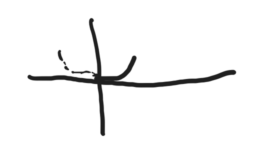
Ряды Тейлора

1) $f(x),\ x\in U_\varepsilon(x_0)$
2) $\exists f^{(n)}(x_0),\ \forall n$

$\to f(x) \leftrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$, где $c_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ – ряд Тейлора ф. $f(x)$

$J_{cx.} = (x_0-R,\ x_0+R)$

Пример $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$



$f^{(n)}(0)=0\ \ \forall n.$
$f(x)\equiv 0.$

Теорема единств. разложения функции в степ. ряд.

$f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$
$\searrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$

Тогда $a_n = b_n,\ \forall n$

$\triangle\ x=x_0\quad f(x_0)=c_0=b_0$

$\vdots (x-x_0),\ \big|_{x=x_0}\quad c_1$

$\cancel{a_0}\ \ a_1(\cancel{x-x_0}) + a_2(x-x_0)^{\cancel{2}} + \dots = b_1(\cancel{x-x_0}) + b_2(x-x_0)^{\cancel{2}} + \dots$

$a_1 + a_2(x-x_0) + \dots = b_1 + b_2(x-x_0) + \dots\quad \forall x\neq x_0$

$\lim\limits_{x\to x_0}(\quad) = a_1$
$\lim\limits_{x\to x_0}(\quad) = b_1$
$\to a_1 = b_1$

$$S_n(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{T_n(x)}$$

$f(x) = T_n(x) + \underbrace{R_n(f,x,x_0)}_{\text{остаток.}}$, $\quad R_n(f,x,x_0) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

1) $R_n(f,x,x_0) = o\left((x-x_0)^n\right)$ в форме Пеано

$\lim\limits_{n\to\infty} R_n(f,x,x_0) = 0$ – необходимое и дост. условие разложимости ф. в ряд Тейлора

2) $R_n(f,x,x_0) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, $|\xi-x_0|<|x-x_0|$ $\quad \exists \xi$ – форма Лагранжа

Частный случай $x_0=0$. (ряды Маклорена)

Дост. условие разложимости:

$f(x),\ x\in D:\ \ \exists M>0:\ |f^{(n)}(x)|<M,\ \forall n$

Тогда $f(x)$ разложима в ряд Тейлора на D

$$|R_n(f,x,x_0)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1} \leq \underbrace{\frac{M|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}}_{b_n(x)}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n(x) = 0$, $\quad b_n(x)>0$

$\sum b_n(x) \to (\text{Даламбер}) \to \dfrac{|b_{n+1}(x)|}{|b_n(x)|} = \dfrac{\cancel{M}|x-x_0|^{\cancel{n+2}}\cdot(n+1)!}{(n+2)!\cdot\cancel{M}\cancel{|x-x_0|^{n+1}}} = \dfrac{|x-x_0|}{n+2} \to d=0$

$\to \sum b_n(x)$ сходится $\to \lim\limits_{n\to\infty} b_n(x)=0$ (необх. условие)

Разложения в ряд Маклорена табличных функций $(x_0=0)$

1. $f(x)=\sin x$

$f^{(n)}(x)\big|_{x=0} = \sin\left(x+\dfrac{\pi n}{2}\right)\Big|_{x=0} = \sin\dfrac{\pi n}{2} = \begin{cases} 0, & n=2k,\ k\in N \\ (-1)^{k-1} & n=2k-1,\ k\in N \end{cases}$

$\Big|\ \sin\dfrac{\pi(2k-1)}{2} = \sin\left(\pi k - \dfrac{\pi}{2}\right) = (-1)^k\cdot\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = (-1)^{k+1}$

$|f^{(n)}(x)|\leq 1 = M\quad \forall x\in R$ Дост. признак ряд Маклорена сходится к $\sin x\ \ \forall x$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots (-1)^{k-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad (1)$$

$D_{cx.}=R$

2. $f(x)=\cos x$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (2)\ \ D_{cx}=R$$

3. $f(x)=e^x$

$f^{(n)}(x)=e^x \to R_n(f,x) = \dfrac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}$, $0<\xi<x$ $\quad D=[-a,a],\ \forall a>0$

$\exists M=e^a\quad |f^{(n)}(x)|=|e^x|\leq M \to$ Дост. признак. разлож. $\Rightarrow D\in D_{cx}\to D_{cx}=R$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \quad (3)\quad D_{cx}=R$$

4. $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$, $\quad f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ – ряд геом. прогрессии

$\dfrac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\dots x^n+\dots = \sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$, $\quad D_{cx}=(-1,1)$, $\quad |x|=q<1\quad (4)$

$\dfrac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^n$, $\quad D_{cx}=(-1,1)\quad (4)'$

5. $y=\ln(1+x)$

$$\ln(1+x) = \int_0^x\frac{dt}{1+t} = \int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^x =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - (-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)} + \dots \quad (5)$$

$D_{cx}=(-1;1]$

$\underline{x=1}\quad \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n+1} = \underbrace{1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dots}_{\text{ряд Лейбница}}$ – сходящ. $\Rightarrow$ Т. Абеля ряд (5) сходится равномерно на $[0,1]\Rightarrow$

$$\boxed{\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \dots}$$

6. $f(x)=(1+x)^\alpha$ – Биномиальный ряд

$f^{(n)}(x)\big|_{x=0} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}\big|_{x=0} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\underbrace{\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}}_{c_n}x^n}_{a_n(x)} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

$\to$ Даламбер.

$$\frac{|a_{n+1}(x)|}{|a_n(x)|} = \frac{\cancel{|\alpha|}\cancel{|\alpha-1|}\dots|\alpha-n|\,|x|^{\cancel{n+1}}\cdot n!}{(n+1)!\cdot\cancel{|\alpha|}\cancel{|\alpha-1|}\dots|\alpha-n+1|\cdot\cancel{|x|^n}} = \frac{|\alpha-n|}{n+1}\cdot|x| \xrightarrow{n\to\infty} |x|<1.$$

$\dfrac{|\alpha-n|}{n+1}\to 1$

$I_{cx}=(-1,1)$

Таблица $D_{cx.}$ биномиальных рядов для различных α

$\alpha=0,\ \alpha\in N$	$\alpha\notin N,\ \alpha>0$	$\alpha\in(-1,0)$	$\alpha\in(-\infty,-1)$
Конечное число слагаемых	$D_{cx}=[-1;1]$	$D_{cx}=(-1;1]$	$D_{cx}=(-1,1)$

Пример. Бин. разложения $\quad f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}\quad \alpha=-1/2\quad D_{cx}=(-1,1]$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)x + \frac{(-1/2)(-1/2-1)}{2!}x^2 + \frac{(-1/2)(-1/2-1)(-1/2-2)}{3!}x^3 + \dots$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{(-\frac{1}{2})(-3/2)}{2!}x^2 + \frac{(-1/2)(-3/2)(-5/2)}{3!}x^3 + (-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}x^n + $$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n$$