

## TEMA 1

### PROBLEMAS DE DISTRIBUCIONES DISCRETAS

#### Variable aleatoria general y esperanza matemática

1. Una empresa tiene que presentar una oferta para una obra pública. Estima que los materiales necesarios costarán 25000€, cada día de trabajo supone un coste laboral de 800€ y el plazo de ejecución tiene que ser 10 días porque cada día de retraso supondrá una penalización de 1000€. Analizando obras similares ha calculado que la variable aleatoria que mide el número de días de ejecución tiene la siguiente distribución:

Días	8	9	10	11	12
Probabilidad	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

- ¿Cuál es la probabilidad de que el número de días de ejecución esté entre 9 y 11 días?
  - Si una obra ya lleva 9 días de ejecución ¿cuál es la probabilidad de que dure al menos 1 día más?
  - ¿Cuál es el coste medio de la obra?
  - ¿Cuál es la desviación típica del coste de la obra?
2. Un individuo dispone de 6000€ para invertir en un negocio. Su analista le propone una inversión cuya rentabilidad es del 15% pero con el riesgo de perder el 50% del capital. Según su conocimiento, la inversión será rentable con una probabilidad de 0,70. Si decide invertir, ¿cuál es el beneficio esperado?
3. Se lanzan dos dados de 6 caras numeradas de 1 a 6. Sea  $X$ =la suma de las puntuaciones. Calcula:

- La función de probabilidad de la variable
- La media y varianza de la variable

4. Una Comunidad Autónoma decide gravar con una tasa a todos los turistas que acceden con vehículo propio a un parque natural. Se ha estudiado que la variable aleatoria  $X$ , número de personas por coche que entran en el parque, tiene la siguiente probabilidad:

$X$	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	0,05	0,20	0,35	0,25	0,15

- Hállese el número medio de visitantes por vehículo
- ¿Cuánto debe pagar cada persona para que la ganancia esperada por coche sea de 13 euros?
- Si cada visitante paga 5 euros, ¿cuál es la ganancia esperada de un día en el que se registre una entrada de 1000 vehículos?

5. Un parking público obtuvo los siguientes datos de una muestra de 250 clientes acerca de la cantidad de horas que se estacionan los automóviles y las cantidades que pagan

Horas	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
Frecuencia	20	38	53	45	40	13	5	36	250
Pago (en €)	3	6	9	12	14	16	18	20	

- Se quiere predecir la cantidad de horas que va a estacionar su automóvil un nuevo cliente ¿cuál es la probabilidad de esté entre 2 y 5 horas?
- Si un coche lleva estacionado dos o más horas ¿cuál es la probabilidad de que el pago sea superior a 14 €?
- Calcular el pago esperado así como su desviación típica
- ¿Qué pago se espera si el coche lleva estacionado dos o más horas?

6. La información que sigue representa el número de llamadas diarias al servicio de emergencias de un servicio de ambulancias durante los últimos 50 días

Llamadas	0	1	2	3	4	Total
Frecuencia	8	10	22	9	1	50

- Si se quiere predecir el número de llamadas que va a ocurrir un día ¿cuál es la probabilidad de que sea superior a 2?
- Si a mitad del día el número de llamadas recibidas ha sido 1, calcular la probabilidad anterior
- Calcular el número medio de llamadas de emergencias que se espera recibir en 1 día así como su desviación típica
- Calcular el número medio de llamadas que se espera recibir en un día si, a medio día, el número de llamadas recibidas ha sido una.

## Distribución binomial

7. La probabilidad de que un sábado por la noche un conductor obtenga positivo en la prueba de alcoholemia es del 10%. Los agentes de un control policial van a realizar 100 pruebas.

- a) ¿Cuál es el número medio de "positivos" que se obtendrán?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya más de 20 positivos?
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que haya a lo más 10 positivos?
- d) Si cada positivo supone una multa de 300€, ¿cuál es el ingreso medio que tendrá la Dirección General de Tráfico la noche del sábado?

8. De 2000 familias con 4 hijos, calcular el número que se supone que habrá con

- a) al menos 1 varón.
- b) 2 varones.
- c) 1 ó 2 mujeres.
- d) Ninguna mujer

9. De la producción diaria de un determinado tipo de artículos se extrae una muestra de 20 artículos y si en ella hay más de dos defectuosos se inspecciona toda la producción. Suponiendo independencia en la fabricación de los distintos artículos, y que la frecuencia observada en un gran lote de artículos es del 5% de defectuosos

- a) Calcular la probabilidad de tener que inspeccionar toda la producción un determinado día.
- b) Calcular la probabilidad de que en 15 días consecutivos sea necesario realizar una inspección completa en 2 ocasiones
- c) Con una probabilidad de al menos el 95%, y en un mes ¿cuántos días cómo mucho habrá que realizar una inspección completa? (tomar los meses de 20 días).

