Задачи по учебнику: **Сборник_задач_по_математике_для_втузов_В_4_х_ч_Ч_4_ред_Ефимов**:

19.62-19.69 19.254-19.255 19.418-19.420, 19.307-19.313, 19.322-19.327, 19.329-19.331, 19.335-19.338, 19.340,19.345

19.62. Показать, что выборочный коэффициент корреляции по выборке $(x_i,\, y_i)$, $i = 1,\, \ldots,\, n$, вычисляется по формуле

$$r = \frac{\sum (x_i - \overline{x})\,(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\left(\sum (x_i - \overline{x})^2\right)\left(\sum (y_i - \overline{y})^2\right)}}\,.$$

№19.62 $r_{xy} = \dfrac{k_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$, k_{xy} – ковариационный момент

– смешанный центр. момент

$k_{xy} = \mu_{1,1}(2, 4)$ [illegible]

коэф корреляции

$\Rightarrow$ выбор. коэф корреляции

$\rho_{xy} = \dfrac{k^*_{xy}}{\sigma^*_x \sigma^*_y}$, k^*_{xy} – выбор. ковариац. момент

$k^*_{xy} = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \Rightarrow \rho = \dfrac{\frac{1}{n} \sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sqrt{\left(\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2\right)\left(\frac{1}{n} \sum (y_i [illegible]\right)}}$

$= \sum_{i=1}^{n} \dfrac{(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x - \bar{x})^2 (\sum y - \bar{y})^2}}$

Вычислить коэффициенты корреляции и построить диаграммы рассеивания для следующих выборок:

19.63.

x	8	10	5	8	9
y	1	3	1	2	3

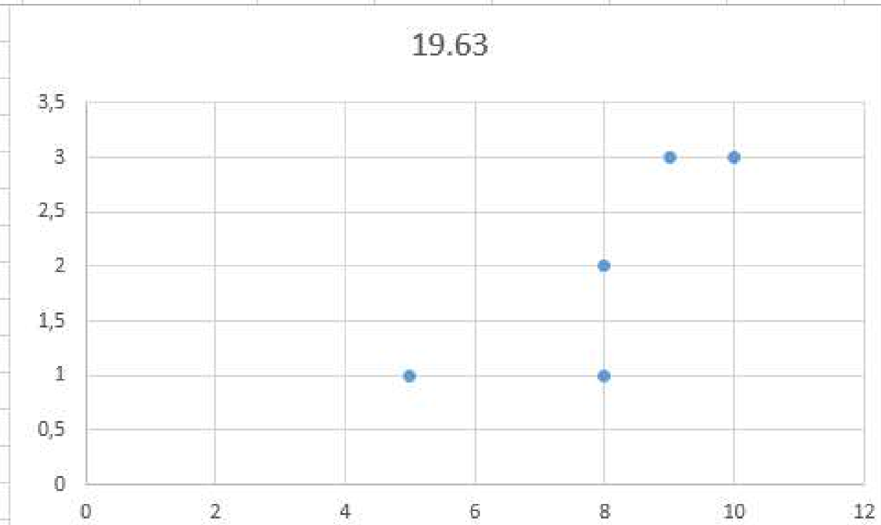
19.64.

x	9	10	12	5
y	6	4	7	3

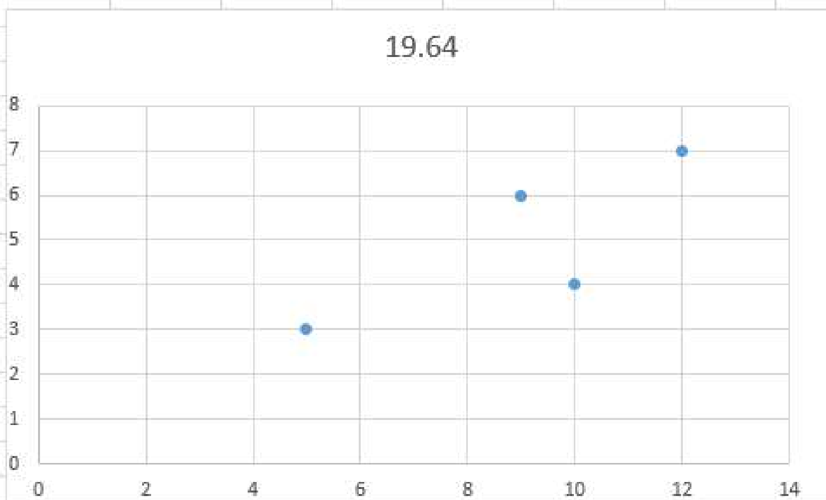
19.65.

