Ф-03-Лекция 3 Приложение двойного интеграла

Геометрические приложения

П.1 Вычисление площади области

Если область G измерима, то ее площадь (мера) равна

$$S_G = \iint_G 1 \cdot dxdy$$

Действительно, интегральная сумма для функции $f(x, y) \equiv 1$, соответствующая разбиению G_ξ, равна сумме площадей прямоугольников, составляющих G_ξ. Тогда их пределы при $d(\xi) \to 0$ совпадают: один равен площади области G, второй – двойному интегралу.

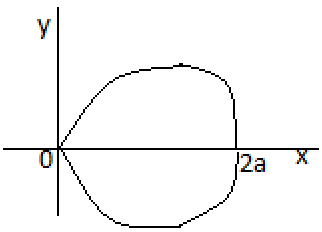
Пример 1 Вычислить площадь области ограниченной линией

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2ax^3.$$

Решение

Полярная замена $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ приводит к записи уравнения кривой в полярной системе:

$$r^4 = 2ar^3\cos^3\varphi \to r = 2a\cos^3\varphi,\ \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$



Площадь области G равна

$$S_G = \iint_G dxdy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2a\cos^3\varphi} rdr = 2a^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^6\varphi d\varphi = \frac{a^2}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+\cos 2\varphi)^3 d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{8} \int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos\theta)^3 d\theta = \frac{5\pi a^2}{8}$$

П.2 Вычисление объемов цилиндрических тел

Тело $C(G, f, g) = \{(x, y, z) \in R^3 : (x, y) \in G, g(x, y) \le z \le f(x, y)\}$ назовем цилиндрическим с основанием G, ограниченного цилиндрической поверхностью с направляющей ∂G и образующей перпендикулярной плоскости xoy, а также двумя поверхностями с уравнениями $z = g(x, y)$ и $z = f(x, y)$.

Если область G измерима, а функции $z = g(x, y)$ и $z = f(x, y)$ непрерывны на G, то объем цилиндрического тела C равен

$$V_C = \iint_G \left(f(x, y) - g(x, y) \right) dxdy$$

Действительно, рассмотрим ступенчатую область G_ξ, вписанную в G. Из ограниченности функций $f(x, y)$ и $g(x, y)$ следует существование константы $N > 0$, для которой $\tilde{g}(x, y) = g(x, y) + N \ge 0$

и $\tilde{f}(x, y) = f(x, y) + N \ge 0$, при этом объемы тел $C(G, f, g)$ и $C\left(G, \tilde{f}, \tilde{g}\right)$ одинаковые (параллельный перенос). Обозначим через

$m_\sigma(\tilde{g}) = \inf\limits_{(x,y)\in \Pi_\sigma} \tilde{g}(x, y), M_\sigma(\tilde{g}) = \sup\limits_{(x,y)\in \Pi_\sigma} \tilde{g}(x, y),$

$m_\sigma(\tilde{f}) = \inf\limits_{(x,y)\in \Pi_\sigma} \tilde{f}(x, y), M_\sigma(\tilde{f}) = \sup\limits_{(x,y)\in \Pi_\sigma} \tilde{f}(x, y)$

Тогда $\sum\limits_\sigma m_\sigma(\tilde{f}) \mu(\Pi_\sigma) \le V_{C\left(G, \tilde{f}, 0\right)} \le \sum\limits_\sigma M_\sigma(\tilde{f}) \mu(\Pi_\sigma)$. Слева и справа стоят нижняя и верхняя интегральные суммы Дарбу для $\iint\limits_G \tilde{f}(x, y) dxdy$, поэтому на основании леммы о «двух полицейских» заключаем, что

$V_{C\left(G, \tilde{f}, 0\right)} = \iint\limits_G \tilde{f}(x, y) dxdy$. Аналогично, $V_{C(G, \tilde{g}, 0)} = \iint\limits_G \tilde{g}(x, y) dxdy$

