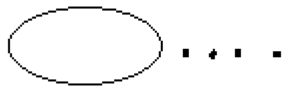
Ф-03- Лекция 1. Двойной интеграл.

П.1 Измеримые множества на плоскости. Мера множества.

ОПР. Областью G на плоскости назовем открытое, связное множество, т.е.
1) вместе с каждой точкой $P \in G$ области принадлежит и внутренность некоторого круга $U_\delta(P) = \{M \in R^2 : \rho(M,P) < \delta\}$ с центром в точке P;
2) для любых двух точек P и Q области G существует непрерывная кривая $\eta : [\alpha;\beta] \to R^2$, для которой $\eta(\alpha) = P, \eta(\beta) = Q, \eta(t) \in G, \forall t \in [\alpha;\beta]$

ОПР. Границей области G называют множество точек ∂G плоскости, для которых любой круг $\overset{0}{U}_\delta(T)$ с центром в точке $T \in \partial G$ содержит точки $M \in G$ и точки $M \notin G$.



ОПР. Множество $\overline{G} = G \cup \partial G$ называется замкнутой областью (замыкание G).

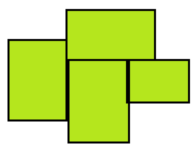
ОПР. Многосвязная область – конечное объединение односвязных областей.

ОПР. Область G ограничена, если существует круг на плоскости, содержащий G.

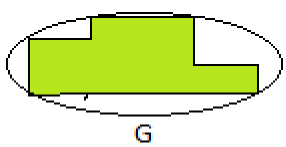
ПРИМЕРЫ областей.

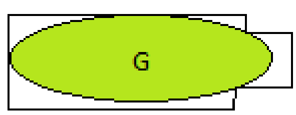
1. Прямоугольник $\Pi_{a,b}^{c,d} = \{(x,y) \in R^2 : a \le x \le b, c \le y \le d\}$ - замкнутая область, параметр прямоугольника $d(\Pi)$ - длина его диагонали.

2. Ступенчатая область G_ξ - объединение конечного числа прямоугольников $\Pi_\sigma, \sigma \in \xi$ пересекающихся только по границе.



Ступенчатая область G_ξ вписана в G, если $G_\xi \subset G$, и описана около G, если $G \subset G_\xi$



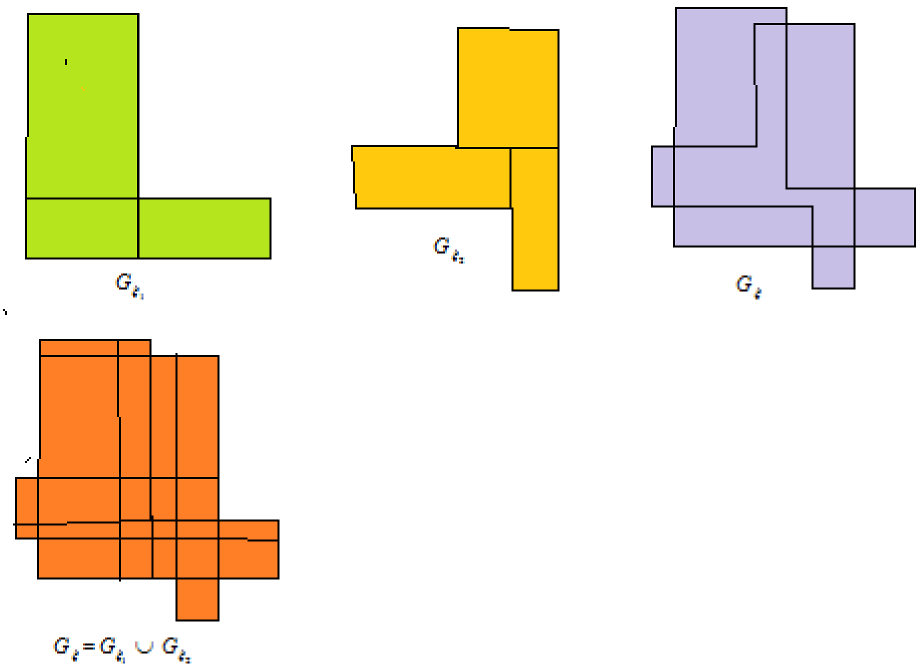


Параметром $d(\xi)$ ступенчатой области называют число $d(\xi) = \max\limits_{\sigma \in \xi} d(\Pi_\sigma)$.

