Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Федеральное Государственное
Автономное Образовательное Учреждение
Высшего Образования
Национальный ядерный университет «МИФИ»

Кафедра: «Финансовый мониторинг»

Домашнее задание № 1
По курсу
«Теория принятия решений»

Студент Монастырский М. О.
Группа С21-703
Проверил: Макаров В.В.

Москва 2024г.

Вариант 36

Задание 1

Найти средние значения и доверительные интервалы для заданного набора оценок при вероятности P = 0,95 и P = 0,99

36) 10 11 9 7 3 1 2 4

Решение

Найдем математическое ожидание

$$\bar{x} = \frac{10 + 11 + 9 + 7 + 3 + 1 + 2 + 4}{8} = 5{,}875$$

Найдем с.к.о

$$\sigma \approx S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \hat{x})^2}{N - 1}}$$

$\sigma \approx S =$

$$\sqrt{\frac{(10-5{,}875)^2+(11-5{,}875)^2+(9-5{,}875)^2+(7-5{,}875)^2+(3-5{,}875)^2+(1-5{,}875)^2+(2-5{,}875)^2+(1-5{,}875)^2}{7}}$$

=3,87

p=0.95

$$p^* = \frac{p}{2} = \frac{0{,}95}{2} = 0{,}475 => z = 1{,}96$$

$$= z\left(\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right) = 1{,}96 \cdot \frac{3{,}87}{\sqrt{8}} \approx 2{,}68$$

$$[5{,}875 - 2{,}68; 5{,}875 + 2{,}68] = [3{,}19; 8{,}56]$$

В интервал входит две оценки: 7;4

p=0.99

$$p^* = \frac{p}{2} = \frac{0{,}99}{2} = 0{,}495 => z = 2{,}58$$

$$\Delta = z\left(\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right) = 2{,}58 \cdot \frac{3{,}87}{\sqrt{8}} \approx 3{,}53$$

Доверительный интервал

$$[5{,}875 - 3{,}53; 5{,}875 + 3{,}53] = [2{,}35; 9{,}41]$$

В интервал входит четыре оценки: 3;4;7;9

Задание 2

Представить данные порядковые ранжировки в виде стандартных ранжировок и определить показатель связанных рангов.

x6≻x3~x5~x1~x7≻x4≻x2

Для приписывания численных значений рангов для связанных объектов применим метод средних рангов.

Ранги присваиваются по формуле:

$$R = \frac{2p+r+1}{2},$$

где p – число альтернатив, уже получивших ранги,

а r – следующие по предпочтительности равноценные альтернативы

$$R_{x6} = \frac{2\cdot 0+1+1}{2} = 1$$

$$R_{x3} = \frac{2\cdot 1+4+1}{2} = 3{,}5$$

$$R_{x5} = \frac{2\cdot 1+4+1}{2} = 3{,}5$$

$$R_{x1} = \frac{2\cdot 1+4+1}{2} = 3{,}5$$

$$R_{x7} = \frac{2\cdot 1+4+1}{2} = 3{,}5$$

$$R_{x4} = \frac{2\cdot 5+1+1}{2} = 6$$

$$R_{x2} = \frac{2\cdot 6+1+1}{2} = 7$$

x1	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**x6**	**x7**
3,5	7	3,5	6	3,5	1	3,5

3,5+7+3,5+6+3,5+1+3,5=14+1+6+7= 7(7+1)/2

28=28, верно.

Определим показатель связанных рангов по формуле:

$$T = \frac{1}{12}\sum_{d=1}^{H}(h_d^3 - h_d)\text{, где}$$

где H – число групп совпадающих рангов в ранжировке,

h_d – число равных рангов в группе с номером d.

$$T = \frac{1}{12}\cdot(4^3 - 4) = \frac{1}{12}\cdot(60) = 5$$

Задание 3

Задание 3. Исходя из ранжировок, заданных экспертами:

1. Найти групповую (результирующую) группировку в балльном и порядковом виде.

2. Оценить согласованность мнений экспертов на уровне значимости 0.100, 0.050, 0.025, 0.010, 0.005. Буква «м» рядом с номером варианта означает, что лучшими альтернативами являются те, у которых оценки ниже; буква «б» там же означает, что лучшими альтернативами являются те, у которых оценки выше.

