

## TEMA 2

### PROBLEMAS DE DISTRIBUCIONES CONTINUAS

#### Generalidades y distribución uniforme

- 1.- Se sabe que las ventas diarias de una empresa (en cientos de €) se distribuyen uniformemente en el intervalo (100, 200). Se pide:
  - a) Probabilidad de que las ventas realizadas estén en el intervalo (120,250)
  - b) ¿Cuál sería la cifra media de ventas? ¿Y su desviación típica?
  - c) Si se supone que el precio (Y) en € se puede tomar como función de las ventas (X) por medio de la relación  $Y = (220 - X)/10$ . Calcular el precio medio.
- 2.- De una estación parte un tren cada 20 minutos. Un viajero llega de improviso. Hallar:
  - a) Función de distribución de la variable aleatoria “tiempo de espera”.
  - b) Probabilidad de que espere al tren menos de 7 minutos.
  - c) Esperanza y Varianza de la variable aleatoria “tiempo de espera”.
  - d) Probabilidad de que espere exactamente 12 minutos.
- 3.- Las rentas de todas las familias de un barrio pueden representarse por medio de una variable aleatoria continua cuya distribución de probabilidad viene dada por una distribución uniforme. Se sabe que la renta mediana de todas las familias de este barrio es de 60000 € y que el 40% de todas las familias del barrio tienen una renta de más de 72000 €
  - a) ¿Cuál es la probabilidad de que la renta de una familia esté comprendida entre 60000 € y 72000 €?
  - b) Calcular la probabilidad de que una familia escogida al azar tenga una renta de menos de 65000 €
- 4.- Un contratista presenta una oferta para realizar un proyecto para el que hay que hacer más investigación y desarrollo. Se estima que el coste total del cumplimiento de las especificaciones del proyecto es de 20 millones de euros más el coste de la investigación y desarrollo adicionales. El contratista considera que el coste de este trabajo es una variable aleatoria uniforme con una media de 4 millones de euros y una varianza de 3 millones de euros<sup>2</sup>. El contratista desea presentar una oferta tal que su beneficio sea un 10% de sus costes. ¿Cuál debe ser la oferta que debe presentar si quiere tener una probabilidad del 90% de conseguir la contrata?

- 5.- Un inversor coloca 2000 € en una cuenta que tiene una tasa de rendimiento fija del 10% al año. Invierte otros 1000 € en un fondo de inversión que tiene una tasa esperada de rendimiento del 16% y una desviación típica del 8% al año
- a) Hallar el valor esperado de la cantidad total de dinero que tendrá el inversor después de un año
  - b) Hallar la desviación típica de dicha cantidad

### **Distribución exponencial**

- 6.- El tiempo de atención a un cliente de un empleado de una empresa se distribuye según una exponencial de media 10 minutos
- a) Calcular la probabilidad de que un cliente sea atendido en menos de 20 minutos
  - b) Calcular la probabilidad de que un cliente tarde más de 5 minutos en ser atendido
  - c) Calcular la probabilidad de que un cliente tarde entre 10 y 15 minutos en ser atendido
  - d) Calcular la probabilidad de que el número de clientes atendidos en media hora sea superior a 4
- 7.- En unos grandes almacenes, el departamento de atención al cliente recibe, en promedio, 6 reclamaciones por hora sobre la calidad del servicio. La distribución es de Poisson
- a) ¿Cuál es la probabilidad de que se reciban en cualquier hora 6 reclamaciones?
  - b) ¿Cuál es la probabilidad de que transcurran más de 20 minutos entre una reclamación y otra?
  - c) ¿Cuál es la probabilidad de que transcurran menos de 5 minutos entre una reclamación y otra?
  - d) El director de los grandes almacenes observa el departamento de atención al cliente durante un periodo de 30 minutos, en el que no se recibe ninguna reclamación. Llega a la conclusión de que una charla que dio al personal sobre el tema “El cliente siempre tiene razón” ha surtido claramente un efecto beneficioso. Suponer que la charla no ha surtido, en realidad, ningún efecto. ¿Cuál es la probabilidad de que el director observe un periodo de 30 minutos o más sin ninguna reclamación? ¿Qué concluyes?

