Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Федеральное Государственное
Автономное Образовательное Учреждение
Высшего Образования
Национальный ядерный университет «МИФИ»

Кафедра: «Финансовый мониторинг»

Домашнее задание № 2
По курсу
«Теория принятия решений»

Студент   Монастырский М. О.
Группа С21-703
Проверил: Макаров В.В

Москва 2024г.

Дано:

08: (0,3,9), (4,0,3), (4,8,6), (5,2,15), (8,7,2), (1,8,3)

Отношение Парето

(обозначается символом P) задается следующим образом. Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ – любые две точки в пространстве E^m. Тогда

$\boldsymbol{a}P\boldsymbol{b} \leftrightarrow (a_i \geq b_i,\ i = 1, \ldots, m)$ и $(\exists j\colon a_j > b_j)$,

	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0
3	0	1	0	0	0	1
4	0	1	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0

$r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. матрицей бинарного отношения R

Шаг 2:

2)В матрице r имеется четыре столбца, состоящих из одних нулей – 1-ый, 3-ий, 4-ый и 5-ый. Таким образом, вектор u = (1, 3 ,4 ,5); d = 4.

Шаг 3:

Так как $d \neq 0$, то переходим на этап 4.

Шаг 4:

Положим $\Omega^P = \{x^1, x^3, x^4, x^5\}$ = {(0,3,9), (4,8,6), (5,2,15), (8,7,2)}

Ответ: (0,3,9), (4,8,6), (5,2,15), (8,7,2).

Мажоритарное отношение (обозначается символом М) задается следующим образом. Пусть **a** и **b** – любые две точки в пространстве Em. Тогда **aMb** ↔ больше половины координат у альтернативы **a** строго больше одноименных (т.е. тех же самых) координат у альтернативы **b**.

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0
3	1	1	0	0	1	1
4	1	1	1	0	0	1
5	1	1	0	1	0	0
6	1	0	0	0	1	0

Шаг 1:

$r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. матрицей бинарного отношения R

Шаг 2:

В матрице нет столбцов, содержащих только нули. Получаем: $d = 0$.

Шаг 3:

Если $d = 0$, это означает, что недоминируемых элементов по отношению R в данном множестве Ω нет, т. е. множество Ω^R пусто. Алгоритм прекращает работу.

Ответ: пустое множество.

Отношение Z-оптимальности.

Не давая общего рекуррентного определения, дадим для простоты описание этого отношения только в трехмерном случае ($m = 3$). Пусть ***a*** и ***b*** – любые две точки в пространстве E^3. Тогда ***aZb*** ↔ тогда и только тогда, когда ($a_1 > b_1$) и [($a_2 > b_2$ или

$a_3>b_3$)]. В данном случае первый критерий является более важным, чем равноценные между собой второй и третий критерии.

Шаг 1:

$$r=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Шаг 2:

В матрице r имеется один столбец, состоящий из одних нулей – 5-ый. Таким образом, вектор $u = (5)$; $d = 1$.

Шаг 3:

Так как $d \neq 0$, то $\Omega^P = \{ x^5\} = \{(8,7,2)\}$

Ответ: (8,7,2).

Идея **метода идеальной точки** состоит в том, что в 1-ом случае в качестве лучшей альтернативы выбирается сама точка $\hat{x}$, а во 2-ом случае – точка из множества A, ближайшая к точке $\hat{x}$. Если же таких точек несколько, то в качестве оптимальных или лучших выбираются все такие точки.

Обозначим расстояние между точкой x и точкой $\hat{x}$ через ρ(x, $\hat{x}$). Таким образом, метод идеальной точки сводится к решению задачи минимизации на множестве A числовой функции ρ(x, $\hat{x}$). Поскольку расстояние ρ(a,b) = $\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(a_i - b_i)^2}$, то данная задача эквивалентна задаче минимизации квадрата расстояние $\rho^2(x, \hat{x})$, которая не требует извлечения квадратного корня.

(0,3,9), (4,0,3), (4,8,6), (5,2,15), (8,7,2), (1,8,3)

Шаг 1:

Найдем нормированное множество *A*.

