TEMA 6

CONTRASTE DE HIPÓTESIS

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Una **hipótesis estadística** es una afirmación con respecto a alguna característica desconocida de una población.

Un **contraste de hipótesis** es una técnica estadística para analizar la compatibilidad de una hipótesis estadística **(hipótesis nula , H_0)** con la información proporcionada por los datos de una muestra de la misma.

Para ello se compara la hipótesis nula con una hipótesis alternativa de la cual se sospecha que, caso de ser rechazada la hipótesis nula, sea la más verosímil para explicar los datos observados

El resultado final del contraste será **confirmar o refutar la hipótesis nula**.

CONCEPTOS BÁSICOS

► **Contraste de hipótesis**: Es una **regla de decisión** sobre el rechazo o no de la hipótesis nula, **basada en el valor de un estadístico D de discrepancia entre** la información proporcionada por la **muestra** y la **hipótesis** planteada $\mathbf{H_o}$.

$\boxed{\text{Valor de } D \in RA \cup RC}$

Región de aceptación **Región crítica**

- Si $D \in RA$ se acepta H_0
- Si $D \in RC$ se rechaza H_0

CONCEPTOS BÁSICOS

► **Hipótesis**: Afirmación explícita sobre alguna característica de la variable en estudio.

TIPOS DE CONTRASTES

Según la creencia:

► **Hipótesis nula:** Es la creencia inicial del investigador. Se denota por H_0.

Ejemplos: H_0: $\mu \leq 7$, H_0: $p = 0.8$, H_0: $\lambda \geq 3$….

► **Hipótesis alternativa:** Es la creencia del investigador en caso de ser rechazada la hipótesis nula. Se denota por H_1.

Ejemplos: H_1: $\mu > 7$, H_1: $p \neq 0.8$, H_1: $\lambda < 3$….

En forma general se escribirá $\boxed{\begin{cases} H_0 : \theta \in \Omega_0 \\ H_1 : \theta \in \Omega_1 \end{cases}}$

CONCEPTOS BÁSICOS

Según lo contrastado:

► **Contraste de significación:** Las hipótesis están expresadas en términos de un parámetro θ

$H_0: \theta \leq \theta_0$ vs $H_1: \theta > \theta_0$ (para contrastar si θ es más alto)

► **Contraste de bondad de ajuste:** Las hipótesis hacen referencia a un modelo

$H_0: X \sim N(\mu,\sigma)$ vs $H_1: X \sim Exp(\lambda)$

CONCEPTOS BÁSICOS

Según su formulación:

► **Hipótesis simple:** Si identifica de forma única la distribución de la variable estudiada.

Ejemplos: Si $X \sim N(\mu,5)$ $H_0: \mu = 7$ o $H_0: \mu = 10$

► **Hipótesis compuesta:** Si no identifica de forma única la distribución de la variable estudiada.

Ejemplos: Si $X \sim N(\mu,5)$ $H_0: \mu \geq 7$ o $H_0: \mu \leq 10$

Si $X \sim N(\mu,\sigma)$ $H_0: \sigma \geq 7$ o $H_0: \sigma \leq 10$

CONCEPTOS BÁSICOS

Según su alternativa:

► **Contraste unilateral:** Si se analiza si el valor de un parámetro θ es significativamente más alto o más bajo que un valor de referencia θ_0

$H_0: \theta \leq \theta_0$ vs $H_1: \theta > \theta_0$ (para contrastar si θ es más alto)

$H_0: \theta \geq \theta_0$ vs $H_1: \theta < \theta_0$ (para contrastar si θ es más bajo)

► **Contraste bilateral:** Si se analiza si el valor de un parámetro θ es significativamente diferente de un valor de referencia θ_0

$H_0: \theta = \theta_0$ vs $H_1: \theta \neq \theta_0$

!

CONCEPTOS BÁSICOS

► **Decisiones y consecuencias:**

		Estado de la naturaleza	
		H_0	H_1
Decisión adoptada	H_0	Correcto	**Error tipo II**
	H_1	**Error tipo I**	Correcto

Error tipo I: Rechazar la hipótesis nula cuando es cierta.

Error tipo II: No rechazar la hipótesis nula cuando es falsa.

► **¿Cómo cuantificar estos errores?**

$$\alpha = P(\text{Error tipo I}) = P(D \in RC \mid \text{Si es cierta } H_0)$$

$$\beta = P(\text{Error tipo II}) = P(D \in RA \mid \text{Si es cierta } H_1)$$

CONCEPTOS BÁSICOS

► EJEMPLO:

Sea $X \sim N(\mu,\sigma)$ con σ conocida y planteamos el siguiente contraste:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu = \mu_1 \quad \text{con } \mu_1 > \mu_0 \end{cases}$$

