

ДЗ3. Доверительные интервалы

Задачи по учебнику: Сборник_задач_по_математике_для_втузов_В_4_х_ч_Ч_4_ред_Ефимов:

19.158-19.160, 19.164, 19.166-19.170, 19.176-19.177, 19.183-19.188

неквадратичное отклонение известно и равно 4 мкФ.

19.158. Время безотказной работы электронной лампы, если $\bar{x} = 500$, $n = 100$, среднеквадратичное отклонение известно и равно 10 ч.

19.158

$$U_3 \text{ т. 1 } \bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1) < m < \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1)$$

a) $n = 100$

$\bar{x} = 500$

$s = 10$

$L = 0,1$

$$500 - \frac{10}{\sqrt{10}} \cdot 1,645 < m < 500 + \frac{10}{\sqrt{10}} \cdot 1,645$$

$$U_{0,95} = 1,645$$

$$500 - 1,645 < m < 500 + 1,645$$

$$498,355 < m < 501,645$$

b) $L = 0,005$

$$U_{0,995} = 2,576$$

$$500 - 1,645 < m < 500 + 1,645$$

~~$$498,355$$~~

$$497,424 < m < 502,576$$

$$O_{\text{медиана}}(498,355; 501,645)$$

19.159. Диаметр вала, если $\bar{x} = 30$ мм, $n = 9$, $s^2 = 9$ мм².

$$N = 19,159 \quad \bar{x} = 30 \mu\text{m} \quad n = 9 \quad s^2 = 9 \mu\text{m}^2$$

$$\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) < m < \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

$$c) \alpha = 0,1$$

$$30 + \frac{3}{3} t_{0,95} \cdot 3 < m < 30 + \frac{3}{3} t_{0,95} \cdot 3$$

$$t_{0,95} \cdot 3 = 1,86$$

$$30 - 1,86 < m < 30 + 1,86$$

$$28,14 < m < 31,86$$

$$d) \alpha = 0,01$$

$$30 - t_{0,995} \cdot 3 < m < 30 + t_{0,995} \cdot 3$$

$$t_{0,995} \cdot 3 = 3,355$$

$$26,645 < m < 33,355$$

19.159. Диаметр диска, если $w = 50$ мм, $n = 5$, $s = 5$ мм.

19.160. Содержание углерода в единице продукта, если $\bar{x} = 18$ г, $n = 25$, $s^2 = 16$ г².

19.161. М..... 10.....5.....5.....25

$$19, 160 \quad \bar{x} = 18, s^2 = 16, n = 25$$

$$\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} \left(t_{\frac{\alpha}{2}} (n-1) \right) < m < \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} \left(t_{\frac{\alpha}{2}} (n-1) \right)$$

$$a) \alpha = 0,1$$

$$18 - \frac{4}{5} \cdot t_{0,95} \cdot 24 < m < 18 + \frac{4}{5} \cdot t_{0,95} \cdot 24$$

$$t_{0,95} \cdot 24 = 1,411$$

$$18 - 0,8 \cdot 1,411 < m < 18 + 0,8 \cdot 1,411$$

$$16,6312 < m < 19,3688$$

$$b) \alpha = 0,01$$

$$18 - \frac{4}{5} \cdot t_{0,995} \cdot 24 < m < 18 + \frac{4}{5} \cdot t_{0,995} \cdot 24$$

$$t_{0,995} \cdot 24 = 2,494$$

$$18 - 0,8 \cdot 2,494 < m < 18 + 0,8 \cdot 2,494$$

$$15,4624 < m < 20,7376$$

верительной вероятности 0,99.

19.164*. Пусть из одной генеральной совокупности получены две выборки объемов n_1 и n_2 соответственно. Выборочные оценки средних и дисперсий по этим выборкам равны $\bar{X}_1, \bar{X}_2, S_1^2, S_2^2$. Объединенные оценки среднего и дисперсии по выборке объема $n_1 + n_2$ вычисляются по формулам

$$\bar{X} = \frac{n_1 \bar{X}_1 + n_2 \bar{X}_2}{n_1 + n_2}, \quad S^2 = \frac{(n_1 - 1) S_1^2 + (n_2 - 1) S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}.$$

19. 164°

① $U = \frac{\bar{x} - m}{S/\sqrt{n_1+n_2}} \quad U \sim N(0,1) \quad \text{if } m \Rightarrow \text{sample mean}$

$P[4\frac{h}{2} < U < 4\frac{h}{2}] = 1 - h$

$P[4\frac{h}{2} < \frac{\bar{x} - m}{S/\sqrt{n_1+n_2}} < 4\frac{h}{2}] = 1 - h$

$P[\bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n_1+n_2}} 4\frac{h}{2} < m < \bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n_1+n_2}} 4\frac{h}{2}] = 1 - h$