С помощью формул:

$y_j^i = \frac{x_j^i - x_j^-}{x_j^+ - x_j^-}$ (i = 1, ..., N; j = 1, ..., m),

где $x_j^- = \min_i x_j^i$, $x_j^+ = \max_i x_j^i$ (j = 1, ..., m).

$x_1^- = \min_i x_1^i = \min\{0,4,4,5,8,1\} = 0$, и $x_1^+ = \max_i x_1^i = \max\{0,4,4,5,8,1\} = 8$.

Аналогично,

$x_2^- = \min_i x_2^i = \min\{3,0,8,2,7,8\} = 0$, и $x_2^+ = \max_i x_2^i = \max\{3,0,8,2,7,8\} = 8$;

$x_3^- = \min_i x_3^i = \min\{9,3,6,15,2,3\} = 2$, и $x_3^+ = \max_i x_3^i = \max\{9,3,6,15,2,3\} = 15$.

Далее, $x_1^+ - x_1^- = 8$, $x_2^+ - x_2^- = 8$, $x_3^+ - x_3^- = 13$. В соответствие с формулой (4),

$y_1^1 = \frac{x_1^1+0}{8} = 0$, $y_1^2 = \frac{x_1^2+0}{8} = \frac{1}{2}$, $y_1^3 = \frac{x_1^3+0}{8} = \frac{1}{2}$, $y_1^4 = \frac{x_1^4+0}{8} = \frac{5}{8}$, $y_1^5 = \frac{x_1^5+0}{8} = 1$, $y_1^6 = \frac{x_1^6+0}{8} = \frac{1}{8}$;

$y_2^1 = \frac{x_2^1 - 0}{8} = \frac{3}{8}$, $y_2^2 = \frac{x_2^2 - 0}{8} = 0$, $y_2^3 = \frac{x_2^3 - 0}{8} = 1$, $y_2^4 = \frac{x_2^4 - 0}{8} = \frac{1}{4}$, $y_2^5 = \frac{x_2^5 - 0}{8} = \frac{7}{8}$, $y_2^6 = \frac{x_2^6 - 0}{8} = 1$;

$y_3^1 = \frac{x_3^1 - 2}{13} = \frac{7}{13}$, $y_3^2 = \frac{x_3^2 - 2}{13} = \frac{1}{13}$, $y_3^3 = \frac{x_3^3 - 2}{13} = \frac{4}{13}$, $y_3^4 = \frac{x_3^4 - 2}{13} = 1$, $y_3^5 = \frac{x_3^5 - 2}{13} = 0$, $y_3^6 = \frac{x_3^6 - 2}{13} = \frac{1}{13}$;

В результате получаем $A = \{(0, \frac{3}{8}, \frac{7}{13}), (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{13}), (\frac{1}{2}, 1, \frac{4}{13}), (\frac{5}{8}, \frac{1}{4}, 1), (1, \frac{7}{8}, 0), (\frac{1}{8}, 1, \frac{1}{13})\}$.

Шаг 2:

Для каждой точки $x \in A$ требуется **найти квадрат расстояния между точкой *x* и идеальной точкой $\hat{x} = (1, 1, 1)$** и затем выбрать точку, для которой эта величина минимальна. Для произвольной точки x имеем

$\rho^2(x, \hat{x}) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 1)^2$.

Подставляя в это выражение каждую из 6 точек из множества A, получаем

$\rho^2(x^1, \hat{x}) = (0 - 1)^2 + (\frac{3}{8} - 1)^2 + (\frac{7}{13} - 1)^2 \approx 1,60364$;

$\rho^2(x^2, \hat{x}) = (\frac{1}{2} - 1)^2 + (0 - 1)^2 + (\frac{1}{13} - 1)^2 \approx 2,10207$;

$\rho^2(x^3, \hat{x}) = (\frac{1}{2} - 1)^2 + (1 - 1)^2 + (\frac{4}{13} - 1)^2 \approx 0,72929$;

$\rho^2(x^4, \hat{x}) = (\frac{5}{8} - 1)^2 + (\frac{1}{4} - 1)^2 + (1 - 1)^2 \approx 0,703125$;

$\rho^2(x^5, \hat{x}) = (1 - 1)^2 + (\frac{7}{8} - 1)^2 + (0 - 1)^2 \approx 1,015625$;

$\rho^2(x^6, \hat{x}) = (\frac{1}{8} - 1)^2 + (1 - 1)^2 + (\frac{1}{13} - 1)^2 \approx 1,6177$.