- 8.- El coste de una pieza es de 0,25 €. El precio de venta depende del diámetro interior de la pieza,  $X$ , variable con distribución exponencial de media  $\lambda$ . Si el diámetro, expresado en milímetros, es mayor que 3 o menor que 1, se desecha la pieza, y si el diámetro está comprendido entre estos límites, se vende al precio de 0,40 €. La máquina que produce las piezas tiene un dispositivo para ajustar el diámetro medio de las piezas. Hállese el valor de  $\lambda$  que maximice el beneficio medio por pieza.
- 9.- El tiempo, en días, que tarda una empresa en servir los pedidos a sus clientes es una variable aleatoria con distribución exponencial cuya media es 5 días.
- Han pasado tres días y un cliente aún no ha recibido su pedido, ¿cuál es la probabilidad de que tenga que esperar al menos 2 días más?
  - Calcular la probabilidad de que en 15 días hayan sido atendidos, como mínimo, 5 clientes.
  - Calcular el tiempo máximo de envío de un pedido para un nivel de confianza del 95%
- 10.- El número de llamadas que recibe diariamente un servicio de grúas se distribuye según una distribución de Poisson de media 64 llamadas
- Calcular la distribución del tiempo transcurrido entre dos llamadas medido en horas. ¿Cuál es su media?
  - Para un día cualquiera: ¿cuál es la probabilidad de que reciba menos de 50 llamadas?
  - ¿Cuál es el número esperado de días en un mes en los que el servicio de grúas recibe menos de 50 llamadas? (Considerar los meses de 30 días)
  - Calcular la probabilidad de que el tiempo transcurrido entre 4 llamadas consecutivas sea mayor que 2 horas.

### **Distribución normal**

- 11.- Las cantidades de dinero que se piden en las solicitudes de préstamos en un banco tienen una distribución normal con una media de 70000 € y una desviación típica 20000 €. Esta mañana se recibió una solicitud de préstamo, ¿cuál es la probabilidad de que la cantidad de dinero solicitada
- sea superior a 80000 €?
  - esté entre 65000 y 80000 €?
  - sea superior a 65000 €?

- 12.-** Las ventas mensuales de silenciadores en un área de una ciudad se distribuyen según una normal con media 1200 y una desviación típica igual a 225. Al fabricante le gustaría establecer unos niveles de inventario de manera que sólo haya un 5% de probabilidad de que se agoten las existencias. ¿Dónde se deben establecer los niveles de inventario?
- 13.-** El precio de las acciones de un banco al final de cada jornada de comercialización del año pasado se rigió por una distribución normal. El precio medio fue de 42€ por acción y la desviación típica de 2,25€ por acción
- a) ¿Qué porcentaje de jornadas el precio estuvo por encima de los 45€?
  - b) ¿Qué porcentaje de jornadas el precio osciló entre 38 y 40 €?
  - c) ¿Cuál fue el nivel del precio de las acciones para el que el 15% de las jornadas se mantuvo más alto?
- 14.-** Las ventas anuales de novelas románticas tienen una distribución normal. El 40% de dichas ventas fueron superiores a 470000€ y el 10% superiores a 500000€. ¿Cuáles fueron el nivel medio de las ventas así como su desviación típica?
- 15.-** Al establecer las garantías en aparatos HDTV el fabricante debe establecer los límites de manera que pocos aparatos requieran reparación con cargo al fabricante. Por otra parte el periodo de garantía debe ser lo bastante prolongado para que la compra resulte atractiva al comprador. La media del número de meses que abarca la garantía de un HDTV es 36,84 meses con una desviación típica igual a 3,34 meses. ¿En qué punto debe establecerse los límites de garantía de manera que sólo el 10% de los aparatos HDTV requieran reparación con cargo al fabricante?
- 16.-** El número de hogares visitados semanalmente por un inspector de la Compañía de Gas es una variable aleatoria normal con media 25 y varianza 16.
- a) Un nuevo inspector ha visitado a lo largo de esta semana 30 hogares. ¿Qué podemos decir de su trabajo?
  - b) Con objeto de mejorar la productividad de los inspectores se decide enviar una carta de advertencia al 25% de los inspectores que menos hogares visitan. ¿A partir de qué cantidad de hogares visitados se efectuará la advertencia?

## Aproximaciones normales a distribuciones discretas

**17.-** En el caso de Hazelwood School District v. Estados Unidos se discutió si en dicho centro había habido discriminación a la hora de contratar profesorado. Sólo 15 de los 405 profesores contratados por dicha escuela eran miembros de una minoría étnica. La proporción de miembros de dicho grupo entre profesores del condado era del 5,7% de acuerdo con los datos de Hazelwood y del 15,4% de acuerdo con los datos del gobierno. Bajo la hipótesis de 405 contrataciones independientes, calcular la probabilidad de contratar a 15 o menos personas de esa minoría si:

- a) Hazelwood tiene razón.
- b) El Gobierno tiene razón.

Si se considera como “raro” un suceso con una probabilidad inferior al 10% ¿qué conclusión obtienes?