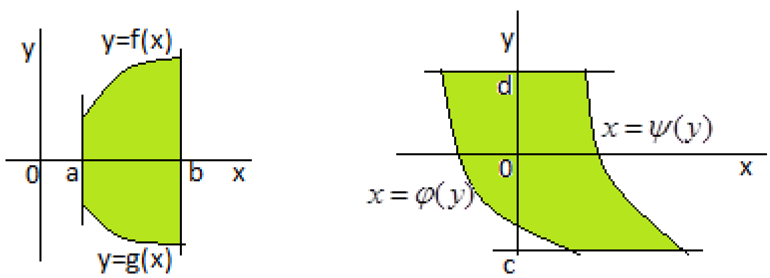
Он характеризует малость диагоналей прямоугольников, составляющих G_ξ.

Объединением двух ступенчатых областей G_{ξ_1} и G_{ξ_2} назовем ступенчатую область G_ξ, для которой 1) $G_\xi = G_{\xi_1} \cup G_{\xi_2}$ (как множества на плоскости) 2) набор прямоугольников Π_σ, $\sigma \in \xi$, составляющих G_ξ, удовлетворяет условиям : для любых прямоугольников $\Pi_{\sigma_1}, \sigma_1 \in \xi_1$ и Π_{σ_2}, $\sigma_2 \in \xi_2$ существуют наборы η_1 и η_2 прямоугольников из ξ , для которых $\Pi_{\sigma_1} = \bigcup\limits_{\sigma \in \eta_1} \Pi_\sigma$ и $\Pi_{\sigma_2} = \bigcup\limits_{\sigma \in \eta_2} \Pi_\sigma$.

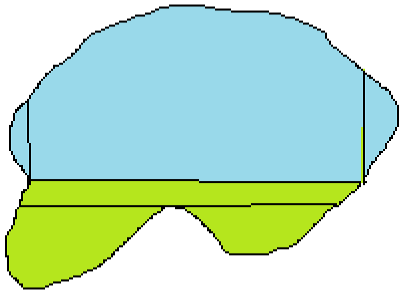
Очевидно, $d(\xi) \le d(\xi_1)$ и $d(\xi) \le d(\xi_2)$.



3. Криволинейная трапеция $K_{a,b}(f,g,x) = \{(x,y): a \le x \le b, g(x) \le y \le f(x)\}$, где функции $f(x), g(x)$ - непрерывные функции на отрезке $[a;b]$. Границей области являются: прямые $x = a$ и $x = b$, а также графики функций $f(x), g(x)$. Такую область будем называть стандартной по оси ОХ. Стандартной областью по оси ОУ будем называть криволинейную трапецию $K_{c,d}(\varphi, \psi, y) = \{(x,y): c \le y \le d, \varphi(y) \le x \le \psi(y)\}$.



4. Область с кусочно-гладкой границей – объединение конечного числа стандартных областей по осям ОХ и ОУ, пересекающихся только по участкам прямолинейных границ, а функции $f(x), g(x)$, $\varphi(y), \psi(y)$ – дифференцируемые на соответствующих отрезках.



ОПР. Верхней мерой области G называют число $\overline{\mu}(G)=\inf\limits_{\xi} S(G_\xi)$,

где G_ξ - ступенчатые области, описанные около G, $S(G_\xi)$ - сумма площадей прямоугольников, составляющих G_ξ.

ОПР. Нижней мерой области G называют число $\underline{\mu}(G)=\sup\limits_{\xi} S(G_\xi)$, где G_ξ - ступенчатые области, вписанные в G, $S(G_\xi)=\sum\limits_{\sigma\in\xi} S(\mathit{\Pi}_\sigma)$ - сумма площадей прямоугольников, составляющих G_ξ.

Числа $\overline{\mu}(G)$ и $\underline{\mu}(G)$ существуют для любых ограниченных областей G на плоскости.

ОПР. Область G на плоскости называется измеримой, если

$$\overline{\mu}(G)=\underline{\mu}(G)=\mu(G).$$

Число $\mu(G)$ называется мерой (площадью) области G.

В рассмотренных примерах:

1. $\mu(\mathit{\Pi}_{a,b}^{c,d})=(b-a)\cdot(d-c)$.