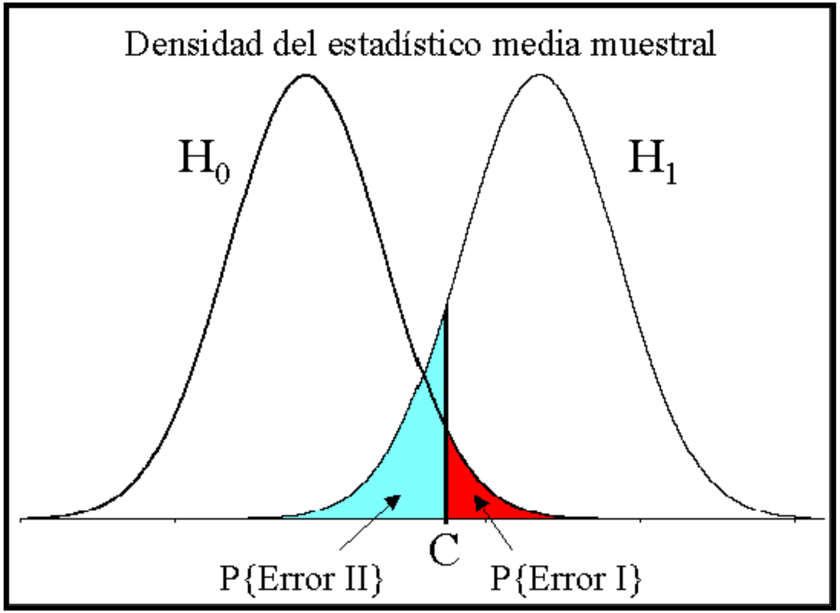
Se extrae una m.a.s. de tamaño n $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ y la regla de decisión del contraste viene dada por :

$$\boxed{\begin{cases} \text{Aceptar } H_0 & \text{si } \overline{X} \le C \\ \text{Aceptar } H_1 & \text{si } \overline{X} > C \end{cases}}$$

$$\alpha = P(\textbf{Error tipo I}) = P\left(\overline{X} > C \,\middle|\, \overline{X} \sim \mathbf{N}\left(\mu_0, \frac{\sigma}{\sqrt{\mathbf{n}}}\right)\right) = P\left\{Z > \frac{C - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right\}$$

$$\beta = P(\textbf{Error tipo II}) = P\left(\overline{X} \le C \,\middle|\, \overline{X} \sim \mathbf{N}\left(\mu_1, \frac{\sigma}{\sqrt{\mathbf{n}}}\right)\right) = P\left(Z \le \frac{C - \mu_1}{\sigma}\sqrt{n}\right)$$

CONCEPTOS BÁSICOS



Si C aumenta entonces:

P(Error tipo II) crece ⇔ P(Error tipo I) disminuye

Si C disminuye entonces:

P(Error tipo II) decrece ⇔ P(Error tipo I) aumenta

CONCEPTOS BÁSICOS

► **Función de potencia:**

Sea X una v.a. poblacional con distribución conocida salvo el parámetro θ, y se plantea el contraste:

$$\begin{cases} H_0 : \theta \in \Omega_0 \\ H_1 : \theta \in \Omega_1 \end{cases}$$

Se define **función de potencia** a:

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathrm{Pot} : \Omega \rightarrow [0,1] \\ &\qquad \theta \rightarrow \mathrm{Pot}(\theta) = P\left(\text{Rechazar } H_0 \,\middle|\, \text{Si es cierto } \theta\right) \end{aligned}}$$

Si $\theta \in \Omega_0 \Rightarrow \mathrm{Pot}(\theta) = P(\text{Error tipo I})$

Si $\theta \in \Omega_1 \Rightarrow \mathrm{Pot}(\theta) = 1 - P(\text{Error tipo II})$

CONCEPTOS BÁSICOS

► **Nivel de significación (α):**

Se dice que un contraste tiene un tamaño o **nivel de significación α** si

$$\boxed{\mathrm{Pot}(\theta) \leq \alpha \qquad \forall \theta \in \Omega_0}$$

► **Elección del nivel de significación:**

- Estudio de los costes de una decisión incorrecta
- Según la creencia en la hipótesis nula
- Usualmente, entre el 1% y el 5%

$H_0: \mu = 7$ $H_1: \mu = 10$, $P(EI) = P(\bar{x} \geq 8 \mid \mu = 7)$

H_0 $\mu \leq 7$ $H_1 > 7$ $P(EI) = P(\text{Rechazar } H_0 \mid H_0) = P(\bar{x} \geq 8 \mid \mu = \infty \text{ valores})$

↳ Máx $P(EI)$ = Nivel de Significación

Suponemos X: Tiempo para producir una pieza. $X \sim N(\mu, 1'4)$, observamos 25 uds y usamos la media muestral como estadístico de prueba. Hasta ahora el tiempo medio era de 10' pero creemos que la máquina se ha estropeado.

1 – Plantear las Hipót.

2 – Comparar las 3 regiones ss:

A: Rechazar H_0 si $\bar{x} > 10'65$

B – Rech. H_0 si $\bar{x} > 10'45$

C – Rech. H_0 si $\bar{x} > 10'25$

Nota: se puede tolerar error tipo 1 = 6% = α

¿Cual es mejor?