$P[\bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n_1+n_2}} 4\frac{h}{2} < m < \bar{x} + \frac{S}{\sqrt{n_1+n_2}} 4\frac{h}{2}] = 1 - h$

$\Rightarrow (\bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n_1+n_2}} 4\frac{h}{2}, \bar{x} + \frac{S}{\sqrt{n_1+n_2}} 4\frac{h}{2})$

② $T = \frac{\bar{x} - m}{S/\sqrt{n_1+n_2}} \quad T \sim t(n_1+n_2-2)$

\Rightarrow because $n = n_1 + n_2$

$P[-t_{1-\frac{h}{2}}(n-2) < T < t_{1-\frac{h}{2}}(n-2)] = 1 - h$

$P[-t_{1-\frac{h}{2}}(n-2) < \frac{\bar{x} - m}{S/\sqrt{n}} < t_{1-\frac{h}{2}}(n-2)] = 1 - h$

$P[\bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{h}{2}}(n-2) < m < \bar{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{h}{2}}(n-2)] = 1 - h$

$\Rightarrow (\bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n_1+n_2}} t_{1-\frac{h}{2}}(n_1+n_2-2), \bar{x} + \frac{S}{\sqrt{n_1+n_2}} t_{1-\frac{h}{2}}(n_1+n_2-2))$

19.166. Время безотказной работы электронной лампы, если $n = 64$, $\bar{x} = 480$ ч.

N 19,186 (19,158)

x) 500 480 $\sigma = 10$

n) 100 64

$$\bar{x} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{\sum n_i} = \frac{50000 + 30720}{184} =$$

$$= \frac{20180}{41} \approx 492,195. \quad \text{~~492~~}$$

$$\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} m < \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} u_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$\sqrt{n} = \sqrt{184} \approx 12,808$$

a) $\alpha = 0,1 \quad u_{0,95} = 1,645$

$$492,195 - \frac{10}{12,806} \cdot 1,645 < m < 492,195 + \frac{10}{12,806} \cdot 1,645$$

$$\boxed{490,910 < m < 493,410}$$

b) $\alpha = 0,01 \quad u_{0,995} = 2,576$

$$492,195 - \frac{10}{12,806} \cdot 2,576 < m < 492,195 + \frac{10}{12,806} \cdot 2,576$$

$$\cdot 2,576 \Rightarrow \boxed{490,193 < m < 494,207}$$

19.167. Диаметр вала, если $n = 16$, $\bar{x} = 29$ мм, $s^2 = 4,5$ мм².

19.167 (18, 155)

x_1	30	29
n	9	16
s^2	9	4,5

$$\textcircled{1} \bar{x} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2}{n_1 + n_2} = \frac{240 + 464}{25} = 29,56$$

$$\textcircled{2} \sqrt{n} = 5$$

$$\textcircled{3} s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{\sum n - 2} = \frac{8 \cdot 9 + 15 \cdot 4,5}{23} = 6,045$$

~~$$\bar{x} = \frac{9}{5}$$~~

$$\bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} \left(t_{\alpha/2} (23) \right) \leq m \leq \bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} \left(t_{\alpha/2} (23) \right)$$

$$\text{a) } h = 0,1 \quad t_{0,95} (23) = 1,751 \quad \text{b) } h = 0,05 \quad t_{0,975} = 2,069$$

$$29,56 \pm 1,751 \leq m \leq 30,206$$

$$29,994 \leq m \leq 30,569$$

19.168. Содержание углерода в единице продукта, если $n = 9$, $\bar{x} = 18,8$ г, $s^2 = 20$ г².

$$M: 18,100 \quad (18,100)$$

$$n: 25$$

$$\bar{x}: 18,8 \quad 18$$

$$s^2: 20,2 \quad 16$$

$$\bar{x} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{n_1 + n_2} = \frac{468,2 + 650}{34} =$$

$$= 18,21$$

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1) s_1^2 + (n_2 - 1) s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{8 \cdot 20 + 24 \cdot 16}{32}$$

$$= \frac{160 + 384}{32} = 13,5$$

$$\sqrt{n} = 5,83$$

$$\bar{x} - \frac{13,5}{5,83} \cdot 48 - \frac{1}{2} < m < \bar{x} + \frac{9}{\sqrt{n}} \cdot 48 - \frac{1}{2}$$

$$a) \quad h = 0,1 \quad 48 - \frac{1}{2} = 47,5 \quad 9,455 \cdot 5 \pm 47,5$$

$$= 1,654$$

$$48,212 - \frac{\sqrt{14}}{5,731} \approx 1,037 \text{ cm} \approx 10,372$$

$$7 \frac{\sqrt{14}}{5,731} \approx 1,052$$

$$13,412 > m > 14,012$$

$$d) h = 0,01 \text{ to } 0,995 (321) \approx 2,35$$

$$11,212 - \frac{\sqrt{14}}{5,731} \approx 2,35 \text{ cm} \approx 2,352 + \frac{\sqrt{14}}{5,731} \approx 2,352$$

