



TEMA 1

VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

ÍNDICE

- **VARIABLE ALEATORIA**
- **VARIABLE ALEATORIA DISCRETA**
 - **Función de probabilidad**
 - **Función de distribución**
 - **Características de una variable aleatoria discreta**
- **CASOS NOTABLES**
 - **Uniforme Discreta**
 - **Bernoulli**
 - **Binomial**
 - **Hipergeométrica**
 - **Poisson**

VARIABLE ALEATORIA

CONCEPTO DE VARIABLE ALEATORIA

Considerar un experimento aleatorio y definimos **espacio probabilístico** como la terna $(\Omega, \wp(\Omega), P)$ donde:

- Ω es el **espacio muestral** correspondiente al experimento aleatorio
- $\wp(\Omega)$ es el **conjunto de todos los posibles subconjuntos** del espacio muestral
- P es la **función de probabilidad** asociada al experimento

Una **variable aleatoria** es una cuantificación (asignación numérica) de los resultados del experimento aleatorio. Matemáticamente, es una función:

$$\begin{aligned} X: \Omega &\rightarrow \mathbf{R} \\ \omega &\rightarrow X(\omega) \end{aligned}$$

VARIABLE ALEATORIA

EJEMPLOS

- Valor de la cotización de una acción del Banco Santander al final de un día
- Calidad de las piezas fabricadas en una planta – buenas o defectuosas –
- Religión que profesa una persona
- Preferencia por una marca de coche
- Intención de voto en las próximas elecciones
- Tiempo de estudio de un estudiante para una asignatura
- Número de convocatorias para aprobar una asignatura

Existen, esencialmente, dos tipos de variables aleatorias: **discretas** y **continuas**

VARIABLE ALEATORIA

VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

Una variable aleatoria se dice **DISCRETA** si toma un conjunto de valores finito o infinito numerable, es decir, los valores se pueden contar con los números naturales.

EJEMPLOS

- Número de piezas defectuosas que aparecen en un proceso de fabricación
- Número de llamadas telefónicas que son recibidas en una centralita durante un período de tiempo
- Número de depósitos de una entidad bancaria
- Número de trabajadores afectados por cierto convenio laboral
- Número de errores detectados en las cuentas de una compañía

VARIABLE ALEATORIA

VARIABLE CONTINUA

Una variable aleatoria es **CONTINUA** cuando puede asumir una infinidad (un número infinito no numerable) de valores, es decir, puede tomar cualquier valor en uno o más intervalos de la recta real.

EJEMPLOS

- Renta Nacional de cierto país
- Nivel de inflación acumulada en un mes
- Cantidad de petróleo importado por Estados Unidos en un año
- Variación en el precio de las acciones de IBM en un mes
- Tiempo transcurrido desde la instalación de un nuevo componente hasta que falla
- Tiempo que dedica un alumno a hacer un examen cuya duración máxima es de dos horas

VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

FUNCIÓN DE PROBABILIDAD

Para una variable aleatoria X discreta se define la **Función de Probabilidad o Cuantía** $p_i = P(X = x_i) \geq 0$, $i = 1, \dots, \infty$ siendo su soporte $D = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, es decir, los valores que toma dicha variable.

Esta función verifica que la suma de todas las probabilidades es igual a la unidad:

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$$

Igual que ocurría con las distribuciones de frecuencias, resulta útil visualizar las funciones de probabilidad de las variables aleatorias discretas. El gráfico más habitual es el **diagrama de barras** donde se representan los valores de la variable en el eje horizontal y las probabilidades mediante alturas en el eje vertical.

VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

FUNCIÓN DE PROBABILIDAD

EJEMPLO

Sea X = “Número de caras al lanzar una moneda dos veces”

VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN

La **Función de Distribución de X**, a la que llamaremos F , es la probabilidad acumulada hasta el punto x y se define:

$$F: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

$$x \rightarrow F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_j \leq x} P(X = x_j) = \sum_{x_j \leq x} p_j$$

Propiedades

- 1) $0 \leq F(x) \leq 1$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$
- 2) $F(x)$ es monótona no decreciente: $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$
- 3) $F(x)$ es continua a la derecha $\lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = F(a)$
- 4) $F(x)$ permite calcular la probabilidad de un intervalo:

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN

EJEMPLO

Sea $X =$ “Número de caras al lanzar una moneda dos veces”

VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

CARACTERÍSTICAS

Cada distribución de probabilidad tiene asociadas **medidas similares a las medidas descriptivas** de las distribuciones de frecuencias.

