PROBLEMAS PROPUESTOS DE ESTIMACION PUNTUAL

Métodos de estimación

1. Una urna contiene cinco bolas: blancas y negras. Se extrae una muestra de tamaño 3, y se obtienen dos blancas y una negra. Usando el criterio de máxima verosimilitud, determina la composición de la urna en ambos casos: muestreo con reemplazamiento y sin reemplazamiento.

2. Se ha hecho una encuesta a 350 usuarios de un servicio de la administración y se ha obtenido que 290 se mostraban satisfechos con el servicio. Utilizando el método de máxima verosimilitud, ¿cuál es la estimación puntual de la proporción de usuarios satisfechos de ese servicio de la administración?

3. La distribución geométrica mide el número de candidatos entrevistados hasta encontrar el primer aspirante adecuado para un puesto de trabajo. Su función de probabilidad es:

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1}p \quad \text{con } k=1,2,3,\ldots$$

donde p es la probabilidad de que un aspirante sea adecuado al puesto. Calcular el estimador máximo verosímil para p sabiendo que para encontrar un candidato idóneo se tuvo que entrevistar a 9 candidatos.

4. La distribución binomial negativa mide el número de candidatos entrevistados hasta encontrar el k-ésimo aspirante adecuado para un puesto de trabajo. Su función de probabilidad es:

$$P(X = x) = \binom{x-1}{k-1}(1-p)^{x-k}p^k \quad \text{con } x=k,k+1,k+2,\ldots$$

donde p es la probabilidad de que un aspirante sea adecuado al puesto. Calcular el estimador máximo verosímil para p sabiendo que para encontrar el tercer candidato idóneo se tuvo que entrevistar a 9 candidatos.

5. Una empresa quiere lanzar al mercado un nuevo producto. Se sabe que un producto similar es adquirido habitualmente por el 40% ó el 50% de la población. Con objeto de planificar su producción, la empresa realiza un estudio previo del mercado consultando a 1000 personas. ¿Qué proporción de las dos contempladas será tomada en consideración por la empresa si la elección se efectúa por el criterio de máxima verosimilitud, sabiendo que entre

350 y 500 (ambos inclusive) personas de las consultadas se muestran dispuestas a la adquisición del producto?

6. Para seleccionar nuevo personal administrativo, un banco convoca un concurso público. Las solicitudes de admisión al concurso se admiten en todas las sucursales. En una de ellas, se ha comprobado que de las 70 entregadas, 55 corresponden a mujeres. En base a esta información y considerando que las 70 solicitudes constituyen una m.a.s. de todas las recogidas, se plantea la estimación de la proporción de mujeres entre los solicitantes. Obtener el estimador máximo-verosímil para dicha proporción y calcular su valor si se sabe que la proporción considerada no puede ser superior al 50%.

7. La producción de cierta línea de electrodomésticos se revisa diariamente mediante la inspección de 100 unidades, obteniéndose que el proceso mantiene una efectividad del 80% (20% de las unidades son defectuosas). Durante un período se invierte en la compañía implantando nueva tecnología, consiguiendo mejorar la producción hasta el 90% (sólo 10% de las unidades son defectuosas). El Departamento de Marketing de la empresa quiere lanzar una campaña de publicidad basándose en la calidad de su producción. Para ello quiere asegurarse cuál de las dos producciones es correcta. Se revisa 1000 electrodomésticos y de ellos entre 105 y 150 (ambos inclusive) son defectuosos. ¿Qué porcentaje, de los dos contemplados, será tomado en cuenta si la elección se efectúa por máxima verosimilitud?

Propiedades de un estimador

8. Con el fin de estimar la media de una variable, 10 estudiantes disponen cada uno de una muestra aleatoria simple diferente, siendo las muestras independientes entre sí. El tamaño de 5 de ellas es de 100 y el de las restantes es de 300. Para estimar la media de dicha distribución, con toda la información disponible, se proponen dos alternativas:

1º) Utilizar la media aritmética de las medias de las 10 muestras.
2º) Utilizar la media aritmética de las 2000 observaciones.
¿Cuál de estas alternativas proporciona mejor estimador? Justifica la respuesta.

