Министерство науки и высшего образования

Российской Федерации

Федеральное Государственное

Автономное Образовательное Учреждение

Высшего Образования

Национальный ядерный университет «МИФИ»

Кафедра: «Финансовый мониторинг»

Отчет по курсу:

«Методы оптимизации»

Студент Монастырский М. О.

Группа С21-703

Проверила: Домашова Д. В.

Москва 2023г.

**Оглавление**

Графический метод. .......... 3
Симплекс-метод.......... 8
Метод искусственного базиса .......... 10
Двойственные задачи ЛП .......... 14
Экономическая интерпретация двойственной задачи .......... 16
Анализ устойчивости двойственных оценок.......... 22
Транспортная задача .......... 23
    Метод северо-западного угла.......... 24
    Метод минимальных коэффициентов .......... 24

**Графический метод.**

$$F = 3x_1 + 2x_2 \ \rightarrow \min(\max)$$

При ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 + 3x_2 \le 6 \\ \quad x_{1,2\ge 0} \end{cases}$$

1. Построим область допустимых решений, т.е. решим графически систему неравенств. Для этого построим каждую прямую и определим полуплоскости, заданные неравенствами (рис 1 и 2)

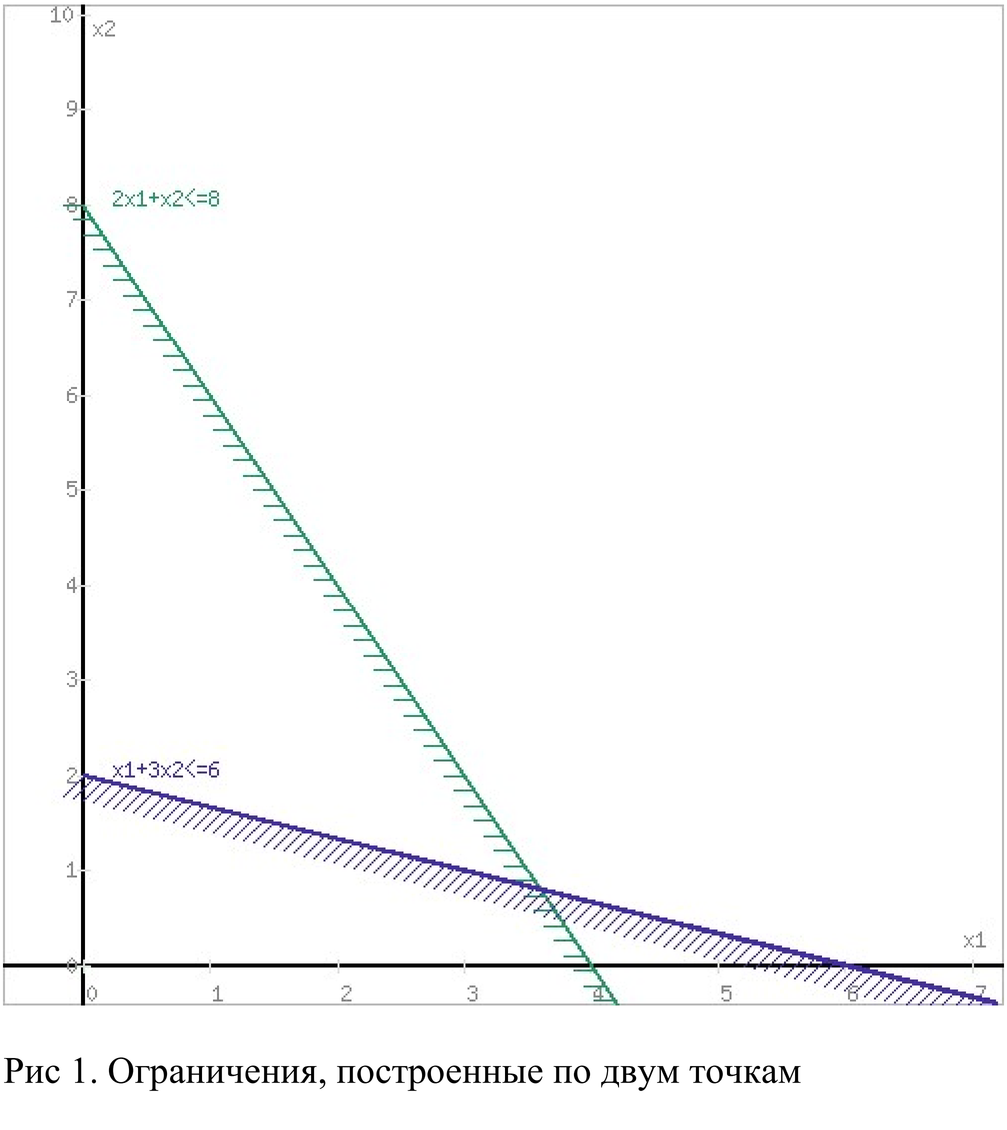


Рис 1. Ограничения, построенные по двум точкам

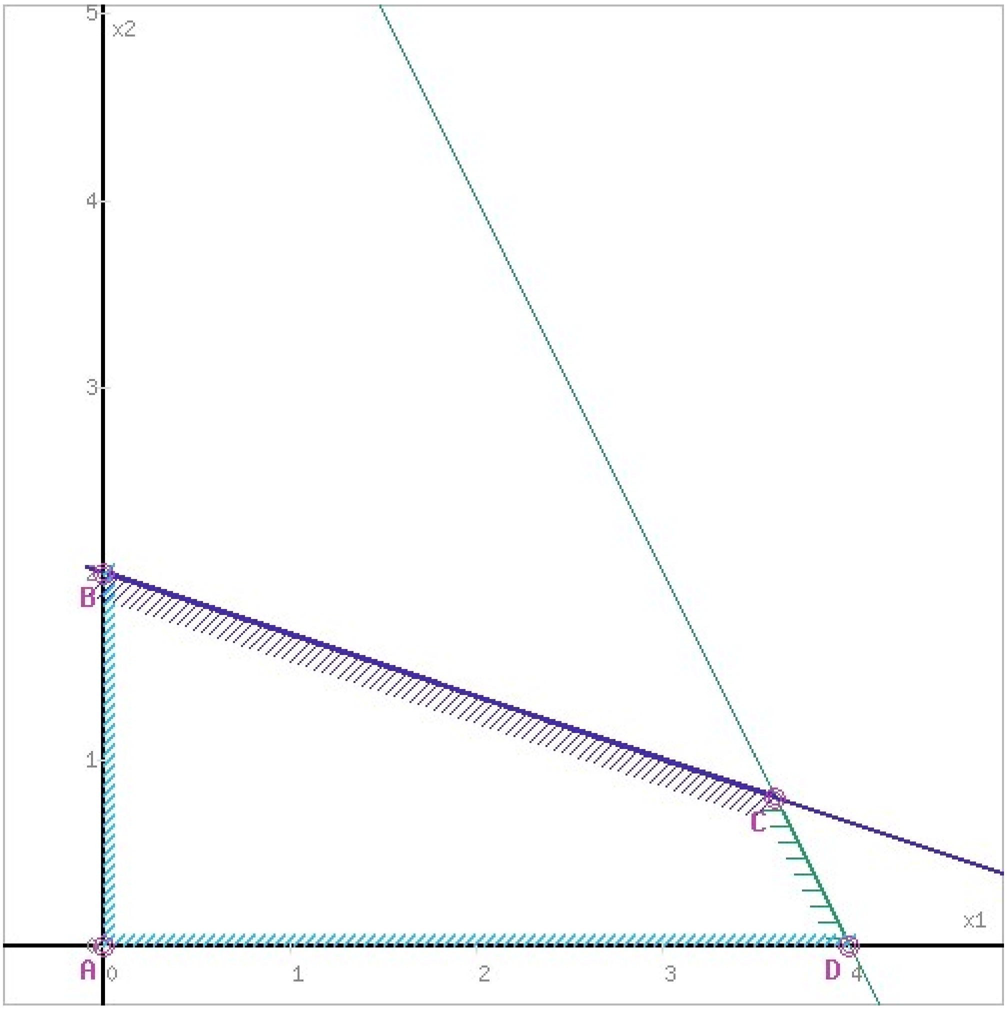


Рис 2. Границы ОДР

2. Рассмотрим целевую функцию F(x1,x2), найдем и построим ее градиент

$$\nabla F = (3,2)$$

Вектор-градиент, составленный из коэффициентов целевой функции, указывает направление максимизации F(X). Начало вектора – точка (0; 0), конец – точка (3;2). Построим прямую, нормальную к полученной и будем двигать ее вдоль вектора градиента. Так, точкой максимума будет считаться точка, в которой прямая покидает пределы области на рис 3б очевидно, что это точка С, а точкой минимума считается та точка, в которой прямая первый раз входит в пределы области, таким образом, из рисунка 3а очевидно, что такой точкой является точка начала координат (0,0)