3. $\mu(K_{a,b}(f,g,x))=\int\limits_a^b (f(x)-g(x))dx$, $\quad \mu(K_{c,d}(\varphi,\psi,y))=\int\limits_c^d (\varphi(y)-\psi(y))dy$

Верхняя и нижняя меры этих областей совпадают с верхним и нижним интегралами подынтегральных функций и их равенство равносильно интегрируемости этих функций.

Измеримость областей из примеров 2) и 4) следует из того, что они составлены из конечного числа областей 1) и 3).

СВОЙСТВА МЕРЫ.

1. $\mu(G)\ge 0$.

2. Если области G_1 и G_2 измеримы и $G_1\subset G_2$, то $\mu(G_1)\le\mu(G_2)$.

3. Если G измеримая область, то $\mu(\partial G)=0$.

ДОК. $\forall\varepsilon>0\ \exists\xi_1,\xi_2:$ области G_{ξ_1}, G_{ξ_2} - вписанная и описанная такие, что $\partial G\subset G_{\xi_2}/G_{\xi_1}$ и $0\le\underline{\mu}(\partial G)\le\overline{\mu}(\partial G)\le\mu(G_{\xi_2}/G_{\xi_1})<\varepsilon$, т.е. $\underline{\mu}(\partial G)=\overline{\mu}(\partial G)=0$

4. Если области G_1 и G_2 измеримые и пересекаются только по границе, то

$$\mu(G_1\cup G_2)=\mu(G_1)+\mu(G_2).$$

5. Если области G_1 и G_2 измеримы, то измеримы $G_1 \cup G_2$, $G_1 \cap G_2$ и

$$\mu(G_1 \cup G_2) = \mu(G_1) + \mu(G_2) - \mu(G_1 \cap G_2)$$

П.2 Понятие двойного интеграла.

Пусть функция $f(x,y)$ определена в измеримой области G на плоскости и G_ξ - ступенчатая область, вписанная в G или описанная около нее. В каждом прямоугольнике $\Pi_\sigma \subset G_\xi$ выбирается произвольная точка $M_\sigma \in G$.

ОПР. Интегральной суммой функции $f(x,y)$ в области G, называют выражение

$$S_G(f,\xi) = \sum_{\sigma\in\xi} f(M_\sigma)\mu(\Pi_\sigma),$$

зависящее от выбранной ступенчатой области G_ξ и набора точек $M_\sigma \in \Pi_\sigma$.

ОПР. Интегралом Римана функции $f(x,y)$ по области G, называют число

$$\iint_G f(x,y)dxdy = \lim_{d(\xi)\to 0} S_G(f,\xi)$$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta = \delta_\varepsilon : \forall G_\xi, \left|\mu(G_\xi) - \mu(G)\right| < \delta, d_\xi < \delta, \forall M_\xi \to$$

$$\to \left| S_f(\xi, M_\xi) - \iint_G f(x,y)dxdy \right| < \varepsilon$$

Если интеграл существует, то функция $f(x,y)$ называется интегрируемой по Риману в области G.

ПРИМЕР 1. Вычислить, исходя из определения, интеграл $\iint\limits_{\Pi_{0,1}^{0,1}} xydxdy$.

РЕШЕНИЕ. Разобьем прямоугольник $\Pi_{0,1}^{0,1} = \bigcup\limits_{i,j=1}^{n} \Pi_{i,j}$ на прямоугольник

$$\Pi_{i,j} = \left\{(x,y) : \frac{i-1}{n} \le x \le \frac{i}{n}, \frac{j-1}{n} \le y \le \frac{j}{n}\right\}, i = 1,2,...n,\ j = 1,2,...n$$

Функция $f(x,y) = xy$ интегрируема на $\Pi_{0,1}^{0,1}$ и интеграл не зависит от разбиения на прямоугольники и выбора точек $M_\sigma \in \Pi_\sigma$. В качестве точек возьмем $M_{i,j}(\frac{i}{n};\frac{j}{n})$. Тогда интегральная сумма

$$S_f(\Pi,\xi) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{i\cdot j}{n^2}\mu(\Pi_{i,j}) =$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{i\cdot j}{n^2}\cdot\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i \sum_{j=1}^{n} j = \frac{1}{n^4}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n+1)^2}{4n^2}.$$

