Д34. Проверка гипотез о значениях параметров распределений

Задачи по учебнику: **Сборник_задач_по_математике_для_втузов_В_4_х_ч_Ч_4_ред_Ефимов**:

19.199-19.200, 19.204-19.205, 19.212-19.220,19.229-19.231

Результат решения (pdf), содержащий текст задачи, используемые формулы, ход решения и ответ, сохранить под своим ФИО, вида:Иванов_ИИ_Д34.pdf и загрузить сюда.

19.199. Станок-автомат изготовляет шарики диаметром 10 мм. Продукция станка контролируется по величине X — отклонению диаметра шарика от номинального размера 10 мм. Предположим, что X — нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием m и дисперсией $\sigma^2 = 0{,}1$ мм^2. Рассмотреть следующие гипотезы:

$H^{(1)}$: $m = 0$,

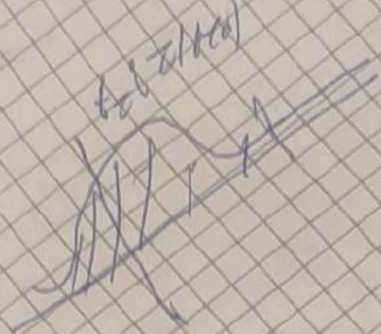
$H^{(2)}$: $m \neq 0$,

$H^{(3)}$: $-1 \leqslant m \leqslant 1$,

$H^{(4)}$: материал, используемый для изготовления шариков, содержит специальные присадки.

Определить, какие из гипотез $H^{(1)}$–$H^{(4)}$ являются статистическими, какие статистические гипотезы являются простыми, а какие сложными?

$\sigma = 100$
$n = 25$
$\bar{x} = 94$
$\sigma = 3$



N 19.199

$H^{(1)}$ – стат гипотеза простая т.к. однозначно определено распр СВ X

$H^{(2)}$ – стат гипот сложная, неоднозн. опр распред СВ X

$H^{(3)}$ – стат гипотеза сложная, неоднозн опр распр X

$H^{(4)}$ – не гипотеза

N 19.200

$H^{(1)}$ – простая т.к. однозн опр распр СВ X

$H^{(2)}$ – гип сложная, неоднозн опр СВ X

$H^{(3)}$ – гип сложная, неодн опр распр СВ X

H^{4} – гип простая т.к. однозн распр СВ X

19.200. При подбрасывании монеты 10 раз герб выпал X раз. Классифицировать следующие гипотезы:

$H^{(1)}$: X имеет биномиальное распределение $B(10,\ 1/2)$;

$H^{(2)}$: X имеет биномиальное распределение $B(10,\ p)$, причем $1/3 \leqslant p \leqslant 2/3$;

$H^{(3)}$: $\mathrm{P}\,[X \leqslant 3] > 1/2$;

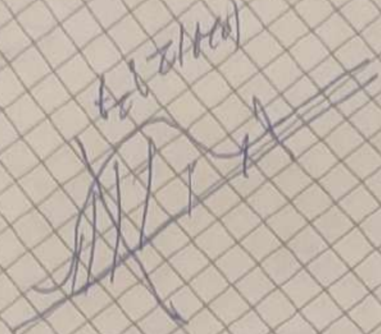
$H^{(4)}$: монета не симметрична.

$= 100$

$n = 25$

$\bar{x} = 97$

$\sigma = 3$



N 19.199

$H^{(1)}$ – стат гипотеза простая т.к. однозначно определено распр СВ X

$H^{(2)}$ – стат гипот сложная, неоднозн. опр распред СВ X

$H^{(3)}$ – стат гипотез сложная, неоднозн опр распр X

$H^{(4)}$ – не гипотеза

N 19.200

$H^{(1)}$ – простая т.к. однозн опр распр СВ X

$H^{(2)}$ – гип сложная, неоднозн опр СВ X

$H^{(3)}$ – гип сложная, неодн опр распр СВ X

H^{4} – гип простая т.к. однозн распр СВ X

цели». В чем состоит ошибка второго рода?