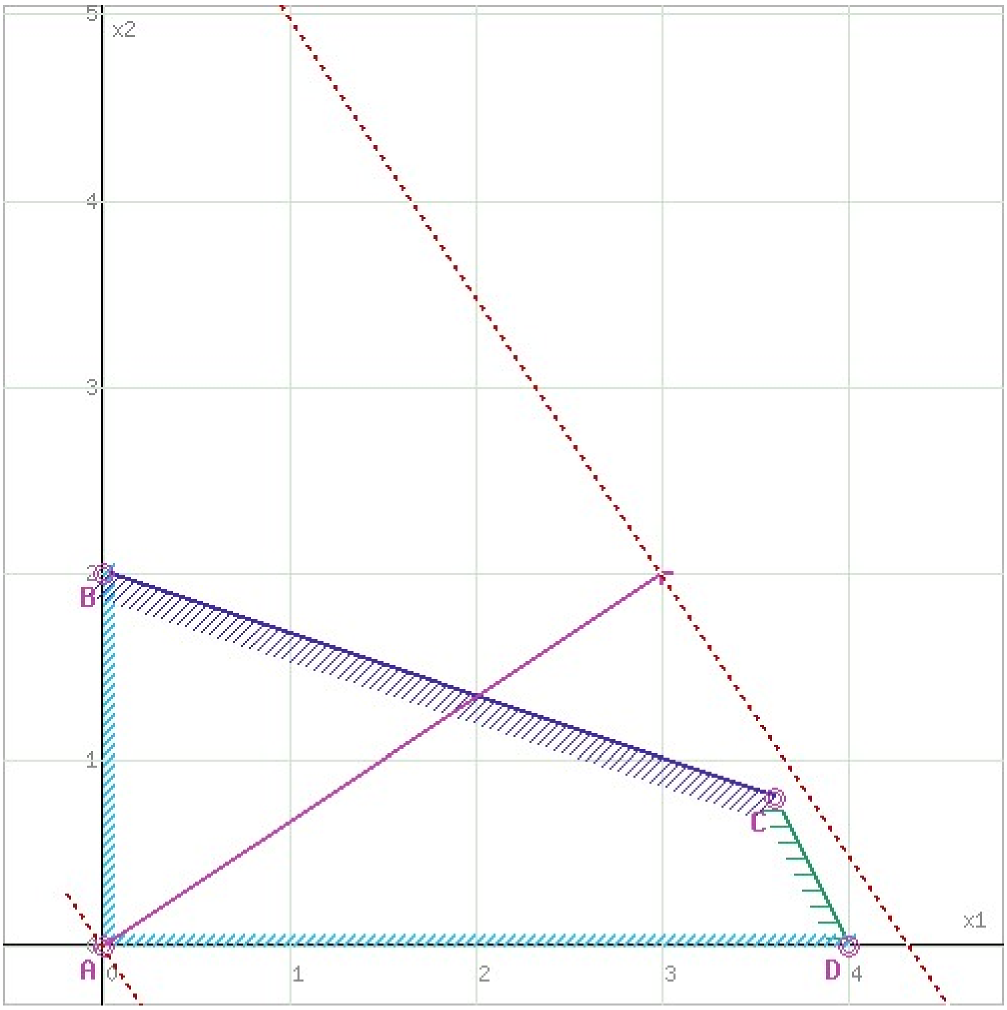


Рис 3а. «Минимум функции»

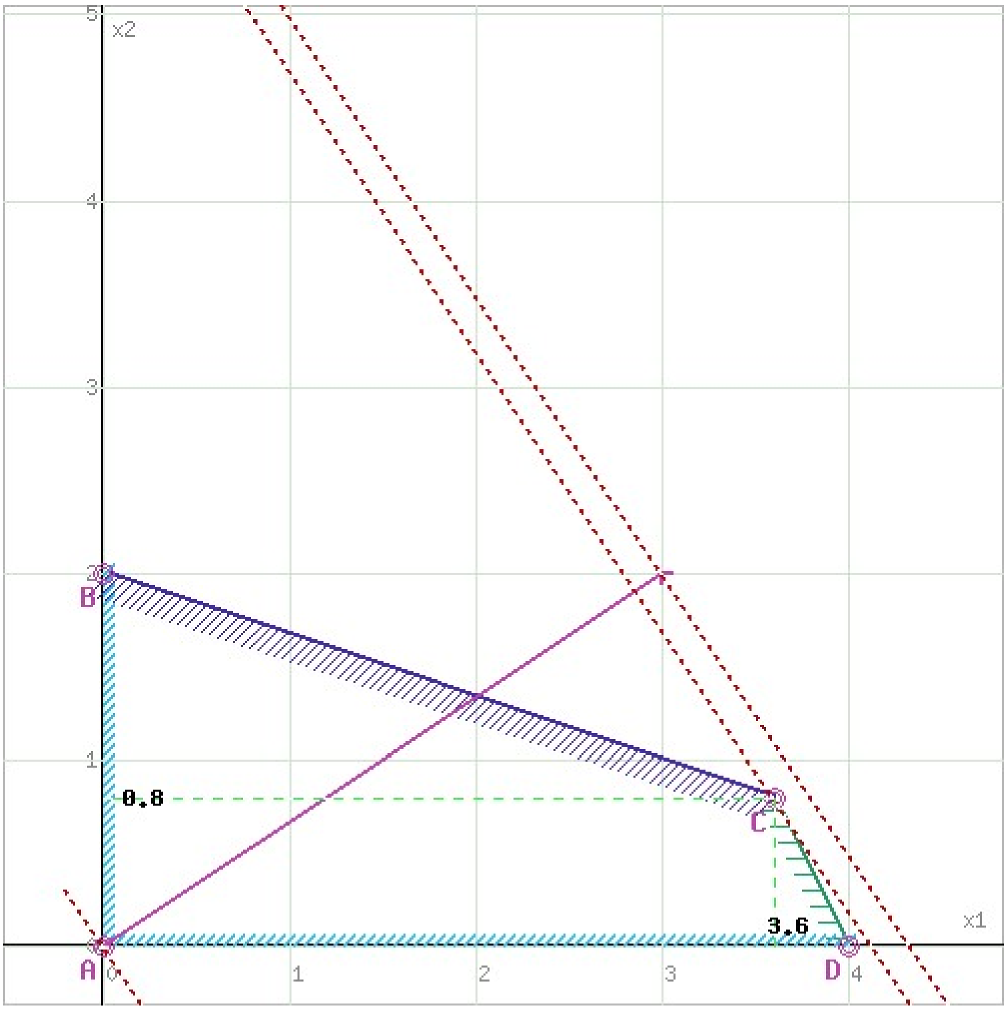


Рис 3б «Максимум функции»

Для нахождения координат точки С обратим внимание, что она образована точкой пересечения ограничений 1 и 2, решим систему вида:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 8 \\ x_1 + 3x_2 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 8 \\ x_1 + 3x_2 = 6 \mid \cdot 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 8 \\ 2x_1 + 6x_2 = 12 \end{cases} \ominus \rightarrow 5x_2 = 4 \rightarrow x_2 = \frac{4}{5}$$

Методом подстановки в любое из равенств получаем, что $x_1$=3,6, следовательно координаты максимума функции $F(x_1,x_2)$ = (3,6;0.8)

Путем подстановки полученных координат можем найти значение целевой функции в точках max и min (Табл. 1)

| Название | $X_1$ | $X_2$ | $F(x_1,,x_2)$ |
|---|---|---|---|
| $F_{min}$ | 0 | 0 | 0 |
| $F_{max}$ | 3,6 | 0,8 | 12,4 |

Табл. 1 «Результаты»

