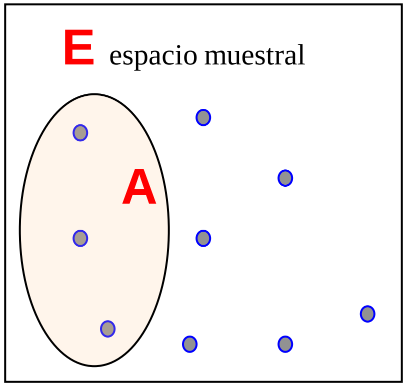
TEMA 0

REPASO DE CÁLCULO DE PROBABILIDADES

CONCEPTOS BÁSICOS

- **Espacio muestral (E)**
  - **Espacio muestral es el conjunto de resultados posibles (o valores) de un experimento**



- **Suceso o Evento**
  - **Suceso es cualquier subconjunto de elementos del espacio muestral**

CONCEPTOS BÁSICOS

- **Clasificación de sucesos**
  - Sucesos **Simples** o elementales: Cualquiera de los elementos del espacio muestral.
  - Sucesos **Compuestos**: Aquel que se obtiene operando cualesquiera de los elementales.

- **Sucesos especiales**
  - Suceso **Imposible**: Evento que no se observa nunca ($\emptyset$)
  - Suceso **Seguro**: Evento que ocurre siempre. Se identifica con el espacio muestral (**E**)

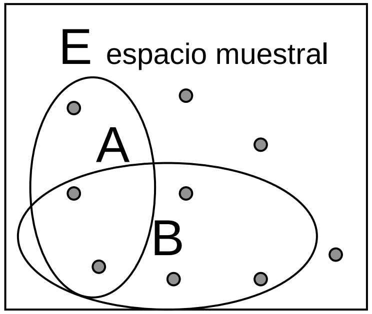
Nota:

- Forma de representarlo: Diagramas de Venn

Operaciones con Sucesos

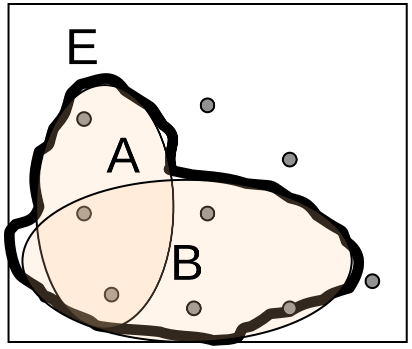
- **Objetivo**: traducir el lenguaje coloquial a un lenguaje de probabilidad