Параметр разбиения равен $d(\xi) = \frac{\sqrt{2}}{n}$ и стремится к нулю с ростом n.

$$\iint\limits_{\Pi_{0,1}^{0,1}} xydxdy = \lim_{d(\xi)\to 0} S_G(f,\xi) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{4n^2} = \frac{1}{4}.$$

ТЕОРЕМА 1. (необходимое условие интегрируемости)
Если функция интегрируема на G, то функция ограничена на G.
ДОК. Если функция интегрируема, то все ее интегральные суммы ограничены. Если бы функция оказалась неограниченной, то она была бы неограниченной на некотором прямоугольнике $\Pi_{\sigma *} \in G_\xi$ и существует последовательность точек $M_{\sigma_n} \in \Pi_{\sigma *}, M_{\sigma_n} \in G$, для которых $f(M_{\sigma_n}) > n$.
Тогда последовательность интегральных сумм, у которых не меняются точки M_σ для $\sigma \neq \sigma^*$, а $M_{\sigma^*} = M_{\sigma_n}$ неограниченная, поскольку одно из слагаемых в сумме $f(M_{\sigma_n})\mu(\Pi_{\sigma^*}) > n \cdot \mu(\Pi_{\sigma^*})$ растет к ∞ с ростом n, а другие неизменны.
Колебанием функции $f(x,y)$ называют величину:

$$\omega_f(\delta) = \sup_{\rho(M_1,M_2)\le\delta} \left| f(M_1) - f(M_2) \right|.$$

Здесь через $f(M)$ обозначено значение функции $f(x,y)$ в точке $M(x,y)$, $\rho(M_1,M_2)$ - расстояние между точками M_1 и M_2 на плоскости.
Замечание. Если функция $f(x,y)$ непрерывна на замкнутом, ограниченном множестве, то она равномерно непрерывна на этом множестве и функция $\omega_f(\delta)$ переменной δ непрерывна в нуле.
Лемма. Пусть $G = \Pi$ - прямоугольник с параметром $d(\Pi) < \delta$ и $G_\xi = \bigcup\limits_{\sigma\in\xi} \Pi_\sigma$ - его разбиение на прямоугольники, пересекающиеся только по границе. Функция $f(x,y)$ непрерывна на $\overline{\Pi}$. Тогда для любых точек $M \in \Pi$ и $M_\sigma \in \Pi_\sigma$ справедлива оценка:

$$\left| \sum_{\sigma\in\xi} f(M_\sigma)\mu(\Pi_\sigma) - f(M)\mu(\Pi) \right| \le \omega_f(\delta)\cdot\mu(\Pi) \qquad (1)$$

ДОК. $\left| \sum\limits_{\sigma\in\xi} f(M_\sigma)\mu(\Pi_\sigma) - f(M)\sum\limits_{\sigma\in\xi} \mu(\Pi_\sigma) \right| = \left| \sum\limits_{\sigma\in\xi} \big(f(M_\sigma) - f(M)\big)\mu(\Pi_{\sigma,\tau}) \right| \le$

$$\le \sum_{\sigma\in\xi} \left| f(M_\sigma) - f(M) \right| \mu(\Pi_\sigma) \le \omega_f(\delta) \sum_{\sigma\in\xi} \mu(\Pi_\sigma) = \omega_f(\delta)\cdot\mu(\Pi).$$

ТЕОРЕМА 2 (достаточные условия интегрируемости)
Всякая непрерывная функция на замкнутом, ограниченном и измеримом множестве G интегрируема на G.

ДОК. Покажем, что последовательность интегральных сумм удовлетворяет критерию Коши, т.е.

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta_\varepsilon : \forall G_{\xi_1}, G_{\xi_2} : \left|\mu\left(G_{\xi_1}\right) - \mu(G)\right| < \delta, \left|\mu\left(G_{\xi_2}\right) - \mu(G)\right| < \delta,$$

$$d(\xi_1) < \delta,\ d(\xi_2) < \delta, \forall M_{\xi_1}, M_{\xi_2} \Rightarrow \left|S_f(\xi_1, M_{\xi_1}) - S_f(\xi_2, M_{\xi_2})\right| < \varepsilon$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим объединение G_ξ ступенчатых областей G_{ξ_1} и G_{ξ_2}.