DATOS:

X: Tiempo en producir una pieza $\sim N(\mu, 1'4)$, $\mu = 10$, $n = 25$

H_0: Maquina funciona bien → $\mu = 10$

H_1: Maquina funciona mal → $\mu \neq 10$

$$P(\bar{x} \geq 10'65 \mid \mu = 10) = P\left(Z \geq \frac{0'65}{\frac{1'4}{\sqrt{25}}}\right) = P\left(\frac{3'25}{1'4}\right)$$

$X \sim N(\mu, 1'4)$

Funciona bien $H_0: \mu = 10$

Funciona mal $H_1: \mu > 10$

a) – RC $\bar{x} > 10'65$ $\alpha_A = P(\bar{x} > 10'65 \mid \mu = 10)$ $= P(Z > 10'65 - 10 / 0'28) = P(Z > 2'32) = 0'001017$

b) RC $\bar{x} > 10'45$ $\alpha_B = P(\bar{x} > 10'45 \mid \mu = 10)$ $= P(Z > 10'45 - 10 / 0'28) = P(Z > 1'61) = 0'0537$

c) – RC $\bar{x} > 10'25$ $\alpha_C = P(10'25 \mid \mu = 10)$ $= P(Z > 0'89) = 0'1867$

H_0 $\bar{x} \sim N\left(10, \frac{1'4}{\sqrt{25}}\right)$

Calcular Pot(θ_A) 10'2 10'4 11 , 11'2

CONCEPTOS BÁSICOS

► **Búsqueda del contraste uniformemente de máxima potencia (UMP)**

Dentro de todos los que tengan el mismo nivel de significación se elige el que tenga mayor potencia bajo la hipótesis alternativa

La elección depende de si las hipótesis son simples o compuestas.

► **Hipótesis nula y alternativa simples**

Existe el contraste UMP y se obtiene mediante el **Lema de Neyman-Pearson**

► **Hipótesis compuesta**

No existe siempre el contraste UMP, pero una buena solución es el **test de la razón de verosimilitudes**.

HIPÓTESIS SIMPLES

► **Lema de Neyman-Pearson**

Supongamos un contraste de hipótesis nula simple frente alternativa simple:

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta = \theta_1 \end{cases}$$

Se extrae una m.a.s. $(X_1,\ldots,X_n)$ cuya función de verosimilitud es $L(\theta)$ entonces el contraste:

$$\boxed{\begin{cases} \text{Aceptar } H_0 & \text{si } \dfrac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} \geq k \\ \text{Rechazar } H_0 & \text{si } \dfrac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < k \end{cases}}$$

es el contraste UMP dentro de los de su nivel de significación.

La constante k vendrá calculada a partir del nivel de significación α establecido a priori.

HIPÓTESIS SIMPLES

EJEMPLO

Sea $X \sim N(\mu,\sigma)$ con σ conocida y planteamos el siguiente contraste:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu = \mu_1 \end{cases}$$

Se extrae una m.a.s. de tamaño n, **determinar el contraste UMP.**

La función de verosimilitud es:

$$\boxed{L(\mu) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)^n} \exp\left\{ - \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\}}$$

Se evalúa bajo la hipótesis nula y la alternativa

HIPÓTESIS SIMPLES

El cociente entre las funciones de verosimilitud es

$$\frac{L(\mu_0)}{L(\mu_1)} = \exp\left\{ -\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_1)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

La región crítica viene dada cuando este cociente sea superior a una constante k, equivalentemente:

$$\frac{1}{2\sigma^2}\left[2n\overline{X}(\mu_1-\mu_0) - n\left(\mu_1^2-\mu_0^2\right)\right] > k$$

$$\Downarrow$$

$$2n\overline{X}(\mu_1-\mu_0) > 2k\sigma^2 + n\left(\mu_1^2-\mu_0^2\right)$$

Ej. 8) Disminuir a dos accidentes por semana.

H_0: 2'5 acctes/semana (Todo sigue igual)
H_1: $< 2'5$ (Mejora)

X: nº de accidentes por semana $X \sim P(\lambda)$

$H_0: \lambda = 2'5$ | Lema de Neyman-Pearson: Rechazo H_0: Si $L(\theta_0)/L(\theta_1) < K$
$H_1: \lambda = 2$ |

$P(X=x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}$ $\downarrow$

m.a.s. $\{x_1, \dots, x_4\}$, $n=4$, $\alpha = 0'1$ RC: $\{\sum x_i ? K\}$

$L(X,\mu) = \prod p(X=x_i) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_1}}{x_1!} \cdot \dots$

$L(X,\mu) = e^{-\lambda n} \frac{\lambda^{\sum x_i}}{x_i!}$ $\rightarrow L(\theta_0) = L(X, \lambda = 2'5) = e^{-2'5n} \frac{2'5^{\sum x_i}}{x_1! \dots x_n!}$

$L(\theta_1) = L(X, \lambda=2) = e^{-2n} \frac{2^{\sum x_i}}{x_1! \dots x_n!}$

$L(\theta_0)/L(\theta_1) = e^{-2'5n} \, 2'5^{\sum x_i} / (e^{-2n} \, 2^{\sum x_i}) < K$

$\alpha = 0'1 = P(\text{Rechazar } H_0 \mid H_0) \rightarrow 0'1 = P(e^{-0'5n} (1'25)^{\sum x_i} < K \mid \lambda = 2'5)$ → Transformar en algo conocido:

$-0'5n + \sum x_i \ln(1'25) < \ln K \rightarrow \sum x_i \cdot \ln(1'25) < K' \rightarrow \sum x_i < \underbrace{K'/\ln(1'25)}_{K''} \Rightarrow 0'1 = P(\sum x_i < K'' / \lambda = 2'5)$