**Симплекс-метод**

$$A)\ F = 3x_1 + 2x_2 \ \rightarrow max$$

При ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 + 3x_2 \le 6 \\ x_{1,2\ge 0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 6 \\ x_{1,2,3,4\ge 0} \end{cases}$$

| | | | 3 | 2 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Базис | C | B | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ |
| $X_3$ | 0 | 8 | ***2*** | 1 | 1 | 0 |
| $X_4$ | 0 | 6 | 1 | 3 | 0 | 1 |
| Δ | F=0 | | 3 | 2 | 0 | 0 |

Min$\{\frac{8}{2}, \frac{6}{1}\} \rightarrow 4$

Текущий план (0,0,8,6)

Перестроим симплекс таблицу в новый базис

И пересчитаем коэффициенты по правилу прямоугольника

Пересчитаем дельты:

Д1=0 заведомо т к базис

Д4=0 заведомо т к базис

Д2=2-(0.5*3+0*2,5) = 2-1.5=0.5

Д3=0-(0.5*3+0*(-0.5)) = 0-1.5=-1.5

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 3 | 2 | 0 | 0 |
| Базис | C | B | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ |
| $X_1$ | 3 | 4 | 1 | 0.5 | 0.5 | 0 |
| $X_4$ | 0 | 2 | 0 | ***2.5*** | -0.5 | 1 |
| Δ | F=12 | | 0 | 0.5 | -1.5 | 0 |

Min$\{\frac{4}{0.5}, \frac{2}{2.5}\}$

Текущий план (4,0,0,2)

Перестроим симплекс таблицу в новый базис

И пересчитаем коэффициенты по правилу прямоугольника

Пересчитываем дельты:

Д3: 0-(3*0.6+2*(-0.2)) = 0-(1.8-0.4) = -1.4

Д4: 0-(3*(-0.2)+2*0.4) = 0-(-0.6+0.8) = 0-0.2

| | | | 3 | 2 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Базис | C | B | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ |
| $X_1$ | 3 | 3.6 | 1 | 0 | 0.6 | -0.2 |
| $X_2$ | 2 | 0.8 | 0 | 1 | -0.2 | 0.4 |
| $\Delta$ | F=12.4 | | 0 | 0 | -1.4 | -0.2 |

План оптимален

**$X_1$ = 3.6; $X_2$ =0.8**

**ОПТ решение: (3.6,0.8,0,0)**

**$F_{max}$ = 3*3.6+2*0.8=12.4**

**Метод искусственного базиса**

Б) $F = x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \geq 12 \\ 2x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_{1,2 \geq 0} \end{cases}$$

Приводим к каноническому виду:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 12 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 6 \\ x_{1,2 \geq 0} \end{cases}$$

| A1 | A2 | A3 | A4 |
|---|---|---|---|
| (3,2) | (4,-1) | (-1,0) | (0,1) |

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 + y_1 = 12 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 6 \\ x_{1,2,3,4 \geq 0} \end{cases}$$

Базис: A4, Ay1

Поставим задачу G

G=-y1 →max

| | | | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Базис | C | B | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_{y1}$ |
| $A_{y1}$ | -1 | 12 | 3 | **4** | -1 | 0 | 1 |
| $A_4$ | 0 | 6 | 2 | -1 | 0 | 1 | 0 |
| Δ | G=-12 | | 3 | 4 | -1 | 0 | 0 |

Текущий план: (0,0,0,6,12)

Д1:0-(-3)=3

Д2:0-(-4)=4

Д3:0-(1)=-1

Д4:0-0=0

Д5:-1-(-1)=0

| | | | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Базис | C | B | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_{y1}$ |
| $A_2$ | 0 | 3 | 3/4 | 1 | -1/4 | 0 | 1/4 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_4$ | 0 | 9 | 11/4 | 0 | -1/4 | 1 | 1/4 |
| Δ | G=0 | | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 |

ОПТ план: (0,3,0,9,0)

Данный план является оптимальным, базис A2, A4 явл. базисом исходной задачи т к G=0

Решаем:

$$F = 3x_1 + 2x_2 \ \rightarrow max$$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 3 | 2 | 0 | 0 |
| Базис | C | B | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ |
| $A_2$ | 2 | 3 | 3/4 | 1 | -1/4 | 0 |
| $A_4$ | 0 | 9 | 11/4 | 0 | -1/4 | 1 |
| | F=6 | | 1.5 | 0 | 0.5 | 0 |

Д1: 3-(2*3/4)=3-1.5=1.5

Д2: 2-(2) = 0

Д3:0-(-0.5) = 0.5

Д4 = 0-(0)=0

**Критерий отсутствия решения для вектора A3 выполнен (Vd3 >0) функция не ограничена сверху в ОДР**

B) $F = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 - 6x_2 \geq 6 \\ -2x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_{1,2\geq 0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 6x_2 - x_3 = 6 \\ -2x_1 + x_2 - x_4 = 2 \\ x_{1,2,3,4\geq 0} \end{cases}$$

| A1 | A2 | A3 | A4 |
|---|---|---|---|
| (1,-2) | (-6,2) | (-1,0) | (0,-1) |

$$\begin{cases} x_1 - 6x_2 - x_3 + y_1 = 6 \\ -2x_1 + x_2 - x_4 + y_2 = 2 \\ x_{1,2,3,4\geq 0} \end{cases}$$

$G = -y_1 - y_2 \rightarrow \max$

| | | | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Базис | C | B | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_{y1}$ | $A_{y2}$ |
| $A_{y1}$ | -1 | 6 | 1 | -6 | -1 | 0 | 1 | 0 |
| $A_{y2}$ | -1 | 2 | -2 | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 |
| | G=-8 | | -1 | -5 | -1 | -1 | 0 | 0 |