$$16,207 \text{ cm} \approx 24,152 \quad \text{Om } (13,012, 14,412, 15,812, 17,212, 18,612, 20,012, 21,412, 22,812, 24,212, 25,612, 27,012, 28,412, 29,812, 31,212, 32,612, 34,012, 35,412, 36,812, 38,212, 39,612, 41,012, 42,412, 43,812, 45,212, 46,612, 48,012, 49,412, 50,812, 52,212, 53,612, 55,012, 56,412, 57,812, 59,212, 60,612, 62,012, 63,412, 64,812, 66,212, 67,612, 69,012, 70,412, 71,812, 73,212, 74,612, 76,012, 77,412, 78,812, 80,212, 81,612, 83,012, 84,412, 85,812, 87,212, 88,612, 90,012, 91,412, 92,812, 94,212, 95,612, 97,012, 98,412, 99,812, 100,212, 101,612, 103,012, 104,412, 105,812, 107,212, 108,612, 110,012, 111,412, 112,812, 114,212, 115,612, 117,012, 118,412, 119,812, 121,212, 122,612, 124,012, 125,412, 126,812, 128,212, 129,612, 131,012, 132,412, 133,812, 135,212, 136,612, 138,012, 139,412, 140,812, 142,212, 143,612, 145,012, 146,412, 147,812, 149,212, 150,612, 152,012, 153,412, 154,812, 156,212, 157,612, 159,012, 160,412, 161,812, 163,212, 164,612, 166,012, 167,412, 168,812, 170,212, 171,612, 173,012, 174,412, 175,812, 177,212, 178,612, 180,012, 181,412, 182,812, 184,212, 185,612, 187,012, 188,412, 189,812, 191,212, 192,612, 194,012, 195,412, 196,812, 198,212, 199,612, 201,012, 202,412, 203,812, 205,212, 206,612, 208,012, 209,412, 210,812, 212,212, 213,612, 215,012, 216,412, 217,812, 219,212, 220,612, 222,012, 223,412, 224,812, 226,212, 227,612, 229,012, 230,412, 231,812, 233,212, 234,612, 236,012, 237,412, 238,812, 240,212, 241,612, 243,012, 244,412, 245,812, 247,212, 248,612, 250,012, 251,412, 252,812, 254,212, 255,612, 257,012, 258,412, 259,812, 261,212, 262,612, 264,012, 265,412, 266,812, 268,212, 269,612, 271,012, 272,412, 273,812, 275,212, 276,612, 278,012, 279,412, 280,812, 282,212, 283,612, 285,012, 286,412, 287,812, 289,212, 290,612, 292,012, 293,412, 294,812, 296,212, 297,612, 299,012, 300,412, 301,812, 303,212, 304,612, 306,012, 307,412, 308,812, 310,212, 311,612, 313,012, 314,412, 315,812, 317,212, 318,612, 320,012, 321,412, 322,812, 324,212, 325,612, 327,012, 328,412, 329,812, 331,212, 332,612, 334,012, 335,412, 336,812, 338,212, 339,612, 341,012, 342,412, 343,812, 345,212, 346,612, 348,012, 349,412, 350,812, 352,212, 353,612, 355,012, 356,412, 357,812, 359,212, 360,612, 362,012, 363,412, 364,812, 366,212, 367,612, 369,012, 370,412, 371,812, 373,212, 374,612, 376,012, 377,412, 378,812, 380,212, 381,612, 383,012, 384,412, 385,812, 387,212, 388,612, 390,012, 391,412, 392,812, 394,212, 395,612, 397,012, 398,412, 399,812, 401,212, 402,612, 404,012, 405,412, 406,812, 408,212, 409,612, 411,012, 412,412, 413,812, 415,212, 416,612, 418,012, 419,412, 420,812, 422,212, 423,612, 425,012, 426,412, 427,812, 429,212, 430,612, 432,012, 433,412, 434,812, 436,212, 437,612, 439,012, 440,412, 441,812, 443,212, 444,612, 446,012, 447,412, 448,812, 450,212, 451,612, 453,012, 454,412, 455,812, 457,212, 458,612, 460,012, 461,412, 462,812, 464,212, 465,612, 467,012, 468,412, 469,812, 471,212, 472,612, 474,012, 475,412, 476,812, 478,212, 