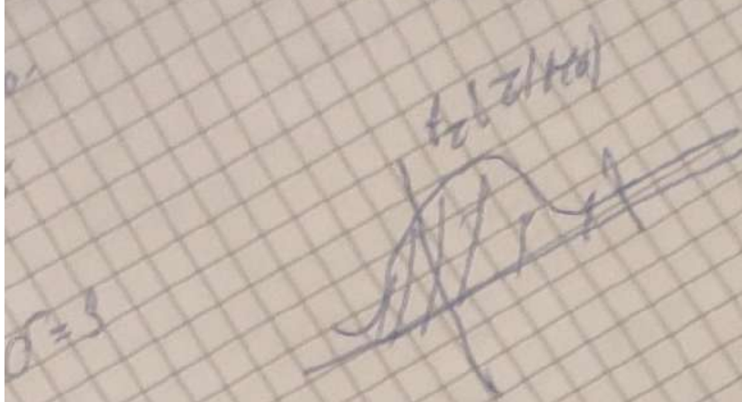
19.204. Проверка функционирования устройства осуществляется специальным тестом. Если устройство функционирует правильно, то вероятность прохождения теста равна 0,99; в противном случае вероятность прохождения теста равна 0,40. Устройство допускается к работе, если тест проходит 5 раз подряд. В предположении, что число прохождений теста подчиняется биномиальному распределению, ответить на следующие вопросы:

а) Какова область изменения и критическая область статистики критерия? Какое распределение имеет статистика критерия?

б) Как сформулировать нулевую гипотезу, если ошибка первого рода состоит в отклонении правильно функционирующего устройства?

в) Какова альтернативная гипотеза и в чем состоит ошибка второго рода?

г) Чему равны вероятности ошибок первого и второго рода?



19. 204 C_n^k $p^k(1-p)^{n-k}$

а) критерий: кол-во пройд. тестов

Устройство проходит ис-е с тестом, если тест неуд => тесты останов.

=> область изменения $V = [0; 4; 5]$

Если $k = \overline{0,4}$ уст-во не пр

=> обл.: $[0; 4]$

б) H_0: уст-во ф. правильно; $p = 0,99$

в) H_1: устр. ф. неправильно; $p = 0,40$

ошибка 2-рода: принятие неиспр уст-в в работу.

г) $\alpha = 1 - 0,99^5 = 0,05$

$\beta = 0,40^5 = 0,01$

19.205. Большая партия изделий может содержать некоторую долю дефектных. Поставщик утверждает, что эта доля составляет 5 %; покупатель предполагает, что доля дефектных изделий равна 10 %. Условия поставки: из партии случайным образом отбирается и проверяется 10 изделий; партия принимается на условиях поставщика, если при проверке обнаружено не более одного дефектного изделия; в противном случае партия принимается на условиях покупателя. Сформулировать эту задачу в терминах теории проверки статистических гипотез и ответить на следующие вопросы:

а) Каковы статистика критерия, область ее значений, критическая область?

б) Какое распределение имеет статистика критерия?

в) В чем состоят проверяемая и альтернативная гипотезы?

г) В чем состоят ошибки первого и второго рода и каковы их вероятности?

№19.205 Ск: $n = 10$ кол-во дефект ≤ 1

а) Z = кол-во деф. изделий $[0; 10]$

$V_k = \{Z; s$ – … $10\}$ т.к. $k \le 1$ => принимаем

б) $Z \sim B(10; p)$

в) H_0: среди 10 деталей One 1 деф

$p = 0,05$

H_1: среди 10 изд > 1 дефект $p = 0,1$

г) О 1 рода: партия принимается не уд. покупателя но усл. поставщика было верно

О 2 р: партия прин. но ул. поставщика что неверно

$p = 0,05$ ошибка $k > 1$ $\alpha = 1 - (C_{10}^1 \cdot 0,05^1 \cdot (1-0,05)^9 + C_{10}^0 \cdot 0,05^0 \cdot (1-0,05)^{10}) = 0,086$

$p = 0,1$ $k \le 1$ $\beta = C_{10}^1 \cdot 0,1^1 (1-0,1)^9 + C_{10}^0 \cdot 0,1^0 \cdot (1-0,1)^{10} = 0,736$

критериях значимости, приведенные в таблицах 4.1 и 4.2.

