Ряды. Лекция 4-ого декабря 2020 года

§ Свойства степенных рядов

Теорема 1 (равномерная сходимость степенного ряда)

Пусть у степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_n$ радиус сходимости равен $R>0$. Тогда для любого $r \in (0, R)$ этот ряд сходится равномерно на отрезке $[-r; r]$

Док-во Пусть $r \in (0; R) \subset (-R; R)$, а на интервале $(-R; R)$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится абсолютно. Следовательно,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n r^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < +\infty \qquad (1)$$

Далее для любого $x \in [-r; r]$ справедлива оценка $|a_n x^n| \leq |a_n| r^n$ (2)

Тогда из (1) и (2) и признака Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда следует, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ равномерно сходится на $[-r; r]$

Теорема доказана #

Теорема 2 (Непрерывность суммы степенного ряда).

Пусть у степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ радиус сходимости $R>0$. Тогда $S(x)$ — сумма этого ряда непрерывна на $(-R; R)$.

Док-во. Пусть x_0 — произвольная точка из $(-R; R)$. Возьмем какое-нибудь $r \in (|x_0|; R)$. Тогда по теореме (предыдущей) и по теореме о непрерывности равномерно сходящегося функционального ряда ($\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \xrightarrow[{[-r;r]}]{} S(x)$) следует, что $S(x) \in C[-r; r]$. Следовательно, $S(x)$ непрерывна в точке x_0. Так как $x_0 \in (-R; R)$ и x_0 — произвольная точка из $(-R; R)$, то $S(x) \in C(-R; R)$. Теорема доказана #.

Теорема (о единственности коэффициентов степенного ряда)

Пусть ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S_a(x)$ имеет радиус сходимости $R_1 > 0$, а другой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n = S_b$ имеет радиус сходимости $R_2 > 0$.

Пусть существует $\delta>0$ такое что для каждого x из δ-окрестности одного из видов 1) $(-\delta;\delta)$; 2) $(-\delta;0)\cup(0;\delta)$ 3) $[0;\delta)$; 4) $(0;\delta)$; 5) $(-\delta;0]$; 6) $(-\delta;0)$. справедливо равенство

$$S_a(x)=S_b(x) \quad (*)$$

Тогда $a_n=b_n$ для всех $n=0,1,2,\dots$

Док-во) Если равенство $S_a(x)=S_b(x)$ справедливо для каждого x принадлежащего окрестности содержащей $x=0$ (то есть случай 1), 3), 5)) или

$$a_0+a_1x+\dots+a_nx_n+\dots=b_0+b_1x+\dots+b_nx_n+\dots \quad (1)$$

Подставляя в это равенство $x=0$, получим

$$a_0=b_0$$

Если $x=0$ не принадлежит окрестности (то есть случай 2); 4); 6)), то устремляя $x\to0$, получим $a_0=b_0$.

Взаимно уничтожая a_0 и b_0 в (1) и сокращая на $x\neq0$, получим

$$a_1+a_2x+\dots a_nx^{n-1}+\dots=b_1+b_2x+\dots+b_nx^{n-1}+\dots$$

Проделывая то же самое с последним

равенством, получим

$$\boxed{a_1 = b_1}.$$

Продолжая этот процесс, получим что $\boxed{a_n = b_n}$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ #

<u>Теорема</u> Пусть у степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ радиус сходимости равен R, $R \in (0; +\infty)$ и этот ряд расходится при $x = R$ (или $x = -R$). Тогда этот ряд не является равномерно сходящимся на $[0; R)$ (на $(-R; 0]$)

<u>Док-во.</u> Докажем эту теорему методом „от противного".

Предположим, что этот ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится равномерно на $[0; R)$ (на $(-R; 0]$)

Осуществляя в этом случае предельный переход к пределу при $x \to R-0$ получаем согласно теореме о предельном переходе к пределу в равномерно сходящихся рядах, что числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ сходится. Это противоречит условию, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ расходится.

Полученное противоречие и доказывает теорему #.

