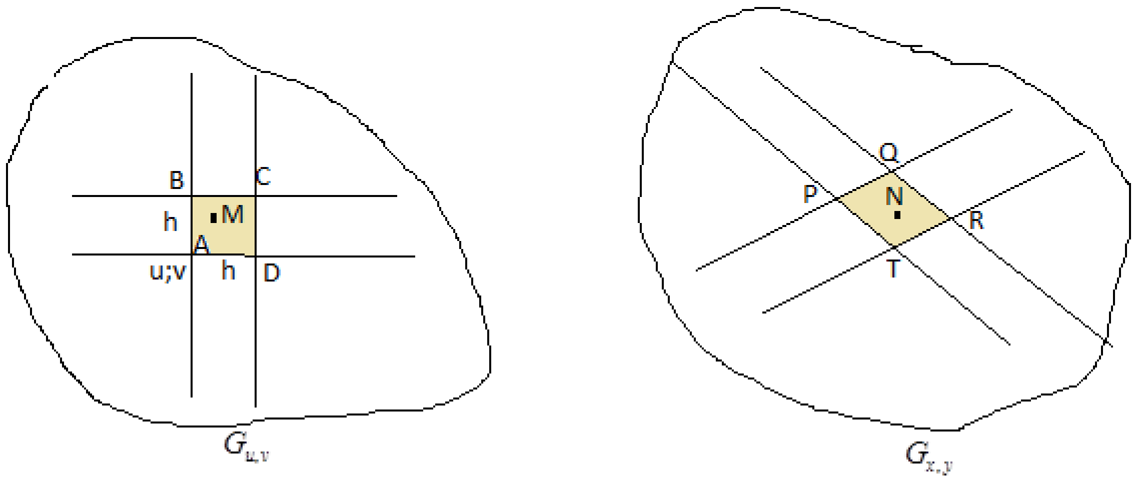
Ф-03-Лекция 2 Замена переменной в двойном интеграле

П.1 Линейная замена в двойном интервале.

Отображение $\begin{cases} x = au + bv \\ y = cu + dv \end{cases}, ad - bc \neq 0$ называется линейной заменой переменных. Если $G_{u,v}$ прообраз области $G_{x,y}$ на плоскости xoy при таком отображении, то для непрерывной на $G_{x,y}$ функции $f(x,y)$ имеет место формула

$$\iint_{G_{x,y}} f(x,y)dxdy = \iint_{G_{u,v}} f(au+bv, cu+dv)|ad-bc|dudv \quad (1)$$

Док.

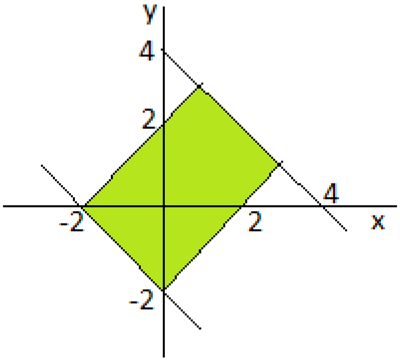


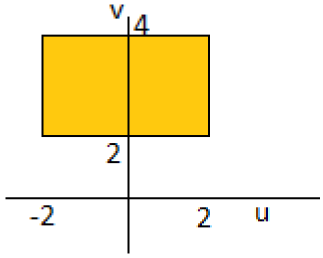
Образом прямой при линейном отображении является прямая, образом квадрата $ABCD$ разбиения области $G_{u,v}$ со стороной h является параллелограмм $PQRT$. Координаты вектора $AB = \{0; h\}$ и его образа $PQ = \{bh; dh\}$. Координаты вектора $AD = \{h; 0\}$ и его образа $PT = \{ah; ch\}$. Площадь $PQRT$ равна $\left\| \begin{pmatrix} i & j & k \\ ah & ch & 0 \\ bh & dh & 0 \end{pmatrix} \right\| = |ad-bc|h^2$

M произвольная точка квадрата, N - ее образ в параллелограмме $PQRT$.

