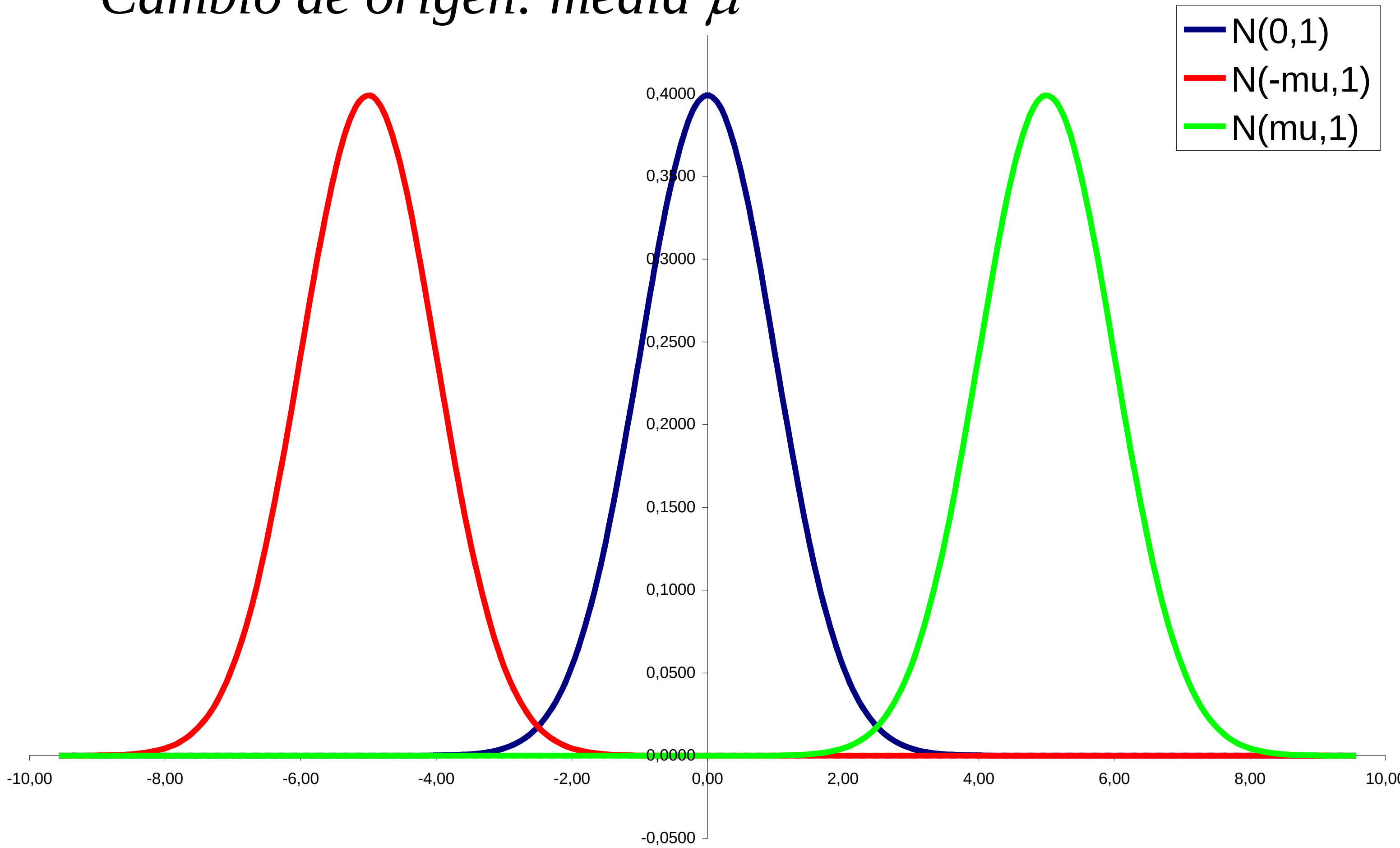
$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \text{si } -\infty < x < \infty$$

La función de distribución de una normal estándar se suele denotar por Φ.