Таким образом, ближайшей к идеальной точке является точка x^4. Именно эта точка и определяется как решение в методе идеальной точки.

Соответствующая исходная точка (до нормализации) равна (5,2,15).

Ответ: (5,2,15)

Принцип максимина (гарантированного результата).

Сравниваются все координаты (оценки по критериям) у одной альтернативы. Из них выбирается самая худшая (самая маленькая) оценка. Среди всех альтернатив выбираются те, у которых эта худшая оценка максимальна. Конечно, предварительно требуется сделать нормализацию

Нормированное множество

$A = \{(0, \frac{3}{8}, \frac{7}{13}), (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{13}), (\frac{1}{2}, 1, \frac{4}{13}), (\frac{5}{8}, \frac{1}{4}, 1), (1, \frac{7}{8}, 0), (\frac{1}{8}, 1, \frac{1}{13})\}$

Шаг 1:

Найдем для каждой из точек минимальную координату. Обозначим ее через M_i (i – это номер точки). Получим:

$M_1 = 0$, $M_2 = 0$, $M_3 = \frac{4}{13}$, $M_4 = \frac{1}{4}$, $M_5 = 0$, $M_6 = \frac{1}{13}$

Шаг 2:

Таким образом, принцип гарантированного результата рекомендует выбрать альтернативу x^3. Ее минимальная координата $M_3 = \frac{4}{13}$, что больше, чем у любой другой точки.

Ответ: (4,8,6).

Правило Коупленда

Для любой альтернативы $x \in \Omega$ положим

$$K(x) = |xR| - |Rx|,$$

где, как обычно, через $|A|$ обозначено число элементов конечного множества A. Понятно, что указанную числовую функцию нетрудно определить по любому заданному бинарному отношению R. Правило Коупленда состоит в том, что в качестве оптимальных выбираются альтернативы, максимизирующую эту функцию.

Шаг 1:

Будем считать, что на данном множестве задано бинарное отношение Z-оптимальности. В пункте 3 найдена матрица r для этого бинарного отношения:

Добавлено примечание ([УзМ1]): Вставлена верная матрица r

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Шаг 2:

Подсчитывая разницу между числом единиц в i-ой строке и числом единиц в i-ом столбце матрицы r, получим для соответствующих альтернатив:

$K(0,3,9)=0-4=-4$;

$K(4,0,3)=0-2=-2$;

$K(4,8,6)=2-1=1$;

$K(5,2,15)=4-1=3$;

$K(8,7,2)=3-0=3$;

$K(1,8,3)=1-2=-1$

Таким образом, в данном случае выбор по правилу Коупленда состоит из альтернатив $x^4 = (5,2,15)$ и $x^5 = (8,7,2)$, на которой функция $K(x)$ принимает максимальное значение 3.
Ответ: $x^4 = (5,2,15)$ и $x^5 = (8,7,2)$.

Таблица результатов:

ИСХОДНЫЕ АЛЬТЕРНАТИВЫ: $x^1 = (0,3,9)$, $x^2 = (4,0,3)$, $x^3 = (4,8,6)$, $x^4 = (5,2,15)$, $x^5 = (8,7,2)$, $x^6 = (1,8,3)$					
Парето-оптимальные	**Мажоритарно оптимальные**	**Z-оптималь-ные**	**Идеальная точка**	**Гарантиро-ванный результат**	**Правило Коупленда**
(0,3,9), (4,8,6), (5,2,15), (8,7,2).	пустое множество	(8,7,2)	(5,2,15)	(4,8,6)	(5,2,15), (8,7,2)

Таким образом, получаем, что по трем правилам выбираются альтернативы (5,2,15) и (8,7,2). То есть они и являются наиболее оптимальными альтернативами в данном случае.