RC = {Rechazo H_0 si $\sum x_i < K''$}

H_0: $\sum x_i \sim P(4 \cdot 2'5) = P(10)$; $P(X \leq 5) = 0'0671$ ⊛ ← RC = {Rechazo H_0 si $\sum x_i < 6$}
$P(X \leq 6) = 0'1301 > 0'1$ (α) ← NO

$H_0: \lambda \geq 2'5$ $L(\theta_0) \rightarrow \infty$ valores
$H_a: \lambda < 2'5$ $L(\theta_1) \rightarrow \infty$ valores. $P(\text{Rech } H_0 \mid \lambda = 2) \rightarrow P(\sum x_i < 6) \rightarrow \sum x_i \sim P(8) = 0'1912$

Ej. 9

D de $\sim N(200, 20)$ Etapas.
H_0: ~~$\mu = 200$~~ $\mu \leq 250$
H_1: $\mu > 250$

$\bar{X} = 260$, $n = 35$, $\alpha = 0'01$

P-Valor:

HIPÓTESIS SIMPLES

El contraste UMP es:

Caso A: ($\mu_1 > \mu_0$)

$$\overline{X} > \frac{2k\sigma^2 + n(\mu_1^2 - \mu_0^2)}{2n(\mu_1 - \mu_0)} = C$$

Caso B: ($\mu_1 < \mu_0$)

$$\overline{X} < \frac{2k\sigma^2 + n(\mu_1^2 - \mu_0^2)}{2n(\mu_1 - \mu_0)} = C$$

Fijado el nivel de significación α, obtenemos la constante C

$$\alpha = P\{\overline{X} > C | \mu = \mu_0\} = P\left\{ Z > \frac{C - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \middle| \mu = \mu_0 \right\}$$

$$\alpha = P\{\overline{X} < C | \mu = \mu_0\} = P\left\{ Z < \frac{C - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \middle| \mu = \mu_0 \right\}$$

$$\text{Rechazar } H_0 \text{ si } \overline{X} > C = \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\text{Rechazar } H_0 \text{ si } \overline{X} < C = \mu_0 - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

HIPÓTESIS COMPUESTAS

► Test de la razón de verosimilitudes

Sea X una v.a. poblacional y se plantea el contraste

$$\begin{cases} H_0 : \theta \in \Omega_0 \\ H_1 : \theta \in \Omega_1 \end{cases}$$

donde $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1$ es el espacio paramétrico. El contraste cuya región crítica viene dada por:

$$\boxed{\lambda(X_1,\ldots,X_n) = \frac{\sup\limits_{\theta\in\Omega_0} L(\theta)}{\sup\limits_{\theta\in\Omega} L(\theta)} < k}$$

siendo k una constante, se denomina contraste de la razón de verosimilitudes.

La constante k se calculará a partir del nivel de significación α establecido a priori.

HIPÓTESIS COMPUESTAS

EJEMPLO

Sea $X\sim N(\mu,\sigma)$ con σ conocida y planteamos el siguiente contraste:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

Se extrae una m.a.s. de tamaño n. **Plantear el Contraste de la razón de verosimilitudes.**

La función de verosimilitud, sin ninguna restricción, se maximiza en la media muestral:

$$\sup_{\mu\in R} L(\mu) = L(\overline{X}) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)^n} \exp\left\{ -\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

HIPÓTESIS COMPUESTAS

La función de verosimilitud, bajo la hipótesis nula, será igual al valor de la verosimilitud en μ_0:

La razón de verosimilitudes viene dada por:

$$\lambda(X_1,\ldots,X_n)=\frac{L(\mu_0)}{L(\overline{X})}=\exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2-\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{2\sigma^2}\right\}=$$

$$=\exp\left\{\frac{(\mu_0-\overline{X})\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\frac{\overline{X}+\mu_0}{2}\right)\right)}{\sigma^2}\right\}=\exp\left\{-\frac{n(\overline{X}-\mu_0)^2}{\sigma^2}\right\}$$

HIPÓTESIS COMPUESTAS

La región crítica corresponde a los valores muestrales cuya razón de verosimilitudes está por debajo de k, equivalentemente:

$$\left|\sqrt{n}\left(\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma}\right)\right| > C_1$$

Fijado el nivel de significación α, determinamos la región crítica:

$$\alpha = P\left(\left|\sqrt{n}\left(\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma}\right)\right| > C_1 \,\middle|\, \mu=\mu_0\right) = P\left(|Z| > C_1 \,\middle|\, Z \sim N(0,1)\right) \Rightarrow C_1 = z_{\frac{\alpha}{2}}$$

La **región crítica del contraste de la razón de verosimilitudes** viene dada por los valores de la media muestral que verifican:

$$\boxed{\left|\overline{X}-\mu_0\right| > z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Etapas de un contraste de hipótesis

Una vez obtenida una muestra aleatoria simple, el contraste de hipótesis se desarrolla en varias etapas:

1. Planteamiento de las **hipótesis nula** y **alternativa**
2. Selección del **estadístico adecuado** (discrepancia) y su distribución bajo la hipótesis nula
3. Obtención de la **región crítica** y de la **región de aceptación**
4. Cálculo del valor del **estadístico en la muestra** recogida
5. **Resolución estadística** del contraste
6. **Interpretación** y toma de decisión **en términos del problema**

Etapas de un contraste de hipótesis

EJEMPLO

Se desea saber si una población normal de varianza conocida $N(\mu,\sigma)$ **tiene una media μ_0**. Para ello tomamos de dicho colectivo una m.a.s. de tamaño n $(X_1,\ldots,X_n)$.