Эксперты	Альтернативы					
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$Э_1$	1	4	3	2	6	5
$Э_2$	2	1	1	4	5	6
$Э_3$	2	4	5	1	10	3
$Э_4$	1	3	4	2	6	5
$Э_5$	4	1	3	1	6	5
$\sum R$	10	13	16	10	33	24
Бальный вид	1,5	3	4	1,5	5	6

Стандартизируем ранжировки:

Добавлено примечание ([УзМ1]): Ранжировки приведены к стандартному виду

Эксперты	Альтернативы					
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$Э_1$	1	4	3	2	6	5
$Э_2$	3	1,5	1,5	4	5	6
$Э_3$	2	4	5	1	6	3
$Э_4$	1	3	4	2	6	5
$Э_5$	4	1,5	3	1,5	6	5
$\sum R$	11	14	16,5	10,5	29	24
Бальный вид	2	3	4	1	6	5

Часть 1.

По условию задачи лучшими альтернативами являются те, у которых оценки выше (б). Тогда стандартная ранжировка в бальном и порядковом виде выглядит так:

В бальном виде: 2,3; 4; 1; 6;5.

В порядковом виде: x4>x1>x2>x3>x6>x5

Часть 2.

N = 5

m = 6

Степень свободы d = m – 1 = 5. По таблице критических значений χ^2-распределения находим пять чисел на пересечении строки с d = 5 и столбцов с заголовками 0.100; 0.050; 0.025; 0.010; 0.005. Они равны 9,2363; 11,0705; 12,8325; 15,0863 и 16,7496.

Среднее значение рангов:

$$\bar{r} = \frac{N(m+1)}{2} = \frac{5(6+1)}{2} = 17{,}5$$

Вычислим отклонение суммарных рангов отдельных альтернатив от их среднего значения:

$\sum R$	11	14	16,5	10,5	29	24

$$S = \sum_{j=1}^{m} (r_j - \bar{r})^2$$

$$S = (11-17{,}5)^2 + (14-17{,}5)^2 + (16{,}5-17{,}5)^2 + (10{,}5-17{,}5)^2 + (29-17{,}5)^2 + (24-17{,}5)^2 = 279$$

$$T1 = 0$$

$$T3 = 0$$

$$T4 = 0$$

$$T2 = \frac{1}{12} \cdot (2^3 - 2) = \frac{1}{12} \cdot (6) = 0{,}5$$

$$T5 = \frac{1}{12} \cdot (2^3 - 2) = \frac{1}{12} \cdot (6) = 0{,}5$$

Коэффициент конкордации:

$$W = \frac{12S}{N^2(m^3 - m) - N\sum_{i=1}^{N} T_i}$$

$$W = \frac{12 \cdot 279}{5^2(6^3 - 6) - 5 * 1} = \frac{3348}{5245} = 0.6383$$

Фактическое значение:

$$U = N(m-1)W = 5 \cdot (6-1) \cdot 0{,}6383 = 15.9575$$

Степень свободы d = 7 – 1 = 6, тогда по таблице χ^2- распределения

При

α = 0.100, U = 15.9575> 9,2363

α = 0.050, U = 15.9575 > 11,0705

α = 0.025, U = 15.9575 > 12,8325

α = 0.010, U = 15.9575 > 15,0863

α = 0.005, U = 15.9575 > 16,7496

Т. о. при всех вышеуказанных уровнях значимости кроме α = 0.005 мнения экспертов согласованы.

Задание 4

Посчитать коэффициент корреляции Спирмена для первой и последней ранжировки, данной экспертами. Данные взять из вариантов к заданию 3 с теми же номерами.

Решение

Обозначим ранжировки первого и последнего экспертов:

r_1= (1, 4, 3, 2, 6, 5)

r_5= (4, 1,5, 3, 1,5, 6, 5)

В стандартном виде:

1	4	3	2	6	5
4	1,5	3	1,5	6	5

Квадрат отклонения оценок:

$$S^2 = \sum_{i=1}^{m} (r_{1i} - r_{4i})^2$$

$$S_{15}^2 = (1-4)^2 + (4-1{,}5)^2 + (3-3)^2 + (2-1{,}5)^2 + (6-6)^2 + (5-5)^2$$
$$= 9 + 6{,}25 + 0{,}25 = 15{,}5$$

Тогда коэффициент корреляции Спирмена:

$$\rho = \frac{{}^{1}/_{6}(m^3-m) - S_{12}^2 - T_1 - T_2}{\sqrt{[{}^{1}/_{6}(m^3-m)-2T_1][{}^{1}/_{6}(m^3-m)-2T_2]}},$$