Интегральная сумма для интеграла $\iint_{G_{x,y}} f(x,y)dxdy$ равная $\sum_{i,j} f(N)|ad-bc|h^2$ является интегральной суммой для интеграла $\iint_{G_{u,v}} f(au+bv, cu+dv)|ad-bc|dudv$. Из равенства интегральных сумм следует равенство интегралов после предельного перехода при $h \to 0$.

Пример 1. Вычислить интеграл $\iint_G x^2dxdy$ по области $G = \{(x;y) \in R^2 : |y-x| \le 2, 2 \le x+y \le 4\}$





Решение

Замена переменных:

$$\begin{cases} u = y - x \\ v = x + y \end{cases} \to \begin{cases} x = (v-u)/2 \\ y = (u+v)/2 \end{cases} \to G_{u,v} = \left\{ (u;v) \in R^2 : -2 \le u \le 2,\, 2 \le v \le 4 \right\},\ J = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}$$

Тогда по формуле замены переменных

$$\iint\limits_{G} x^2 dxdy = \iint\limits_{G_{u,v}} \frac{(u-v)^2}{4} \cdot \frac{1}{2} dudv = \frac{1}{8}\int_2^4 dv \int_{-2}^{2} (u-v)^2 du = \frac{1}{24}\int_2^4 (u-v)^3\Big|_{u=-2}^{u=2} dv =$$

$$= \frac{4}{24}\int_2^4 \left((2-v)^2 - (2-v)(2+v) + (2+v)^2 \right) dv = \frac{1}{6}\int_2^4 \left(3v^2 + 4 \right) dv = \frac{1}{6}(v^3 + 4v)\Big|_{v=2}^{v=4} = \frac{32}{3}$$

П.2 Нелинейная замена переменной в двойном интеграле.

Рассмотрим функцию $f(x,y)$ непрерывную на измеримом множестве $\overline{G}_{x,y}$.

ОПР. Заменой переменных называют биективное отображение $(u;v) \xrightarrow{r} (x,y)$,

области $\overline{G}_{u,v}$ на плоскости переменных u,v на область $\overline{G}_{x,y}$ плоскости *x,y*,

переводящее внутренние точки области $\overline{G}_{u,v}$ во внутренние точки области $\overline{G}_{x,y}$, а

границу $\partial G_{u,v}$ в границу $\partial G_{x,y}$. Это отображение задается векторнозначной функцией

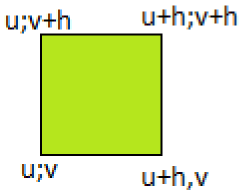
$\bar{r} = \bar{r}(u,v)$ или в координатной форме $\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v) \end{cases}, (u,v) \in \overline{G}_{uv}$

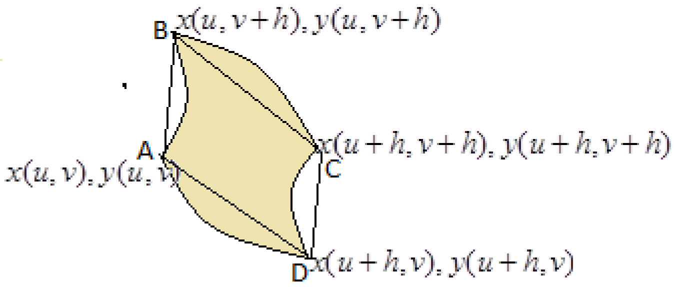
Если функции $x = x(u,v)$ и $y = y(u,v)$ двух переменных имеют непрерывные частные производные первого порядка в области $G_{u,v}$, то замена называется гладкой. В этих предположениях кусочно-гладкая граница $\partial G_{u,v}$ переходит в кусочно-гладкую границу $\partial G_{x,y}$.

Пусть $G_{u,v}(\xi)$ вписанная в $G_{u,v}$ ступенчатая область, состоящая из квадратов со стороной *h*.