Sean A, B sucesos del espacio muestral



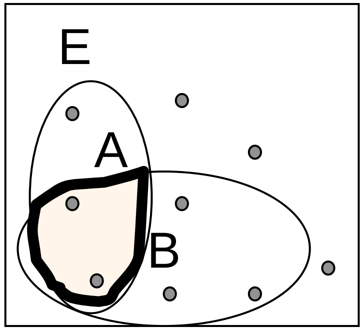
Suceso Unión $A \cup B$

Si ocurre A **ó** B



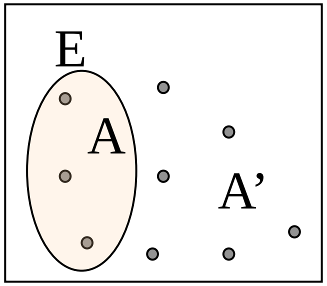
Suceso Intersección $A \cap B$

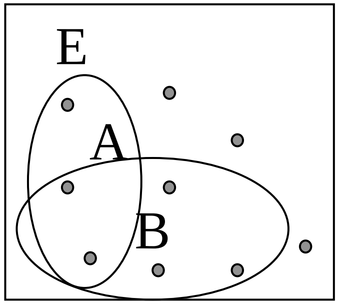
Si ocurren A **y** B



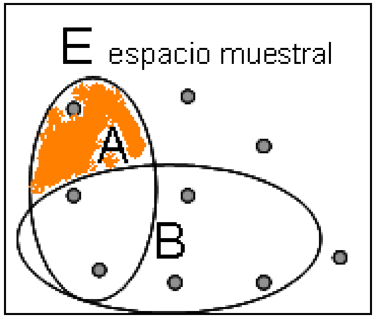
Operaciones con Sucesos

Suceso contrario A^c
Si **no** ocurre A

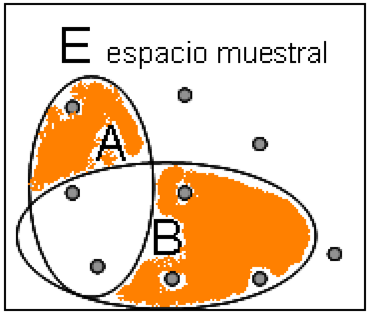




Suceso diferencia A - B
Si ocurre A **pero no** B



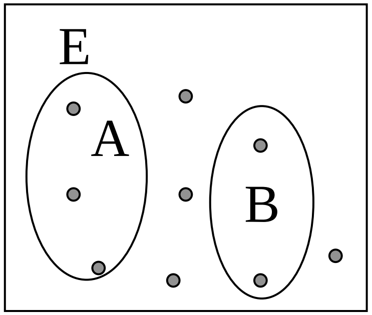
Suceso diferencia simétrica A ∆ B
Si ocurre A pero no B ó
Si ocurre B pero no A



$$A-B=A\cap B^c$$

$$A\Delta B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)=$$
$$=(A\cap B^c)\cup(B\cap A^c)$$

Sucesos incompatibles
no pueden ocurrir
simultáneamente



Leyes de Morgan

No ocurre **ni** A **ni** B

$$\boxed{A^c \cap B^c = (A \cup B)^c}$$

Ocurre, **a lo más**, uno de los dos A o B

$$\boxed{A^c \cup B^c = (A \cap B)^c}$$

Concepto de Probabilidad

➢ Se llama **probabilidad** a una función, p, que asigna a cada suceso A un número real p(A).

➢ Formalmente, se trata de una función:

$$p : \mathrm{P}(E) \rightarrow [0,1]$$
$$A \rightarrow p(A)$$

Donde:

- E = Espacio muestral.
- **P(**E**)** = Conjunto de sucesos obtenidos operando los sucesos elementales (partes de E).

p(A) = Probabilidad del suceso A.

Refleja una medida del grado de ***incertidumbre*** (o de confianza) en la ocurrencia del suceso A

Axíomas de Probabilidad

Kolmogorov (1933)

- Representan las condiciones mínimas para que una función p determine consistentemente las probabilidades de todos los sucesos.
- **Axiomas**:
  - A1: No Negatividad
  - A2: Normalización

$$\boxed{\forall A \in \mathrm{P}(E),\ p(A) \geq 0}$$

$$\boxed{\textit{Si E es el suceso seguro} \quad p(E) = 1}$$

  - A3: Aditividad Numerable: Sean $\{Ai\}$ i = 1,…,n *una colección*

    Si se cumple que: $Ai \cap Aj = \varnothing \ \forall\ i \neq j \Rightarrow$

$$\boxed{p\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i)}$$

Propiedades de la Probabilidad

- Sean (E,**P**(E),p) espacio probabilístico, $\forall$A, B$\in$**P**(E):

1) Probabilidad del contrario: $p(A^C) = 1-p(A)$

2) Probabilidad del suceso imposible: $p(\emptyset) = 0$

3) Probabilidad del suceso diferencia: Si $A \subseteq B$

$$p(A) \leq p(B) \qquad p(B-A) = p(B)-p(A)$$

4) Acotación de la probabilidad: $0 \leq p(A) \leq 1$

5) Probabilidad del suceso unión:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

6) Generalización:

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} p(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^n p\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

Regla de Laplace

➢Sucesos **Equiprobables**: Cuando todos los sucesos elementales del Espacio Muestral tienen la misma probabilidad. Si $E=\{e_1,\dots,e_n\}$ con $p(e_i)=1/n$, $\forall i=1,\dots,n$.