Así, análogamente, podemos construir **medidas características o resumen del comportamiento de una variable aleatoria**.

Estas medidas se basan en el concepto de **Esperanza Matemática**.

VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

ESPERANZA MATEMATICA

Sus orígenes se encuentran en los **juegos de azar**. El **Valor Esperado** representa la cantidad de dinero promedio que un jugador estaría dispuesto a ganar o perder después de un número muy grande de apuestas.

Así, **el valor promedio de una variable aleatoria** después de un número grande de experimentos, es su **media** o su **valor esperado**. Se denota por $E(x) = \mu$.

La esperanza puede ser interpretada como el **«centro de gravedad»** de una distribución de probabilidad.

VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

ESPERANZA MATEMATICA

Consideremos un experimento aleatorio de espacio muestral Ω , siendo X una variable aleatoria (v.a.) discreta que toma los valores $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ y cuya función de probabilidad viene dada por:

$$p_i = P(X = x_i) \geq 0, i = 1, \dots, \infty$$

Se define la esperanza matemática o valor esperado de una v.a. discreta X al número:

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

ESPERANZA MATEMATICA

EJEMPLO

Sea X = puntuación obtenida al lanzar un dado con 6 caras numeradas de 1 a 6

Si el dado está perfectamente construido entonces X es una variable aleatoria discreta que puede tomar los valores $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ con probabilidades:

$$p_i = P(X = i) = 1/6 \text{ para } i=1, \dots, 6$$

VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

ESPERANZA MATEMATICA

PROPIEDADES

1) $\forall c \in \mathbf{R} \quad E(c) = c$

2) (**Transformación lineal de la media**)

$$E(aX + b) = aE(X) + b \quad \forall a, b \in \mathbf{R}$$

Casos particulares:

$$E(X + b) = E(X) + b \quad \forall b \in \mathbf{R}$$

$$E(aX) = aE(X) \quad \forall a \in \mathbf{R}$$

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

$$E(X - Y) = E(X) - E(Y)$$

VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

VARIANZA

Es importante complementar la información que proporciona la media sobre el valor esperado de la variable con una medida de la dispersión de los resultados del experimento alrededor de dicha media. Así, dada la variable aleatoria X llamamos **varianza de X** y la denotaremos por **$\text{Var}(X)$** o **σ^2** a la siguiente expresión:

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 = E((X - \mu)^2) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \mu)^2 P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \mu)^2 p_i$$

VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

VARIANZA

PROPIEDADES

1. $\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X^2) - \mu^2$
2. La varianza de una variable aleatoria X es nula si y sólo si la variable aleatoria es constante.
3. $\text{Var}(X + k) = \text{Var}(X) \quad \forall k \in \mathbf{R}$
4. $\text{Var}(kX) = k^2 \text{Var}(X) \quad \forall k \in \mathbf{R}$
5. $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X) \quad \forall a, b \in \mathbf{R}$

La **Desviación típica** es la raíz cuadrada positiva de la varianza. Se denota por σ y se define como:

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(x)}$$

VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

VARIANZA

EJEMPLO

Sea X = puntuación obtenida al lanzar un dado con 6 caras numeradas de 1 a 6

Si el dado está perfectamente construido entonces X es una variable aleatoria discreta que puede tomar los valores $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ con probabilidades:

$$p_i = P(X = i) = 1/6 \text{ para } i=1, \dots, 6$$

VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

SUMA DE VARIABLES ALEATORIAS

Es muy habitual tener que sumar variables aleatorias y necesitar conocer su media y varianza.

En concreto, sea X e Y dos variables con medias μ_X y μ_Y y con desviaciones típicas σ_X y σ_Y .

Nuestro objetivo es conocer la media y la varianza de $U = X+Y$.