Пусть $\tilde{\xi}$ - набор прямоугольников из G_ξ таких, что $\Pi_\sigma \notin G_{\xi_1}$ для $\sigma \in \tilde{\xi}$.

Пусть $\tilde{\tilde{\xi}}$ - набор прямоугольников из G_ξ таких, что $\Pi_\sigma \notin G_{\xi_2}$ для $\sigma \in \tilde{\tilde{\xi}}$.

Из измеримости области G следует, что мера объединения таких прямоугольников мала, т.е. существует $\delta = \delta_\varepsilon$, для которого $\mu\left(\bigcup\limits_{\sigma\in\tilde{\xi}} \Pi_\sigma\right) < \dfrac{\varepsilon}{4L}$ и $\mu\left(\bigcup\limits_{\sigma\in\tilde{\tilde{\xi}}} \Pi_\sigma\right) < \dfrac{\varepsilon}{4L}$ для любых G_{ξ_1} и G_{ξ_2}, для которых

$\left|\mu\left(G_{\xi_1}\right) - \mu(G)\right| < \delta, \left|\mu\left(G_{\xi_2}\right) - \mu(G)\right| < \delta$ и $d(\xi_1) < \delta,\ d(\xi_2) < \delta$

Здесь $L > 0$ - константа, ограничивающая значения функции $|f(x,y)|$ в области $\overline{G}$. Кроме того, из условия равномерной непрерывности функции $f(x,y)$ на G полагаем, что число $\delta = \delta_\varepsilon$ столь малое, что $\omega_f(\delta) < \dfrac{\varepsilon}{8\mu(G)}$ и

$\sum\limits_{\sigma_1\in\xi_1} \mu(\Pi_{\sigma_1}) < 2\mu(G)$, $\sum\limits_{\sigma_2\in\xi_2} \mu(\Pi_{\sigma_2}) < 2\mu(G)$

Тогда $\left|S_f(\xi, M_\xi) - S_f(\xi_1, M_{\xi_1})\right| =$

$$= \left|\sum_{\sigma\in\xi\setminus\tilde{\xi}} f(M_\sigma)\mu(\Pi_\sigma) - \sum_{\sigma_1\in\xi_1} f(M_{\sigma_1})\mu(\Pi_{\sigma_1}) + \sum_{\sigma\in\tilde{\xi}} f(M_\sigma)\mu(\Pi_\sigma)\right|$$

Поскольку каждый прямоугольник Π_{σ_1} является объединением прямоугольников Π_σ для $\sigma \in \xi \setminus \tilde{\xi}$, к нему применимо утверждение леммы:

$$\left|S_f(G,\xi) - S_f(G,\xi_1)\right| \le \omega_f(\delta) \cdot \sum_{\sigma_1\in\xi_1} \mu(\Pi_{\sigma_1}) + L \cdot \sum_{\sigma\in\tilde{\xi}} \mu(\Pi_\sigma) \le \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2)$$

Аналогичное неравенство справедливо для области G_{ξ_2}:

$$\left|S_f(G,\xi) - S_f(G,\xi_2)\right| \le \frac{\varepsilon}{2} \quad (3)$$

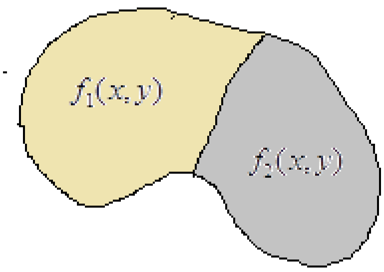
Объединяя неравенства (2) и (3), приходим

$$\left|S_f(\xi_1, M_{\xi_1}) - S_f(\xi_2, M_{\xi_2})\right| = \left|S_f(\xi_1, M_{\xi_1}) - S_f(\xi, M_\xi) + S_f(\xi, M_\xi) - S_f(\xi_2, M_{\xi_2})\right| \le$$

$$\le \left|S_f(\xi_1, M_{\xi_1}) - S_f(\xi, M_\xi)\right| + \left|S_f(\xi, M_\xi) - S_f(\xi_2, M_{\xi_2})\right| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Поскольку последовательность интегральных сумм фундаментальная, она сходится.