10. El gerente de un restaurante muy exquisito sólo da servicio mediante reservas. Sabe por su experiencia que el 15% de las personas que reservan una mesa no asistirán. Si el restaurante acepta 20 reservas pero sólo dispone de 18 mesas,

- a) ¿cuál es la probabilidad de que todas las personas que asistan el restaurante se les asigne una mesa?
- b) ¿Cuántas reservas deberían aceptar cómo máximo si quiere correr a lo más un riesgo del 5% de que haya personas que se queden sin mesa?

**11.** Una semana antes de la fecha de vuelo de un avión quedan 17 plazas libres. Se sabe que los compradores previsores se presentan al vuelo con casi total seguridad mientras que los compradores de última semana a precio rebajado se presentan con probabilidad del 80%. El responsable del vuelo quiere saber si merece la pena poner a la venta más billetes que plazas libres y decide calcular:

- a) Probabilidad de poner a la venta 20 billetes y no haya plazas para todos los pasajeros.
- b) Probabilidad de poner a la venta 20 billetes y queda al menos una plaza libre en el avión.
- c) Si admite un riesgo máximo del 10% de que no haya plazas suficientes para todos los pasajeros, ¿pondrá a la venta 20 billetes, más o menos de tal forma que consiga más ingresos para la compañía?

**12.** Un examen consta de veinte preguntas que presentan cuatro posibles respuestas cada una. Una persona, sin conocimientos sobre la materia del examen, responde las cuestiones al azar.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que acierte con la respuesta válida en una de las preguntas al contestar al azar?
- b) Hallar la probabilidad de que dicha persona no conteste bien a ninguna pregunta.
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que acierte todas las preguntas del examen?
- d) ¿Cuál es la probabilidad de que conteste acertadamente a más de la mitad de las preguntas?
- e) Con una probabilidad de al menos el 90%, ¿cuántas preguntas correctas se espera que conteste como máximo en el examen?

**13.** Una empresa considera la posibilidad de utilizar técnicas de venta por teléfono (telemarketing) como complemento de los métodos tradicionales. Se estima que una de cada 100 llamadas resulta en una venta. Un día se hacen 250 llamadas.

- a) Calcular la probabilidad de que se lleven a cabo, a lo más, 5 ventas. ¿qué hipótesis has hecho para calcularla? ¿Te parecen razonables?
- b) Con una probabilidad de, al menos el 90%, cuántas ventas se piensa que se pueden lograr como mucho en ese día?
- c) Calcular la probabilidad de que ese día se lleven a cabo, como mínimo, 8 ventas. Si, al final del día, se han realizado 8 ventas ¿te parecería que el día ha sido normal? ¿por qué?

## **Distribución hipergeométrica**

**14.** Para comprobar la experiencia de sus auditores, una compañía les manda examinar 25 transacciones, de las cuales 5 tienen algún tipo de error. Si uno de los auditores selecciona 5 al azar ¿cuál es la probabilidad de seleccionar las 5 transacciones erróneas? ¿Cuál es la probabilidad de que seleccione 2 o más de las erróneas? ¿dónde debería poner el umbral de selección para concluir que un auditor tiene alguna experiencia de auditoría con una probabilidad de equivocarse del 5%?

**15.** Una persona juega mediante una apuesta simple (marcando seis números al azar) a la Lotería Primitiva del jueves. ¿Cuál es la probabilidad de acertar con la combinación ganadora? ¿Cuál es la probabilidad de no conseguir ni siquiera tres aciertos?

**16.** Una empresa recibe un envío de 30 artículos. Como es caro revisar todos los artículos, toman una muestra de 6 y, si no hay más de un artículo defectuoso, no comprueban el resto. ¿Cuál es la probabilidad de que un envío que contenga 6 defectuosos no se someta a una comprobación adicional?

**17.** Una empresa contempla hacer una división de 2 a 1 de las acciones. Antes de realizar la transacción, por lo menos dos de las terceras partes de los 1200 accionistas de la empresa deben aprobar la oferta. Para evaluar la probabilidad de que la oferta se apruebe el director de finanzas eligió una muestra de 18 accionistas. Contactó con cada uno de ellos y vio que 14 aprobaron la propuesta ¿cuál es la probabilidad de este evento, si dos terceras partes de los accionistas dan su aprobación? ¿qué debe concluir el director de finanzas?