**18.-** Una agencia de empleo dice que encuentra trabajo para el 85% de las personas que utilizan sus servicios. Un periodista investiga el reclamo de la agencia tomando una muestra de personas que han utilizado sus servicios y encuentra que de 90 personas, 70 personas han encontrado trabajo gracias a la agencia. Calcular la probabilidad que se obtenga un número menor o igual que 70 personas si el reclamo de la agencia es verdad. Si se considera como “raro” un suceso que tenga probabilidad inferior al 5% ¿Qué conclusiones obtienes?

**19.-** El número de defectos de ciertas alfombras de 9 x 12 pies obedece una ley de Poisson con una media igual 2 defectos por alfombra. Se seleccionan 25 alfombras al azar para inspeccionar. Calcular la probabilidad de que esa muestra contenga:

- a) 32 defectos o menos
- b) 52 o más defectos
- c) entre 40 y 60 defectos.
- d) Si una tienda compra 100 alfombras para vender y acepta el pedido si hay menos de 10 defectos en una muestra de 15 alfombras, ¿cuál es la probabilidad aproximada de que el pedido sea rechazado?

## Problemas varios

- 20.-** Teniendo en cuenta que el diámetro de las naranjas de exportación sigue una distribución normal, un determinado inspector conoce por su dilatada experiencia que el 30% de las naranjas que examina tienen un diámetro inferior a 60 mm y el 20% tienen el diámetro superior a 100 mm.
- a) El país A exige que el diámetro esté comprendido entre 75 y 90 mm. Calcular la probabilidad de que esto ocurra en una determinada partida.
  - b) Calcular el intervalo de extremos simétricos respecto a la media que cubra el 90% de las naranjas.
  - c) El país B exige que el diámetro no baje de los 50 mm. La inspección se realiza midiendo el diámetro de 10 naranjas y rechazando una determinada partida si se encuentran más de dos naranjas con un diámetro inferior a 50 mm. Calcular la probabilidad de que una partida sea aceptada.
- 21.-** La resistencia a la presión interna de una botella de refrescos fabricada por una empresa se distribuye normalmente con una resistencia media de  $257,9 \text{ gr/cm}^2$  y una desviación típica de  $20 \text{ gr/cm}^2$ . El embotellador al que van dirigidas estas botellas ha establecido una especificación inferior a  $225 \text{ gr/cm}^2$  de forma que, si una botella tiene una resistencia menor que 225 se considera defectuosa.
- a) Calcular la probabilidad de que una botella fabricada por la empresa sea defectuosa.
  - b) Un lote de botellas fabricado por la empresa será aceptado por el embotellador si, al extraer 50 botellas del lote, como mucho una es defectuosa. ¿ Con qué probabilidad aceptará el embotellador un lote fabricado por la empresa?.
  - c) Como el criterio de aceptación del embotellador le resulta poco favorable a la empresa, ésta decide proponerle otro alternativo consistente en extraer del lote 15 botellas; si ninguna de ellas es defectuosa se acepta el lote, si dos o más son defectuosas se rechaza, y si tan sólo una es defectuosa se vuelven a extraer otras 15 botellas y si ninguna de éstas 15 es defectuosa se acepta el lote y en otro caso se rechaza. Con este criterio ¿qué porcentaje de lotes fabricados se aceptarían?.
  - d) Otro posible criterio de aceptación podría ser el siguiente: extraer botellas al azar del lote hasta que aparezca la primera defectuosa, así, si se han extraído 30 botellas y no ha aparecido ninguna defectuosa se acepta el lote, en otro caso se rechaza. ¿Qué porcentaje de lotes fabricados se aceptarían?.
  - e) Desde el punto de vista de la empresa, ¿cuál de los tres criterios propuestos le interesa más?

