Домашнее задание №4

по курсу «Теория принятия решений»

на тему «Однокритериальные задачи с риском»

Выполнил студент группы С21-703:Монастырский М О.

Проверил: Макаров В.В.

Вариант 14

Необходимо решить задачу выбора системы автоматического управления (САУ).

Сравниваются пять вариантов построения САУ: х, — линейная САУ; x_2 — самонастраивающаяся САУ с контролем границы устойчивости; x_3 — самонастраивающаяся САУ с контролем частотных характеристик; x_4 — САУ с переменной структурой; x_5 — релейная САУ.

Система должна работать в пяти различных режимах (s_1-s_5)• Работа САУ в каждом из этих режимов характеризуется следующими показателями качества: z_1 — максимальное перерегулирование (выброс переходной характеристики), град; z_2 — максимальное изменение времени регулирования (времени установления) при переходе от одного режима работы к другому, с; z_3 — амплитуда автоколебаний, град; z_4 — статическая ошибка, град; z_5 — сложность реализации системы, оцениваемая рангом, который присваивается системе экспертами в порядке возрастания ее сложности.

Каждый из критериев желательно минимизировать. Эксперты оценили максимально допустимые значения показателей z_1-z_5:

$z_1^M = 20$, $z_2^M = 10$, $z_3^M = 3$, $z_4^M = 5$, $z_5^M = 5$.

Значения показателей качества z_1-z_5 в зависимости от режимов работы системы s_1-s_5 для различных вариантов построения системы приведены в таблице.

Вариант САУ	Режим работы САУ				
		s_2	s_3	s_4	s_5
Критерий z_1					
x_1	20	14	4	3,5	12
x_2	20	16	3	3,5	7,
x_3	3	18	5	4	10
x_4	3,	20	8	9	13
x_5	3,5	11	8	9	*1*
Критерий z_2					
x_1	9	0,	1,	2,5	6
x_2	9	0,	1,	2,5	6
x_3	9	0,	1,	2,5	6
x_4	9	0,	1,	2,5	6
x_5	3,5	0,	1,	2,5	6
Критерий z_3					
x_1	0	0,	0	0,	0,8
x_2	0	0,	0	0,	0
x_3	0	0,	0,	0,	1
x_4	0	0,	0	0,	0,5
x_5	0	0,	0	0,	1
Критерий z_4					
x_1	0	4	0	0	0
x_2	0	3	0	0	0
x_3	0	2,	0	0	0
x_4	5	4	0	0	0
x_5	5	4	0	0	0
Критерий z_5					
x_1	3	4	5	2	1
x_2	3	4	5	2	1
x_3	3	4	5	2	1
x_4	3	4	5	2	1
x_5	3	4	5	2	1

В условиях задачи 10 Выбрать лучший вариант системы при разных предположениях о вероятностях режимов работы САУ для критериев . z_5

Первая ситуация априорной информированности ЛПР

1. Критерий Байеса-Лапласа

Согласно критерию Байеса–Лапласа каждое решение описывается следующим критерием:

$$z_{1i}(p_i, x) = B_i(p_i, x) = \sum_{j=1}^{q_i} p_{ij} u_i(x, s_{ij});$$

Оптимальными решениями $x^* \in X$ считают такие решения, для которых математическое ожидание функции полезности или функции потерь достигает экстремального значения:

– для функции полезности U_i

$$z_{1i}(p_i, x^*) = B_i(p_i, x^*) = \max_{x \in X} B_i(p_i, x) = \max_{x \in X} \sum_{j=1}^{q_i} p_{ij} u_i(x, s_{ij});$$

Решение

Предположим, что все критерии обладают одинаковой важностью

3*0,2+4*0,2+5*0,2+2*0,2+1*0,2 =0,6+0,8+1+0,4+0,2=3

Критерий z_5						*B-L*
x_1	3	4	5	2	1	3
x_2	3	4	5	2	1	3
x_3	3	4	5	2	1	3
x_4	3	4	5	2	1	3
x_5	3	4	5	2	1	3

Выбираем те варианты $x_к$, в строках которых стоит наименьшее значение $B_i(p_i, x_k)$, т.к. функция полезности.