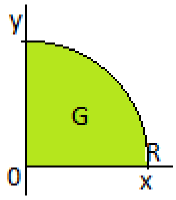
Тогда

$$V_C = V_{C\left(G, \tilde{f}, 0\right)} - V_{C(G, \tilde{g}, 0)} = \iint_G \tilde{f}(x, y) dxdy - \iint_G \tilde{g}(x, y) dxdy =$$

$$\iint_G f(x, y) dxdy - \iint_G g(x, y) dxdy = \iint_G \left(f(x, y) - g(x, y) \right) dxdy$$

Пример 2. Вычислить объем тела ограниченного плоскостями $x=0,\ y=0,\ z=0$, цилиндрической поверхностью $x^2+y^2=R^2$ и поверхностью гиперболического параболоида $z=xy$ (в первом октанте)

Решение



$V=\iint\limits_G xydxdy$. После полярной замены $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases}$, $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$, $0\le r\le R$ имеем

$$V=\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^R r^3\sin\varphi\cos\varphi dr=\frac{R^4}{4}\int\limits_0^{\pi/2}\sin\varphi d\sin\varphi=\frac{R^4}{8}\sin^2\varphi\Big|_{\varphi=0}^{\pi/2}=\frac{R^4}{8}$$

П. 3. Механические приложения

Масса неоднородной пластины

Дана плоская неоднородная пластина G с поверхностно распределенной плотностью массы $\rho=\rho(x,y)\ge 0$. Здесь $\rho(x,y)=\lim\limits_{\delta\to 0}\dfrac{m\left(U_\delta(x,y)\right)}{\mu\left(U_\delta(x,y)\right)}$, где $U_\delta(x,y)-$ круг радиуса $\delta>0$ с центром в точке (x,y). Предполагается, что $\rho(x,y)$ - непрерывная функция в области G на плоскости.

Тогда масса пластины G при известной плотности $\rho=\rho(x,y)\ge 0$ равна

$$m_G=\iint\limits_G \rho(x,y)dxdy$$

Действительно, разобьем пластину G на прямоугольные пластины $\Pi_\sigma\in G_\xi$. Тогда масса прямоугольной пластины $\Pi_\sigma\in G_\xi$ оценивается

$$\inf_{(x,y)\in\Pi_\sigma}\rho(x,y)\cdot\mu\left(\Pi_\sigma\right)\le m\left(\Pi_\sigma\right)\le\sup_{(x,y)\in\Pi_\sigma}\rho(x,y)\cdot\mu\left(\Pi_\sigma\right)$$

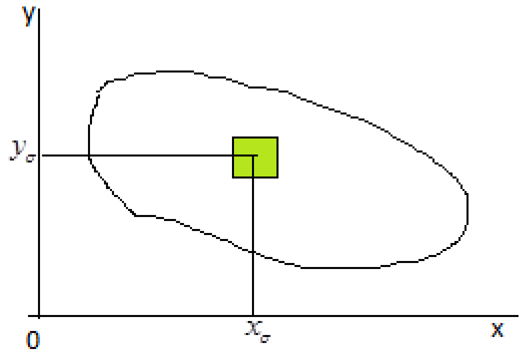
Суммируя неравенства, получим

$$\sum_{\sigma} \inf_{(x,y)\in \Pi_\sigma} \rho(x,y)\cdot \mu\left(\Pi_\sigma\right) \le m\left(G_\xi\right) \le \sum_{\sigma} \sup_{(x,y)\in \Pi_\sigma} \rho(x,y)\cdot \mu\left(\Pi_\sigma\right)$$

Масса пластины $\mu(G)$ является пределом масс ступенчатых пластин $m\left(G_\xi\right)$, при этом выражения справа и слева являются нижней и верхней суммой Дарбу интеграла $\iint\limits_G \rho(x,y)dxdy$.