**18.** Una empresa de distribución de flores y arreglos florales dispone de 50 camiones para la entrega de pedidos. El director de la empresa quiere analizar el estado de sus camiones y para ello escoge una muestra de 10 de ellos y analiza su estado de forma que si, el número de camiones en mal estado es superior a 1, realizará una inspección a fondo de todos los camiones. Si el 10% de los camiones de la empresa no se encuentra en buen estado (lo cual es aceptable para la empresa) ¿cuál es la probabilidad de que tenga que realizar dicha inspección? ¿cuál es el umbral que debería elegir para realizar la inspección si quiere que, a lo más la probabilidad de realizarla sin necesidad sea de un 5%?

## Distribución de Poisson

**19.** Si el número de aviones que llegan por minuto a un gran aeropuerto metropolitano es una v.a. que tiene una distribución de Poisson con media 0.9, obtener las probabilidades de que lleguen:

- a) exactamente 9 aviones durante un período de 5 minutos.
- b) menos de 10 aviones durante un período de 8 minutos.
- c) cuando menos 14 aviones durante un período de 11 minutos.
- d) entre 12 y 15 aviones en un periodo de 10 minutos

**20.** El número de máquinas reparadas por un técnico en un día de trabajo sigue una distribución de Poisson de media 3, calcular la probabilidad de que:

- a) un día cualquiera repare al menos 5.
- b) un día repare 5 sabiendo que ya ha reparado más de 2
- c) en una semana (5 días) repare entre 12 y 16 máquinas

**21.** En un cruce de carreteras se producen accidentes a razón de 2 por semana (en media), siguiendo una distribución de Poisson. Reconociendo que la frecuencia anterior es intolerable para la Dirección General de Tráfico se ha decidido instalar un semáforo en dicho cruce. Para analizar su efectividad se analiza el número de accidentes ocurridos en la siguiente semana de su instalación. Si dicho número es pequeño (menor o igual que un umbral  $x$ ) se concluirá que el semáforo ha sido efectivo. Si quiere tener, a lo más, una probabilidad del 5% de equivocarse en su decisión.

- a) ¿Dónde debería poner el umbral  $x$ ?
- b) ¿Y si en lugar de considerar una semana, considera dos semanas?
- c) ¿Y si en lugar de considerar una semana, considera 4 semanas?

**22.** El número de errores por factura que un contable comete es una variable aleatoria que se distribuye según una Poisson de parámetro  $\lambda$ .

- a) Calcular  $\lambda$  si se sabe que la probabilidad de no cometer ningún error es 0,0183
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que cometa más de un error?
- c) Sabiendo que ha cometido al menos un error, ¿cuál es la probabilidad de que no cometa más de cinco?

**23.** El número de accidentes de trabajo,  $X$ , que se producen en una fábrica por semana sigue una distribución de Poisson. Sabiendo que el porcentaje de semanas en que ocurre un accidente es la mitad del correspondiente a las semanas en que no sucede ninguna, calcúlese:

- a) El número esperado de accidentes semanales.
- b) La probabilidad de que en una semana haya dos accidentes y en la siguiente otros dos.
- c) La probabilidad de que en 4 semanas haya a lo sumo 8 accidentes.

### **Problemas varios**

**24.** De una empresa el número de accidentes laborales ocurridos en un día se distribuye según una Poisson de media 0,1 y el porcentaje de absentismo laboral es de un 25%.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que ocurran 3 o más accidentes en dos meses (tomar los meses de 20 días laborales)?
- b) Si se extrae una muestra de 100 trabajadores de dicha empresa. ¿Cuál es la probabilidad de que aparezcan a lo más 30 trabajadores en los que se haya producido absentismo laboral?

**25.** Un empleado del departamento de atención al público de una gran empresa recibe, en media, 20 llamadas por hora. La probabilidad de que una de estas llamadas sea una reclamación de un cliente es de 0,1. Se pide:

- a) Probabilidad de tener 15 llamadas en media hora.
- b) Si se han recibido 50 llamadas, ¿cuál es la probabilidad de que haya habido al menos 8 reclamaciones?
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que las tres próximas llamadas sean reclamaciones de clientes?

**26.** El propietario de una tienda de discos clasifica las personas que entran en su tienda en clientes muy jóvenes, clientes en edad universitaria y clientes mayores y sabe que el 30%, 50% y 20% pertenecen a estas categorías, respectivamente. El propietario comprueba también, que el 20% de los clientes muy jóvenes, el 60% de los clientes en edad universitaria y el 80% de los clientes mayores realizan alguna compra

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que de los próximos 100 clientes que entren en la tienda, al menos 45 compren algún disco? ¿Qué hipótesis has utilizado para resolver este apartado?
- b) Sabiendo que el número de clientes que entran en la tienda se distribuye según una Poisson de media 5 por hora ¿Cuál es la probabilidad de que un día cualquiera (jornada de 8 horas) entren más de 35 clientes en la tienda?