<u>Теорема</u> Пусть у степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ радиус сходимости $R \in (0; +\infty)$ и этот ряд сходится при $x = R$ (при $x = -R$). Тогда этот ряд равномерно сходится на $[0; R]$ (на $[-R; 0]$)

<u>Док-во.</u> Ограничимся доказательством теоремы для $x \in [0; R]$. (Доказательство теоремы для случая $x \in [-R; 0]$ проводится аналогично).

По условию ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ сходится (возможно лишь условно). Следовательно, рассматриваемый как функциональный (состоит из <u>const</u>) он сходится равномерно на любом множестве (и следовательно на $[0; R]$)

На этом же множестве выполняется условие $0 \leq \left(\frac{x}{R}\right)^n \leq 1$ для любого $n \in N$ и при любом $x \in [0; R]$ числовая последовательность $\left\{\left(\frac{x}{R}\right)^n\right\}_1^{\infty}$ не возрастает.

Поэтому согласно признаку Абеля

равномерной сходимости функционального ряда. ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n$ сходится равномерно на $[0; R]$. Теорема доказана #

Теорема. (Вторая Теорема Абеля)
Пусть у степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ радиус сходимости $R \in (0; +\infty)$ и этот ряд сходится при $x = R$ $(x = -R)$.
Тогда существует $\lim\limits_{x \to R-0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$
(существует $\lim\limits_{x \to -R+0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$.

Док-во. Ограничимся рассмотрением области $x \in [0; R]$. Согласно предыдущей теореме ряд сходится равномерно на $[0; R]$. Но тогда (по теореме о предельном переходе к пределу в равномерно сходящихся функциональных рядах) в этом ряде можно перейти к пределу

$$\lim_{x \to R-0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

Теорема доказана #

Теорема (о почленном интегрировании степенного ряда).
Пусть у степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ радиус сходимости $R>0$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x)$.
Тогда для любого $x \in (-R; R)$ интеграл

$$\int_0^x S(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{m-1} x^m}{m} \quad (*)$$

Если кроме того $R < +\infty$ и исходный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится также при $x=R$, то и ряд $(*)$ также сходится при $x=R$.

Док-во. Найдем радиус сходимости R_1 ряда $(*)$. Его радиус сходимости найдём по формуле Коши–Адамара

$$\frac{1}{R_1} = \overline{\lim_{m\to\infty}} \sqrt[m]{\frac{|a_{m-1}|}{m}} = \overline{\lim_{m\to\infty}} \left(\sqrt[m-1]{|a_{m-1}|}\right)^{\frac{m-1}{m}} = \frac{1}{R}$$

Возьмем произвольное $x_0 \in (-R; R)$ и какое-нибудь $r \in (|x_0|; R)$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \overset{[-r;r]}{\rightrightarrows} S(x)$ и следовательно, его можно почленно интегрировать, то есть равенство $(*)$ справедливо для $\forall x \in (-R; R)$
Если же $R \in (0; +\infty)$ и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ схо-

дится также при $x=R$, то возможность почленного интегрирования вытекает из теоремы о равномерной сходимости и интегрировании равномерно сходящихся функциональных рядов #

<u>Теорема</u> <u>(о почленном дифференцировании степенных рядов)</u>

Пусть у степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ радиус сходимости $R>0$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x)$. Тогда для всех $x \in (-R; R)$ существует $S'(x)$ и

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad (*)$$

Если $R \in (0; +\infty)$ и ряд (*) сходится при $x=R$ (или $x=-R$), то равенство (*) справедливо и для $x=R$ ($x=-R$)

<u>Док-во</u> Доказательство этой теоремы аналогично доказательству предыдущей теоремы. Надо лишь

вместо теоремы о почленном интегрировании функционального ряда использовать теорему о почленном дифференцировании функционального ряда.

<u>Замечание</u> Радиус сходимости ряда (*) равен радиусу сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, то есть равен R.

<u>Доказать</u> это самостоятельно.