1. Planteamiento de las **hipótesis nula** y **alternativa**

$$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

2. Selección de la **discrepancia** y su distribución bajo H_0

$$D = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

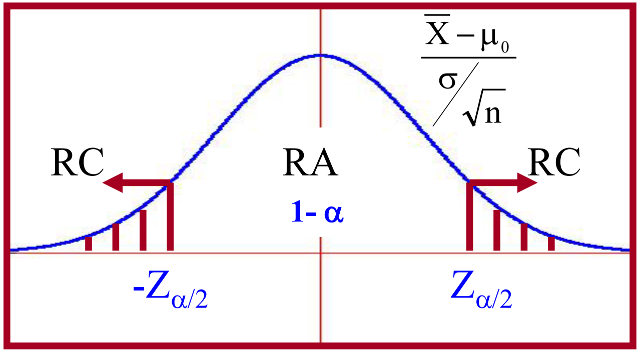
Etapas de un contraste de hipótesis

EJEMPLO

3. Obtención de la **región crítica** y de la **región de aceptación**

Si α es el nivel de significación, la región crítica y la región de aceptación son:

$$\begin{cases} RA: (-Z_{\alpha/2}, Z_{\alpha/2}) \\ RC: (-\infty, -Z_{\alpha/2}) \cup (Z_{\alpha/2}, +\infty) \end{cases}$$



Etapas de un contraste de hipótesis

EJEMPLO

4. Cálculo del valor del **estadístico en la muestra** recogida

$$\boxed{d_{obs} = \frac{\bar{x}_{obs} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}}$$

5. **Resolución estadística** del contraste

$$\begin{cases} \text{Si } d_{obs} \in RA \Rightarrow \text{no se rechaza } H_0 \\ \text{Si } d_{obs} \in RC \Rightarrow \text{se rechaza } H_0 \end{cases}$$

6. **Interpretación** y toma de decisión **en términos del problema**

CONTRASTES NOTABLES

▶ Contrastes de una media

Condiciones	H_0	H_1	Región Crítica	Estadístico
	$\mu=\mu_0$	$\mu<\mu_0$	$Z<-z_\alpha$	
Normalidad o n grande	$\mu\geq\mu_0$	$\mu<\mu_0$	$Z<-z_\alpha$	
Varianza conocida	$\mu=\mu_0$	$\mu>\mu_0$	$Z>z_\alpha$	$Z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$
	$\mu\leq\mu_0$	$\mu>\mu_0$	$Z>z_\alpha$	
	$\mu=\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$	$\lvert Z\rvert>\lvert z_{\alpha/2}\rvert$	
	$\mu=\mu_0$	$\mu<\mu_0$	$Z<-z_\alpha$	
n grande	$\mu\geq\mu_0$	$\mu<\mu_0$	$Z<-z_\alpha$	$Z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{s_1}\sqrt{n}$
Varianza desconocida	$\mu=\mu_0$	$\mu>\mu_0$	$Z>z_\alpha$	
	$\mu\leq\mu_0$	$\mu>\mu_0$	$Z>z_\alpha$	
	$\mu=\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$	$\lvert Z\rvert>\lvert z_{\alpha/2}\rvert$	
	$\mu=\mu_0$	$\mu<\mu_0$	$T<-t_{n-1,\alpha}$	
Normalidad	$\mu\geq\mu_0$	$\mu<\mu_0$	$T<-t_{n-1,\alpha}$	
Varianza desconocida	$\mu=\mu_0$	$\mu>\mu_0$	$T>t_{n-1,\alpha}$	$T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{s_1}\sqrt{n}$
	$\mu\leq\mu_0$	$\mu>\mu_0$	$T>t_{n-1,\alpha}$	
	$\mu=\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$	$\lvert T\rvert>\lvert t_{n-1,\alpha/2}\rvert$	

CONTRASTES NOTABLES

► Contrastes de una proporción

Condiciones	H_0	H_1	Región Crítica	Estadístico
Distrib. Bernoulli n grande	$p=p_0$ $p\geq p_0$ $p=p_0$ $p\leq p_0$ $p=p_0$	$p<p_0$ $p<p_0$ $p>p_0$ $p>p_0$ $p\neq p_0$	$Z<-z_\alpha$ $Z<-z_\alpha$ $Z>z_\alpha$ $Z>z_\alpha$ $\lvert Z\rvert>\lvert z_{\alpha/2}\rvert$	$Z=\frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n}$ o $Z=\frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}\sqrt{n}$