x	10	2	7	5
y	8	2	6	4

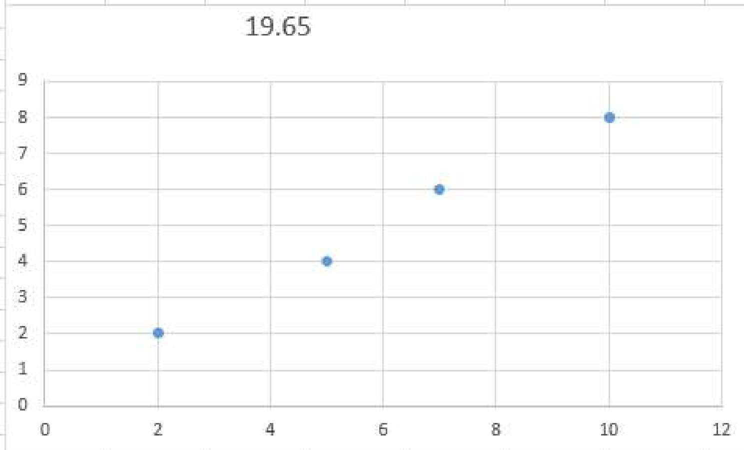
	x	y
	8	1
	10	3
	5	1
	8	2
	9	3
КОРРЕЛ	0,801784	



	x	y
	9	6
	10	4
	12	7
	5	3
КОРРЕЛ	0,806226	



	x	y
	10	8
	2	2
	7	6
	5	4
КОРРЕЛ	0,997054	



19.66*. Известно, что для некоторой выборки $D_X^* = 16$, $D_Y^* = 9$. Каково наибольшее значение ковариации?

N19.66 $\quad D_x^\circ = 16 \quad D_y^\circ = 9$

$$k_{xy}^\circ = \frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

$$\rho_{xy}^\circ = \frac{k_{xy}^\circ}{\sigma_x^\circ \sigma_y^\circ} = \frac{k_{xy}^\circ}{\sqrt{D_x^\circ D_y^\circ}} \leq 1 \Rightarrow k_{xy} = 1 \cdot \sqrt{D_x^\circ D_y^\circ} = 12$$

Ответ: $k_{xy}^\circ = 12$

19.67. Пусть над элементами выборки системы двух случайных величин (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, выполнено линейное преобразование $u_i = ax_i + b$, $v_i = cy_i + d$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Показать, что выборочные ковариации и коэффициент корреляции связаны соотношениями

$$k^*_{UV} = ack^*_{XY} \quad (ac > 0), \quad r_{UV} = r_{XY}.$$

N 12.66 $\quad D_x^\circ = 16 \quad D_y^\circ = 9$

$k_{xy}^\circ = \frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$

$\rho_{xy}^\circ = \frac{k_{xy}^\circ}{\sigma_x^\circ \sigma_y^\circ} = \frac{k_{xy}^\circ}{\sqrt{D_x^\circ D_y^\circ}} \le 1 \Rightarrow k_{xy} = 1 \cdot \sqrt{D_x^\circ D_y^\circ} = 12$

Ответ: $k_{xy}^\circ = 12$

N 12.67 $\quad k_{xy}^\circ = \frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$

$k^\circ = \frac{1}{n}\sum\left(ax_i + b - \left(\frac{a\sum x_i}{n} + \frac{nb}{n}\right)\right)\left(cy_i + d - \left(c\frac{\sum y_i}{n} - \frac{nd}{n}\right)\right)$

$= \frac{1}{n}\sum(ax_i + b - a\bar{x} - b)(cy_i + d - c\bar{y} - d) = \frac{1}{n}\sum($

$(ax_i - a\bar{x})(cy_i - c\bar{y}) = \frac{ac}{n}\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) =$

$= ac\,k_{xy}^\circ$

$\rho_{xy}^\circ = \frac{k_{xy}}{\sqrt{D_x^\circ D_y^\circ}} \qquad D_x^\circ = \frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})^2$

$D_y^\circ = \frac{1}{n}\sum\left(ax_i + b - \frac{\sum(ax_i + b)}{n}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum\left(ax_i + b - \right.$

$\left.\left(\frac{a\sum x_i + nb}{n}\right)\right)^2 = \frac{1}{n}\sum(ax_i + b - a\bar{x} - b)^2 =$

$= \frac{a^2}{n}\sum(x_i - \bar{x}) = a^2 D_x^\circ \quad D_v^\circ = c^2 D_y^\circ$

$\Rightarrow \rho_{uv}^\circ = \frac{k_{uv}}{\sqrt{D_u^\circ D_v}} = \frac{k_{xy}}{\sqrt{D_x^\circ D_y^\circ}} = \rho_{xy}$

$k_{UV} = ack_{XY} \quad (ac > 0), \quad r_{UV} = r_{XY}.$

Используя подходящее линейное преобразование, вычислить выборочный коэффициент корреляции для следующих выборок:

19.68.

x	55	71	53	67	81	75	59	89	65	81
y	206	116	221	113	32	128	248	113	284	215

19.69.