Ответ: Согласно данному критерию, не важно какой тип выбирать

2. Критерий минимума среднего квадратического отклонения функции полезности

Для каждого решения $x \in X$ определим среднее квадратическое отклонение $\sigma_i = \sigma_i(p_i, x)$ функции полезности или функции потерь и его среднее значение $B_i(p_i, x)$ в виде

$$z_{2i}(p_i, x) = \sigma_i(p_i, x) = \left[\sum_{j=1}^{q_i} [u_i(x, s_{ij}) - B_i(p_i, x)]^2 p_{ij}\right]^{1/2};$$

$$B_i(p_i, x) = \sum_{j=1}^{q_i} p_{ij} u_i(x, s_{ij});$$

Смысл критерия минимизации среднего квадратического отклонения функции полезности (потерь) заключается в нахождении решения x^*, для которого

$$z_{2i}(p_i, x^*) = \sigma_i(p_i, x^*) = \min_{x \in X} \sigma_i(p_i, x).$$

Критерий z_5						*СКО*
x_1	3	4	5	2	1	1,41
x_2	3	4	5	2	1	1,41
x_3	3	4	5	2	1	1,41
x_4	3	4	5	2	1	1,41
x_5	3	4	5	2	1	1,41

Добавлено примечание ([УзМ1]): Исправлена формула СКО

Решение

$$\sqrt{(3-3)^2 * 0{,}2 + (4-3)^2 * 0{,}2 + (5-3)^2 * 0{,}2 + (2-3)^2 * 0{,}2 + (1-3)^2 * 0{,}2} = \sqrt{2} = 1{,}41$$

Ответ: Согласно данному критерию, не важно какой тип выбирать

3. Критерий максимизации вероятности распределения функции полезности

Выберем величину α, удовлетворяющую неравенствам $\underline{\alpha} \le \alpha \le \overline{\alpha}$, где $\overline{\alpha} = \max\limits_{s_{ij} \in S_i} \max\limits_{x \in X} u_i(x, s_{ij})$; $\underline{\alpha} = \min\limits_{s_{ij} \in S_i} \min\limits_{x \in X} u_i(x, s_{ij})$.

Каждое решение $x \in X$ оценивается критерием $z_{3i}(x, \alpha) = P(u_i(x, s_{ij}) \ge \alpha)$ — вероятностью того, что значение функции полезности не меньше α для состояния среды $s_{ij} \in S_i$. Смысл критерия максимизации вероятности распределения функции полезности заключается в нахождении решения $x^* \in X$, для которого

$$z_{3i}(x^*, \alpha) = P(u_i(x^*, s_{ij}) \ge \alpha) = \max_{x \in X} P(u_i(x, s_{ij}) \ge \alpha).$$

Решение

$\overline{\alpha} = 5$; $\underline{\alpha} = 1$, возьмем $\alpha = 3$

Строим матрицу, где ставим 1, если $P(u_i(x, s_{ij}) \ge \alpha)$

Критерий z_5						*м*
x_1	1	1	1	0	0	3
x_2	1	1	1	0	0	3
x_3	1	1	1	0	0	3
x_4	1	1	1	0	0	3
x_5	1	1	1	0	0	3

Выбираем те варианты $x_к$, в строках которых стоит наибольшее количество единиц.

Ответ: Согласно данному критерию, не важно какой тип принимать

4. Модальный критерий

Модальный критерий конструируется исходя из наиболее вероятного состояния среды.

Предположим, что существует единственное значение $p_{ij_1} = \max\limits_{s_{ij} \in S_i} P(s_i = s_{ij})$.

В этом случае ЛПР полагает, что среда находится в состоянии $s_{ij} \in S_i$, и оптимальное решение x^* определяется из условия

$$z_{4i}(x^*, s_{ij_1}) = u_i(x^*, s_{ij}) = \min\limits_{x \in X} u_i(x, s_{ij_1}).$$

Если же окажется, что максимум $P\{s_i = s_{ij}\}$ достигается на априорных вероятностях p_{ij_1}, p_{ij_2}, ..., p_{ij_N}, то оптимальное решение x^* определяется из условия

$$z_{4i}(x^*, s_{ij_1}, ..., s_{ij_{Nl}}) = \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N} u_i(x^*, s_{ij_1}) = \min\limits_{x \in X} \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N} u_i(x, s_{ij_l}).$$

Критерий z_5						*м*
x_1	3	4	5	2	1	3
x_2	3	4	5	2	1	3
x_3	3	4	5	2	1	3
x_4	3	4	5	2	1	3
x_5	3	4	5	2	1	3

5. Критерий минимума энтропии математического ожидания функции полезности

Перейдем к описанию критерия. Предположим, что $u_i(x, s_{ij}) > 0$ для всех $x \in X$ и $j = 1, ..., q_i$. Энтропию математического ожидания функции полезности для решения $x \in X$ определим следующим образом:

$$H_i(p_i, x) = -\sum_{j=1}^{q_i} \frac{p_{ij}\, u_i(x, s_{ij})}{\sum_{j=1}^{q_i} p_{ij}\, u_i(x, s_{ij})} \ln \frac{p_{ij}\, u_i(x, s_{ij})}{\sum_{j=1}^{q_i} p_{ij}\, u_i(x, s_{ij})}.$$

Здесь в качестве вероятностей выступают взвешенные нормализованные величины $\dfrac{p_{ij}\, u_i(x, s_{ij})}{\sum_{j=1}^{q_i} p_{ij}\, u_i(x, s_{ij})}$.