9. Dada una variable que sigue una distribución normal, tomamos dos muestras aleatorias simples de tamaños n y m: $(X_1, X_2, ..., X_n)$; $(Y_1, Y_2, ..., Y_m)$. Definimos el siguiente estimador de la media poblacional: $\hat{\theta} = a\overline{X}_n + b\overline{Y}_m$

a) ¿Qué condiciones deben cumplir a y b para que el estimador sea insesgado?
b) ¿Y para que además la varianza del estimador sea mínima?

10. Sea X una variable aleatoria con media 0, varianza σ^2 y momento de orden 4 $\alpha_4 = E[X^4]$ finitos. Sea X_1, X_2 una muestra aleatoria simple de X. Considerar los siguientes estimadores de la varianza $s_1^2 = \frac{3}{5}X_1^2 + \frac{2}{5}X_2^2$ y $s_2^2 = \frac{1}{5}X_1^2 + \frac{4}{5}X_2^2$

a) ¿Cuál de los dos es más eficiente? Calcular la eficiencia relativa de s_1^2 con respecto a s_2^2

b) Considerar un estimador de la forma $s_{a,b}^2 = aX_1^2 + bX_2^2$ con $a,b \in R$ ¿qué condición deben verificar a y b para que sea un estimador insesgado de σ^2?

c) Calcular, dentro de los estimadores encontrados en b) el más eficiente

11. Sea X una variable aleatoria con media μ y varianza σ^2 finitas. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria simple de X. Un estimador lineal de μ viene dado por $\hat{\mu}(a_1,...,a_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ con $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$

a) ¿qué condición debe verificar $a_1, \ldots, a_n$ para que $\hat{\mu}(a_1,...,a_n)$ sea insesgado?

b) de entre los estimadores insesgados encontrados en a) ¿cuál es el más eficiente?

c) el estimador encontrado en b), ¿es consistente?

Problemas varios

12. La rentabilidad diaria X de un activo financiero que sigue una distribución $N(0,\sigma)$. Se desea estimar su volatilidad σ^2. Calcular su estimador máximo verosímil y analizar si es eficiente y consistente. Ayuda: se verifica que $\mathrm{Var}(X^2) = 2\sigma^4$ y la cota de Frechet-Cramer-Rao es $\frac{2\sigma^4}{n}$

13. La tasa de crecimiento industrial es aleatoria con densidad:

$$f(x) = \frac{2x}{\theta^2} \text{ si } 0 < x < \theta$$

Para estimar la tasa máxima θ, se ha recogido información acerca de los ritmos de crecimiento de una muestra representativa de empresas del sector. Dada una m.a.s. de tamaño n calcular el estimador del parámetro θ por el método de los momentos. ¿Es insesgado? ¿es consistente?

14. El número de clientes que entran en un comercio durante una hora es una variable aleatoria Poisson de media λ. Si tenemos una muestra aleatoria de 20 horas y hemos observado que el número medio de clientes ha sido 5,2; calcula el estimador máximo verosímil de λ y proporciona la estimación puntual de dicho parámetro. Demuestra para dicho estimador que cumple las propiedades de insesgadez, eficiencia y consistencia. Ayuda: la cantidad de información de Fisher es $\frac{n}{\lambda}$

15. El tiempo de funcionamiento hasta que se produce una "caída" de un sistema informático sigue una variable aleatoria exponencial de media λ. El registro de incidentes del sistema indica que en 5 ocasiones dicho tiempo había sido 125, 210, 110, 180 y 90 horas. Calcula el estimador máximo verosímil de λ y proporciona una estimación puntual del tiempo medio de funcionamiento del sistema. Demuestra si dicho estimador cumple las propiedades de insesgadez, eficiencia y consistencia. Ayuda: la cantidad de información de Fisher es $\frac{n}{\lambda^2}$.

16. En una encuesta para medir la popularidad del presidente de un estado, se pidió a una muestra aleatoria de 1000 electores que opinara acerca de si el presidente estaba realizando un buen trabajo o si no. Un total de 480 encuestados opinó que sí la estaba realizando mientras que el resto opinó que no. A partir de estos resultados

a) Calcular el estimador máximo-verosimil de la proporción de electores que piensan que el presidente está realizando una buena labor
b) Analizar si el estimador calculado en a) es insesgado, eficiente y consistente. Ayuda: la cantidad de información de Fisher es $\frac{n}{pq}$