Д1:0-(-1+2)=-1

Д2: 0-(6-1)=-5

Д3:0-(1)=-1

Д4: 0-(1)=-1

Д5:-1-(-1) =0

Д6:-1-(-1) =0

Опт решение (0,0,0,0,6,2)

**ОПТ решение, но G<0 => ОДР пуста**

## Двойственные задачи ЛП

А) $\mathrm{F} = 3\mathrm{x}_1 + 2\mathrm{x}_2 \ \rightarrow max$

При ограничениях:

$$\begin{cases} 2\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 \leq 8 \\ \mathrm{x}_1 + 3\mathrm{x}_2 \leq 6 \\ \mathrm{x}_{1,2\geq 0} \end{cases}$$

Двойственная задача к данной:

$G=8y_1+6y_2 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 2\mathrm{y}_1 + \mathrm{y}_2 \geq 3 \\ \mathrm{y}_1 + 3\mathrm{y}_2 \geq 2 \\ \mathrm{y}_{1,2\geq 0} \end{cases}$$

**ОПТ решение: (3.6,0.8,0,0)**

**$F_{max}$ = 3*3.6+2*0.8=12.4**

**По теореме 2**

$$\begin{cases} (3.6 * 2 + 0{,}8 - 8)y_1 *= 0 \\ (3.6 + 3 * 0.8 - 6)y_2 *= 0 \\ \rightarrow y_{1,2} > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2y_1 + y_2 - 3) * 3.6 = 0 \\ (y_1 + 3y_2 - 2)0.8 = 0 \\ y_{1,2} > 0 \end{cases}$$

**Y1=1.4; Y2=0.2**

**$G_{min}$ = 12.4**

**По теореме 3**

| | | | 3 | 2 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Базис | C | B | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ |
| $X_1$ | 3 | 3.6 | 1 | 0 | 0.6 | -0.2 |
| $X_2$ | 2 | 0.8 | 0 | 1 | -0.2 | 0.4 |
| Δ | F=12.4 | | 0 | 0 | -1.4 | -0.2 |
| | | | Y3 | Y4 | Y1 | Y2 |

Оптимальная симплекс таблица

$Y^*=C_B*A_B^{-1}$

$(3,2)*\begin{bmatrix} 0.6 & -0.2 \\ -0.2 & 0.4 \end{bmatrix}=(1,4;0.2)$

**Y1=1.4; Y2=0.2**

**$G_{min}$ = 12.4**

## Экономическая интерпретация двойственной задачи

| **Сырьё** | **Технологические коэффициенты** | | | | **Запасы** |
|---|---|---|---|---|---|
| | **A** | **B** | **C** | **D** | |
| металл | 5 | 1 | 0 | 2 | 1000 |
| пластмасса | 4 | 2 | 2 | 1 | 600 |
| резина | 1 | 0 | 2 | 1 | 150 |
| **Прибыль**(руб) | 6 | 2 | 3 | 4 | |

$x_j -$ количество продукции j вида, $j = \overline{1,4}$

$F = 6 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 5 \cdot x_1 + x_2 + 2 \cdot x_4 \leq 1000 \\ 4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + x_4 \leq 600 \\ x_1 + 2 \cdot x_3 + x_4 \leq 150 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,4}$

$$\begin{cases} 5 \cdot x_1 + x_2 + 2 \cdot x_4 + x_5 = 1000 \\ 4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + x_4 + x_6 = 600 \\ x_1 + 2 \cdot x_3 + x_4 + x_7 = 150 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,7}$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ A_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ A_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ A_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$A_5$, $A_6$, $A_7$ – базис

| | | | 6 | 2 | 3 | 4 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Базис** | **$c_{баз}$** | **b** | **$A_1$** | **$A_2$** | **$A_3$** | **$A_4$** | **$A_5$** | **$A_6$** | **$A_7$** | |
| A5 | 0 | 1000 | 5 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 200 |
| A6 | 0 | 600 | 4 | 2 | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 150 |
| A7 | 0 | 150 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 150 |
| | f($x^{оп}$) | 0 | 6 | 2 | 3 | 4 | 0 | 0 | 0 | |

$x^{оп} = (0, 0, 0, 0, 1000, 600, 150)$ – не оптимальное решение, критерий отсутствия решения не выполняется

$A_5$, $A_6$, $A_1$ – базис

| | | | 6 | 2 | 3 | 4 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Базис** | **$c_{баз}$** | **b** | **$A_1$** | **$A_2$** | **$A_3$** | **$A_4$** | **$A_5$** | **$A_6$** | **$A_7$** | |
| A5 | 0 | 250 | 0 | 1 | -10 | -3 | 1 | 0 | -5 | 250 |
| A6 | 0 | 0 | 0 | 2 | -6 | -3 | 0 | 1 | -4 | 0 |
| A1 | 6 | 150 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | |
| | f($x^{оп}$) | 900 | 0 | 2 | -9 | -2 | 0 | 0 | -6 | |

$x^{оп} = (150, 0, 0, 0, 0, 250, 0)$ – не оптимальное решение

$A_5$, $A_2$, $A_1$ – базис

| | | | 6 | 2 | 3 | 4 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Базис** | **$c_{баз}$** | **b** | **$A_1$** | **$A_2$** | **$A_3$** | **$A_4$** | **$A_5$** | **$A_6$** | **$A_7$** |
| A5 | 0 | 250 | 0 | 0 | -7 | -1,5 | 1 | -0,5 | -3 |
| A2 | 2 | 0 | 0 | 1 | -3 | -1,5 | 0 | 0,5 | -2 |
| A1 | 6 | 150 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| | f($x^{оп}$) | 900 | 0 | 0 | -3 | 1 | 0 | -1 | -2 |