- 22.-** El tiempo de servicio de una ventanilla es una variable aleatoria con distribución exponencial. Un cliente se considera satisfecho si su tiempo de servicio es inferior a 2. Se sabe que el 95% de los clientes están satisfechos.
- Calcular el tiempo medio de servicio
  - Si se escogen al azar 50 clientes, calcular la probabilidad de encontrar menos de 4 clientes insatisfechos.
  - Calcular la probabilidad de que el tiempo total de atención a un cliente consecutivos esté entre 1 y 3 minutos
- 23.-** El tiempo medido en minutos que tarda una persona en ir andando de su trabajo a casa se distribuye de acuerdo a una normal de media 20 y desviación típica 5. Se pide:
- Calcula la probabilidad de que tarde entre 20 y 35 minutos.
  - Determina el valor  $k$  para que  $P\{15 < X < k\} = 0.5$
  - Obtener la probabilidad de que de 300 días laborables exactamente en 2 haya tardado más de 30 minutos.
  - Si fuese en bicicleta, la distribución seguiría siendo una normal pero con media y desviación típica distintas. Calcula las nuevas media y desviación típica, sabiendo que la probabilidad de que tarde menos de 5 minutos es del 5% y la probabilidad de que tarde más de 15 minutos es del 10%.
  - Cuando va al trabajo andando, la probabilidad de que se encuentre con un compañero es del 40%: ¿Cuál es la probabilidad de que en 10 trayectos se encuentre 4 veces con ese compañero?
- 24.-** En una ventanilla de Hacienda dedicada a la información para cumplimentar la declaración de la renta, el tiempo, medido en minutos, dedicado a cada persona que acude a informarse sigue una distribución normal  $N(3,1)$ .
- El 10% de las personas que acuden a la ventanilla permanecen menos de  $x_1$  minutos y el 70% más de  $x_2$  minutos. Calcula los valores de  $x_1$  y  $x_2$ .
  - Durante un día concreto atendieron a 12 personas, ¿cuál es la probabilidad de que a 10 de ellas se les dedicara más de 3 minutos?
  - ¿Cuánto tiempo como máximo se dedica al 95% de las personas que acuden a la ventanilla?
  - El primer día del plazo para entregar la declaración de la renta se entregaron 40, de las cuales el 5% eran a devolver. Si de ellas extraemos un grupo de 10, ¿cuál es la probabilidad de obtener exactamente una a devolver?
  - El último día del plazo para entregar la declaración de la renta, debido a la gran afluencia, se ha modificado la media y la desviación típica de la variable. Calcular ambas teniendo en cuenta que el 6'68% de las personas están en la ventanilla menos de 1'25 minutos y el 2'28% más de 3 minutos.

- 25.-** El contenido de grasa (medido en %) de un cierto artículo de consumo es una variable aleatoria con distribución  $N(10;0,5)$ . Se considera que el artículo es defectuoso si su contenido en grasa es superior a 11.
- Calcular la probabilidad de dicho evento.
  - Si se examina un lote de 100 artículos, calcular la probabilidad de encontrar al menos dos.
- 26.-** La vida útil de los neumáticos utilizados por los camiones de dicha compañía sigue una distribución normal con media 35000 kilómetros y desviación típica 4000 kilómetros.
- ¿Qué proporción de estos neumáticos tiene un tiempo de vida superior a 38000 kilómetros?
  - Si un neumático dura menos de 32000 kilómetros le supone a la compañía un coste estimado en 10 euros para reemplazarlo. Si la compañía posee una flota de 100 camiones que llevan 8 ruedas cada uno. ¿Cuál es el coste esperado que le supone este tipo de reemplazamientos?
- 27.-** Un gran almacén tiene una plantilla de 10 vendedores en la sección de tejidos. Se plantea una reducción del 30% de la plantilla y para ello se considera el volumen de ventas diario por vendedor. El dueño sabe que el número de metros que vende cada uno se distribuye según una Normal con media 50 y varianza 4. El precio medio de las telas es de 6€ por metro.
- ¿Cuál es la venta media y la varianza de cada vendedor?
  - ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 3 vendedores facturen menos que la venta media?
  - ¿Cuál es la cantidad mínima que debe haber facturado un vendedor para que no sea suprimido de la plantilla?
- 28.-** Una compañía de seguros desea contratar dos nuevos agentes. Para ello realiza un proceso de selección sucesiva de los candidatos; consistente en un examen tipo test que, una vez superado permitirá a los preseleccionados presentarse a una entrevista personal. Para aprobar el test es necesario tener una puntuación mayor que 6. La puntuación de un individuo es una variable normal de media 4 y desviación típica 2. Además, se sabe que la entrevista personal es superada con éxito por el 80% de las mujeres y el 70% de los hombres.
- ¿Cuál es la probabilidad de que una persona consiga el contrato de trabajo?
  - ¿Cuál es la probabilidad de que sean seleccionados como agentes el segundo y el tercer candidato?
  - ¿Cuál es la probabilidad de que los cinco primeros candidatos no sean contratados?



## **FUNCIONES DE EXCEL**

**DISTR.EXP.N(x,lambda,acum.).** Calcula la función de densidad (si acumulado = 0) o de distribución (si acumulado = 1) en x para una distribución  $\text{Exp}(\lambda)$ .

**DISTR.NORM.N(x;media;dev\_estándar;acum)** que calcula el valor de la función de cuantía (si acum = 0) o de distribución (si acum =1) en el punto x para una distribución normal con parámetros  $\mu = \text{media}$  y  $\sigma = \text{dev\_estándar}$ .

**INV.NORM(p,media,dev).** Calcula  $F^{-1}(p)$  donde F es la función de distribución de una  $N(\text{media}, \text{desv})$ , es decir, calcula el cuantil p de dicha distribución.

**INV.NORM.ESTAND(alfa).** Calcula  $z_{1-\alpha}$ .