x	65,8	68,3	72,7	66,1	73,1	71,8	73,1	66,5
y	166,0	115,2	157,8	152,5	149,3	181,0	173,2	120,4

x	69,3	73,4	67,3	73,6	67,9	69,7	69,7
y	124,5	163,2	125,2	173,3	146,7	157,9	134,5

63					
64					
65		X	Y		
66		55	206		
67		71	116		
68		53	221		
69		67	113		
70		81	32		
71		75	128		
72		59	248		
73		89	113		
74		65	284		
75		81	215		
76					
77	КОРРЕЛ	-0,59639			
78					
79					

№ 19.69 $u_i = 10x_i - 650$ $v_i = 10y_i - 1152$

$$\rho_{xy}' = \rho_{uv}' = 0{,}54 = \frac{\sum(u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})}{\sqrt{\sum(u_i - \bar{u})^2 \sum(v_i - \bar{v})^2}}$$

Ответ: 0,54

В задачах 19.254–19.260 предполагается, что выборки получены из генеральных совокупностей, имеющих двумерное нормальное распределение.

19.254. Выборочный коэффициент корреляции r, вычисленный по выборке объема $n = 39$, равен 0,25. Проверить значимость этого результата при альтернативных гипотезах: а) H_1: $\rho \neq 0$, б) H_1: $\rho > 0$. Принять $\alpha = 0{,}05$.

19.255. Проверить значимость коэффициента корреляции по следующим данным:

а) $r = -0{,}41$, $n = 52$, $\alpha = 0{,}1$, альтернативная гипотеза H_1: $\rho < 0$;

б) $r = 0{,}15$, $n = 39$, $\alpha = 0{,}01$, альтернативная гипотеза H_1: $\rho \neq 0$;

в) $r = -0{,}32$, $n = 103$, $\alpha = 0{,}05$, альтернативная гипотеза H_1: $\rho \neq 0$.

№ 19.69 $u_i = 10x_i - 659$ $v_i = 10y_i - 1152$

$\rho_{xy} = \rho_{uv} = 0{,}54 = \frac{\sum(u-\bar{u})(v-\bar{v})}{\sqrt{\sum(u-\bar{u})^2 \sum(v-\bar{v})^2}}$

Ответ: 0,54

№ 19.254

а) $H_0: \rho = 0$ $H_1: \rho \neq 0$

$|\rho| > \frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)}{\sqrt{n-2+t^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)}}$

$|0{,}25| > \frac{t_{0,975}(39-2)}{\sqrt{39-2+t^2_{0,975}(39-2)}}$

$|0{,}25| > \frac{2{,}026}{\sqrt{37+2{,}026^2}} = 0{,}316 \Rightarrow H_0$ принимаем

$\Rightarrow$ нет корреляции x и y

б) критич. обл-ть: $\rho' > \frac{t_{1-\alpha}(n-2)}{\sqrt{n-2+t^2_{1-\alpha}(n-2)}}$

а) обл-ть принятия № 19.255

$\rho' > \frac{t_2(n-2)}{\sqrt{n-2+t_2^2(n-2)}}$

$-0{,}44 > \frac{t_{3,1}(50)}{\sqrt{52-2+t^2_{3,1}(50)}} = -\frac{1{,}299}{\sqrt{50+1{,}293}} = -0{,}1..$

=> Но отклон => есть зависимость

б) область принятия

$1-0{,}321 < \frac{t_{0,945}(100-1)}{\sqrt{103-2+t^2_{0,905}(100-1)}} = \frac{1{,}924}{\sqrt{101-1{,}985^2}}$

= 0,201 => Но отклон => есть зависим

д) $|0{,}15| > \frac{t_{0,995}(37)}{\sqrt{37+t^2_{0,995}(37)}} = \frac{2{,}715}{\sqrt{37{,}296}} = 0{,}445$

=> Но принимается => нет коррел

19.418. Бегуны, ранги которых при построении по росту были 1, 2, ..., 10, заняли на состязаниях следующие места:

$$6,\ 5,\ 1,\ 4,\ 2,\ 7,\ 8,\ 10,\ 3,\ 9.$$

Как велика ранговая корреляция между ростом и быстротой бега?

19.419. Цветные диски, имеющие порядок оттенков 1, 2, ..., 15, были расположены испытуемым в следующем порядке:

$$7,\ 4,\ 2,\ 3,\ 1,\ 10,\ 6,\ 8,\ 9,\ 5,\ 11,\ 15,\ 14,\ 12,\ 13.$$

Охарактеризовать способность испытуемого различать оттенки цветов с помощью коэффициентов ранговой корреляции между действительными и наблюдаемыми рангами.