19.212. В соответствии с техническими условиями среднее время безотказной работы для приборов из большой партии должно составлять не менее 1000 часов со среднеквадратичным отклонением (с. к. о.) 100 часов. Выборочное среднее времени безотказной работы для случайно отобранных 25 приборов оказалось равным 970 часам. Предположим, что с. к. о. времени безотказной работы для приборов в выборке совпадает с с. к. о. во всей партии. Можно ли считать, что вся партия приборов не удовлетворяет техническим условиям, если: а) $\alpha = 0{,}10$; б) $\alpha = 0{,}01$?

19.212

$\sigma = 100г$ $\bar{x} = 970г$ $m_0 = 1000г$

H_0: вес нормальн пришедших ... тех же

$m = m_0$ σ^2 – известн

H_1: $m < m_0$

Значимость $\alpha = 0,1$

Стат крит $T = \frac{\bar{x} - m_0}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$

ОДЗ $\frac{\bar{x} - m_0}{\sigma}\sqrt{n} \geq u_\alpha$ $\alpha = 0,1$

$\frac{970 - 1000}{100}\sqrt{25} \geq 1,282$

$-1,5 \geq -2,326$

а) верно

$\alpha = 0,01$

$-1,5 \geq -2,326$

б) нельзя

19.213. Решить задачу 19.212 при условии, что оценка с. к. о. времени безотказной работы, вычисленная по выборке, равна $s = 115$ часов.

№ 19.273

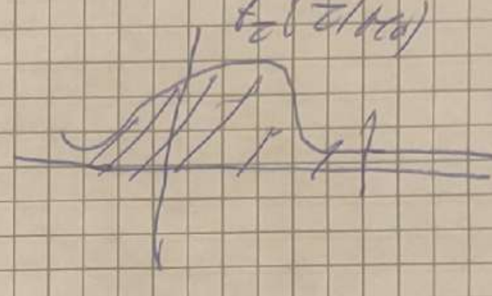
$S = 115$ г $\sigma = 100$- $\bar{x} = 970$

$n = 25$

$m = 1000$ г

$H_0: m = m_0$ $\sigma = 3$

$H^1: m < m_0$



Кр. знач.: t_2

$t = \frac{\bar{x} - m_0}{S/\sqrt{n}} \sim T(n-1)$

попад. в обл.: $\frac{\bar{x} - m_0}{S/\sqrt{n}} \geq t_\alpha(n-1)$

а) $\alpha = 0,1$ $t_\alpha(n-1) = -1,318$

$\frac{970 - 1000}{115}\sqrt{25} \geq -1,318$

$-1,304 \geq -1,318$ — попали в обл. принят.

Гип-а верна

б) $\alpha = 0{,}01$ $b_{\alpha}(n-1) = -2{,}492$

$1{,}3042 > -2{,}492$ – попали в обл.

а) ложь; б) ложь

19.214. Утверждается, что шарики, изготовленные станком-автоматом, имеют средний диаметр $d_0 = 10$ мм. Используя односторонний критерий при $\alpha = 0{,}05$, проверить эту гипотезу, если в выборке из $n = 16$ шариков средний диаметр оказался равным 10,3 мм, считая, что: а) дисперсия известна и равна $\sigma^2 = 1$ мм^2; б) оценка дисперсии, определенная по выборке, $s^2 = 1{,}21$ мм^2.

(10.216) $L_0 = 10\text{ мм} = m_0$ $\quad \alpha = 0{,}05 \quad n = 16$

$\bar{x} = 10{,}3\text{ мм}$

а) $H_0: m = m_0 \quad \sigma = 1$

$H_1: m > m_0$

СК: $T = \frac{\bar{x} - m_0}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$

ОП принятия $\frac{\bar{x} - m_0}{\sigma}\sqrt{n} < t_{1-\alpha}$

$\frac{10{,}3 - 10}{1}\sqrt{16} \le 1{,}645 \Rightarrow$ гип. верна.