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = \mu_X + \mu_Y$$

$$V(X + Y) = \begin{cases} V(X) + V(Y) = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 & \text{si } X \text{ e } Y \text{ son v.a. independientes} \\ V(X) + V(Y) + 2\text{Cov}(X, Y) & \text{si } X \text{ e } Y \text{ son v.a. dependientes} \end{cases}$$

Nota No es lo mismo sumar dos cantidades aleatorias que multiplicar una cantidad aleatoria por dos $X+X \neq 2X$

CASOS NOTABLES

DISTRIBUCIÓN UNIFORME DISCRETA

Es la distribución soporte de la regla de Laplace. Se dice que X se distribuye según una **uniforme discreta en $\{1,...,N\}$** , y lo pondremos $X \sim U_D(1,N)$, si su soporte es $D = \{1,...,N\}$ y su función de probabilidad es:

$$P(X = x) = \frac{1}{N} \text{ con } x = 1, 2, \dots, N$$

Se tiene que:

$$E(X) = \frac{N+1}{2} \quad \text{Var}(X) = \frac{N^2-1}{12}$$

CASOS NOTABLES

DISTRIBUCIÓN UNIFORME DISCRETA

EJEMPLO

El número de coches que vende diariamente un concesionario oscila entre 21 y 40. Determina la probabilidad de que un día cualquiera venda más de 35 coches.

CASOS NOTABLES

EXPERIMENTO DE BERNOULLI

Llamaremos **experimento de Bernoulli** a un experimento con dos resultados posibles mutuamente excluyentes, que denominaremos éxito y fracaso, susceptible de ser repetido indefinidamente bajo las siguientes condiciones:

- a) Todas las realizaciones del experimento son independientes entre sí
- b) La probabilidad de obtener éxito en cada realización se mantiene constante

CASOS NOTABLES

DISTRIBUCIÓN DE BERNOULLI

Sea $p = P(\text{éxito})$ y $q = 1 - p = P(\text{fracaso})$

Sea $X = \text{“número de éxitos obtenidos al realizar un experimento de Bernoulli una vez”}$

X es una variable aleatoria discreta con soporte $D = \{0,1\}$ cuya distribución recibe el nombre de **distribución de Bernoulli de parámetro p** y se denota por **$X \sim \text{Be}(p)$** .

Su **función de probabilidad** viene dada por:

$$P(X = x) = p^x q^{1-x} \quad x = 0,1$$

Se tiene, además, que:

$$E(X) = p \text{ y } \text{Var}(X) = pq$$

CASOS NOTABLES

DISTRIBUCIÓN DE BERNOULLI

EJEMPLO

En la Facultad de Economía y Empresa de Zaragoza hay matriculados 100 hombres y 150 mujeres en 2º grado de GECO. Se selecciona una persona al azar de dicho curso, calcular la probabilidad de que sea hombre.

CASOS NOTABLES

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Sea X = “Número de éxitos obtenidos al realizar un experimento de Bernoulli n veces”

X es una variable aleatoria discreta con soporte $D = \{0, 1, \dots, n\}$ cuya distribución recibe el nombre de **distribución binomial de parámetros n y p** y lo pondremos **$X \sim \text{Bi}(n, p)$** . Su función de probabilidad viene dada por:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \quad x \in \{0, 1, \dots, n\}$$

Se tiene, además, que:

$$E(X) = np \quad \text{y} \quad \text{Var}(X) = npq$$

Sea Y = “número de fracasos en n repeticiones” $\Rightarrow Y \sim \text{Bi}(n, 1-p)$
Es obvio que $X + Y = n$ (éxitos + fracasos = n° repeticiones)

CASOS NOTABLES

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

PROPIEDADES

1. La distribución Bernoulli es un caso particular de la distribución Binomial: $Be(p)=Bi(1,p)$
2. La distribución Binomial es la suma de variables aleatorias de tipo Bernoulli independientes y con la misma probabilidad de éxito: $Bi(n,p)=Be(p)+\dots+Be(p)$
3. La suma de variables aleatorias de tipo Binomial independientes y con el mismo parámetro p es otra distribución Binomial cuyo primer parámetro es la suma de las repeticiones del experimento dicotómico: $Bi(n_1,p)+Bi(n_2,p)=Bi(n_1+n_2,p)$

CASOS NOTABLES

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

USO DE TABLAS

Si $X \sim \text{Bi}(2, 0,07)$ determinar $P(X \leq 1) =$ **0,9951**

TABLA 1

PROBABILIDADES ACUMULADAS DE UNA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Sea p la probabilidad de éxito y n el número de repeticiones.