Sea el suceso $A=\{e_1,\dots,e_m\}$ con $m<n$, su probabilidad se obtiene como:

$$p(A)=\frac{m}{n}=\frac{\text{Número casos favorables}}{\text{Número casos posibles}}$$

- ***Ejemplo**: Lanzamiento de un dado: E={1,2,3,4,5,6}*
  - *Probabilidad de sacar un número par: p=1/2*
  - *Probabilidad de obtener un número < 3: p=1/3*

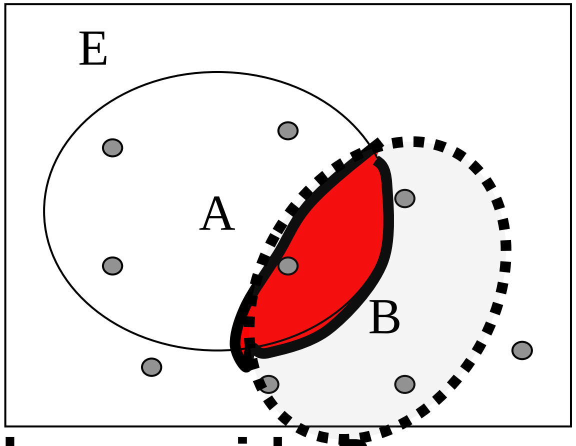
Probabilidad Condicionada

Sean A, B $\in$ P(E), con p(B)>0

***Pregunta**: Sabiendo que ha ocurrido B,*

¿Va a cambiar la probabilidad de que ocurra A?

La respuesta se obtiene con la **ley de la probabilidad condicionada**, basada en las propiedades de las frecuencias relativas condicionadas:



$$\boxed{p(A|B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}}$$

donde $A|B$ denota el suceso

A condicionado por B o que ocurra A si ha ocurrido B

$\boxed{p(A\cap B)=p(A|B)p(B)}$ **Regla de multiplicación**

Probabilidad Condicionada

Ejercicio: Altube y Vitoria son dos estaciones meteorológicas. Sabiendo que:

- La probabilidad de que llueva en Altube en el mes de Junio es del 40 % y es la misma probabilidad de que llueva en Vitoria
- La probabilidad de que llueva en ambos lugares a la vez es del 28%.

Determínense:

a) La probabilidad de que llueva en Altube si ha llovido en Vitoria y la probabilidad de que llueva en Vitoria si ha llovido en Altube.

b) La probabilidad de que llueva en Altube o en Vitoria.

c) ¿Es independiente que llueva en las dos estaciones?

Probabilidad Condicionada

Solución: Sean los sucesos:

A: "que llueva en Altube" con p(A) = 0,40

V: "que llueva en Vitoria" con p(V) = 0,40

Sabiendo que

$$P(A \cap V) = 0,28$$

a) Ahora

$$p(A|V) = \frac{p(A \cap V)}{p(V)} = \frac{0,28}{0,40} = 0,70$$

$$p(V|A) = \frac{p(A \cap V)}{p(A)} = \frac{0,28}{0,40} = 0,70$$

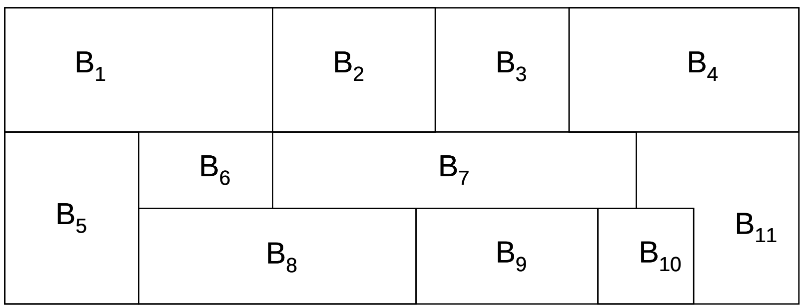
b) En este caso

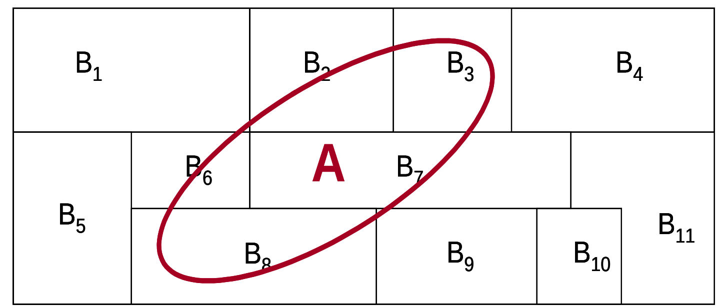
$$p(A \cup V) = p(A) + p(V) - p(A \cap V)$$

$$p(A \cup V) = 0,40 + 0,40 - 0,28 = 0,52$$

Teorema de la Probabilidad Total

Sean $\{B_1, \ldots, B_n\}$ un sistema completo de sucesos, de forma que son incompatibles dos a dos $(B_i \cap B_j = \varnothing)\ \forall i \neq j$ y verifican que $B_1 \cup B_2 \cup \ldots . B_n = E$





Sea $A \in \mathbf{P}(\Omega)$, se cumple que:

$$\boxed{p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(A \mid B_i) \times p(B_i)}$$

Teorema de Bayes

Sean $\{B_1,\ldots, B_n\}$ un sistema completo de sucesos, de forma que, son incompatibles dos a dos ($B_i \cap B_j = \varnothing$ si $i \neq j$) y verifican que $B_1 \cup B_2 \cup \ldots . B_n = E$

Sea $A \in \mathbf{P}(\Omega)$, se cumple que:

$$\boxed{p(B_i \mid A) = \frac{p(A \mid B_i) \times p(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} p(A \mid B_j) \times p(B_j)}}$$

donde:

$\{p(B_i);\ i=1,\ldots,n\}$ se denominan: **Probabilidades "a priori"**

$\{p(A|B_i);\ i=1,\ldots,n\}$ se denominan: **Verosimilitudes**

$\{p(B_i|A);\ i=1,\ldots,n\}$ se denominan: **Probabilidades "a posteriori"**

Problema 1

En un centro de especialidades médicas, semanalmente ingresa un 50% de enfermos que padecen afección renal, un 30% con afección cardiaca, y un 20% con afección pulmonar.

Estudios recientes asignan una probabilidad de curación completa en afección renal de 0,7, en afección cardiaca de 0,8, y la de la afección pulmonar es 0,9.

a) Hallar la probabilidad de que un enfermo que entre en el hospital salga recuperado.

b) Calcular la probabilidad de que un enfermo que fue dado de alta sano, sufriera una afección renal.

Problema 1

Sean los sucesos:

R = Ingresar por afección Renal
C = Ingresar por afección Cardiaca
P = Ingresar por afección Pulmonar
S = Salir Sano del hospital

Con sus probabilidades

p(R) = 0,5
p(C) = 0,3
p(P) = 0,2

Probabilidades "a priori"