б) $H_0: m = m_0 \quad \sigma^2 = 1{,}21$

$H_1: m > m_0$

СК: $T = \frac{\bar{x} - m_0}{s/\sqrt{n}} \sim T(n-1)$

ОП принятия: $\frac{x - m_0}{\sigma}\sqrt{n} \le t_{1-\alpha}(n-1)$

$\Rightarrow \frac{10{,}3 - 10}{1{,}1} \cdot 4 \le 1{,}753 \Rightarrow$ гип. верна

в) да; г) да.

19.215. Из большой партии резисторов одного типа и номинала случайным образом отобраны 36 штук. Выборочное среднее величины сопротивления при этом оказалось равным 9,3 кОм. Используя двусторонний критерий при $\alpha = 0{,}05$, проверить гипотезу о том, что выборка взята из партии с номиналом 10 кОм, если:

а) дисперсия величины сопротивления известна и равна 4 кОм^2;

б) дисперсия величины сопротивления неизвестна, а выборочная дисперсия равна 6,25 кОм^2.

10, 215

a) $H_0: m = m_0$ $\qquad \sigma^2 = 4$ тогда $\sigma = 2$

$H_1 = m \neq m_0$

$$Z = \frac{\bar{x} - m_0 \sqrt{n}}{\sigma} \sim N(0,1)$$

ОДЗ принятия: $\frac{|\bar{x} - m_0|}{\sigma} \sqrt{n} \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}}$

$$\frac{|9{,}3 - 10|}{2} \cdot \sqrt{36} \leq 1{,}96$$

$2{,}1 \leq 1{,}93$ гипот. ОДЗ не принимаем

б) $H_0: m = m_0$ $\qquad S^2 = 6{,}25$ $\quad S = 2{,}5$

$H_1: m \neq m_0$ $\qquad \sigma = S$

$$Z = \frac{\bar{x} - m_0}{S / \sqrt{n}} \sim T(n-1)$$

$$\frac{|x - m_0|}{S} \sqrt{n} \leq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

$$\frac{|9{,}3 - 10|}{2{,}5} \sqrt{36} \leq 2{,}03$$

$1{,}68 \leq 2{,}03$

принимается

a) прин; б) не приним

19.216. Решить задачу 19.215, используя доверительные интервалы для среднего значения величины сопротивления.

~~19, 214~~ $\bar{x} =$ [illegible] (19, 216)

а) $u = \frac{\bar{x} - m}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$

$P[-u_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{x} - m}{\sigma}\sqrt{n} < u_{1-\frac{\alpha}{2}}] = 1-\alpha$

дов. інтервал

$(\bar{x} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \bar{x} + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

(8,647; 9,053)

б) $T = \frac{\bar{x} - m}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

$P[-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \frac{\bar{x} - m}{S/\sqrt{n}} < t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)] = 1-\alpha$

(8,454; 9,246)

19.217. Технология производства некоторого вещества дает в среднем 1000 кг вещества в сутки с с. к. о. среднего, равным 80 кг. Новая технология производства в среднем дает 1100 кг вещества в сутки с тем же с. к. о. Можно ли считать, что новая технология обеспечивает повышение производительности, если: а) $\alpha = 0{,}05$; б) $\alpha = 0{,}10$?

19.217 $H_0: m_1 = m_2$

$H_1: m_1 > m_2$

$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$

$$\frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \cdot \sqrt{2}} \sim N(0; 1)$$

обл. принят. $\alpha = 0{,}05$ $1 - \alpha = 0{,}95$

$$\frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{2}} < u_{1-\alpha}$$

а) $0{,}894 < 1{,}645$ H_0 прин. нет, нельзя

б) $\alpha = 0{,}1$ $1 - \alpha = 0{,}9$

$0{,}894 < 1{,}282$ попали в обл.