479,612, 481,012, 482,412, 483,812, 485,212, 486,612, 488,012, 489,412, 490,812, 492,212, 493,612, 495,012, 496,412, 497,812, 499,212, 500,612, 502,012, 503,412, 504,812, 506,212, 507,612, 509,012, 510,412, 511,812, 513,212, 514,612, 516,012, 517,412, 518,812, 520,212, 521,612, 523,012, 524,412, 525,812, 527,212, 528,612, 530,012, 531,412, 532,812, 534,212, 535,612, 537,012, 538,412, 539,812, 541,212, 542,612, 544,012, 545,412, 546,812, 548,212, 549,612, 551,012, 552,412, 553,812, 555,212, 556,612, 558,012, 559,412, 560,812, 562,212, 563,612, 565,012, 566,412, 567,812, 569,212, 570,612, 572,012, 573,412, 574,812, 576,212, 577,612, 579,012, 580,412, 581,812, 583,212, 584,612, 586,012, 587,412, 588,812, 590,212, 591,612, 593,012, 594,412, 595,812, 597,212, 598,612, 600,012, 601,412, 602,812, 604,212, 605,612, 607,012, 608,412, 609,812, 611,212, 612,612, 614,012, 615,412, 616,812, 618,212, 619,612, 621,012, 622,412, 623,812, 625,212, 626,612, 628,012, 629,412, 630,812, 632,212, 633,612, 635,012, 636,412, 637,812, 639,212, 640,612, 642,012, 643,412, 644,812, 646,212, 647,612, 649,012, 650,412, 651,812, 653,212, 654,612, 656,012, 657,412, 658,812, 660,212, 661,612, 663,012, 664,412, 665,812, 667,212, 668,612, 670,012, 671,412, 672,812, 674,212, 675,612, 677,012, 678,412, 679,812, 681,212, 682,612, 684,012, 685,412, 686,812, 688,212, 689,612, 691,012, 692,412, 693,812, 695,212, 696,612, 698,012, 699,412, 700,812, 702,212, 703,612, 705,012, 706,412, 707,812, 709,212, 710,612, 712,012, 713,412, 714,812, 716,212, 717,612, 719,012, 720,412, 721,812, 723,212, 724,612, 726,012, 727,412, 728,812, 730,212, 731,612, 733,012, 734,412, 735,812, 737,212, 738,612, 740,012, 741,412, 742,812, 744,212, 745,612, 747,012, 748,412, 749,812, 751,212, 752,612, 754,012, 755,412, 756,812, 758,212, 759,612, 761,012, 762,412, 763,812, 765,212, 766,612, 768,012, 769,412, 770,812, 772,212, 773,612, 775,012, 776,412, 777,812, 779,212, 780,612, 782,012, 783,412, 784,812, 786,212, 787,612, 789,012, 790,412, 791,812, 793,212, 794,612, 796,012, 797,412, 798,812, 800,212, 801,612, 803,012, 804,412, 805,812, 807,212, 808,612, 810,012, 811,412, 812,812, 814,212, 815,612, 817,012, 818,412, 819,812, 821,212, 822,612, 824,012, 825,412, 826,812, 828,212, 829,612, 831,012, 832,412, 833,812, 835,212, 836,612, 838,012, 839,412, 840,812, 842,212, 843,612, 845,012, 846,412, 847,812, 849,212, 850,612, 852,012, 853,412, 854,812, 856,212, 857,612, 859,012, 860,412, 861,812, 863,212, 864,612, 866,012, 867,412, 868,812, 870,212, 871,612, 873,012, 874,412, 875,812, 877,212, 878,612, 880,012, 881,412, 882,812, 884,212, 885,612, 887,012, 888,412, 889,812, 891,212, 892,612, 894,012, 895,412, 896,812, 898,212, 899,612, 901,012, 902,412, 903,812, 905,212, 906,612, 908,012, 909,412, 910,812, 912,212, 913,612, 915,012, 916,412, 917,812, 919,212, 920,612, 922,012, 923,412, 924,812, 926,212, 927,612, 929,012, 930,412, 931,812, 933,212, 934,612, 936,012, 937,412, 938,812, 940,212, 941,612, 943,012, 