19.420. Найти коэффициент ранговой корреляции между урожайностью пшеницы и картофеля на соседних полях по следующим данным:

Годы	1926	1927	1928	1929	1930	1931	1932	1933	1934	1935	1936	1937
Пшеница (ц)	20,1	23,6	26,3	19,9	16,7	23,2	31,4	33,5	28,2	35,3	29,3	30,5
Картофель (т)	7,2	7,1	7,4	6,1	6,0	7,3	9,4	9,2	8,8	10,4	8,0	9,7

N 19.417

$$r_s = 1 - \frac{6\sum(x_i - y_i)^2}{n(n^2-1)}$$

$$r_s = 1 - \frac{6(5^2+8^2+2^2+ \ldots)}{10(10^2-1)} =$$

$= 0,455$

N 19.419 $$1 - \frac{6(36+4+1+1+16+16+25+ \ldots)}{15(225-1)}$$

$= 0,483$

N 19.420 $$r_s = 1 - \frac{6(1+4+1+4+1+1+4)}{21(441-1)} = 0,444$$

19.308. Показать, что сумма остатков $\sum e_i$ равна нулю.

19.309. Для представления некоторых данных предполагается использовать модель $y = \beta_0 + \beta_1 x$, где значение β_1 известно. Найти оценку параметра β_0.

19.310. В модели $y = \beta_0 + \beta_1 x$ параметр β_0 известен. Найти оценку параметра β_1.

N 19.307

$l_i = y_i - \hat{y}_i \qquad \hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$

$\sum (y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i)) = \sum y_i - n\bar{y} + n\hat{\beta}_1 \bar{x} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$

$\sum x_i = \sum y_i - n \sum y_i \cdot \hat{\beta}_1 \cdot \frac{n \sum x_i}{n} - \hat{\beta}_1 \sum x_i = 0$

N 19.309 $\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$

N 19.310.

$\beta_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \Rightarrow \bar{y} = \beta_0 + \hat{\beta}_1 \bar{x}$

$\beta_1 = \dfrac{\sum x_i y_i - \frac{1}{n}(\sum x_i)(\sum y_i)}{\sum x_i^2 - \frac{1}{n}(\sum x_i)^2} = \dfrac{\sum x_i y_i - (\beta_0 + \hat{\beta}_1 \bar{x})}{\sum x_i^2 - \frac{1}{n}(\sum x_i)^2}$

$\Rightarrow \hat{\beta}_1 (\sum x_i^2 - \frac{1}{n}(\sum x_i)^2) = \sum x_i y_i - (\beta_0 + \hat{\beta}_1 \bar{x}) \sum x$

$\beta_1 (\sum x_i - \frac{1}{n}(\sum x_i)^2 + \beta_0 + \frac{1}{n} \sum x_i \cdot \sum x_i) =$

$= \sum x_i y_i - \beta_0 \sum x_i \Rightarrow 2\hat{\beta}_1 = \dfrac{\sum x_i y_i - \beta_0 \sum x}{\sum x_i^2}$

Ответ: $\hat{\beta}_1 = \dfrac{\sum x_i y_i - \beta_0 \sum x_i}{\sum x_i^2}$

19.311. Показать, что точка $(\overline{x}, \overline{y})$ лежит на прямой $y = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x$.

В задачах 19.312–19.315 исследуются статистические свойства МНК-оценок параметров линейной регрессии. Оценки $\tilde{\beta}_0$ и $\tilde{\beta}_1$ (см. (7), (8)) являются линейными функциями случайных величин $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, причем ε_i удовлетворяют предположениям (4).

19.312*. Показать, что МНК-оценки параметров линейной регрессии являются несмещенными оценками этих параметров.

19.313*. Показать, что дисперсии оценок $\tilde{\beta}_1$ и $\tilde{\beta}_0$ равны соответственно

$$\mathrm{D}[\tilde{\beta}_1] = \frac{\sigma^2}{Q_x}, \quad \mathrm{D}[\tilde{\beta}_0] = \frac{\sigma^2 \sum x_i^2}{nQ_x}.$$

N 12.311 $\beta_0 = \bar{y} - b_1\bar{x}$

$y = \bar{y} - b_1\bar{x} + b_1 x \Rightarrow y = \bar{y} + b_1(x - \bar{x})$

в т-ке $(\bar{x}, \bar{y})$: $\bar{y} = \bar{y} + b_1(\bar{x} - \bar{x}) \Rightarrow \bar{y} = \bar{y}$ р-во

$\Rightarrow$ т. принадлежит прямой

N 12.312

$k_{xy} = cov(x, y) = cov(x, b_0 + b_1 x + \varepsilon) = cov(x, b_1 x) + cov(x, \varepsilon) = b_1 D_x + cov(x, \varepsilon)$

$$\beta_1 = \frac{cov(x, y)}{D_x} = \frac{b_1 D_x + cov(x, \varepsilon)}{D_x} = b_1 + \frac{cov(x, \varepsilon)}{D_x}$$

$$M[\hat{b}_1] = M\left[b_1 + \frac{cov(x, \varepsilon)}{D_x}\right] = b_1 + \frac{1}{D_x} M(cov(x, \varepsilon)) = b_1 \Rightarrow$$ несмещенная оценка