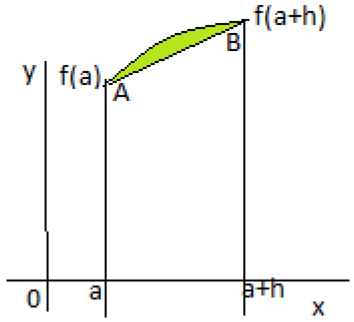
Один из таких квадратов обозначим через $\Pi_{i,j}(h) = \left\{ (u,v) : u_i \le u \le u_i + h,\, v_j \le v \le v_j + h \right\}$, где

(u_i, v_j) - координаты левой нижней вершины квадрата. Образом квадрата $\Pi_{i,j}(h)$ при отображении r является измеримая область $G_{i,j}(h)$ с кусочно-гладкой границей, состоящая из внутренних точек $G_{x,y}$.





Лемма 1 Оценка площади сегмента



Если функция $y = f(x)$ имеет две производные на отрезке $[a; a+h]$, то площадь сегмента $S(h) = o(h^2)$

Док. $S(h) = \int\limits_a^{a+h} \left(f(x) - \frac{f(a+h) - f(a)}{h}(x-a) - f(a) \right) dx$.

Разложим функцию $S(h)$ по формуле Маклорена:

$$S(0) = 0,\ S'(h) = f(a+h) - \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h - f(a) + \int\limits_a^{a+h} (x-a) \frac{f'(a+h)h - f(a+h) + f(a)}{h^2} dx =$$

$$= \frac{f'(a+h)h - f(a+h) + f(a)}{h^2} \cdot \frac{(x-a)^2}{2} \Bigg|_{x=a}^{x=a+h} = \frac{1}{2}\left(f'(a+h)h - f(a+h) + f(a)\big|_{h=0} \right) = 0$$

$S''(h) = f''(a+h)h + f'(a+h) - f'(a+h) = f''(a+h) \cdot h\big|_{h=0} = 0$. Тогда по формуле Маклорена $S(h) = o(h^2)$.

Следующая лемма оценивает ее меру.

ЛЕММА 2.

$$\mu(G_{i,j}(h)) = \left| J(u_i, v_j) \right| \cdot h^2 + o(h^2),$$

где $J(u,v) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$ - якобиан отображения r

ДОК. По лемме 1 мера области $G_{i,j}(h)$ отличается от площади четырехугольника ABCD с вершинами $A = r(u_i, v_j)$, $B = r(u_i, v_j + h)$, $C = r(u_i + h; v_j + h)$,

$D = r(u_i + h, v_j)$ на величину порядка $o(h^2)$.Оценим площадь $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC}$

$$\pm S_{ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x(u_i+h,v_j+h)-x(u_i,v_j+h) & y(u_i+h,v_j+h)-y(u_i,v_j+h) \\ x(u_i,v_j)-x(u_i,v_j+h) & y(u_i;v_j)-y(u_i,v_j+h \end{vmatrix}=$$

$$\frac{1}{2}h^2\begin{vmatrix} x'_u(c_1,v_j+h) & y'_u(c_2,v_j+h) \\ -x'_v(u_i,c_3) & -y'_v(u_i,c_4) \end{vmatrix}=-\frac{h^2}{2}\begin{vmatrix} x'_u(u_i,v_j)+o(1) & y'_u(u_i,v_j)+o(1) \\ x'_v(u_i,v_j)+o(1) & y'_v(u_i,v_j)+o(1) \end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{h^2}{2}J(u_i,v_j)+o(h^2).$$

Аналогично, $\pm S_{ADC}=-\dfrac{h^2}{2}J(u_i,v_j)+o(h^2)$

Знак $\pm$ выбирается с расчетом, что площадь была положительной. Тогда $\mu(G_{i,j}(h))=\left|J(u_i,v_j)\right|\cdot h^2+o(h^2)$.