944,412, 945,812, 947,212, 948,612, 950,012, 951,412, 952,812, 954,212, 955,612, 957,012, 958,412, 959,812, 961,212, 962,612, 964,012, 965,412, 966,812, 968,212, 969,612, 971,012, 972,412, 973,812, 975,212, 976,612, 978,012, 979,412, 980,812, 982,212, 983,612, 985,012, 986,412, 987,812, 989,212, 990,612, 992,012, 993,412, 994,812, 996,212, 997,612, 999,012, 1000,412, 1001,812, 1003,212, 1004,612, 1006,012, 1007,412, 1008,812, 1010,212, 1011,612, 1013,012, 1014,412, 1015,812, 1017,212, 1018,612, 1020,012, 1021,412, 1022,812, 1024,212, 1025,612, 1027,012, 1028,412, 1029,812, 1031,212, 1032,612, 1034,012, 1035,412, 1036,812, 1038,212, 1039,612, 1041,012, 1042,412, 1043,812, 1045,212, 1046,612, 1048,012, 1049,412, 1050,812, 1052,212, 1053,612, 1055,012, 1056,412, 1057,812, 1059,212, 1060,612, 1062,012, 1063,412, 1064,812, 1066,212, 1067,612, 1069,012, 1070,412, 1071,812, 1073,212, 1074,612, 1076,012, 1077,412, 1078,812, 1080,212, 1081,612, 1083,012, 1084,412, 1085,812, 1087,212, 1088,612, 1090,012, 1091,412, 1092,812, 1094,212, 1095,612, 1097,012, 1098,412, 1099,812, 1101,212, 1102,612, 1104,012, 1105,412, 1106,812, 1108,212, 1109,612, 1111,012, 1112,412, 1113,812, 1115,212, 1116,612, 1118,012, 1119,412, 1120,812, 1122,212, 1123,612, 1125,012, 1126,412, 1127,812, 1129,212, 1130,612, 1132,012, 1133,412, 1134,812, 1136,212, 1137,612, 1139,012, 1140,412, 1141,812, 1143,212, 1144,612, 1146,012, 1147,412, 1148,812, 1150,212, 1151,612, 1153,012, 1154,412, 1155,812, 1157,212, 1158,612, 1160,012, 1161,412, 1162,812, 1164,212, 1165,612, 1167,012, 1168,412, 1169,812, 1171,212, 1172,612, 1174,012, 1175,412, 1176,812, 1178,212, 1179,612, 1181,012, 1182,412, 1183,812, 1185,212, 1186,612, 1188,012, 1189,412, 1190,812, 1192,212, 1193,612, 1195,012, 1196,412, 1197,812, 1199,212, 1200,612, 1202,012, 1203,412, 1204,812, 1206,212, 1207,612, 1209,012, 1210,412, 1211,812, 1213,212, 1214,612, 1216,012, 1217,412, 1218,812, 1220,212, 1221,612, 1223,012, 1224,412, 1225,812, 1227,212, 1228,612, 1230,012, 1231,412, 1232,812, 1234,212, 1235,612, 1237,012, 1238,412, 1239,812, 1241,212, 1242,612, 1244,012, 1245,412, 1246,812, 1248,212, 1249,612, 1251,012, 1252,412, 1253,812, 1255,212, 1256,612, 1258,012, 1259,412, 1260,812, 1262,212, 1263,612, 1265,012, 1266,412, 1267,812, 1269,212, 1270,612, 1272,012, 1273,412, 1274,812, 1276,212, 1277,612, 1279,012, 1280,412, 1281,812, 1283,212, 1284,612, 1286,012, 1287,412, 1288,812, 1290,212, 1291,612, 1293,012, 1294,412, 1295,812, 1297,212, 1298,612, 1300,012, 1301,412, 1302,812, 1304,212, 1305,612, 1307,012, 1308,412, 1309,812, 1311,212, 1312,612, 1314,012, 1315,412, 1316,812, 1318,212, 1319,612, 1321,012, 1322,412, 1323,812, 1325,212, 1326,612, 1328,012, 1329,412, 1330,812, 1332,212, 1333,612, 1335,012, 1336,412, 1337,812, 1339,212, 1340,612, 1342,012, 1343,412, 1344,812, 1346,212, 1347,612, 1349,012, 1350,412, 1351,812, 1353,212, 1354,612, 1356,012, 1357,412, 1358,812, 1360,212, 1361,612, 1363,012, 1364,412, 1365,812, 1367,212, 