$M[\hat{b}_0] = M[\bar{y} - b_1\bar{x}] = M[\bar{y}] - M[b_1\bar{x}] = M[b_0 + b_1\bar{x}] - \bar{x}M[b_1] = b_0 + b_1\bar{x} - \bar{x}b_1 = b_0 \Rightarrow$ несмещенная оценка

N 12.313

$$D[\hat{b}_0] = \sigma^2_{b_0} = \frac{\sigma^2 \sum x_i^2}{n\sum(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sigma^2 \sum x_i^2}{n q_x}$$

$$D[\hat{b}_1] = \sigma^2_{b_1} = \frac{\sigma^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sigma^2}{q_x}$$

19.322*. Показать, что границы доверительных интервалов для параметров линейной регрессии имеют вид

$$\tilde{\beta}_0 \pm t_{1-\alpha/2}\,(n-2)\,s\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{nQ_x}}\,,$$

$$\tilde{\beta}_1 \pm t_{1-\alpha/2}\,(n-2)\,s\sqrt{\frac{1}{Q_x}}\,.$$

Здесь $t_p(n-2)$ — квантиль распределения Стьюдента с $n-2$ степенями свободы порядка p, а $s = \sqrt{s^2}$, где s^2 — остаточная дис-

N 19.322

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sum(x_i-\bar{x})^2} = \frac{q_{xy}}{q_x} \quad \hat{\beta} = \bar{y} - \hat{\beta}_1 x^2$$

$$z = \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{s\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{x^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}}} = \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{s\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n\sum(x_i-\bar{x})^2}}} =$$

$$\Rightarrow t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2) < \frac{\hat{\beta}_0 - \beta}{s\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n\sum(x_i-\bar{x})^2}}} < t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)$$

$$\hat{\beta}_0 - t_{1-\alpha/2}(n-2)\, s\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{nq}} < \beta_0 < \hat{\beta}_0 - t_{1-\alpha/2}(n-2)\, s\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{nq_x}}$$

$$\hat{\beta} - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \text{ —"— }$$

Статистика критерия β_1: $z = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{s\sqrt{\frac{1}{\sum(x_i-\bar{x})^2}}} \sim t(n-2)$

$$\Rightarrow t_{\alpha/2}(n-2) < \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{s\sqrt{\frac{1}{\sum(x_i-\bar{x})^2}}} < t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)$$

$$\hat{\beta}_1 - t_{1-\alpha/2}(n-2)\, s\sqrt{\frac{1}{q_x}} < \beta_1 < \hat{\beta}_1 + t_{1-\alpha/2}(n-2)\, s\sqrt{\frac{1}{q_x}}$$

19.323*. Показать, что границы доверительного интервала для среднего значения Y_0, соответствующего заданному значению $x = x_0$, определяются формулой

$$\tilde{y}_0 \pm t_{1-\alpha/2}(n-2)\, s \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \overline{x})^2}{Q_x}}\,.$$

№ 19323

$\tilde{y}_0 = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x_0$

$$D[\tilde{y}_0] = \sigma^2_{\tilde{y}} = \sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2}\right)$$

$$Z = \frac{\tilde{y}_0 - y_0}{\sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2}\right)}$$

$$t_{\alpha/2}(n-2) < \frac{\tilde{y}_0 - y_0}{s^2\left(\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2}\right)} < t_{1-\alpha/2}(n-2)$$

$$\Rightarrow \tilde{y} - t_{1-\alpha/2}(n-2)\, s\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{q_x}} < y_0 < \tilde{y}_0 + t_{1-\alpha/2}(n-2)$$

$$s\sqrt{\frac{1}{n}\,\frac{(x_0 - \bar{x})^2}{q_x}}$$

19.324*. Показать, что доверительный интервал для дисперсии ошибок наблюдений σ^2 имеет вид

$$\frac{(n-2)\,s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-2)} < \sigma^2 < \frac{(n-2)\,s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-2)},$$

где $\chi^2_p(n-2)$ — квантиль распределения χ^2 с $n-2$ степенями свободы, а s^2 — остаточная дисперсия.

19.326*. Доказать тождество $Q_y = Q_R + Q_e$.

N 19.324

$$Z = \frac{S^2}{\sigma^2/(n-2)} \sim \chi^2(n-2) \Rightarrow \chi^2_{\alpha/2}(n-2) <$$

$$< \frac{S^2}{\sigma^2/(n-2)} < \chi^2_{1-\alpha/2}(n-2) \Rightarrow \frac{(n-2)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-2)}$$

$$< \sigma^2 < \frac{(n-2)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-2)}$$

N 19.326

$$Q_R + Q_e = \sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum(y_i - \hat{y}_i)^2 =$$

$$= \sum \hat{y}_i^2 - 2\sum \hat{y}_i \bar{y} + n\bar{y}^2 + \sum y_i^2 - 2\sum y_i \hat{y}_i +$$

$$+ \sum \hat{y}_i^2 = n\bar{y}^2 + \sum y_i^2 - 2\sum \hat{y}_i^2 - 2\hat{y}_i\bar{y} - \hat{y}_i\bar{y}$$

$$= n\bar{y}^2 + \sum y_i^2 - 2\sum y_i \bar{y} = \sum(y_i - \bar{y})^2 = Q$$

В задачах 19.329–19.332 по заданным выборкам найти оценки для параметров линейной регрессии Y на x, проверить значимость линейной регрессии и вычислить коэффициент корреляции. Найти границы доверительных интервалов для параметров линейной модели и для среднего значения Y при $x = x_0$.