Требуется найти решение x^* (либо X_*) из условия

$$z_{5i}(p_i, x^*) = H_i(p_i, x^*) = \min_{x \in X} H_i(p_i, x).$$

Решение
Данный критерий не ориентирован на функцию полезности

6. Критерий Гремейера

$$z_{6i}(p_i, x^*) = \max_{x_k \in X} \min_{j \in \{1,\dots,q_i\}} p_{ij}\, v_i(x_k, s_{ij})$$

Во многих прикладных задачах применя

Критерий z_5						*min*
x_1	0,6	0,8	1	0,4	0,2	0,2
x_2	0,6	0,8	1	0,4	0,2	0,2
x_3	0,6	0,8	1	0,4	0,2	0,2
x_4	0,6	0,8	1	0,4	0,2	0,2
x_5	0,6	0,8	1	0,4	0,2	0,2

Max = 0,2 => можно выбирать любой

7. Комбинированный критерий. Объединение Байеса-Лапласа и СКО функции полезности (потерь)

ный критерий. Проведем объединение (свертку) критерия Байеса–Лапласа и критерия среднего квадратического отклонения функции полезности (потерь) на основе принципа абсолютной уступки.

Для функции полезности $U_i = \|u_i(x, s_{ij})\|$ необходимо выбрать такое решение, при котором значение критерия Байеса–Лапласа $z_{1i}(p_i, x)$ будет больше, а значение критерия среднего квадратического отклонения функции полезности $z_{2i}(p_i, x)$ — меньше. При аддитивном построении комбинированного критерия возьмем $z_{2i}(p_i, x)$ со знаком минус. Зададим параметр (весовой коэффициент) $\lambda_1 \in [0, 1]$ и для $x \in X$ определим

$$z_{7i}(p_i, x, \lambda_1) = (1 - \lambda_1)\, z_{1i}(p_i, x) - \lambda_1\, z_{2i}(p_i, x),$$

где

$$z_{1i}(p_i, x) = B_i(p_i, x) = \sum_{j=1}^{q_i} p_{ij} u_i(x, s_{ij});$$

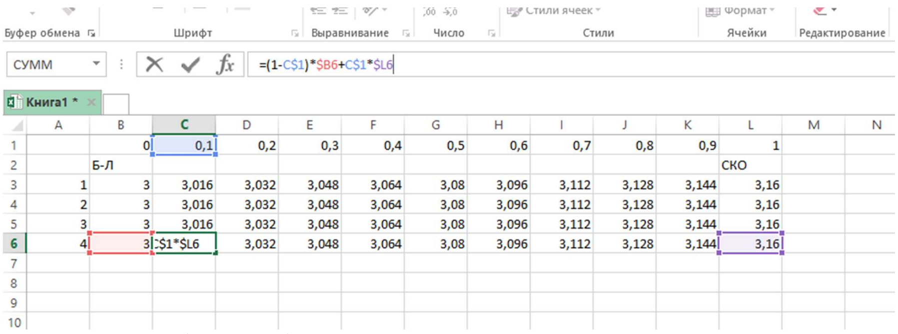
$$z_{2i}(p_i, x) = \sigma_i(p_i, x) = \left[\sum_{j=1}^{q_i} [u_i(x, s_{ij}) - B_i(p_i, x)]^2 p_{ij}\right]^{1/2}$$

Цель задачи заключается в нахождении решения x^* из условия:

$$z_{7i}(p_i, x^*, \lambda_1) = \max_{x \in X} z_{7i}(p_i, x, \lambda_1).$$

Решение

λ=0,1
(1-0,1)*3+0,1*3,16=3,016
(1-0,1)*3+0,1*3,16=3,016
1-0,1)*3+0,1*3,16=3,016
(1-0,1)*3+0,1*3,16=3,01677