1368,612, 1370,012, 1371,412, 1372,812, 1374,212, 1375,612, 1377,012, 1378,412, 1379,812, 1381,212, 1382,612, 1384,012, 1385,412, 1386,812, 1388,212, 1389,612, 1391,012, 1392,412, 1393,812, 1395,212, 1396,612, 1398,012, 1399,412, 1400,812, 1402,212, 1403,612, 1405,012, 1406,412, 1407,812, 1409,212, 1410,612, 1412,012, 1413,412, 1414,812, 1416,212, 1417,612, 1419,012, 1420,412, 1421,812, 1423,212, 1424,612, 1426,012, 1427,412, 1428,812, 1430,212, 1431,612, 1433,012, 1434,412, 1435,812, 1437,212, 1438,612, 1440,012, 1441,412, 1442,812, 1444,212, 1445,612, 1447,012, 1448,412, 1449,812, 1451,212, 1452,612, 1454,012, 1455,412, 1456,812, 1458,212, 1459,612, 1461,012, 1462,412, 1463,812, 1465,212, 1466,612, 1468,012, 1469,412, 1470,812, 1472,212, 1473,612, 1475,012, 1476,412, 1477,812, 1479,212, 1480,612, 1482,012, 1483,412, 1484,812, 1486,212, 1487,612, 1489,012, 1490,412, 1491,812, 1493,212, 1494,612, 1496,012, 1497,412, 1498,812, 1500,212, 1501,612, 1503,012, 1504,412, 1505,812, 1507,212, 1508,612, 1510,012, 1511,412, 1512,812, 1514,212, 1515,612, 1517,012, 1518,412, 1519,812, 1521,212, 1522,612, 1524,012, 1525,412, 1526,812, 1528,212, 1529,612, 1531,012, 1532,412, 1533,812, 1535,212, 1536,612, 1538,012, 1539,412, 1540,812, 1542,212, 1543,612, 1545,012, 1546,412, 1547,812, 1549,212, 1550,612, 1552,012, 1553,412, 1554,812, 1556,212, 1557,612, 1559,012, 1560,412, 1561,812, 1563,212, 1564,612, 1566,012, 1567,412, 1568,812, 1570,212, 1571,612, 1573,012, 1574,412, 1575,812, 1577,212, 1578,612, 1580,012, 1581,412, 1582,812, 1584,212, 1585,612, 1587,012, 1588,412, 1589,812, 1591,212, 1592,612, 1594,012, 1595,412, 1596,812, 1598,212, 1599,612, 1601,012, 1602,412, 1603,812, 1605,212, 1606,612, 1608,012, 1609,412, 1610,812, 1612,212, 1613,612, 1615,012, 1616,412, 1617,812, 1619,212, 1620,612, 1622,012, 1623,412, 1624,812, 1626,212, 1627,612, 1629,012, 1630,412, 1631,812, 1633,212, 1634,612, 1636,012, 1637,412, 1638,812, 1640,212, 1641,612, 1643,012, 1644,412, 1645,812, 1647,212, 1648,612, 1650,012, 1651,412, 1652,812, 1654,212, 1655,612, 1657,012, 1658,412, 1659,812, 1661,212, 1662,612, 1664,012, 1665,412, 1666,812, 1668,212, 1669,612, 1671,012, 1672,412, 1673,812, 1675,212, 1676,612, 1678,012, 1679,412, 1680,812, 1682,212, 1683,612, 1685,012, 1686,412, 1687,812, 1689,212, 1690,612, 1692,012, 1693,412, 1694,812, 1696,212, 1697,612, 1699,012, 1700,412, 1701,812, 1703,212, 1704,612, 1706,012, 1707,412, 1708,812, 1710,212, 1711,612, 1713,012, 1714,412, 1715,812, 1717,212, 1718,612, 1720,012, 1721,412, 1722,812, 1724,212, 1725,612, 1727,012, 1728,412, 1729,812, 1731,212, 1732,612, 1734,012, 1735,412, 1736,812, 1738,212, 1739,612, 1741,012, 1742,412, 1743,812, 1745,212, 1746,612, 1748,012, 1749,412, 1750,812, 1752,212, 1753,612, 1755,012, 1756,412, 1757,812, 1759,212, 1760,612, 1762,012, 1763,412, 1764,812, 1766,212, 1767,612, 1769,012, 1770,412, 1771,812, 1773,212, 1774,612, 1776,012, 1777,412, 1778,812, 1780,212, 1781,612, 1783,012, 1784,412, 1785,812, 1787$$