Предполагается, что ошибки наблюдений независимы и имеют нормальное распределение $N(0, \sigma)$. Уровень значимости α задается. При вычислении следует использовать значения сумм переменных, их квадратов и попарных произведений.

19.329.

x	2	3	8	10	14	15
y	14,39	9,45	7,05	5,32	16,94	1,97

x	4	12	3	7	6
y	8,75	3,41	13,37	8,22	9,39

$$\sum x_i = 86, \quad \sum y_i = 98{,}26, \quad \sum x_i^2 = 868,$$

$$\sum y_i^2 = 1087{,}91, \quad \sum x_i y_i = 682{,}25, \quad \alpha = 0{,}05.$$

N 19.328

$$\tilde{\beta}_1 = \frac{\sum x_i y_i - \frac{1}{n}\sum x_i \cdot \sum y_i}{\sum x_i^2 - \frac{1}{n}(\sum x_i)^2} = -0{,}44$$

$$\tilde{\beta}_0 = \bar{y} - \tilde{\beta}_1 \bar{x} = 12{,}37$$

Проверка значимости: $H_0: \beta_1 = 0$; $\beta_1 \neq 0$

$$Z = \frac{\tilde{\beta}_1^2 \, q_{xx}}{S^2} \quad Z|H_0 \sim F(1, n-2)$$

$$\frac{\beta^2 q_x}{S^2} = \frac{\beta_1(\sum x_i^2 - n\bar{x}^2)}{q_e/n-2} = \frac{\beta_1(\sum x_i^2 - n\bar{x}^2)}{\frac{q_y - q^2}{n-2}} =$$

$$= \frac{(n-2)\beta_1^2(\sum x_i^2 - n\bar{x}^2)}{\sum y_i^2 - n\bar{y} - \beta_1^2(\sum x_i - 4\bar{x})} = -4{,}5$$

$0{,}002 < -4{,}5 < 7{,}21 \Rightarrow H_0$ отвл

$$R^2 = \frac{q_R}{q_y} \quad \text{коэф корреп } r = -\sqrt{R^2} = -\sqrt{\frac{q_R}{q_y}}$$

($\beta_1 < 0 \Rightarrow$ минимальн

$$r = -\sqrt{\frac{\beta_1^2(\sum x_i^2 - n\bar{x}^2)}{\sum y_i^2 - n\bar{y}}} = -0{,}424$$

Доверит. интервалы $\beta_0 \in b_0 \pm t_{1-\alpha/2}(n-2)\, S \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n\, Q_x}}$

$\beta_0 \in (6{,}95;\ 17{,}66)$

2) $\beta_1 \in b_1 \pm t_{1-\alpha/2}(n-2)\, S \sqrt{\frac{1}{Q_x}}$

$-3{,}44 \pm t_{1-\frac{0{,}05}{2}}(9) \sqrt{\frac{\sum y_i^2 - n\bar{y}^2 - b_1^2(\sum x_i^2 - n\bar{x}^2)}{(n-2)(\sum x_i^2 - n\bar{x}^2)}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \beta_1 \in (-1{,}15;\ 8{,}23)$

3) $y_0 \in \hat{y}_0 \pm t_{1-\alpha/2}(n-2)\, S \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{Q_x}}$

19.330.

x	2,7	4,6	6,3	7,8	9,2	10,6	12,0	13,4	14,7
y	17,0	16,2	13,3	13,0	9,7	9,9	6,2	5,8	5,7

$$\sum x_i = 81{,}3, \quad \sum y_i = 96{,}8, \quad \sum x_i^2 = 865{,}63,$$

$$\sum y_i^2 = 1194, \quad \sum x_i y_i = 735{,}7, \quad \alpha = 0{,}10.$$

N 19.830

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum x_i y_i - \frac{1}{n}\sum x_i \sum y_i}{\sum x_i^2 - \frac{1}{n}(\sum x_i)^2} = -1{,}06$$

$$\hat{\beta}_0 = \frac{1}{n}\sum y_i - \hat{\beta}_1 \frac{1}{n}\sum x_i = 20{,}3$$

$$Q_y = \sum y_i^2 - n\bar{y}^2 = 152{,}26 \quad Q_R = \frac{\hat{\beta}_1^2 (\sum x_i^2 - n\bar{x}^2)}{Q_x} = 147{,}41$$

$$S^2 = \frac{Q_e}{n-2} = \frac{Q_y - Q_R}{n-2} = 0{,}49 \Rightarrow S = 0{,}86$$

$$r = -\sqrt{\frac{Q_R}{Q_y}} = -0{,}98$$

Доб. интервал 1) $\hat{\beta}_0 \pm t_{1-\alpha/2}(n-2) S \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n Q_x}}$

$$Q_x = \sum x_i^2 - n\bar{x}^2 = 131{,}22 \Rightarrow \beta_0 \in (19{,}77;\ 21{,}6)$$