- 27.** A la taquilla de un cine, en la última media hora antes del comienzo de cada sesión, acuden personas según una distribución de Poisson.
- a) Se sabe que la probabilidad de que acudan dos personas en un minuto es  $\frac{3}{4}$  de la probabilidad de que acudan tres personas en un minuto. ¿Cuál es el número medio de personas que acuden en un minuto a la taquilla?
  - b) La taquillera se retrasa y abre cinco minutos tarde la taquilla. ¿Cuál es la probabilidad de que la cola formada tenga al menos 22 personas?
  - c) Si han acudido 80 personas a la taquilla y el 30% han comprado entrada reducida de 5,80€, el 65% han comprado la entrada normal de 8€ y el resto han adquirido la entrada VIP de 9,80€, ¿cuál es el ingreso medio de la taquilla?
- 28.** En el restaurante de la Facultad se sabe que el 35% de los clientes piden bocadillos.
- a) Con el fin de fomentar la venta de bocadillos el dueño del restaurante ofrece un precio especial a los 10 primeros clientes que se lo pidan ¿cuál es la probabilidad de que se acabe la oferta cuando entre el primer grupo de alumnos que está formado por 20 estudiantes?
  - b) El día de fin de curso el dueño decide regalar una consumición a 10 de los clientes que hayan acudido dicho día al restaurante. Si este día acudieron 50 personas de las que 20 eran hombres y 30 mujeres y suponiendo que el dueño del restaurante elige a los clientes afortunados al azar ¿cuál es la probabilidad de que elija a 7 mujeres?
- 29.** En el proceso de control de calidad de la producción de un artículo se considera que el proceso esta fuera de control si la proporción de artículos defectuosos producidos es igual o superior al 3%. En el departamento de control de calidad de la empresa se han planteado dos opciones para llevar a cabo dicho proceso.
- a) Inspeccionar una muestra de 20 unidades y si encontramos al menos 3 artículos defectuosos examinamos toda la producción de ese día.
  - b) Inspeccionamos uno a uno 5 artículos elegidos al azar. Si aparece algún defectuoso se examina la producción
- ¿Cuál de estas dos opciones es más aconsejable para la empresa?
- 30.** El número de hombres que llegan a un comercio sigue una distribución de Poisson, a razón media de uno por minuto. El número de mujeres que llegan al mismo comercio sigue también una distribución de Poisson, a razón media de dos por minuto. Suponiendo la independencia de los dos sucesos, calcular:
- a) La probabilidad de que lleguen menos de tres clientes en un minuto.



- b) La probabilidad de que hayan llegado cinco hombres en media hora, si en esa media hora han llegado diez clientes en total.

**31.** Suponer que el 0,15% de las antenas de los nuevos teléfonos móviles de una empresa están defectuosos. Si se escogen 2000 antenas al azar, calcular las siguientes probabilidades

- a) Ninguna de las antenas esté defectuosa
- b) Tres o más antenas estén defectuosas

Utilizar la aproximación binomial a Poisson y compararla con el resultado exacto.

## **FUNCIONES DISPONIBLES EN EXCEL**

- **DISTR.BINOM.N(x;n;p;acumulado)** que calcula el valor de la función de probabilidad (si  $\text{acumulado} = 0$ ) o de distribución (si  $\text{acumulado} = 1$ ) en  $x$  para  $X \sim \text{Bi}(n, p)$
- **DISTR.HIPERGEOM.N(x;n;D;N;acumulado)** que calcula el valor de  $P(X=x)$  (si  $\text{acumulado} = 0$ ) o  $F(x) = P(X \leq x)$  (si  $\text{acumulado} = 1$ ) en  $x$  para  $X \sim H(N, D, n)$
- **INV.BINOM(n;p;alfa)**: Devuelve el menor  $x \in \{0, 1, \dots, n\}$  tal que  $P(X \leq x) \geq \text{alfa}$  para  $X \sim \text{Bi}(n, p)$
- **POISSON.DIST(x;media;acumulado)** que calcula el valor de  $P(X=x)$  (si  $\text{acumulado} = 0$ ) o  $F(x) = P(X \leq x)$  (si  $\text{acumulado} = 1$ ) en el punto  $x$  para  $X \sim \text{Poisson}(\text{media})$