LEYES DE PROBABILIDAD NOTABLES

1.- DISTRIBUCIÓN BERNOULLI

Sea un experimento en el cual podemos obtener éxito con probabilidad p y fracaso q=1-p. Se denota por X~Be(p) y su función de cuantía es:

$$X = \begin{cases} 1 & P\{X = 1\} = p \\ 0 & P\{X = 0\} = q = 1 - p \end{cases}$$

Se expresa de forma conjunta como $P\{X = i\} = p^i (1 - p)^{1-i} \qquad i = 0,1$

La función generatriz de momentos es $M(t) = q + pe^t \quad \forall t \in \Re$

La media y varianza de la distribución son $E[X] = p,\ V[X] = p(1 - p)$

El único parámetro es p y debe verificar que 0≤p≤1 porque es la probabilidad de obtener éxito.

2.- DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Sea un experimento en el cual podemos obtener éxito con probabilidad p y fracaso con probabilidad q=1-p. Se repite dicho experimento de forma independiente n veces. La variable X mide el número de éxitos en las n repeticiones y se denota por X~B(n,p), cuya función de cuantía es:

$$P\{X = k\} = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \qquad \text{con } k = 0,1,\ldots,n$$

La función generatriz de momentos viene dada por $M(t) = \left(q + pe^t\right)^n \quad \forall t \in \Re$

La media y la varianza de la distribución son $E[X] = np,\ V[X] = np(1 - p)$

La distribución binomial tiene dos parámetros que son n (número de repeticiones) y p (probabilidad de éxito), por lo tanto deben verificar que n=1,2,3,… y 0≤p≤1.

3.- DISTRIBUCIÓN POISSON

Sea un experimento en el que se produce un suceso en soporte continuo. La variable X mide el número de sucesos acontecidos de forma independiente que ocurren a una velocidad constante a lo largo de una unidad continua y se denota por X~P(λ) cuya función de cuantía es:

$$P\{X = k\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \qquad \text{con } k = 0,1,2,\ldots$$

La función generatriz de momentos viene dada por $M(t) = e^{\lambda(e^t - 1)} \quad \forall t \in \Re$

La media y la varianza de la distribución son $E[X] = \lambda,\ V[X] = \lambda$

La distribución Poisson tiene un único parámetros que es λ (tasa media de ocurrencias del suceso), por lo tanto deben verificar que $\lambda>0$.

4.- DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

Sea una población finita formada por N elementos, de los cuales M($\leq$N) poseen una determinada característica. El experimento consiste en extraer una muestra sin reemplazamiento de tamaño n. la variable X mide el número de elementos de la muestra que posee tal característica y se denota por X~H(N,M,n), cuya función de cuantía es:

$$P\{X = k\} = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \qquad \text{con } k = \max\{0, n - N + M\},\ldots,\min\{n, M\}$$

La media y la varianza de la distribución son

$$E[X] = \frac{nM}{N},\ V[X] = \frac{nM}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

La distribución Hipergeométrica tiene tres parámetros que son N (número de elementos de la población), M (número de elementos de la población que poseen una determinada característica) y n (número de elementos que examinamos), por lo tanto deben verificar que N=1,2,3,… , M=1,2,…,N y n=1,2,3,…,N.

5.- DISTRIBUCIÓN UNIFORME DISCRETA

Sea una población finita formada por N elementos mutuamente excluyentes y equiprobables, etiquetados con un número de orden desde el 1 hasta el N. El experimento consiste en extraer un elemento al azar. La variable X mide el número de orden del elemento y se denota por X~UD(1,N), cuya función de cuantía es:

$$P\{X = k\} = \frac{1}{N} \quad \text{con } k = 1,2,\ldots,N$$

La media y la varianza de la distribución son $E[X] = \frac{N+1}{2}$, $V[X] = \frac{N^2-1}{12}$

La distribución Uniforme Discreta tiene un único parámetros que es N (número de elementos de la población), por lo tanto deben verificar que N=1,2,3,…

6.- DISTRIBUCIÓN UNIFORME CONTINUA

Se extrae un número al azar entre dos números reales a y b. Se denota por X~U(a,b) y su función de densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \qquad \text{si } a \le x \le b$$

La función generatriz de momentos viene dada por:

$$M(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

La media y varianza de la distribución son $E[X] = \frac{a+b}{2}$, $V[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$

La distribución Uniforme tiene dos parámetros que son a y b (límite inferior y superior del intervalo donde selecciono un valor al azar), por lo tanto, deben verificar que $-\infty < a < b < +\infty$.