2) $\hat{\beta}_1 \pm t_{1-\alpha/2}(n-2) S \sqrt{\frac{1}{Q_x}} \Rightarrow \beta_1 \in (-1{,}2;\ -0{,}9)$

3) $\hat{y}_0 \pm t_{1-\alpha/2}(n-2) S \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{Q_x}}$

$$F_b = \frac{\hat{\beta}_1^2 Q_x}{S^2} = 197{,}5 \quad F_{1-\alpha/2}(1, n-2) < F_b \quad F_{1-\alpha/2}(1, n-2)$$

$\Rightarrow$ H_0 отклон

Считая, что зависимость между переменными x и Y имеет вид $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$, в задачах 19.335–19.338 найти оценки параметров по следующим выборкам:

19.335.

x	0	2	4	6	8	10
y	5	-1	$-0{,}5$	1,5	4,5	8,5

№ 19.335

$$\begin{cases} b_0 n + b_1 \sum x_i + b_2 \sum x_i^2 = \sum y_i \\ b_0 \sum x_i + b_1 \sum x_i^2 + b_2 \sum x_i^4 = \sum x_i y_i \\ b_0 \sum x_i^2 + b_1 \sum x_i^3 + b_2 \sum x_i^4 = \sum x_i^2 y_i \end{cases}$$

$n = 6$ $\sum x_i = 30$ $\sum x_i^2 = 220$ $\sum x_i^3 = 1800$ $\sum x^4 =$

$= 215664$ $\sum y_i = 18$ $\sum x_i y_i = 126$ $\sum x_i^2 y_i = 1170$

$$\begin{cases} 6b_0 + 30 b_1 + 220 b_2 = 18 \\ 30 b_0 + 220 b_1 + 1800 b_2 = 126 \\ 220 b_0 + 1800 b_1 + 15664 b_2 = 1170 \end{cases}$$

$\Rightarrow b_0 = 4$

$b_1 = -2{,}164$

$b_2 = 9{,}268$

Ответ: $y = 4 - 2{,}164x + 9{,}264x^2$

19.336.

x	0,07	0,31	0,61	0,99	1,29	1,78	2,09
y	1,34	1,08	0,94	1,06	1,25	2,01	2,60

19.33б

$\sum x_i = 7{,}14 \quad \sum x_i^2 = 10{,}65 \quad \sum x_i^3 = 11{,}14 \quad \sum x_i^4 = 32{,}99$

$\sum y_i = 10{,}28 \quad \sum x_i y_i = 12{,}67 \quad \sum x_i^2 y_i = 21{,}3 \quad n = 7$

$$\begin{cases} 7b_0 + 7{,}14\, b_1 + 10{,}65\, b_2 = 10{,}28 \\ 7{,}14\, b_0 + 10{,}65\, b_1 + 11{,}14\, b_2 = 12{,}67 \\ 10{,}65\, b_0 + 11{,}14\, b_1 + 32{,}99\, b_2 = 21{,}3 \end{cases}$$

$b_0 = 1{,}39$

$b_1 = -1{,}2$

$b_2 = -0{,}86$

Ответ: $y = 1{,}39 - 1{,}2x - 0{,}86x^2$

19.337.

x	26	30	34	38	42	46	50
y	3,94	4,60	5,67	6,93	8,25	7,73	10,55

19.338.

x	-2	-1	0	1	2
y	4,8	0,4	-3,4	0,8	3,2

19.337 $x_i = 266$ $\sum x_i^2 = 10566$ $\sum x_i^3 = 435476$

$\sum x_i^4 = 18524600$ $\sum y_i = 44{,}67$ $\sum x_i y_i = 1924{,}14$

$\sum x_i^2 y_i = 70648{,}50$ $n = 7$

$$\begin{cases} 7b_0 + 266b_1 + 10566b_2 = 44{,}67 \\ 266b_0 + 10566b_1 + 435476b_2 = 1924{,}14 \\ 10566b_0 + 435476b_1 + 18524600b_2 = 70648{,}50 \end{cases}$$