ЗАМЕЧАНИЕ. Интегрируемость функции сохранится, если $f(x,y)$ кусочно-непрерывна на G, т.е. существует конечное число измеримых областей G_j, $G = \bigcup_j G_j$, пересекающихся только по границе, на которых функция $f(x,y)$ непрерывна во внутренних точках и непрерывно продолжена на границу ∂G_j.



ЗАМЕЧАНИЕ. В определении двойного интеграла могут быть использованы разбиения области G на области G_i^n

$$G = \bigcup_{i=1}^{n} G_i^n ,\ \mu G = \sum_{i=1}^{n} \mu(G_i^n) ,\ \lim_{n\to\infty} \max_i d(G_i^n) = 0$$

вместо прямоугольников Π_σ, поскольку в силу измеримости G_i^n их можно приблизить прямоугольниками.

СВОЙСТВА ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА.

1.Свойство линейности:

$$\iint_G \left(\lambda_1 f(x,y) + \lambda_2 g(x,y)\right)dxdy = \lambda_1 \iint_G f(x,y)dxdy + \lambda_2 \iint_G g(x,y)dxdy .$$

ДОК. Следует из линейности интегральных сумм и свойств пределов.

2. Если $f(x,y) \ge 0$ интегрируемая функция на G, то $\iint_G f(x,y)dxdy \ge 0$.

Если в точке $P \in G$ функция непрерывна и $f(P) > 0$, то $\iint_G f(x,y)dxdy > 0$.

ДОК.

Неотрицательность интеграла следует из не отрицательности любой интегральной суммы. Из положительности функции в точке P следует, что существует круг $U(P)$ с центром в точке *P*, внутри которого функция положительна и $\iint\limits_G f(x,y)dxdy \ge \iint\limits_{U(P)} f(x,y)dxdy > 0$.

3. Если $f(x,y)$ непрерывна в области $\overline{G}$, $M = \max\limits_{p\in\overline{G}} f(p)$, $m = \min\limits_{p\in\overline{G}} f(p)$, то справедлива оценка

$$m\mu(G) \le \iint\limits_G f(x,y)dxdy \le M\mu(G).$$

ДОК. Каждая интегральная сумма удовлетворяет неравенству $m\mu(G) \le S_f(G,\xi) \le M\mu(G)$ и неравенство для интеграла получается предельным переходом.

4. (теорема о среднем для интеграла)

Если $f(x,y)$ непрерывна в области $\overline{G}$ (компакте), то существует точка $c \in \overline{G}$, для которой

$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy = f(c)\cdot\mu(G).$$

ДОК. Область значений непрерывной функции $E_f = [m;M]$. По свойству 3 $\frac{1}{\mu(G)}\iint\limits_G f(x,y)dxdy \in [m,M]$, т.е. найдется $c \in \overline{G}$, для которой

$$\frac{1}{\mu(G)}\iint\limits_G f(x,y)dxdy = f(c)$$

5. (аддитивность по множеству)

Если G_1 и G_2 два измеримых множества не пересекаются (или пересекаются только по границе), $f(x,y)$ определена и измерима на G_1 и G_2, то

$$\iint\limits_{G_1\cup G_2} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{G_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{G_2} f(x,y)dxdy.$$

ДОК. Каждой ступенчатой области $G_1(\xi_1)$ и $G_2(\xi_2)$ соответствует свои слагаемые в интегральной сумме $S_f(G_1 \cup G_2, \xi)$, предел которых соответствует интегралам по областям G_1 и G_2

П.3 Повторные интегралы.

ОПР. Для кусочно-непрерывной функции $f(x,y)$ на прямоугольнике $\Pi_{a,b}^{c,d}$ существуют интегралы $I(x) = \int\limits_c^d f(x,y)dy$ и $I(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$, являющиеся непрерывными функциями на отрезках $[a;b]$ и $[c;d]$ соответственно. Тогда существуют интегралы $\int\limits_a^b I(x)dx$ и $\int\limits_c^d I(y)dy$, которые называются повторными интегралами функции $f(x,y)$ на прямоугольнике $\Pi_{a,b}^{c,d}$. Их равенство двойному интегралу функции $f(x,y)$ на $\Pi_{a,b}^{c,d}$ устанавливает

ТЕОРЕМА 3. Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на прямоугольнике $\Pi_{a,b}^{c,d}$. Тогда

$$\iint\limits_{\Pi} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx \right) dy \qquad (4)$$