17. El tiempo que una persona debe esperar en una parada de autobús se distribuye según una uniforme en $(0,\theta)$ con $\theta>0$. Con el fin de estimar θ (máximo tiempo de espera) se extrae una muestra aleatoria de n usuarios del autobús y se anotan sus tiempos de espera

a) Calcular un estimador de θ utilizando el método de los momentos
b) Analizar si dicho estimador es insesgado y consistente

18. El tiempo (en minutos) que un cliente de una tienda tiene que esperar para ser atendido se distribuye según una exponencial Exp(λ). Para estimar el valor de λ (número medio de clientes atendidos en un minuto) se observaron, durante 10 minutos, los tiempos de espera de 20 clientes obteniéndose los siguiente resultados:

7,93	1,91	8,54	1,80	3,89	2,26	7,02	0,48	3,20	0,69	4,05	7,28

El resto de los clientes (8) aún no habían sido atendidos transcurridos los 10 minutos. Calcular el estimador máximo verosímil de λ.

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS DE ESTIMACIÓN PUNTUAL

1.- X=nº bolas blancas en 3 extracciones

a) Con reemplazamiento P{X=2} es mayor si nº blancas es 3

b) Sin reemplazamiento P{X=2} es mayor si nº blancas es 3 ó 4

2.- Estimador máximo verosímil $\hat{p}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

Estimación de la proporción $\hat{p}_{350} = \frac{1}{350}\sum_{i=1}^{350} X_i = \frac{290}{350} = 0{,}83$

3.- Estimador máximo verosímil $\hat{p}_n = \frac{1}{X}$

Estimación de la proporción $\hat{p}_8 = \frac{1}{9} = 0{,}11$

4.- Estimador máximo verosímil $\hat{p}_n = \frac{k}{X}$

Estimación de la proporción $\hat{p}_n = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

5.- X=nº personas dispuestas a consumir el producto~Bi(1000,p)

a) Si p=0,40 P{350≤X≤500}=0,9994

b) Si p=0,50 P{350≤X≤500}=0,512

Estimamos el parámetro p por el valor 0,40.

6.- Estimar proporción de solicitudes realizadas por mujeres $\hat{p} = 0{,}5$

7.- X=nº de electrodomésticos defectuosos

a) Si p=0,20 entonces P{105≤X≤150}=0,00005

b) Si p=0,10 entonces P{105≤X≤150}=0,3192

Por lo tanto, estimamos que el parámetro p es 0,10.

8.- Ambos estimadores son insesgados pero es mejor el segundo porque su varianza es menor.

9.- Dos muestras

a) Para ser insesgados se tiene que cumplir que a+b=1

b) Para que la varianza sea mínima, además tiene que cumplir que ma=nb

Por lo tanto, se verifica que: $a = \frac{n}{n+m}$ y $b = \frac{m}{n+m}$

10.-

a) Ambos estimadores son insesgados y sus varianzas son iguales a $\frac{13}{25}\mathrm{Var}(X^2)$ y $\frac{17}{25}\mathrm{Var}(X^2)$, respectivamente por lo que el más eficiente de los dos es s_1^2. La eficiencia relativa $\mathrm{Eff}(s_1^2; s_2^2) = \frac{13}{17} < 1$

b) a+b = 1

c) El más eficiente es corresponde a tomar $a = b = \frac{1}{2}$

11.-

a) Para que sea insesgado se debe verificar que $a_1 + \ldots + a_n = 1$

b) El más eficiente es la media muestral

c) Sí, es consistente

12.- Estimador máximo verosímil $\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ que es insesgado, eficiente y consistente

13.- X=tasa de crecimiento

a) $\hat{\theta}_n = \frac{3}{2}\overline{X}_n$

b) Es un estimador insesgado y consistente

14.- Estimador máximo verosímil $\hat{\lambda}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

Estimación de λ es: $\hat{\lambda}_{20} = 5{,}2$

Dicho estimador es insesgado, eficiente y consistente.

15.- Estimador máximo verosímil $\hat{\lambda}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

Estimación de λ es: $\hat{\lambda}_5 = \frac{125+210+110+180+90}{5} = 143$

Dicho estimador es insesgado, eficiente y consistente.

16.- El estimador máximo verosímil es la proporción muestral que, en este caso, vale 0,48. Es insesgado, eficiente y consistente

17.- El estimador por el método de los momentos es $\hat{\theta}_n = 2\overline{X}_n$. Es insesgado y consistente.

18.- El estimador máximo verosímil es $\hat{\lambda}_{20} = 0{,}093$