CONTRASTES NOTABLES

► Contrastes de una varianza o una desviación típica

Condiciones	H_0	H_1	Región Crítica	Estadístico
Normalidad	$\sigma=\sigma_0$	$\sigma<\sigma_0$	$\chi^2 < \chi^2_{n-1,1-\alpha}$	$\chi^2 = \frac{(n-1)s_1^2}{\sigma_0^2} = \frac{ns^2}{\sigma_0^2}$
	$\sigma\geq\sigma_0$	$\sigma<\sigma_0$	$\chi^2 < \chi^2_{n-1,1-\alpha}$	
	$\sigma=\sigma_0$	$\sigma>\sigma_0$	$\chi^2 > \chi^2_{n-1,\alpha}$	
	$\sigma\leq\sigma_0$	$\sigma>\sigma_0$	$\chi^2 > \chi^2_{n-1,\alpha}$	
	$\sigma=\sigma_0$	$\sigma\neq\sigma_0$	$\chi^2 < \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}$ o $\chi^2 > \chi^2_{n-1,\alpha/2}$	

OTRAS CONSIDERACIONES

► **Relación entre contraste de hipótesis e intervalo de confianza**

	Estimación	**Contraste**
Objetivo	Aproximar características	Corroborar hipótesis
Información	Básica Muestral	Básica A priori Muestral
Herramienta	Estimador	Estadístico de contraste
Resultado	Estimación puntual o por intervalo	Conclusión: Rechazar o no la hipótesis
Garantías	Nivel de confianza	Nivel de significación

OTRAS CONSIDERACIONES

Relación entre contraste de hipótesis e intervalo de confianza

Ambas son técnicas inferenciales:

Sus objetivos y estrategias de resolución son diferentes pero pueden aportar unas mismas conclusiones, siempre bajo ciertas garantías o afirmaciones probabilísticas.

Sus Objetivos son diferentes:

El de un intervalo de confianza es estimar el valor de un parámetro desconocido.

El objetivo de un contraste es corroborar/rechazar una hipótesis previa del investigador.

.

OTRAS CONSIDERACIONES

Relación entre contraste de hipótesis e intervalo de confianza

Al tratar el nivel de significación, ambos conceptos están relacionados: **un intervalo de confianza 100(1-α)% contiene los valores del parámetro de forma que serían aceptados como posibles valores de la hipótesis nula de un contraste bilateral realizado con un nivel de significación 100α%.**

Esta forma de actuar tiene, sin embargo, el inconveniente, de que trata todos los valores del intervalo por igual, sin tener en cuenta que la evidencia que los datos proporcionan acerca de cada valor es diferente.

OTRAS CONSIDERACIONES

- **Ejemplo**

Sea X~N(μ,σ) y supongamos que σ es desconocida.

- El intervalo de confianza a un nivel 1-α es:

$$\boxed{\left[\overline{X} - t_{n-1;\alpha/2}\frac{S_1}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{n-1;\alpha/2}\frac{S_1}{\sqrt{n}}\right]}$$

- Dado el contraste de hipótesis sobre la media:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

La región crítica a un nivel de significación α: $\frac{\left|\overline{X} - \mu_0\right|}{S_1}\sqrt{n} > t_{n-1;\alpha/2}$

$$\text{No rechazar } \mu_0 \Leftrightarrow \frac{\left|\overline{X} - \mu_0\right|}{S_1}\sqrt{n} \leq t_{n-1;\alpha/2}$$

$$\Leftrightarrow \mu_0 \in \left[\overline{X} - t_{n-1;\alpha/2}\frac{S_1}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{n-1;\alpha/2}\frac{S_1}{\sqrt{n}}\right]$$

OTRAS CONSIDERACIONES

► Nivel de significación versus p-valor

Sea X una v.a. poblacional cuya distribución es conocida salvo un parámetro θ y se plantea el contraste:

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta > \theta_0 \end{cases}$$

Sea D el estadístico discrepancia cuya distribución es conocida bajo la hipótesis nula. El p-valor o nivel crítico es:

$$\boxed{P\left(D \geq d_{obs} \mid H_0 \text{ es cierta}\right) = p - \text{valor}}$$

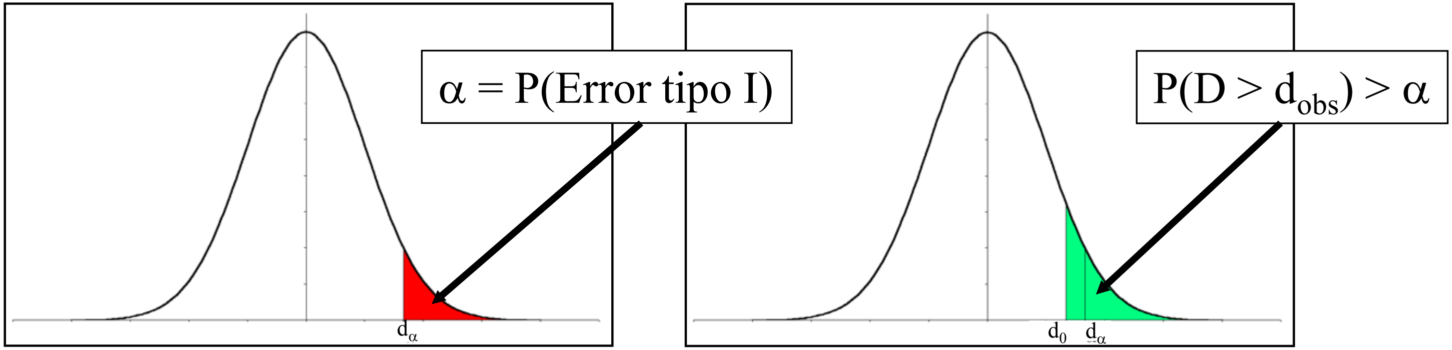
El nivel crítico mide la probabilidad de encontrar discrepancias iguales o mayores que la observada d_{obs} bajo la hipótesis nula.