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1		0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1		
2		Б-Л										СКО		
3	1	3	3,016	3,032	3,048	3,064	3,08	3,096	3,112	3,128	3,144	3,16		
4	2	3	3,016	3,032	3,048	3,064	3,08	3,096	3,112	3,128	3,144	3,16		
5	3	3	3,016	3,032	3,048	3,064	3,08	3,096	3,112	3,128	3,144	3,16		
6	4	3	:$1*$L6	3,032	3,048	3,064	3,08	3,096	3,112	3,128	3,144	3,16		
7														
8														
9														
10														

Вывод: можно выбирать любой

Заключение по первой ситуации априорной информированности ЛПР

Выбор среди 5-и одинаковых альтернатив бессмысленен

Вторая ситуация априорной информированности ЛПР

1. Максиминный критерий Вальда

Рассмотрим ситуацию принятия решения, когда функция полезности выражается в виде $U_i = \|u_i(x, s_{ij})\|$. Тогда согласно принципу максимина каждому решению $x \in X$ присваивается в качестве оценки его гарантированный уровень, который определяется как наименьшее по состояниям среды значение функции полезности:

$$z_{8i} = m_i(x) = \min_{s_{ij} \in S_i} u_i(x, s_{ij}).$$

Оптимальным называется такое решение $x^* \in X$, для которого

$$z_{8i}^* = \max_{x \in X} m_i(x) = \max_{x \in X} \min_{s_{ij} \in S_i} u_i(x, s_{ij}).$$

Правило выбора решения в соответствии с максиминным критерием для дискретного множества решений $x_k \in X$ можно интерпретировать следующим образом.

Матрица решений (функция полезности) $U_i = \|u_i(x_k, s_{ij})\|$, $k = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, q_i$, дополняется еще одним столбцом из наименьших результатов $m_i(x_k)$ $(m_i(x_k) = \min_{s_{ij} \in S_i} u_i(x_k, s_{ij}))$ каждой строки. Выбираются те альтернативы

Для функции потерь критерий является минимаксным

Критерий z_5					
x_1	3	4	**5**	2	1
x_2	3	4	**5**	2	1
x_3	3	4	**5**	2	1
x_4	3	4	**5**	2	1
x_5	3	4	**5**	2	1

Ответ: выбирать можно любой

2. Критерий минимаксного риска Сэвиджа

В критерии Сэвиджа функция полезности выражена в форме сожалений или риска. Оптимальным решением $x^* \in X$ или $X_\bullet \in X$ является решение, удовлетворяющее условию:

– для функции полезности в виде $U_i = \|u_i(x_k, s_{ij})\|$

$$z_{9i}^* = \min_{x_k \in X} z_{9i} = \min_{x_k \in X} \max_{s_{ij} \in S_i} c_{ij}(x_k),$$

где $c_{ij}(x_k) = M_{ij} - u_i(x_k, s_{ij}) = \max_{x_k \in X} u_i(x_k, s_{ij}) - u_i(x_k, s_{ij})$, $k = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, q_i$;

Решение

Критерий z_5					
x_1	3	4	5	2	1
x_2	3	4	5	2	1
x_3	3	4	5	2	1
x_4	3	4	5	2	1
x_5	3	4	5	2	1

Критерий z_5						*MAX*
x_1	2	3	4	1	0	4
x_2	2	3	4	1	0	4
x_3	2	3	4	1	0	4
x_4	2	3	4	1	0	4
x_5	2	3	4	1	0	4

Ответ: Можно брать любой

Заключение по второй ситуации априорной информированности ЛПР
Выбор среди 5-и одинаковых альтернатив бессмысленен

Третья ситуация априорной информированности ЛПР

1. Критерий Гурвица

Смысл критерия Гурвица заключается в нахождении оптимального решения $x^* \in X$ или $X_{\bullet} \in X$, для которого выполнено условие:

$$z_{10i}(x^*) = \max_{x_k \in X} z_{10i}(x_k),$$

где для функции полезности $U_i = \|u_i(x_k, s_{ij})\|$

$$z_{10i}(x_k) = \lambda\, m_{ki} + (1-\lambda)\, M_{ki} = \lambda \min_{s_{ij} \in S_i} u_i(x_k, s_{ij}) + (1-\lambda) \max_{s_{ij} \in S_i} u_i(x_k, s_{ij}),\ \lambda \in [0, 1],$$

для функции потерь $V_i = \|v_i(x, s_{ij})\|$

$$z_{10i}(x_k) = \lambda m_{ki} + (1-\lambda) M_{ki} = \lambda \max_{s_{ij} \in S_i} v_i(x_k, s_{ij}) + (1-\lambda) \min_{s_{ij} \in S_i} v_i(x_k, s_{ij}), \lambda \in [1,0]$$