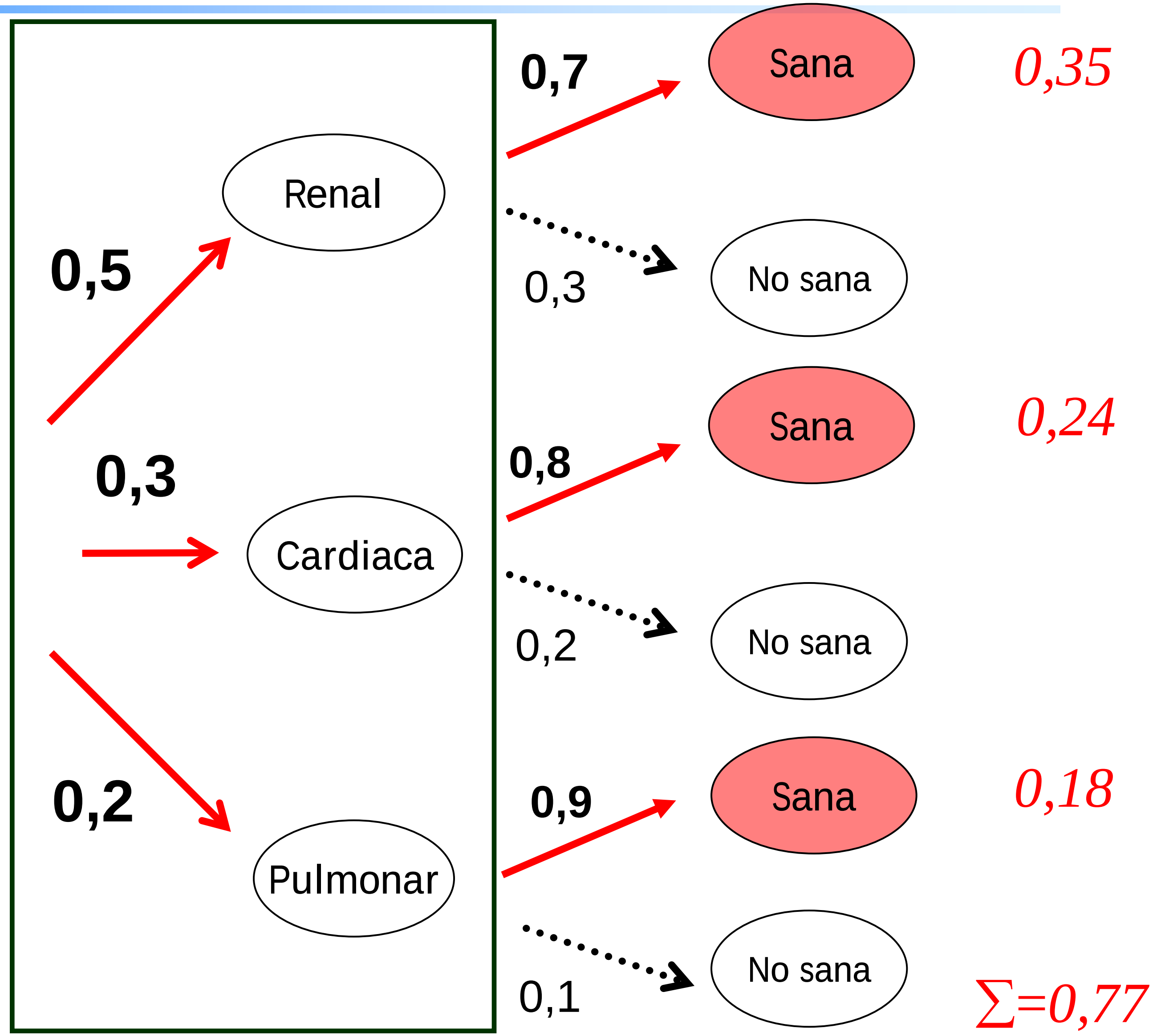
p(S|R) = 0,7; p(S|C) = 0,8; p(S|P) = 0,9

Verosimilitudes

Problema 1

Expresión del problema en forma de árbol

Paciente



Sistema completo de sucesos

Problema 1

a) Hallar la probabilidad de que un enfermo que entre en el hospital salga recuperado.

Por el teorema de la probabilidad total,

$$\boxed{p(S) = \sum_{i=1}^{3} p(S \mid A_i) \times p(A_i)}$$

En este caso, y sustituyendo los datos del problema:

$$\boxed{\begin{gathered} p(S) = p(S \mid R) \times p(R) + p(S \mid C) \times p(C) + p(S \mid P) \times p(P) \\ p(S) = 0{,}70 \times 0{,}5 + 0{,}8 \times 0{,}3 + 0{,}9 \times 0{,}2 = 0{,}77 \end{gathered}}$$

Problema 1

b) Calcular la probabilidad de que un enfermo que fue dado de alta sano, sufriera una afección renal.