нет, нельзя

Отв: нет; нет.

19.218. В задаче 19.217 вычислить вероятность ошибки второго рода при альтернативной гипотезе, утверждающей, что производительность при новой технологии возросла и составляет 1200 кг вещества в сутки.

19.219. Ожидается, что добавление специальных веществ уменьшает жесткость воды. Оценки жесткости воды до и после добавления специальных веществ по 40 и 50 пробам соответственно показали средние значения жесткости (в градусах жесткости), равные 4,0 и 3,8 градуса. Дисперсия измерений в обоих случаях предполагается равной 0,25 град^2. Подтверждают ли эти результаты ожидаемый эффект? Принять $\alpha = 0{,}05$.

19.219 H_0: $m_1 = m_2$ $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$

H_1: $m_1 > m_2$

Крит стат. $\dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0;1)$

Обл. прин $\dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} < t_{1-\alpha}$

$\dfrac{4,0 - 3,7}{0,5\sqrt{\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{50}}} < 1,645.$

$1,737 < 1,645$ – попали H_0 отв-ся

Ответ: да

19.220. Решить задачу 19.219, используя метод доверительных интервалов.

19.220

$$u = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (m_1 - m_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$$

$$P\left[\frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (m_1 - m_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} < u_{1-h} \right] = 1 - h$$

$$m_1 - m_2 > (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - u_{1-h} \cdot \sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

$m_1 - m_2 > 0{,}03$

Ответ $(0{,}03; \infty)$

19.229 (сравнение средних). При измерении производительности двух агрегатов получены следующие результаты (в кг вещества за час работы):

№ замера	1	2	3	4	5
Агрегат A	14,1	10,1	14,7	13,7	14,0
Агрегат B	14,0	14,5	13,7	12,7	14,1

Можно ли считать, что производительности агрегатов A и B одинаковы, в предположении, что обе выборки получены из нормально распределенных генеральных совокупностей? Принять $\alpha = 0{,}10$.

19.229 (сравнение средних). При измерении производительности двух агрегатов получены следующие результаты (в кг вещества за час работы):

№ замера	1	2	3	4	5
Агрегат A	14,1	10,1	14,7	13,7	14,0
Агрегат B	14,0	14,5	13,7	12,7	14,1

Можно ли считать, что производительности агрегатов A и B одинаковы, в предположении, что обе выборки получены из нормально распределенных генеральных совокупностей? Принять $\alpha = 0{,}10$.

◁ Проверяется гипотеза $H_0:\ m_1 = m_2$ при альтернативной гипотезе $H_1:\ m_1 \neq m_2$. Вычислим оценки средних и дисперсий:

$$\overline{x}_1 = 13{,}32, \quad \overline{x}_2 = 13{,}80, \quad s_1^2 \approx 3{,}37, \quad s_2^2 \approx 0{,}46.$$

Предварительно проверим гипотезу о равенстве дисперсий H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (таблица 4.1, четвертая строка):

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} \approx \frac{3{,}37}{0{,}46} \approx 7{,}33;$$

так как $F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1) = F_{0{,}95}(4{,}4) = 6{,}39$ (таблица П7), то гипотеза о равенстве дисперсий отклоняется. Для проверки гипотезы о равенстве средних используем критерий из таблицы 4.2 (нижняя строка). Вычислим выборочное значение статистики критерия:

$$\frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}} = \frac{|13{,}32 - 13{,}80|}{\sqrt{\dfrac{3{,}37}{5} + \dfrac{0{,}46}{5}}} \approx 0{,}55.$$

Число степеней свободы $k \approx \dfrac{\left(\dfrac{3{,}37}{5} + \dfrac{0{,}46}{5}\right)^2}{\dfrac{\left(\dfrac{3{,}37}{5}\right)^2}{6} + \dfrac{\left(\dfrac{0{,}46}{5}\right)^2}{6}} - 2 \approx 6.$ Так как по таблице П6 $t_{0{,}95}(6) = 1{,}943$, гипотеза о равенстве средних принимается. ▷