Решение

	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
1	1	1,4	1,8	2,2	2,6	3	3,4	3,8	4,2	4,6	5
2	1	1,4	1,8	2,2	2,6	3	3,4	3,8	4,2	4,6	5
3	1	1,4	1,8	2,2	2,6	3	3,4	3,8	4,2	4,6	5
4	1	1,4	1,8	2,2	2,6	3	3,4	3,8	4,2	4,6	5

(1-0,1)*1+5*0,1=0,9+0,5=1,4

Ответ: Не имеет разницы какой выбирать

2. Критерий Ходжеса-Лемана

Критерий Ходжеса–Лемана позволяет использовать возможную информацию о распределении вероятности состояний среды, имеющуюся у ЛПР, и в то же время обеспечивает заданный уровень гарантированного выбора в случае, если эта информация неточная. Формально критерий Ходжеса–Лемана представляет собой комбинацию критерия Байеса–Лапласа и максиминного критерия Вальда.

$$z_{11i}(p_i, x^*) = \min_{x_k \in X}(\lambda_0 B_i(p_i, x_k) + (1 - \lambda_0) \max_{s_{ij} \in S_i} v_i(x, s_{ij}))$$

где $\lambda_0 \in [0, 1]$ — весовой коэффициент.

Решение

λ	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
	Вальда										Б-Л
x1	5	4,8	4,6	4,4	4,2	4	3,8	3,6	3,4	3,2	3
x2	5	4,8	4,6	4,4	4,2	4	3,8	3,6	3,4	3,2	3
x3	5	4,8	4,6	4,4	4,2	4	3,8	3,6	3,4	3,2	3
x4	5	4,8	4,6	4,4	4,2	4	3,8	3,6	3,4	3,2	3

(1-0,1)*5+3*0,1=4.5+0,3=4,8

Ответ: Не имеет разницы какой выбирать т к max везде одинаков

3. Универсальный комбинированный критерий

Для принятия решений при разных ситуациях априорной информированности ЛПР построим универсальный комбинированный критерий снятия неопределенности. Для этого аддитивно объединим различные критерии для разных ситуаций априорной информированности ЛПР.

Для случая функции полезности $U_i = \|u_i(x_k, s_{ij})\|$ объединим предложенный ранее комбинированный критерий, являющийся разностью значений критерия Байеса–Лапласа $z_{1i}(p_i, x_k)$ и критерия среднего квадратического отклонения функции полезности $z_{2i}(p_i, x_k)$,

$$z_{7i}(p_i, x_k, \lambda_1) = (1 - \lambda_1)\, z_{1i}(p_i, x_k) - \lambda_1 z_{2i}(p_i, x_k),$$

и критерий Гурвица $z_{10i}(x_k)$

$$z_{10i}(x_k, \lambda_2) = \lambda_2 m_{ki} + (1 - \lambda_2) M_{ki} = \lambda_2 \min_{s_{ij} \in S_i} u_i(x_k, s_{ij}) + (1 - \lambda_2) \max_{s_{ij} \in S_i} u_i(x_k, s_{ij}).$$

Предлагаемый универсальный комбинированный критерий снятия неопределенности имеет вид

$$z_i(x_k, \beta, \lambda_1, \lambda_2) = (1 - \beta)\, z_{7i}(p_i, x_k, \lambda_1) + \beta z_{10i}(x_k, \lambda_2), \quad \beta, \lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]\,.$$

Данный критерий является самым общим по отношению ко всем ранее рассмотренным; при его описании у него опущен номер в индексе.

Цель решения задачи заключается в нахождении x^* из условия

$$z_i(x^*, \beta, \lambda_1, \lambda_2) = \max_{x_k \in X} z_i(x_k, \beta, \lambda_1, \lambda_2).$$

Решение

λ	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
	Б-Л+СКО										**Гурвиц**
x1	3,08	3,072	3,064	3,056	3,048	3,04	3,032	3,024	3,016	3,008	3
x2	3,08	3,072	3,064	3,056	3,048	3,04	3,032	3,024	3,016	3,008	3
x3	3,08	3,072	3,064	3,056	3,048	3,04	3,032	3,024	3,016	3,008	3
x4	3,08	3,072	3,064	3,056	3,048	3,04	3,032	3,024	3,016	3,008	3

(1-0,1)*(3,08)+0,1*3 = 3,072

Ответ:Не имеет разницы какой выбирать

Заключение по третьей ситуации априорной информированности ЛПР

Выбор из 5 одинаковых альтернатив бессмысленен