DISTRIBUCIONES NOTABLES

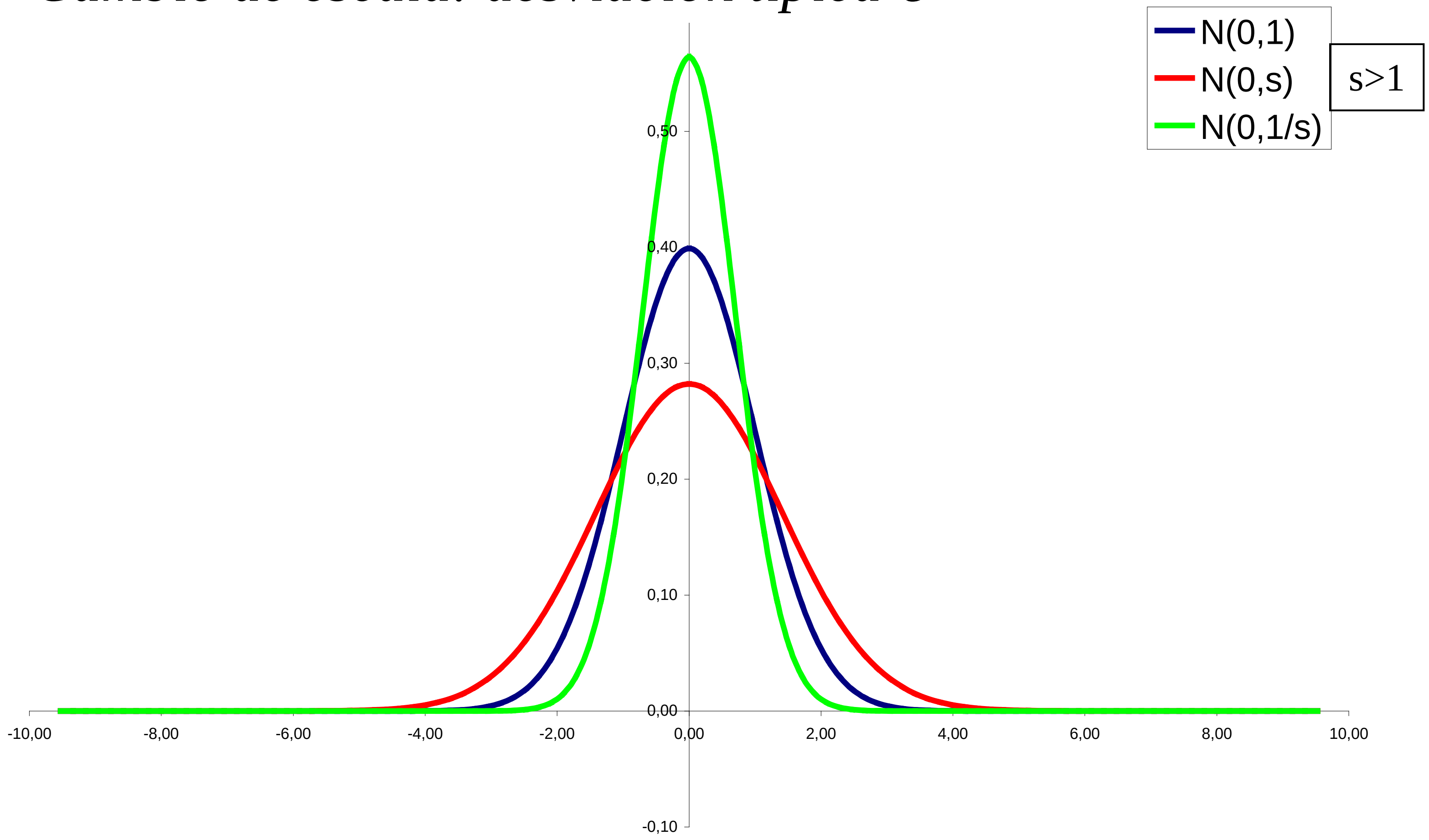
DISTRIBUCIÓN NORMAL

Cambio de origen: media μ



DISTRIBUCIÓN NORMAL

Cambio de escala: desviación típica σ



DISTRIBUCIONES NOTABLES

DISTRIBUCIÓN NORMAL

Características: $E(X) = \mu$ y $Var(X) = \sigma^2$

Propiedades:

- Si $X \sim N(\mu,\sigma)$ e $Y = aX + b$ con a, b constantes entonces $Y \sim N(a\mu + b, |a|\sigma)$.
- En particular, $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ es $N(0,1)$
- La función de densidad de una distribución normal tiene forma campaniforme y es simétrica respecto a su media: μ. La desviación típica σ indica la dispersión.
- Los coeficientes de asimetría y de curtosis de la distribución normal son 0
- También recibe el nombre de distribución gaussiana

APROXIMACIONES

APROXIMACIÓN BINOMIAL-NORMAL

Sea $X \sim Bi(n,p)$ con n grande y p intermedio $(0.1 \leq p \leq 0.9)$.

Sea $Y \sim N(np, \sqrt{npq})$ con $q=1-p$

Sean $a,b \in \{0,\ldots,n\}$

$$P(a \leq X \leq b) \cong P(a-0.5 \leq Y \leq b+0.5)$$

(Aproximación con corrección de continuidad)

Esta aproximación también es buena cuando:

$$np>5 \ \text{ y } \ 0.1<p<0.9$$

Recordar que si n es grande $(n>30)$ y p pequeño $(p<0.1)$, la binomial será aproximada por una Poisson de parámetro $\lambda=np$.

APROXIMACIONES

APROXIMACIÓN POISSON-NORMAL

Sea $X \sim P(\lambda)$ con λ grande ($\lambda > 30$).

Sea $Y \sim N\left(\lambda, \sqrt{\lambda}\right)$

Sean $a, b \in \{0, 1, 2, \ldots\}$

$$P(a \leq X \leq b) \cong P(a - 0.5 \leq Y \leq b + 0.5)$$

(Aproximación con corrección de continuidad)