19.169*. Показать, что если m известно, а оценка дисперсии равна $\tilde{\sigma}^2 = s_0^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - m)^2$, то доверительный интервал для дисперсии при доверительной вероятности $1 - \alpha$ имеет вид

$$\frac{ns_0^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n)} < \sigma^2 < \frac{ns_0^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n)},$$

где $\chi_p^2(n)$ — квантиль распределения χ^2 с n степенями свободы.

N+9, 10g

$$S_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sim \frac{\sigma^2}{n} \chi^2(n)$$

$$P\left[\chi^2_{1-\alpha/2}(n) \leq \frac{n S_0^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{\alpha/2}(n)\right] = 1-\alpha$$

$$P\left[\frac{n S_0^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)} \leq \sigma^2 \leq \frac{n S_0^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}\right] = 1-\alpha$$

Ans. g.

19.170. Показать, что если m неизвестно, $\tilde{m} = \bar{x}$, а $\tilde{\sigma}^2 = s^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2$, то доверительный интервал для дисперсии при доверительной вероятности $1 - \alpha$ имеет вид

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}.$$

При решении задач 19.171–19.173 используются доверительные интервалы для дисперсии, полученные в задачах 19.169 и 19.170.

$$19. \quad 140 \quad s^2 \sim \frac{s^2}{n-1} x^2(n-1)$$

$$\frac{n-1}{s^2} s^2 \sim x^2(n-1) \quad P \left[\frac{s^2}{x^2(n-1)} < \frac{n-1}{s^2} s^2 < \frac{s^2}{x^2(n-1)} \right] = 1 - \alpha$$

$$P \left[\frac{(n-1)s^2}{x^2(n-1)} < \frac{(n-1)s^2}{x^2(n-1)} \right] = 1 - \alpha \quad \text{ETD}$$

кам.

19.176*. Показать, что если дисперсии обеих совокупностей известны, то доверительный интервал для разности средних $m_1 - m_2$ определяется формулой:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - u_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < m_1 - m_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + u_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}.$$

19, 140

$$x_1 \sim N(\mu) \quad x_2 \sim N(\mu)$$

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}})$$

margin: $\frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$

$$P\left[\frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \leq -k\right] = 1 - k$$

$$P\left[(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right] = 1 - \alpha$$

$$P\left[(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right] = 1 - \alpha$$

G. M. G.

19.177*. Пусть $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, величина σ^2 неизвестна, а в качестве оценки σ^2 используется статистика

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}.$$

§ 3. Интервальные оценки

243

Показать, что доверительный интервал для разности средних $m_1 - m_2$ определяется формулой

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{1-\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} < \\ < m_1 - m_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{1-\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}.$$

$$19. \text{ 144 } X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \quad \bar{X}_1 \sim N(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1})$$

$$X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2) \quad \bar{X}_2 \sim N(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

$$X_1 - X_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}})$$

$$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}^2 = \sigma_{\bar{X}_1}^2 + \sigma_{\bar{X}_2}^2 \Rightarrow s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$\frac{s_1^2(n_1 - 1)}{s^2} \sim \chi^2(n_1 - 1)$$

$$\frac{s_2^2(n_2 - 1)}{s^2} \sim \chi^2(n_2 - 1)$$

$$s^2 = \frac{s_1^2(n_1 - 1) + s_2^2(n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$= \frac{s^2}{n_1 + n_2 - 2} \chi^2(n_1 + n_2 - 2) \quad \text{Z. T. B.}$$

19.183. Из большой партии транзисторов одного типа были случайным образом отобраны и проверены 100 штук. У 36 транзисторов коэффициент усиления оказался меньше 10. Найти 95 %-ный доверительный интервал для доли таких транзисторов во всей партии.

19.103

$$n = 100$$

$$h = 36 \sim N(p, \sqrt{pq/n})$$

$$\tilde{p} = 0,36$$

$$V = \frac{h-p}{\sqrt{pq/n}} \sim N(0, 1)$$

$$P\left[\frac{h-p}{\sqrt{pq/n}} \leq u + \frac{1}{2}\right] \approx 1 - \alpha$$

$$h - u + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{pq}{n}} < p < h + u + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

$$p = \tilde{p} \quad q = 1 - \tilde{p}$$

$$h - u + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}} < p < h + u + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}$$

$$u + \frac{1}{2} \quad u_{0,995} = 1,96$$

$$0,36 - 1,96 \sqrt{\frac{0,36 \cdot 0,64}{100}} < p < 0,36 + 1,96 \sqrt{\frac{0,36 \cdot 0,64}{100}}$$

$$\boxed{0,266 < p < 0,454}$$

20 2000 1000000

19.184. С автоматической линии, производящей подшипники, было отобрано 400 штук, причем 10 оказалось бракованными. Найти 90 %-ный доверительный интервал для вероятности появления бракованного подшипника. Сколько подшипников надо проверить, чтобы с вероятностью 0,9973 можно было утверждать, что вероятность появления бракованного подшипника не отличается от частоты более чем на 5 %?

10, 174

$$n = 400$$

$$h = 10$$

$$\hat{p} = \frac{1}{40} \oplus h = 10\%$$

$$1 - \frac{h}{n} = 0,975$$

$$\oplus 0,025$$

$$h - 4 \cdot \frac{h}{n} \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}} < p < h + 4 \cdot \frac{h}{n} \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}$$

$$0,025 - 4 \cdot \frac{10}{400} \sqrt{\frac{0,025 \cdot 0,975}{400}} < p < 0,025 + 4 \cdot \frac{10}{400} \sqrt{\frac{0,025 \cdot 0,975}{400}}$$

$$\sqrt{\frac{0,025 - 0,975}{400}} \Rightarrow 0,010 < p < 0,038$$

$$② |h - p| < 4 \cdot \frac{h}{n} \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}} \leq 0,05$$

$$4 \cdot \frac{h}{n} \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}} \leq 0,05$$

$$1 - h = 0,9973 \rightarrow h = 0,0027 \rightarrow 1 - \frac{h}{n} = 0,9973$$

$$h = 3,09$$

$$3,09 \sqrt{\frac{10/400 \cdot 1 - 10}{400}} \leq 0,05$$

19.185. В 10 000 сеансах игры с автоматом выигрыш появился 4000 раз. Найти 95 %-ный доверительный интервал для вероятности выигрыша. Сколько сеансов игры следует провести, чтобы с вероятностью 0,99 вероятность выигрыша отличалась от частоты не более чем на 1 %?