$\Rightarrow b_0 = 0{,}132$ $b_1 = 0{,}088$ $b_2 = 0{,}002$

Ответ: $y = 0{,}132 + 0{,}88x + 0{,}002x^2$

№19.337 $n = 5$ $\sum x_i = 0$ $\sum x_i^2 = 10$ $\sum x_i^3 = 0$

$\sum x_i^4 = 34$

$\sum y_i = 5{,}8$ $\sum x_i y_i = -2{,}8$ $\sum x_i^2 y_i = 33{,}2$

$$\begin{cases} 5b_0 + 10b_2 = 5{,}8 \\ 10b_1 = -2{,}8 \\ 10b_0 + 34b_2 = 33{,}2 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} b_0 &= 1{,}926 \\ b_1 &= -0{,}28 \\ b_2 &= 1{,}543 \end{aligned}$$

В задачах 19.339–19.341 найти оценки параметров β_0 и β_1, считая, что зависимость между переменными x и Y имеет вид

$$y = \beta_0 + \frac{\beta_1}{x}.$$

19.340.

x	5,67	4,45	3,84	3,74	3,73	2,18
y	6,8	8,5	10,5	10,2	6,8	11,8

Ответ $y = -1{,}526 - 0{,}27x + 1{,}543x^2$

№ 19.340

$$Y = \begin{pmatrix} 6{,}8 \\ 7{,}5 \\ 10{,}5 \\ 10{,}2 \\ 8{,}7 \\ 11{,}8 \end{pmatrix} \quad \bar{\beta} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & \varphi(5{,}64) \\ 1 & \varphi(4{,}45) \\ 1 & \varphi(3{,}74) \\ 1 & \varphi(3{,}74) \\ 1 & \varphi(3{,}75) \\ 1 & \varphi(2{,}18) \end{pmatrix}$$

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{x} \qquad \bar{\beta} = (A^T A)^{-1} A^T Y$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0{,}176 & 0{,}224 & 0{,}26 & 0{,}267 & 0{,}267 & 0{,}457 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0{,}176 \\ 1 & 0{,}224 \\ 1 & 0{,}266 \\ 1 & 0{,}267 \\ 1 & 0{,}267 \\ 1 & 0{,}458 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 1{,}656 \\ 1{,}656 & 0{,}503 \end{pmatrix}$$

$$(A^T A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1\frac{274}{345} & -6\frac{4}{542} \\ -6\frac{4}{546} & 21\frac{42}{37} \end{pmatrix}$$

$$(A^T A)^{-1} \cdot A^T = \begin{pmatrix} 4\,42/64 & 61/13 & 201\,3/6 & 41/12 \\ 40/36 & 23/26 & & \\ -2\,24/82 & -1\,45/23 & -61\,1/8 & \\ -31/26 & 3/4 & & \end{pmatrix}$$

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} 4\frac{45}{122} \\ 15\frac{17}{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}34 \\ 15{,}74 \end{pmatrix}$$

Ответ:

$y = 4{,}34 + \frac{15{,}74}{x}$

19.345. Предполагается, что зависимость между переменными Y и x достаточно точно описывается функцией $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$. Найти оценки параметров β_0, β_1 и β_2, а также оценку ковариационной матрицы этих оценок по следующей выборке:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-5	-2	$-1{,}5$	-1	0	3	14

№ 19.345

а) $7\beta_0 + 28\beta_2 = 45$

$28\beta_1 = 68,5$

$28\beta_0 + 196\beta_2 = 83,5$

$\Rightarrow \tilde{\beta}_0 = -1,446$

$\tilde{\beta}_1 = 2,446$

$\tilde{\beta}_2 = 0,637$

$y = -1,446 + 2,446x + 0,637x^2$

б) $\bar{y} = 1,07$ $\sum y_i^2 = 237,25$ $\tilde{\beta} = (-1,446; 2,446; 0,637)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \quad A^T y = \begin{pmatrix} 45 \\ 68,5 \\ 83,5 \end{pmatrix} \quad \tilde{\beta}^T A^T y = 209,67$$

$Q_R = \tilde{\beta}^T A^T y - n\bar{y}^2 = 209,67 - 7 \cdot 1,07^2 = 201,35$

$Q_y = \sum y_i^2 - n\bar{y}^2 = 229,24$

$Q_e = Q_y - Q_R = 27,89$

$F_R = 201,35/2 = 14,45$ $F_{0,95}(2,4) = 6,94$

б) $R^2 = \dfrac{201,35}{229,24} = 0,878 \quad S^2 = \dfrac{27,89}{7-3} = 6,97$

$\Rightarrow S = 2,64$

2) $K = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 28 \\ 0 & 28 & 0 \\ 28 & 0 & 196 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4/3 & 0 & -1/21 \\ 0 & 1/28 & 0 \\ -1/21 & 0 & 1/84 \end{pmatrix}$

$t_{0,975}(4) = 2,776$

$\Delta B_0 = 2,776 \cdot 2,64 \sqrt{\frac{1}{3}} = 4,23$

$\Delta B_1 = 2,776 \cdot 2,64 \sqrt{\frac{7}{4}} = 3,86$

$\Delta B_2 = 2,776 \cdot 2,64 \sqrt{\frac{1}{72}} = 2,01$