Статические моменты пластины относительно осей координат

$$M_x\left(G\right) = \iint\limits_G y\rho(x,y)dxdy, \quad M_y\left(G\right) = \iint\limits_G x\rho(x,y)dxdy$$



Моменты элементов разбиения Π_σ относительно оси ox $M_x(\Pi_\sigma) = y_\sigma \cdot \rho(x_\sigma, y_\sigma)\mu(\Pi_\sigma)$ складываясь, образуют момент ступенчатой области G_ξ

$$M_x\left(G_\xi\right) = \sum_{\sigma} y_\sigma \cdot \rho(x_\sigma, y_\sigma)\cdot \mu(\Pi_\sigma).$$

Последнее представляет собой интегральную сумму $\iint\limits_G y\rho(x,y)dxdy$,

поэтому после предельного перехода получим $M_x\left(G\right) = \iint\limits_G y\rho(x,y)dxdy$.

Центр тяжести пластины

$$x_G = \frac{\iint\limits_G y\rho(x,y)dxdy}{m_G}, \quad y_G = \frac{\iint\limits_G x\rho(x,y)dxdy}{m_G}$$

По определению центром тяжести пластины называют точку с координатами (x_G, y_G) такую, что статические моменты пластины относительно прямых $x = x_G$ и $y = y_G$ равны нулю.

Тогда

$$\iint_G (y - y_G)\rho(x,y)dxdy = 0 \quad \iint_G (x - x_G)\rho(x,y)dxdy = 0$$

и

$$x_G \cdot m_G = \iint_G y\rho(x,y)dxdy, \quad y_G \cdot m_G = \iint_G x\rho(x,y)dxdy$$

Пример 3. Найти статистические моменты M_x и M_y однородной пластины в форме криволинейной трапеции $G_{a,b}^f = \{(x,y) : a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\}$

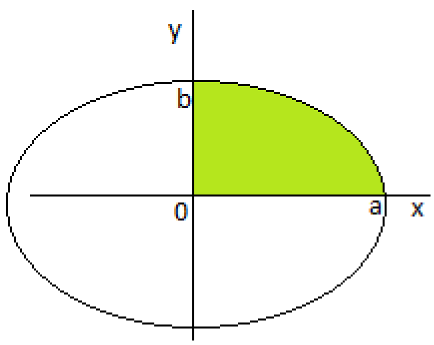
Решение

По условию $\rho(x,y) \equiv 1$, тогда $M_x = \iint_{G_{a,b}^f} ydxdy = \int_a^b dx \int_0^{f(x)} ydy = \frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx$

$$M_y = \iint_{G_{a,b}^f} xdxdy = \int_a^b xdx \int_0^{f(x)} dy = \int_a^b xf(x)dx$$

Пример 4. Найти координаты центра тяжести пластины, ограниченной кривой эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ и осями координат ($x \ge 0, y \ge 0$), у которой $\rho(x,y) = k \cdot xy$.

Решение



Для нахождения массы пластины воспользуемся обобщенной полярной заменой $\begin{cases} x = ar\cos\varphi \\ y = br\sin\varphi \end{cases}$ с якобианом $J = abr$. Тогда

$$m_G = k\iint\limits_G xydxdy = k\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi\int\limits_0^1 abr^3\sin\varphi\cos\varphi dr = \frac{kab}{4}\int\limits_0^{\pi/2}\sin\varphi d\sin\varphi = \frac{kab}{8}$$

Вычислим статические моменты M_x и M_y:

$$M_x = k\iint\limits_G xy^2dxdy = ka^2b^3\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi\int\limits_0^1 r^4\sin^2\varphi\cos\varphi dr = \frac{ka^2b^3}{5}\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2\varphi d\sin\varphi = \frac{ka^2b^3}{15}$$

$$M_y = k\iint\limits_G x^2ydxdy = ka^3b^2\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi\int\limits_0^1 r^4\sin\varphi\cos^2\varphi dr = -\frac{ka^3b^2}{5}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2\varphi d\cos\varphi = \frac{ka^3b^2}{15}$$

Тогда координаты центра тяжести пластины $x_G = \dfrac{8ab^2}{15}$, $y_G = \dfrac{8a^2b}{15}$