N 19. 185.

$$|h - p| \leq 0,01$$

a) 95%

$$n = 10\ 000$$

$$h = \frac{4000}{10\ 000} = 0,4$$

$$u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0,975} = 1,96$$

$$h - u_{1-\frac{\alpha}{2}} - \frac{h}{2} \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}} < p < h + u_{1-\frac{\alpha}{2}} - \frac{h}{2} \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}$$

$$0,4 - 1,96 \sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{10\ 000}} < p < 0,4 + 1,96 \sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{10\ 000}}$$

$$0,39 < p < 0,41$$

б) Предположим, что $h = 1$

$$|h - p| \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}} - \frac{h}{2} \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}$$

$$\text{но для } |h - p| \leq 0,01$$

$$1 - h = 0,995 \Rightarrow h = 0,005 \Rightarrow 1 - \frac{h}{2} = 0,9975$$

$$u_{0,9975} = 2,576$$

$$\Rightarrow 2,576 \sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{10\ 000}} \leq 0,01 \Rightarrow n = 15\ 926$$

не более чем на 1 %:

19.186. При осмотре 60 ящиков обнаружено 10 поврежденных. Найти 90 %-ный доверительный интервал для доли поврежденных ящиков во всей партии.

19.187. Из партии, состоящей из 1000 изделий, извлечены 100 изделий, из которых 10 поврежденных.

$$19,186 \quad n=60 \quad h=10 \quad \bar{p} = \frac{1}{6}$$

$$L=10$$

$$h - 6\sigma \frac{L}{n} \sqrt{\frac{n\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} \leq p \leq h + 6\sigma \frac{L}{n} \sqrt{\frac{n\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

$$6\sigma = \frac{L}{\bar{p}} = 60,35 \approx 1,645$$

$$\frac{1}{6} - 1,645 \sqrt{\frac{10 \cdot 50}{60}} \leq p \leq \frac{1}{6} + 1,645 \sqrt{\frac{10 \cdot 50}{60}}$$

$$[0,078 \leq p \leq 0,246]$$

...и белых шаров.

19.187. Из урны, содержащей неотличимые на ощупь черные и белые шары в неизвестной пропорции, случайным образом извлекается 100 шаров (с возвращением). Найти: а) 90 %-ный и б) 95 %-ный доверительные интервалы для доли черных шаров, если среди вынутых шаров оказалось 30 черных.

19, 187

 $n=100$ a) $h=10\%$ $\sigma/h=5\%$ $h=30$

$$\hat{p} = h = \frac{30}{100}$$

$$a) \quad h_1 - \frac{h}{2} = 4,95 = 1,045$$

$$h - h_1 - \frac{h}{2} \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}} < p < h + h_1 - \frac{h}{2} \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}$$

$$0,3 - 1,045 \sqrt{\frac{0,3 \cdot 0,7}{100}} < p < 0,3 + 1,045 \sqrt{\frac{0,3 \cdot 0,7}{100}}$$

$$0,225 < p < 0,375$$

$$b) \quad h_1 - \frac{h}{2} = 4,955 = 1,96$$

$$0,3 - 1,96 \sqrt{\frac{0,3 \cdot 0,7}{100}} < p < 0,3 + 1,96 \sqrt{\frac{0,3 \cdot 0,7}{100}}$$

$$0,210 < p < 0,390$$

19.188. Для проверки утверждения о том, что вероятность отказа прибора p равна 0,01, было проведено испытание 100 приборов, при этом один из приборов отказал. Построить 95 %-ную верхнюю границу одностороннего доверительного интервала для p по этим данным.

19, 188

$$p = 0,01 \quad n = 100 \quad h = \frac{1}{100} \quad 95\%$$

$$P\left[\frac{h-p}{\sqrt{pq/n}}\right] < u_{1-\alpha} \approx 1-\alpha$$

$$p < h + u_{1-\alpha} \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

$$p < h + u_{1-\alpha} \sqrt{h(1-h)}$$

$$u_{1-\alpha} \approx 0,95 = 1,645$$

$$p < \frac{1}{100} + 1,645 \sqrt{\frac{1}{100} \left(1 - \frac{1}{100}\right)} = 0,026$$