$x^{оп} = (150, 0, 0, 0, 250, 0, 0)$ – не оптимальное решение

$A_5$, $A_2$, $A_4$ – базис

| | | | 6 | 2 | 3 | 4 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Базис** | **$c_{баз}$** | **b** | **$A_1$** | **$A_2$** | **$A_3$** | **$A_4$** | **$A_5$** | **$A_6$** | **$A_7$** |
| ёA5 | 0 | 475 | 1,5 | 0 | -4 | 0 | 1 | -0,5 | -1,5 |
| A2 | 2 | 225 | 1,5 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0,5 | -0,5 |
| A4 | 4 | 150 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| | f($x^{оп}$) | 1050 | -1 | 0 | -5 | 0 | 0 | -1 | -3 |

$x^{оп} = (0, 225, 0, 150, 475, 0, 0)$ – оптимальное решение

Y* = (0;1;3;1;0;5;0)

Поставим задачу двойственную к данной:

$G = 1000 \cdot y_1 + 600 \cdot y_2 + 150 \cdot y_3 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 5 \cdot y_1 + 4 \cdot y_2 + y_3 \geq 6 \\ y_1 + 2 \cdot y_2 \geq 2 \\ 2 \cdot y_2 + 2 \cdot y_3 \geq 3 \\ 2 \cdot y_1 + y_2 + y_3 \geq 4 \end{cases}$$

$y_i \geq 0, i = \overline{1{,}3}$

*Теорема 2:*

Выясним, какие $y_i$ равны 0 при подстановке оптимального решения в ограничения:

$(5 \cdot 0 + 225 + 2 \cdot 150 - 1000) \cdot y_1^* = 0$ => $y_1^* = 0$, так как 1 ограничение <0

$(4 \cdot 0 + 2 \cdot 225 + 2 \cdot 0 + 150 - 600) \cdot y_2^* = 0$ => $y_2^* > 0$, так как 2 ограничение =0

$(0 + 2 \cdot 0 + 150 - 150) \cdot y_3^*$ = 0 => $y_3^* > 0$, так как 3 ограничение = 0

Выясним, какие ограничения двойственной задачи в оптимальной точке выполняются как равенства:

$(5 \cdot y_1^* + 4 \cdot y_2^* + y_3^* - 6) \cdot 0 = 0 => \ 5 \cdot y_1^* + 4 \cdot y_2^* + y_3^* > 6$

$(y_1^* + 2 \cdot y_2^* - 2) \cdot 225 = 0 => y_1^* + 2 \cdot y_2^* = 2$

$(2 \cdot y_2^* + 2 \cdot y_3^* - 3) \cdot 0 = 0 => \ 2 \cdot y_2^* + 2 \cdot y_3^* > 3$

$(2 \cdot y_1^* + y_2^* + y_3^* - 4) \cdot 150 = 0 => \ 2 \cdot y_1^* + y_2^* + y_3^* = 4$

$$\begin{cases} 5 \cdot y_1^* + 4 \cdot y_2^* + y_3^* > 6 \\ y_1^* + 2 \cdot y_2^* = 2 \\ 2 \cdot y_2^* + 2 \cdot y_3^* > 3 \\ 2 \cdot y_1^* + y_2^* + y_3^* = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1^* = 0 \\ y_2^* = 1 \\ y_3^* = 3 \end{cases}$$

$y^* = (0, 1, 3)$

$g^* = 1050$

*Теорема 3:*

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 & -1{,}5 \\ 0 & 0{,}5 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$y^* = (0, 2, 4) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 & -1{,}5 \\ 0 & 0{,}5 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0, 1, 3)$$

$$g^* = 1050$$

**Выводы:**

1. $(5 \cdot 0 + 225 + 2 \cdot 150 - 1000) \cdot y_1^* = 0 \qquad y_1^* = 0$
   $(4 \cdot 0 + 2 \cdot 225 + 2 \cdot 0 + 150 - 600) \cdot y_2^* = 0 \qquad y_2^* > 0$
   $(0 + 2 \cdot 0 + 150 - 150) \cdot y_3^* = 0 \quad y_3^* > 0$
   Второе и третье ограничения выполнились как равенства => ресурсы 2 и 3 вида полностью использовались при оптимальном плане и являются дефицитными. ($y_2^* = 1 > 0, y_3^* = 3 > 0$)
   Первое ограничение выполнилось как строгое неравенство => ресурс 1 вида не является дефицитным. Его остаток $x_5^* = 475$
2. $(5 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 3 - 6) \cdot x_1^* = 0$ не выполняется $x_1^* = 0$
   $(0 + 2 \cdot 1 - 2) \cdot x_2^* = 0$ выполняется $x_2^* > 0$
   $(2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 - 3) \cdot x_3^* = 0$ не выполняется $x_3^* = 0$
   $(2 \cdot 0 + 1 + 3 - 4) \cdot x_4^* = 0$ выполняется $x_4^* > 0$
   Второе и четвертое ограничения выполнились как равенства => двойственные оценки ресурсов, используемых для производства единицы продукции 2 и 4 вида в точности равны прибыли => целесообразно производить эти экономические изделия. ($x_2^* = 225 > 0$, $x_4^* = 150 > 0$)
   Первое и третье ограничения – строгие неравенства => суммарные оценки сырья > получаемой прибыли =>производить эти виды продукции экономически нецелесообразно ($x_1^* = 0, x_3^* = 0$)
3. Увеличение сырья 2 вида (пластмасса) на 1 единицу приведет к получению нового плана производства, при этом прибыль увеличивается на 1 и станет равна 1050+1=1051. Произойдет это за счет увеличения продукции B на 0,5, при этом остатки сырья 1 вида (металл) уменьшатся на 0,5.
   Увеличение сырья 3 вида (резина) на 1 единицу приведет к получению нового плана производства, при этом прибыль увеличивается на 3 и станет равна 1050+3=1053. Произойдет это за счет уменьшения выпуска продукции B на 0,5 и увеличения выпуска изделий вида D на 1, при этом остатки сырья 1 вида уменьшатся на 1,5.