ДОК. Разобьем отрезок $[c;d]$ точками $c = y_0, y_1, \dots y_n = d$ на отрезки $[y_j; y_{j+1}]$ длины $\Delta_j = y_{j+1} - y_j$ и к каждому такому отрезку применим теорему о среднем для интеграла, т.е. существуют точки $\tilde{y}_j \in [y_j; y_{j+1}]$, для которых

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy = \int\limits_a^b \left(\sum_{j=0}^m \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} f(x,y)dy \right) dx = \sum_{j=0}^m \Delta y_j \int\limits_a^b f(x,\tilde{y}_j)dx = \sum_{j=0}^m \Delta y_j \left(\sum_{i=0}^n \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,\tilde{y}_j)dx \right)$$

Применим к каждому из отрезков $[x_i; x_{i+1}]$ теорему о среднем для интеграла, т.е. существуют точки $\tilde{x}_i \in [x_i; x_{i+1}]$ такие, что

$$\sum_{j=0}^m \Delta y_j \left(\sum_{i=0}^n \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,\tilde{y}_j)dx \right) = \sum_{i,j} f(\tilde{x}_i, \tilde{y}_j) \Delta x_i \Delta y_j$$

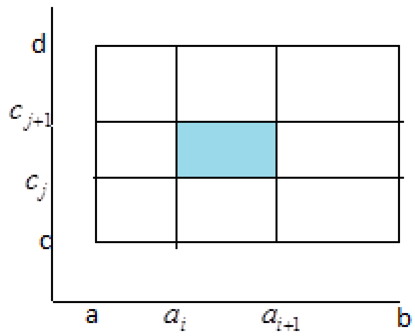
Последнее представляет собой интегральную сумму для двойного интеграла $\iint\limits_{\Pi} f(x,y)dxdy$, существование которого обеспечивается условиями теоремы.

Разбиение $\Pi_\xi = \bigcup\limits_{i,j}^{n,m} \Pi_{x_i,x_{i+1}}^{y_j,y_{j+1}}$ с достаточно малым $\delta(\xi)$ обеспечит как угодно малую близость $\sum\limits_{i,j} f(\tilde{x}_i, \tilde{y}_j) \Delta x_i \Delta y_j = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy$ к интегралу. $\iint\limits_{\Pi} f(x,y)dxdy$

Поскольку каждый из интегралов является числом, последнее возможно только при их равенстве.

Аналогично доказывается равенство $\int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x;y)dx = \iint\limits_{\Pi} f(x,y)dxdy$

Замечание. Теорема остается верной, если условие непрерывности функции $f(x,y)$ на прямоугольнике заменить на условие ее кусочно- непрерывности, т.е. предположить существование у функции разрывов первого рода на прямых $x = a_1, x = a_2, \dots, x = a_k$ или прямых $y = b_1, y = b_2, \dots, y = b_p$.



Функция $f(x,y)$ непрерывна в каждом прямоугольнике $\Pi_{a_i,a_{i+1}}^{c_j,c_{j+1}}$ и к нему применима доказанная формула

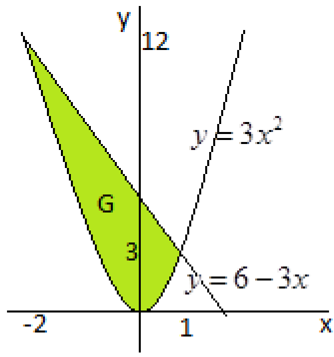
$$\iint_{\Pi} f(x,y)dxdy = \sum_{i,j} \iint_{\Pi_{a_i,a_{i+1}}^{c_j,c_{j+1}}} f(x,y)dxdy = \sum_{i,j} \int_{a_i}^{a_{i+1}} dx \int_{c_j}^{c_{j+1}} f(x,y)dy = \sum_{i=1}^{k} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left(\sum_{j=1}^{p} \int_{c_j}^{c_{j+1}} f(x,y)dy \right) dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \int_{a_i}^{a_{i+1}} dx \int_{c}^{d} f(x,y)dy = \int_{a}^{b} dx \int_{c}^{d} f(x,y)dy$$

Пример 2

Свести двойной интеграл $\iint_G f(x,y)dxdy$ к повторному двумя способами, если G - область, ограниченная кривыми $y=3x^2$ и $y=6-3x$.