19.230. Давление в камере контролируется по двум манометрам. Для сравнения точности этих приборов одновременно фиксируются их показания. По результатам 10 замеров выборочные оценки (в единицах шкалы приборов) оказались следующими:

$\overline{x}_1 = 15{,}3$, $\overline{x}_2 = 16{,}1$, $s_1^2 = 0{,}2$ и $s_2^2 = 0{,}15$. Используя двусторонний и односторонний критерии, проверить при $\alpha = 0{,}1$: а) гипотезу о равенстве дисперсий; б) гипотезу о равенстве средних.

19.230 а) $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $\alpha = 0,1$

$H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$

Крит стат $Z = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1-1; n_2-1)$

$\frac{S_1^2}{S_2^2} < F_{1-\alpha}(n_1-1; n_2-1)$

$\frac{0,2}{0,15} < 3,44$

$1,33 < 3,44$ H_0 прин

2) $H_1: \sigma_2^2 \neq \sigma_1^2$

$\left|\frac{S_1^2}{S_2^2}\right| < F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1; n_2-1)$

$\frac{0,2}{0,15} < 3,179$

$1,33 < 3,179$

H_0 прин

б) $H_0: m_1 = m_2$ $\alpha = 0,1$

$H_1: m_2 > m_1$

$Z = \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{S\sqrt{\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_1}}} \sim t(n_1+n_2-2)$

$S = \left(\frac{(n_2-1)S_2^2 + (n_1-1)S_1^2}{n_1+n_2-2}\right) = 0,145$

$$\frac{|16,1 - 15,31|}{0,145\cdot\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{10}}} < t_{1-\alpha}(n_1+n_2-2)$$

$10,2226 < 3,330 \to H_0$ отвк

2) H_1: $m_2 \neq m_1$

$$\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{S\sqrt{\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_1}}} < t_{1-\frac{\alpha}{2}}(18)$$

$10,022 < 1,73 \to$ попали во отвк

потезу о равенстве дисперсий, б) гипотезу о равенстве средних.

19.231. На двух станках A и B производят одну и ту же продукцию, контролируемую по внутреннему диаметру изделия. Из продукции станка A была взята выборка из 16 изделий, а из продукции станка B — выборка из 25 изделий. Выборочные оценки средних и дисперсий контролируемых размеров $\overline{x}_A = 37{,}5$ мм при $s_A^2 = 1{,}21$ мм^2 и $\overline{x}_B = 36{,}8$ мм при $s_B^2 = 1{,}44$ мм^2. Используя двусторонний критерий, проверить гипотезу о равенстве математических ожиданий контролируемых размеров в продукции обоих станков, если: а) $\alpha = 0{,}05$; б) $\alpha = 0{,}10$.

19.231

$H_0: \sigma^2_A = \sigma^2_B$ $n_A = 10$ $n_B = 25$

$H_1: \sigma^2_A \neq \sigma^2_B$

$Z = \frac{S^2_B}{S^2_A} \sim F(n_B - 1, n_A - 1)$

$\frac{S_B^2}{S_A^2} < F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_B - 1, n_A - 1)$

а) $\alpha = 0{,}05$ б) $\alpha = 0{,}10$

$\frac{1{,}44}{1{,}21} < 3{,}701$

$1{,}90 < 2{,}7 \to$ не отверг. $1{,}78 < 2{,}073$ — не отверг.

$H_0: m_A = m_B$

$H_1: m_A \neq m_B$

$Z = \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{S\sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}} \sim T(n_A + n_B - 2)$

$S = 1{,}352$

а) $\alpha = 0{,}05$

$\frac{137{,}5 - 36{,}81}{1{,}352\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{25}}} < t_{1-\frac{\alpha}{2}}(33)$

$1{,}617 < 2{,}023 \to$ не отверг.

б) $\alpha = 0{,}1$

$1{,}617 < 1{,}685 \to$ не отверг.