Por el teorema de Bayes:

$$\boxed{p\left(A_i \middle| S\right)=\frac{p(S\mid A_i)\times p(A_i)}{p(S)}}$$

$$p\left(R \middle| S\right)=\frac{p\left(S\mid R\right)\times p\left(R\right)}{p\left(S\mid R\right)\times p\left(R\right)+p\left(S\mid C\right)\times p\left(C\right)+p\left(S\mid P\right)\times p\left(P\right)}$$

$$p\left(R \middle| S\right)=\frac{p\left(S\mid R\right)\times p\left(R\right)}{0{,}77}=\frac{0{,}7\times 0{,}5}{0{,}77}=0{,}45$$

Problema 2

Tres máquinas, A, B y C, producen el 45%, 30% y 25%, respectivamente, del total de las piezas producidas en una fábrica. Los porcentajes de producción defectuosa de estas máquinas son del 3%, 4% y 5%.

a) Seleccionamos una pieza al azar; calcula la probabilidad de que sea defectuosa.

b) Tomamos, al azar, una pieza y resulta ser defectuosa; calcula la probabilidad de que haya sido fabricada por la máquina B.

c) ¿Qué máquina tiene la mayor probabilidad de haber producido la citada pieza defectuosa?

Problema 2

a) Para calcular la probabilidad de que la pieza elegida sea defectuosa p(D) aplicamos Teorema de la probabilidad total:

$p(D) = p(A) \times p(D|A) + p(B) \times p(D|B) + p(C) \times p(D|C) =$
$= 0.45 \times 0.03 + 0.30 \times 0.04 + 0.25 \times 0.05 = 0.038$

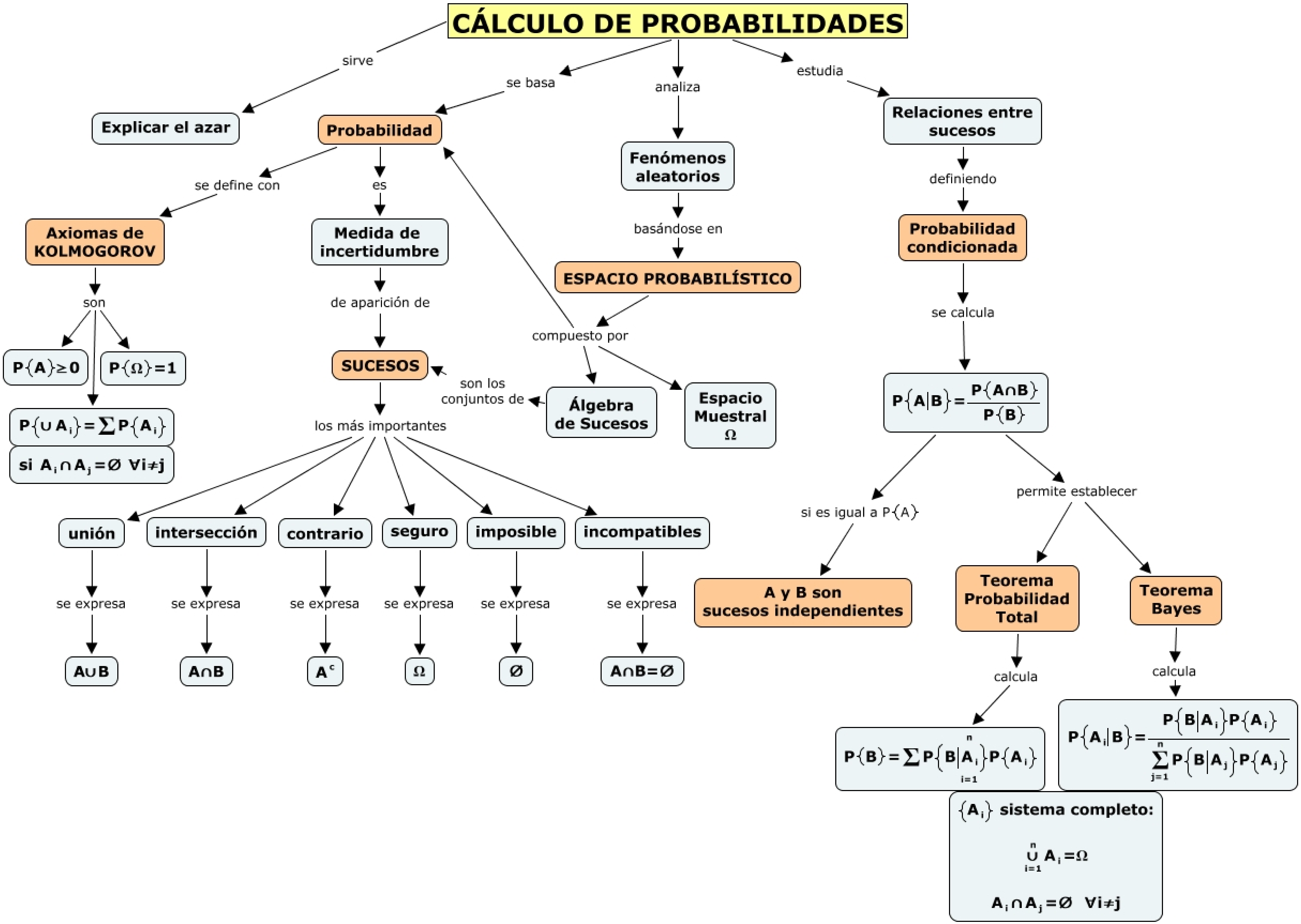
b) Debemos calcular p(B|D). Por el teorema de Bayes:

$$p\left(B|D\right) = \frac{p\left(D|B\right) \times p(B)}{p(D)} = \frac{0.04 \times 0.30}{0.038} = 0.316$$

c) Aplicando del mismo modo el teorema de Bayes, calculamos p(A|D) y p(C|D) para comparar con p(B|D)

$p(A|D) = 0.355$ y $p(C|D) = 0.329$

Por lo tanto, la máquina con mayor probabilidad de haber producido la pieza defectuosa es A


CÁLCULO DE PROBABILIDADES
sirve
Explicar el azar
se basa
Probabilidad
analiza
Fenómenos aleatorios
estudia
Relaciones entre sucesos
se define con
Axiomas de KOLMOGOROV
son
$P\{A\}\geq 0$
$P\{\Omega\}=1$
$P\{\cup A_i\}=\sum P\{A_i\}$
si $A_i \cap A_j=\varnothing\ \forall i\neq j$
es
Medida de incertidumbre
de aparición de
SUCESOS
son los conjuntos de
los más importantes
unión
se expresa
$A\cup B$
intersección
se expresa
$A\cap B$
contrario
se expresa
A^c
seguro
se expresa
Ω
imposible
se expresa
$\varnothing$
incompatibles
se expresa
$A\cap B=\varnothing$
basándose en
ESPACIO PROBABILÍSTICO
compuesto por
Álgebra de Sucesos
Espacio Muestral Ω
definiendo
Probabilidad condicionada
se calcula
$P\{A|B\}=\frac{P\{A\cap B\}}{P\{B\}}$
si es igual a $P\{A\}$
A y B son sucesos independientes
permite establecer
Teorema Probabilidad Total
calcula
$P\{B\}=\sum_{i=1}^{n} P\{B|A_i\}P\{A_i\}$
Teorema Bayes
calcula
$P\{A_i|B\}=\frac{P\{B|A_i\}P\{A_i\}}{\sum_{j=1}^{n} P\{B|A_j\}P\{A_j\}}$
$\{A_i\}$ sistema completo:
$\bigcup_{i=1}^{n} A_i=\Omega$
$A_i\cap A_j=\varnothing\quad \forall i\neq j$