Решение



Первый вариант: $\int_{-2}^{1} dx \int_{3x^2}^{6-3x} f(x,y)dy$

Второй вариант: $\int_{0}^{3} dy \int_{-\sqrt{y/3}}^{\sqrt{y/3}} f(x,y)dx + \int_{3}^{12} dy \int_{-\sqrt{y/3}}^{(6-y)/3} f(x,y)dx$

Пример 3. Вычислить с помощью повторного интегрирования $\iint_{\Pi_{0,1}^{0,1}} xydxdy$.

РЕШЕНИЕ.

По формуле (4): $\iint\limits_{\Pi_{0,1}^{0,1}} xydxdy = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 xydy \right) dx = \int\limits_0^1 x \int\limits_0^1 ydydx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 xdx = \frac{1}{4}$ (см пример 1)

ТЕОРЕМА 4. (О вычислении двойного интеграла по стандартной области)
Если функция $F(x,y)$ непрерывна в стандартной области $K_{a,b}(f,g,x) = \{(x,y): a \le x \le b,\ g(x) \le y \le f(x)\}$, где функции $f(x), g(x)$ - непрерывны на отрезке $[a;b]$, то двойной интеграл функции $F(x,y)$ по области $K_{a,b}$ можно вычислять по формуле:

$$\iint\limits_{K_{a,b}} F(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{g(x)}^{f(x)} F(x,y)dy \right) dx \qquad (5)$$

Если функция $F(x,y)$ непрерывна в стандартной области $K_{c,d}(\varphi,\psi,y) = \{(x,y): c \le y \le d,\ \varphi(y) \le x \le \psi(y)\}$, где функции $\varphi(y), \psi(y)$ - непрерывны на отрезке $[c;d]$, то двойной интеграл функции $F(x,y)$ по области $K_{c,d}$ можно вычислять по формуле:

$$\iint\limits_{K_{c,d}} F(x,y)dxdy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} F(x,y)dy \right) dx \qquad (6)$$

ДОК. Докажем формулу (5). Пусть $A = \min\limits_{x\in[a;b]} g(x)$, $B = \max\limits_{x\in[a;b]} f(x)$

Рассмотрим функцию $\tilde{F}(x,y) = \begin{cases} F(x,y),\ (x,y) \in K_{a,b} \\ 0,\ (x,y) \in \Pi_{a,b}^{A,B} \setminus K_{a,b} \end{cases}$ Она кусочно-непрерывна на $\Pi_{a,b}^{A,B}$ и на основании формулы (5): $\iint\limits_{\Pi_{a,b}^{A,B}} \tilde{F}(x,y)dxdy =$

$$\iint\limits_{K_{a,b}} F(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_A^B \tilde{F}(x,y)dy \right) dx = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{g(x)}^{f(x)} F(x,y)dy \right) dx$$

Формула (6) доказывается аналогично (самостоятельно).

Пример 4. Вычислить интеграл $\iint\limits_G \sqrt{x+y}dxdy$, где G - треугольник, ограниченный прямыми $x=0$, $y=0$ и $x+y=1$

РЕШЕНИЕ. По формуле (5)

$$\iint\limits_G \sqrt{x+y}dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \sqrt{x+y}dy = \frac{2}{3}\int\limits_0^1 (x+y)^{\frac{3}{2}} \Big|_{y=0}^{y=1-x} dx =$$

$$\frac{2}{3}\int\limits_0^1 \left(1 - x^{\frac{3}{2}} \right) dx = \frac{2}{3}\left(x - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} \right)\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{5}.$$

УПРАЖНЕНИЕ. Докажите формулу Дирихле

$$\int_0^a dx \int_0^x f(x,y)dy = \int_0^a dy \int_y^a f(x,y)dx, \quad a > 0.$$

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ.

1. Измеримые множества, мера множества. Примеры измеримых множеств.
2. Понятие двойного интеграла. Необходимое условие интегрирования.
3. Теорема об интегрируемости непрерывной функции на измеримом множестве.
4. Свойства двойного интеграла.
5. Повторное интегрирование. Вычисление двойного интеграла по прямоугольнику.
6. Вычисление двойного интеграла по стандартной области.