**Анализ устойчивости двойственных оценок**

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 & -1{,}5 \\ 0 & 0{,}5 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; b = \begin{pmatrix} 1000 \\ 600 \\ 150 \end{pmatrix}$$

$$A_B^{-1}(b + \Delta b) = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 & -1{,}5 \\ 0 & 0{,}5 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} 1000 + \Delta b_1 \\ 600 + \Delta b_2 \\ 150 + \Delta b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 475 + \Delta b_1 - 0{,}5 \cdot \Delta b_2 - 1{,}5 \cdot \Delta b_3 \\ 225 + 0{,}5 \cdot \Delta b_2 - 0{,}5 \cdot \Delta b_3 \\ 150 + \Delta b_3 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} x_5^{*\text{нов}} \\ x_2^{*\text{нов}} \\ x_4^{*\text{нов}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 475 + \Delta b_1 - 0{,}5 \cdot \Delta b_2 - 1{,}5 \cdot \Delta b_3 \\ 225 + 0{,}5 \cdot \Delta b_2 - 0{,}5 \cdot \Delta b_3 \\ 150 + \Delta b_3 \end{pmatrix}$$

I. $\Delta b_2 = 0,\ \Delta b_3 = 0$

$475 + \Delta b_1 \geq 0$

$\Delta b_1 \geq -475$

II. $\Delta b_1 = 0,\ \Delta b_3 = 0$

$$\begin{cases} 475 - 0{,}5 \cdot \Delta b_2 \geq 0 \\ 225 + 0{,}5 \cdot \Delta b_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta b_2 \leq 950 \\ \Delta b_2 \geq -450 \end{cases} \quad \Delta b_2 \in [-450{,}950]$$

III. $\Delta b_1 = 0,\ \Delta b_2 = 0$

$$\begin{cases} 475 - 1{,}5 \cdot \Delta b_3 \geq 0 \\ 225 - 0{,}5 \cdot \Delta b_3 \geq 0 \\ 150 + \Delta b_3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta b_3 \leq \frac{950}{3} \\ \Delta b_3 \leq 450 \\ \Delta b_3 \geq -150 \end{cases} \quad \Delta b_3 \in \left[-150, \frac{950}{3}\right]$$

$b_1 \in [525, +\infty]$ $\;b_2 \in [150{,}1550]$ $\;b_3 \in \left[0, \frac{1400}{3}\right]$

$$\begin{pmatrix} x_5^{*\text{нов}} \\ x_2^{*\text{нов}} \\ x_4^{*\text{нов}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 475 - 0{,}5 \cdot 100 - 1{,}5 \cdot 150 \\ 225 + 0{,}5 \cdot 100 - 0{,}5 \cdot 150 \\ 150 + 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}$$ – не входит в зону

устойчивости

$x^{*\text{нов}} = (0, 200, 0, 300, 200, 0, 0)$

## Транспортная задача

Имеем транспортную задачу заданную функцией:

$$F = x_{11} + 1x_{12} + 3x_{13} + 4x_{14} + 2x_{15} + 7x_{16} + 3x_{21} + 2x_{22} + 1x_{23} + 5x_{24} + 4x_{25} + 5x_{26} + 1x_{31} + 4x_{32} + 6x_{33} + 3x_{34} + 5x_{35} + 2x_{36} + 5x_{41} + 7x_{42} + 4x_{43} + 2x_{44} + 4x_{45} + 3x_{46} \to min$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} = 30 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} = 35 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{36} = 40 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} + x_{46} = 45 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 15 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 30 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 20 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 35 \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} = 25 \\ x_{16} + x_{26} + x_{36} + x_{46} = 25 \end{cases}$$

Составим матрицу:

| | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | B6 | Запасы |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A1 | 1 | 1 | 3 | 4 | 2 | 7 | 30 |
| A2 | 3 | 2 | 1 | 5 | 4 | 5 | 35 |
| A3 | 1 | 4 | 6 | 3 | 5 | 2 | 40 |
| A4 | 5 | 7 | 4 | 2 | 4 | 3 | 45 |
| Потребности | 15 | 30 | 20 | 35 | 25 | 25 | 150/150 |

Метод северо-западного угла

| | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | B6 | Запасы |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A1 | ~~1~~$^{15}$ | ~~1~~$^{15}$ | ~~3~~ | 4 | ~~2~~ | ~~7~~ | ~~30/15~~/0 |
| A2 | ~~3~~ | ~~2~~$^{15}$ | ~~1~~$^{20}$ | ~~5~~ | 4 | ~~5~~ | 35/~~20~~/0 |
| A3 | ~~1~~ | 4 | ~~6~~ | ~~3~~$^{35}$ | ~~5~~$^{5}$ | ~~2~~ | ~~40~~/~~5~~/0 |
| A4 | ~~5~~ | ~~7~~ | 4 | ~~2~~ | 4$^{20}$ | 3$^{25}$ | ~~45/25~~/0 |
| Потребности | ~~15/~~0 | ~~30~~/~~15~~/0 | ~~20~~/0 | ~~35~~/0 | ~~25~~/~~20~~/0 | ~~25~~/0 | 150/150 |