7.- DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

Se denota por X~ε(λ) y su función de densidad es:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \forall x > 0$$

La función generatriz de momentos viene dada por la expresión:

$$M(t) = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-1} \quad \text{si } t < \lambda$$

La media y varianza de la distribución son $E[X] = \frac{1}{\lambda},\ V[X] = \frac{1}{\lambda^2}$

La distribución Exponencial depende de un único parámetro que es λ y debe verificar que λ>0.

8.- DISTRIBUCIÓN NORMAL UNIVARIANTE

Se denota por X~N(μ,σ) y su función de densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \qquad \forall x \in \Re$$

La función generatriz de momentos viene dada por la expresión:

$$M(t) = e^{t\mu + \frac{1}{2}t^2\sigma^2} \qquad \forall t \in \Re$$

La media y varianza de la distribución son $E[X] = \mu,\ V[X] = \sigma^2$

La distribución Normal depende de dos parámetros μ (media) y σ (desviación típica), que deben verificar que $-\infty < \mu < +\infty$ y σ>0.

9.- DISTRIBUCIÓN JI-CUADRADO

Se denota por $X \sim \chi^2_n$ (ji-cuadrado con n grados de libertad) y su función de densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \qquad \forall x > 0$$

La función generatriz de momentos viene dada por la expresión:

$$M(t) = (1-2t)^{-n/2}$$

La media y la varianza de la distribución son: $E[X] = n$ y $V[X] = 2n$

La distribución χ^2_n depende de un parámetro n que debe verificar que n>1.

NOTA:

Si n es un número natural, entonces la distribución ji-cuadrado se puede expresar como una suma de los cuadrados de n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una normal tipificada:

$$X = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 \qquad \text{con } Y_i \sim \text{i.i.d. } N(0,1)$$

Por lo tanto, la distribución ji-cuadrado es un caso particular de la distribución gamma:

$$X \sim \chi^2 \equiv \gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)$$

10.-DISTRIBUCIÓN t DE STUDENT

Se denota por $X \sim t_n$ (t de Student con n grados de libertad) y su función de densidad es:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \qquad -\infty < x < +\infty$$

La media y la varianza de la distribución son:

$$E[X] = 0 \quad y \quad V[X] = \frac{n}{n-2}, \quad \text{con } n > 2$$

La distribución t de Student tiene un único parámetro n, que es un número natural.

NOTA:

La distribución t de Student es el cociente entre una normal tipificada y la raíz cuadrada de una distribución ji-cuadrada dividida por sus grados de libertad:

$$X \sim t_n \equiv \frac{N(0,1)}{\sqrt{\frac{1}{n}\chi_n^2}}$$

11.-DISTRIBUCIÓN F DE SNEDECOR

Se denota por $X \sim F_{m,n}$ (F de Snedecor con m y n grados de libertad) y su función de densidad es:

$$f(x) = \frac{m^{m/2} n^{n/2} \Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{m/2-1}(n+mx)^{-(n+m)/2} \qquad \forall x > 0$$

La media y la varianza son:

$$E[X] = \frac{n}{n-2} \quad y \quad V[X] = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}, \quad \text{siempre que } n > 4$$

NOTA:

La distribución F de Snedecor se expresa como el cociente de dos distribuciones ji-cuadrado, dividida cada una por sus grados de libertad:

$$X \sim F_{m,n} \equiv \frac{\frac{1}{m}\chi_m^2}{\frac{1}{n}\chi_n^2}$$