T1 = 0 т к групп элементов нет

T2 = 0,5 т к

$$T = \frac{1}{12}\cdot(2^3-2) = \frac{1}{12}\cdot(6) = 0{,}5$$

$$\rho = \frac{\frac{1}{6}*(6^3-6) - 15{,}5 - 0{,}5}{\sqrt{(\frac{1}{6}*(6^3-6)-1)(\frac{1}{6}*(6^3-6))}} \approx 0{,}551$$

Таким образом связь между ранжировками прямая средней степени

Добавлено примечание ([УзМ2]): Исправлена формула корреляции Спирмена

Добавлено примечание ([УзМ3]): Сформулирован вывод о связи между ранжировками

Задание 5

Задание 5. Исходя из представленных несколькими экспертами матриц попарных сравнений альтернатив, найти их веса. В каждый вариант задания входит три матрицы из приведенных ниже матриц R1 – R7.

Вариант 1

Исходя из представленных несколькими экспертами матриц попарных сравнений альтернатив R1, R2, R3, найти их веса.

$$R1 = \begin{pmatrix} ½ & 0 & 1 & 0 \\ 1 & ½ & ½ & ½ \\ 0 & ½ & ½ & 1 \\ 1 & ½ & 0 & ½ \end{pmatrix}; \quad R2 = \begin{pmatrix} ½ & 1 & 0 & 0 \\ 0 & ½ & 1 & 1 \\ 1 & 0 & ½ & ½ \\ 1 & 0 & ½ & ½ \end{pmatrix}; R3 = \begin{pmatrix} ½ & 0 & 0 & 1 \\ 1 & ½ & 1 & 1 \\ 1 & 0 & ½ & ½ \\ 0 & 0 & ½ & ½ \end{pmatrix}$$

Посчитаем элементы матриц: $X = (x_{ij})$

$$x_{ij} = \frac{1}{2} + \frac{N_i - N_j}{2N}, \text{ где}$$

N_i – количество оценок, равное 1;

N_j – количество оценок, равное 0;

N – количество экспертов.

$$X = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/2 & 5/6 & 5/6 \\ 2/3 & 1/6 & 1/2 & 2/3 \\ 2/3 & 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Умножим все элементы матрицы X на общий знаменатель элементов этой матрицы. Получим матрицу $Y = 6X$

$$Y = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Выполним итеративный процесс:

$$k^0 = (1, 1, 1, 1)$$

$$k^1 = Yk^0 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 17 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$k^2 = Yk^1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 17 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 105 \\ 197 \\ 129 \\ 107 \end{pmatrix}$$

$$k^3 = Yk^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 5 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 122 \\ 222 \\ 114 \\ 142 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1181 \\ 2191 \\ 1432 \\ 1196 \end{pmatrix}$$

Нормируем, получим:

$$v_1 = (0.5294, \ \ 1.00, \ \ 0.7059, \ \ 0.5882)$$

$$v_2 = (0.5330, \ \ 1.00, \ \ 0.6548, \ \ 0.5431)$$

$$v_3 = (0.5390,\ \ 1.00,\ \ 0.6536,\ \ 0.5459)$$

Самая большая разность между компонентами векторов, полученных на втором и третьем этапах итераций равна 0,0060. 0,0060 < 0,01, данная точность достаточна, наблюдается сходимость.

Нормируем v_3: $0{,}5390 + 1{,}00 + 0{,}6536 + 0{,}5459 = 2{,}7385$

$$v_4^* = \left(\frac{0{,}5390}{2{,}7385}, \frac{1{,}00}{2{,}7385}, \frac{0{,}6536}{2{,}7385}, \frac{0{,}5459}{2{,}7385}\right) = (0.1968,\ \ 0.3652,\ \ 0.2387,\ \ 0.1993)$$

Получили веса, характеризующие относительную важность рассмотренных альтернатив с точки зрения данных экспертов.

Получаем следующую ранжировку : x2>x3>x4>x1

Добавлено примечание ([УзМ4]): Добавлена ранжировка соответствующая весам