F=15+15+30+20+105+25+80+75=365

Метод минимальных коэффициентов

| | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | B6 | Запасы |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A1 | 1$^{15}$ | 1$^{15}$ | 3 | 4 | 2 | 7 | 30/15/0 |
| A2 | 3 | 2$^{15}$ | 1$^{20}$ | 5 | 4 | 5 | 35/15/0 |
| A3 | 1 | 4 | 6 | 3 | 5$^{15}$ | 2$^{25}$ | 40/15/0 |
| A4 | 5 | 7 | 4 | 2$^{35}$ | 4$^{10}$ | 3 | 45/10/0 |
| Потребности | 15/0 | 30/15/0 | 20/0 | 35/0 | 25 | 25/0 | 150/150 |

F(x) = 1*15 + 1*15 + 2*15 + 1*20 + 5*15 + 2*25 + 2*35 + 4*10 = 315

План по второму методу получился лучше, поэтому возьмем его в качестве начального.

| | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | B6 | $U_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A1 | $1^{15}$ | $1^{15}$ | 3 | 4 | 2 | 7 | U1 |
| A2 | 3 | $2^{15}$ | $1^{20}$ | 5 | 4 | 5 | U2 |
| A3 | $1^{0}$ | 4 | 6 | 3 | $5^{15}$ | $2^{25}$ | U3 |
| A4 | 5 | 7 | 4 | $2^{35}$ | $4^{10}$ | 3 | U4 |
| $V_j$ | V1 | V2 | V3 | V4 | V5 | V6 | |

$i = \overline{1,4} \quad j = \overline{1,6}$

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 1 \\ u_1 + v_2 = 1 \\ u_2 + v_2 = 2 \\ u_2 + v_3 = 1 \\ u_3 + v_5 = 5 \\ u_3 + v_6 = 2 \\ u_4 + v_4 = 2 \\ u_4 + v_5 = 4 \\ u_3 + v_1 = 1 \end{cases} \quad \text{Пусть } u_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ v_1 = 1 \\ v_2 = 1 \\ u_2 = 1 \\ v_3 = 0 \\ v_4 = 3 \\ u_4 = -1 \\ v_6 = 2 \\ u_5 = 5 \\ v_5 = 5 \\ u_3 = 0 \end{cases}$$

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых ui + vj > cij

(1;5): 0 + 5 > 2; Δ15 = 0 + 5 - 2 = 3 > 0

(2;5): 1 + 5 > 4; Δ25 = 1 + 5 - 4 = 2 > 0

max(3,2) = 3

| | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | B6 | $U_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A1 | $1^{15(-)}$ | $1^{15}$ | 3 | 4 | $2^{+}$ | 7 | U1 |
| A2 | 3 | $2^{15}$ | $1^{20}$ | 5 | 4 | 5 | U2 |
| A3 | $1^{0(+)}$ | 4 | 6 | 3 | $5^{15(-)}$ | $2^{25}$ | U3 |
| A4 | 5 | 7 | 4 | $2^{35}$ | $4^{10}$ | 3 | U4 |
| $V_j$ | V1 | V2 | V3 | V4 | V5 | V6 | |

| | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | B6 | $U_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A1 | 1 | $1^{15}$ | 3 | 4 | $2^{15}$ | 7 | U1 |
| A2 | 3 | $2^{15}$ | $1^{20}$ | 5 | 4 | 5 | U2 |
| A3 | $1^{15}$ | 4 | 6 | 3 | $5^{0}$ | $2^{25}$ | U3 |
| A4 | 5 | 7 | 4 | $2^{35}$ | $4^{10}$ | 3 | U4 |
| $V_j$ | V1 | V2 | V3 | V4 | V5 | V6 | |

$$\begin{cases} u_1 + v_2 = 1 \\ u_2 + v_2 = 2 \\ u_2 + v_3 = 1 \\ u_2 + v_3 = 1 \\ u_4 + v_5 = 4 \\ u_3 + v_6 = 2 \\ u_4 + v_4 = 2 \\ u_1 + v_5 = 2 \\ u_3 + v_1 = 1 \end{cases} \quad \text{Пусть } u_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ v_1 = -2 \\ v_2 = 1 \\ u_2 = 1 \\ v_3 = 0 \\ v_4 = 0 \\ u_4 = 2 \\ v_6 = -1 \\ u_5 = 5 \\ v_5 = 2 \\ u_3 = 3 \end{cases}$$

Опорный план является оптимальным, так все оценки свободных клеток удовлетворяют условию ui + vj ≤ cij.

Минимальные затраты составят: F(x) = 1*15 + 2*15 + 2*15 + 1*20 + 1*15 + 2*25 + 2*35 + 4*10 = 270

Ответ

## *Ответ*

| | Потреб.1 | Потреб.2 | Потреб.3 | Потреб.4 | Потреб.5 | Потреб.6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Постав.1 | | 1/15 | | | 2/15 | |
| Постав.2 | | 2/15 | 1/20 | | | |
| Постав.3 | 1/15 | | | 3/0 | | 2/25 |
| Постав.4 | | | | 2/35 | 4/10 | |

Суммарные затраты на перевозку равны 270