La tabla proporciona la probabilidad de obtener k o menos éxitos en las n repeticiones, es decir:

$$F(k) = P\{X \leq k\} = \sum_{j=0}^k \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$$

Cuando no hay valor para una celda, esto significa que la probabilidad correspondiente es mayor que 0.99995 y consideramos que es 1.

p=		0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	
n=2	k=	0	0,9801	0,9604	0,9409	0,9216	0,9025	0,8836	0,8649	0,8464	0,8281
		1	0,9999	0,9996	0,9991	0,9984	0,9975	0,9964	0,9951	0,9936	0,9919
		2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

CASOS NOTABLES

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

EJEMPLO

Se sabe que el 40% de las mujeres que compran en un establecimiento determinado son de la 3ª edad. Si se toma una muestra de 100 mujeres de dicho establecimiento, calcular la probabilidad de que el número de mujeres de la 3ª edad sea menor o igual a 30.

CASOS NOTABLES

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

EJEMPLO

La probabilidad de que un sábado por la noche un conductor obtenga positivo en la prueba de alcoholemia es del 10%. Los agentes de un control policial van a realizar 100 pruebas.

- a) ¿Cuál es el número medio de "positivos" que se obtendrán?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya más de 20 positivos?
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que haya 10 o menos positivos?
- d) Si cada positivo supone una multa de 300€, ¿cuál es el ingreso medio que tendrá la Dirección General de Tráfico la noche del sábado?

CASOS NOTABLES

DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

Sea una población finita de tamaño N en la que hay D elementos defectuosos y $N-D$ no defectuosos.

Se extrae una muestra de tamaño n **sin reemplazamiento**. Sea $X =$ “Número de elementos defectuosos obtenidos en la muestra de tamaño n ”.

X es una variable aleatoria discreta cuya distribución recibe el nombre de **distribución hipergeométrica de parámetros N , n y D** y lo escribiremos **$X \sim H(N, n, D)$** . Su función de probabilidad viene dada por:

$$P(X = x) = \frac{\binom{D}{x} \binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad \text{con } x \in \{\max\{0, n + D - N\}, \dots, \min\{n, D\}\}$$

CASOS NOTABLES

DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

Observaciones:

1) $E(X) = n \frac{D}{N}$ y $\text{Var}(X) = n \frac{D}{N} \left(1 - \frac{D}{N}\right) \left(\frac{N-n}{N-1}\right)$

2) Si el muestreo es con reemplazamiento entonces $X \sim \text{Bi}(n, D/N)$ con:

$$E(X) = n \frac{D}{N} \text{ y } \text{Var}(X) = n \frac{D}{N} \left(1 - \frac{D}{N}\right)$$

3) Por lo tanto, si $N \rightarrow \infty$ y $n \ll N$ se verifica que el muestreo con y sin reemplazamiento son equivalentes

CASOS NOTABLES

DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

EJEMPLO

La población analizada consta de 250 personas de las cuales 180 son mujeres y se extrae una muestra sin reemplazamiento de tamaño 30. Calcula la probabilidad de que 25 sean mujeres.

CASOS NOTABLES

DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

EJEMPLO

Si el muestreo es con reemplazamiento, calcula la probabilidad de que 25 sean mujeres.

CASOS NOTABLES

A menudo nos interesa estudiar sucesos que, aunque no resultan frecuentes, pueden presentarse en el transcurso del tiempo o del espacio. Estas situaciones del tipo:

- número de casas incendiadas en un año
- número de erratas en la página de un periódico
- número de llamadas de teléfono equivocadas
- número de atracos en una sucursal bancaria,...

se adaptan bien al modelo probabilístico denominado de **Poisson o «ley de los sucesos raros»**.

Esta distribución viene caracterizada por **un único parámetro que representa el número medio de sucesos por unidad de tiempo o espacio**.

Como consecuencia, el valor del parámetro cambia según cuál sea la «unidad» adoptada, esto es, en función de la amplitud del intervalo espacial o temporal en el que nos movemos.

CASOS NOTABLES

DISTRIBUCIÓN DE POISSON

Sea X el número de éxitos obtenidos por unidad de tiempo.

X es una variable discreta con soporte $\{0, 1, \dots\}$ cuya distribución recibe el nombre de **distribución de Poisson de parámetro $\lambda > 0$** y lo pondremos $X \sim \wp(\lambda)$.