OTRAS CONSIDERACIONES

► **Nivel de significación versus p-valor**

Fijado el nivel de significación α se obtiene el valor crítico d_α

Densidad del estadístico de contraste bajo H_0



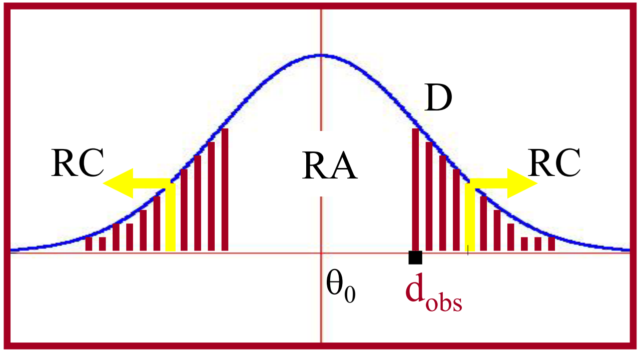
Supongamos un valor del estadístico de contraste d_{obs} menor que el valor crítico d_α, entonces su p-valor es mayor que α

OTRAS CONSIDERACIONES

▶ Nivel de significación versus p-valor

El p-valor en el **caso bilateral** es la probabilidad de que bajo H_0 el estadístico discrepancia D sea en valor absoluto mayor o igual que el valor de la discrepancia de la muestra seleccionada d_{obs}.

$$H_0:\theta = \theta_0$$
$$H_1:\theta \neq \theta_0$$



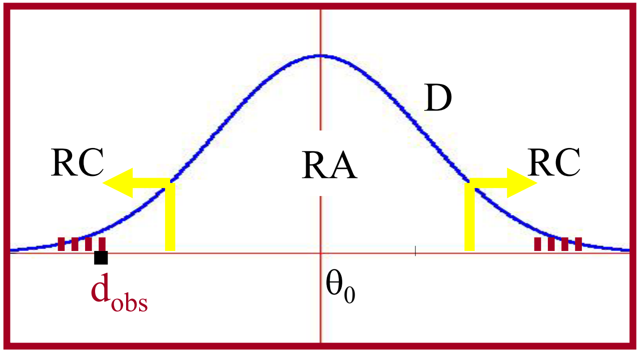
$$\text{p-valor} = P(\,|D| \geq d_{obs} \,/\, \text{Bajo } H_0\,)$$

OTRAS CONSIDERACIONES

- **Nivel de significación versus p-valor**

El p-valor en **el caso bilateral** es la probabilidad de que bajo H_0 el estadístico discrepancia D sea en valor absoluto mayor o igual que el valor de la discrepancia de la muestra seleccionada d_{obs}.

$$H_0: \theta = \theta_0$$
$$H_1: \theta \neq \theta_0$$



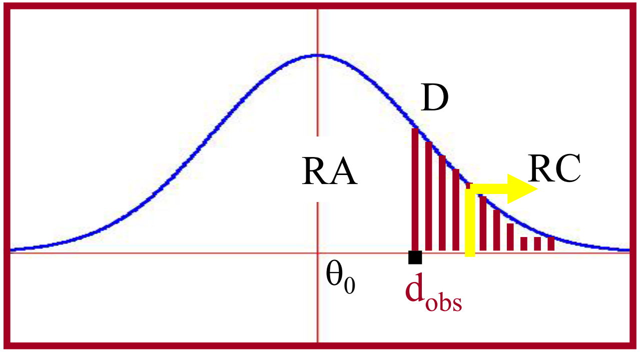
$$\text{p-valor} = P(\,|D| \geq d_{obs} \,/\, \text{Bajo } H_0\,)$$

OTRAS CONSIDERACIONES

▶ Nivel de significación versus p-valor

El p-valor en el **caso** unilateral con RC a derecha es la probabilidad de que bajo H_0 el estadístico discrepancia D sea mayor o igual que el valor de la discrepancia de la muestra seleccionada d_{obs}.

$$H_0 : \theta \leq \theta_0$$
$$H_1 : \theta > \theta_0$$



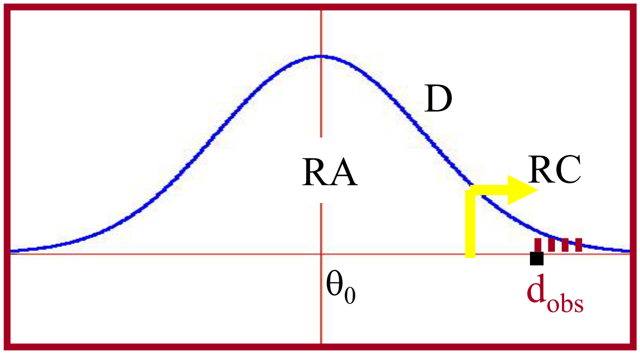
$$\text{p-valor} = P(\, D \geq d_{obs} \,/\, \text{Bajo } H_0 \,)$$