Момент инерции пластины относительно осей координат

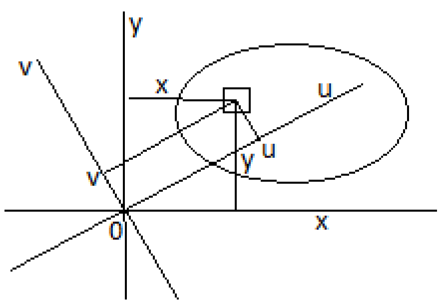
$$J_x(G) = \iint\limits_G y^2\rho(x,y)dxdy \quad J_y(G) = \iint\limits_G x^2\rho(x,y)dxdy$$

Пример 5. Найти момент инерции пластины G с распределенной на ней массой с плотностью $\rho = \rho(x,y)$ относительно оси L, составляющей угол θ с осью OX.

Решение

Сделаем замену переменных $(x,y)\to(u,v)$ (преобразование поворота на угол θ)

$\begin{cases} u = x\cos\theta + y\sin\theta \\ v = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$ с якобианом $J \equiv 1$



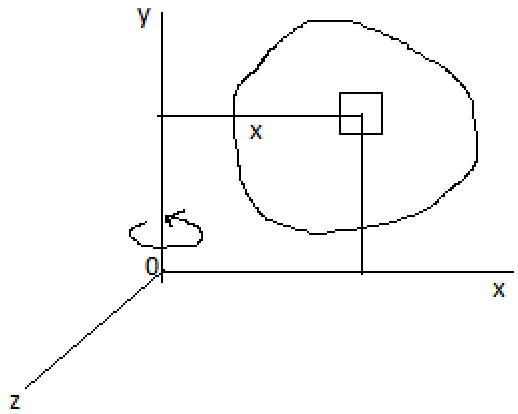
Координатная ось ou расположена на оси L, а ось OV - на перпендикулярной ей прямой.

$$M_u(G)=\iint_G v^2\rho(x,y)dxdy=\iint_G\left(-x\sin\theta+y\cos\theta\right)^2\rho(x,y)dxdy=\cos^2\theta\cdot J_x+\sin^2\theta\cdot J_y-$$
$$-2\sin\theta\cos\theta\cdot K_{xy}$$

Здесь число $K_{xy}(G)=\iint_G xy\rho(x,y)dxdy$ называется центробежным моментом

Пример 6. Плоская пластина G с распределенной на ней массой с плотностью $\rho(x,y)$ расположена в пространстве и вращается вокруг оси Oy с угловой скоростью ω (рис). Найти величину возникающей при этом центробежной силы и ее момент относительно оси OZ

(моменты относительно других осей равны нулю).



Рис

Выделенный прямоугольник Π_σ имеем массу m_σ, расположенную в пределах $\inf\limits_{(x,y)\in\Pi_\sigma}\rho(x,y)\mu(\Pi_\sigma)\le m_\sigma\le\sup\limits_{(x,y)\in\Pi_\sigma}\rho(x,y)\mu(\Pi_\sigma)$, создает при вращении центробежную силу $F_\sigma=\omega^2x_\sigma m_\sigma$. После суммирования по σ, получим

$$\sum_\sigma\omega^2\cdot x_\sigma\inf_{(x,y)\in\Pi_\sigma}\rho(x,y)\cdot\mu(\Pi_\sigma)\le\sum_\sigma F_\sigma\le\sum_\sigma\omega^2\cdot x_\sigma\sup_{(x,y)\in\Pi_\sigma}\rho(x,y)\cdot\mu(\Pi_\sigma)$$

Наконец, предельный переход при $d(\xi)\to 0$ с учетом того, что справа и слева стоят суммы Дарбу интеграла $\iint_G\omega^2x\rho(x,y)dxdy$, приводит к ответу

$$F = \iint_G \omega^2 x \rho(x, y) dxdy = \omega^2 \cdot M_y$$

Для момента центробежной силы относительно оси oz имеем выражение

$$M_F = \iint_G \omega^2 xy \rho(x, y) dxdy = \omega^2 \cdot K_{x,y}$$