Su función de probabilidad viene dada por:

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \quad \text{con } x \in \{0, 1, \dots, \infty\}$$

Se tiene además que:

$$E(X) = \text{Var}(X) = \lambda$$

CASOS NOTABLES

DISTRIBUCIÓN DE POISSON

PROPIEDADES

1. La media de la Poisson es proporcional al intervalo estudiado de la magnitud continua.

Ejemplo: $X = \text{n}^\circ \text{ clientes que entran en media hora } X \sim \wp(3)$

$Y = \text{n}^\circ \text{ clientes que entran en 2 horas } Y \sim \wp(4 \cdot 3) \equiv \wp(12)$

2. La suma de distribuciones Poisson independientes es otra variable aleatoria de Poisson cuya media es la suma de medias:

$$\wp(\lambda_1) + \wp(\lambda_2) = \wp(\lambda_1 + \lambda_2)$$

CASOS NOTABLES

DISTRIBUCIÓN DE POISSON

USO DE TABLAS

Si $X \sim \wp(0,7)$ determinar $P(X \leq 3) =$ **0,9942**

TABLA 2

PROBABILIDADES ACUMULADAS DE UNA DISTRIBUCIÓN POISSON

La tabla proporciona la probabilidad de observar k o menos sucesos en un intervalo cuando el número medio de sucesos por intervalo es λ , es decir,

$$F(k) = P\{X \leq k\} = \sum_{j=0}^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!}$$

Cuando no hay valor para una celda, esto significa que la probabilidad correspondiente es mayor que 0.99995 y consideramos que es 1.

$\lambda =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$k =$ 0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679
1	0,9953	0,9825	0,9631	0,9384	0,9098	0,8781	0,8442	0,8088	0,7725	0,7358
2	0,9998	0,9989	0,9964	0,9921	0,9856	0,9769	0,9659	0,9526	0,9371	0,9197
3	1,0000	0,9999	0,9997	0,9992	0,9982	0,9966	0,9942	0,9909	0,9865	0,9810
4		1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9996	0,9992	0,9986	0,9977	0,9963

CASOS NOTABLES

DISTRIBUCIÓN DE POISSON

EJEMPLO

El número de aviones que llegan a un aeropuerto en 1 hora sigue una distribución de Poisson de media 20. Calcula la probabilidad de que en media hora lleguen más de 10 aviones

CASOS NOTABLES

APROXIMACION BINOMIAL-POISSON

Sea $X \sim \text{Bi}(n, p)$ y sea $Y \sim \wp(\lambda)$; con $np = \lambda$

Se tiene que para cualquier valor $a \in \{0, 1, \dots, n\}$:

$$P(X = a) \approx P(Y = a)$$

cuando $n \rightarrow \infty$

La aproximación funciona bien para valores de $p < 0.1$ y $np < 5$

CASOS NOTABLES

APROXIMACION BINOMIAL-POISSON

EJEMPLO

La probabilidad de que una determinada póliza de seguros sea reclamada a lo largo de un año es de una entre 10000. Si una empresa de seguros tiene 1000 pólizas de este tipo, calcula la probabilidad de que haya más de 1 reclamación al año.

CASOS NOTABLES

EJERCICIO

Una empresa de juguetes fabrica piezas de construcción de las que un 40% tienen una longitud mayor de 12 cm.

A) Si una caja de piezas está compuesta por 20 unidades, ¿cuál es la probabilidad de que haya menos de 9 piezas que midan más de 12 cm?

B) Se sabe que en una de las cajas hay 4 piezas que miden más de 12 cm. Si extraemos 5 piezas sin reemplazamiento de esa caja, ¿cuál es la probabilidad de que solo una de ellas mida más de 12 cm?

CASOS NOTABLES

EJERCICIO

La probabilidad de tener problemas en el montaje de un módulo de un mueble comprado en IKEA es del 20%.

A) El fin de semana pasado compré 20 módulos, ¿cuál es la probabilidad de que tenga problemas en el montaje en menos de 2 módulos?

B) Si mis cuatro amigos también compraron 20 módulos cada uno y se supone que hay independencia en la capacidad de montar bien cada uno de ellos, ¿Cuál es la probabilidad de que entre todos (los 5 amigos) hayamos tenido problemas en el montaje en menos de 30 módulos?

C) Calcular la probabilidad de que de mis cuatro amigos, dos hayan tenido problemas en el montaje en más de 2 módulos