OTRAS CONSIDERACIONES

- **Nivel de significación versus p-valor**

El p-valor en el **caso unilateral con RC a derecha** es la probabilidad de que bajo H_0 el estadístico discrepancia D sea mayor o igual que el valor de la discrepancia de la muestra seleccionada d_{obs}.

$$H_0 : \theta \leq \theta_0$$
$$H_1 : \theta > \theta_0$$



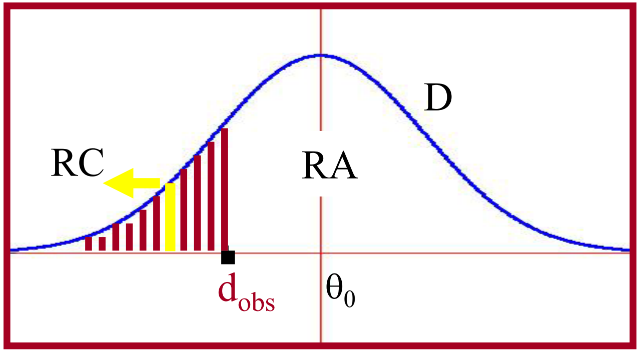
$$\text{p-valor} = P(\, D \geq d_{obs} \,/\, \text{Bajo } H_0 \,)$$

OTRAS CONSIDERACIONES

- **Nivel de significación versus p-valor**

El p-valor en el **caso unilateral con RC a izquierda** es la probabilidad de que bajo H_0 el estadístico discrepancia D sea menor o igual que el valor de la discrepancia de la muestra seleccionada d_{obs}.

$$H_0 : \theta \geq \theta_0$$
$$H_1 : \theta < \theta_0$$



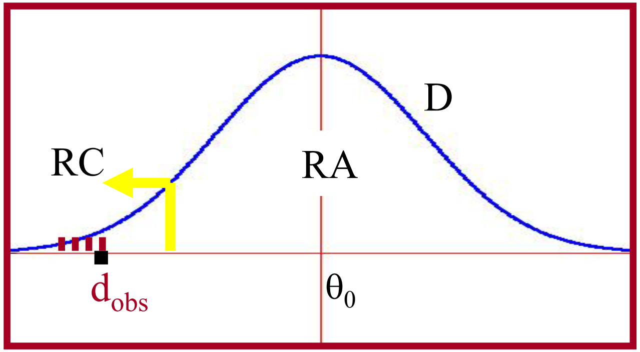
$$\text{p-valor} = P(D < d_{obs} \,/\, \text{Bajo } H_0)$$

OTRAS CONSIDERACIONES

- **Nivel de significación versus p-valor**

El p-valor en el **caso unilateral con RC a izquierda** es la probabilidad de que bajo H_0 el estadístico discrepancia D sea menor o igual que el valor de la discrepancia de la muestra seleccionada d_{obs}.

$$H_0 : \theta \geq \theta_0$$
$$H_1 : \theta < \theta_0$$



$$\text{p-valor} = P(D < d_{obs} \,/\, \text{Bajo } H_0)$$

OTRAS CONSIDERACIONES

Nivel de significación versus p-valor

En términos del p-valor la **regla de decisión** es la siguiente: si el p-valor es menor que α entonces se rechaza la hipótesis nula, en caso contrario no se rechaza.

Las dos posibles formas de tomar la decisión final en un contraste de hipótesis son equivalentes. Es decir:

$$\text{Si } d_{obs} \in RA \Leftrightarrow \textbf{p-valor} > \boldsymbol{\alpha} = P(D \in RC | \text{Bajo } H_0) \Rightarrow \textbf{no se rechaza } \mathbf{H_0}$$

$$\text{Si } d_{obs} \in RC \Leftrightarrow \textbf{p-valor} < \boldsymbol{\alpha} = P(D \in RC | \text{Bajo } H_0) \Rightarrow \textbf{se rechaza } \mathbf{H_0}$$

OTRAS CONSIDERACIONES

► Nivel de significación versus p-valor

Ventajas del p-valor

- El investigador utiliza toda la información muestral
- Conoce la “significatividad” de su conclusión
- Permite comparar y cuantificar diferentes contrastes

OTRAS CONSIDERACIONES

► Nivel de significación versus p-valor

Inconvenientes del p-valor

- Aunque es una medida que se calcula ex-post la evidencia que proporciona está basada en una probabilidad ex-ante.
- No es, por tanto, una probabilidad a posteriori ni tiene una interpretación frecuentista clara al depender del valor observado en la muestra
- Solo considera el contraste desde el punto de vista de la hipótesis nula
- No existe ninguna regla de actuación, pero algunos autores proponen:

$p < 0{,}10$	Evidencia límite o muy débil en contra de H_0
$p < 0{,}05$	Evidencia razonable o débil en contra de H_0
$p < 0{,}025$	Evidencia fuerte en contra de H_0
$p < 0{,}01$	Evidencia muy fuerte en contra de H_0