ТЕОРЕМА (формула замены переменной в двойном интеграле)

Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в замкнутой измеримой области $\overline{G}_{x,y}$.На замкнутой измеримой области $\overline{G}_{u,v}$ задано кусочно-гладкое отображение $\begin{cases} x=x(u,v), \\ y=y(u,v) \end{cases}$,

осуществляющее биекцию $\overline{G}_{u,v}\to\overline{G}_{x,y}$. Тогда

$$\iint\limits_{G_{x,y}} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{G_{u,v}} f(x(u,v),y(u,v))\left|J(u,v)\right|dudv.$$

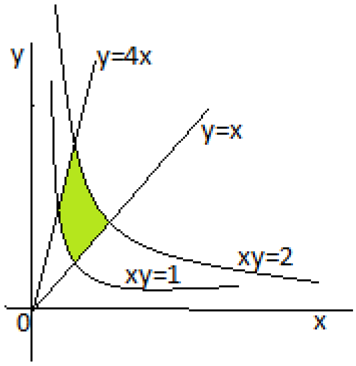
ДОК. С учетом утверждения леммы интегральная сумма для интеграла $\iint\limits_{G_{x,y}} f(x,y)dxdy$

$$\sum_{i,j} f(\overline{r}(u_i,v_j))\mu(G_{i,j}(h))=\sum_{i,j} f(\overline{r}(u_i,v_j))\left|J(u_i,v_j)\right|\mu(\Pi_{i,j}(h))+o(1)\mu(\overline{G}_{u,v}) \quad (7)$$

Первое слагаемое справа является интегральной суммой для интеграла $\iint\limits_{G_{u,v}} f(x(u,v),y(u,v))\left|J(u,v)\right|dudv$. По условию теоремы, при $h\to 0$ обе интегральные суммы имеют пределы, равные соответствующим интегралам, а из равенства (7) следует, что эти интегралы равны.

ПРИМЕР 2. Вычислить интеграл $\iint\limits_{G}\dfrac{dxdy}{x^2y^2}$, где G - область с границей $xy=1,\ xy=2,$

$y=x,\ y=4x,\ \ x>0,\ y>0.$



РЕШЕНИЕ. Сделаем замену $u = xy, v = \dfrac{y}{x}$. Тогда область $G_{u,v} = \{(u;v): 1 \le u \le 2, 1 \le v \le 4\}$- прямоугольник. Обратная замена $x = \sqrt{\dfrac{u}{v}}, y = \sqrt{uv}$ и якобиан $J(u,v) = \dfrac{1}{2v}$.

Тогда $\iint\limits_G \dfrac{dxdy}{x^2y^2} = \iint\limits_{G_{u,v}} \dfrac{dudv}{2u^2v} = \dfrac{1}{2}\int\limits_1^4 \dfrac{dv}{v}\int\limits_1^2 \dfrac{du}{u^2} = \dfrac{\ln 4}{4}$.

Полярная замена переменных

Для областей, граница которых является окружностью или ее частью, употребляют ПОЛЯРНУЮ замену переменных $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$, якобиан которого

$$J(r,\varphi) = \begin{vmatrix} x'_r & y'_r \\ x'_\varphi & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r .$$

ПРИМЕР 3. Вычислить интеграл $\iint\limits_{G_{x,y}} \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, где $G_{x,y} = \{(x,y): \pi^2 \le x^2+y^2 \le 4\pi^2\}$ - кольцо на плоскости переменных (x,y).

РЕШЕНИЕ. $G_{r,\varphi} = \{(r,\varphi): \pi \le r \le 2\pi, 0 \le \varphi < 2\pi\}$- прямоугольник на плоскости переменных (r,φ):

$$\iint\limits_{G_{x,y}} \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \iint\limits_{G_{r,\varphi}} r\sin r\,drd\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_\pi^{2\pi} r\sin r\,dr =$$

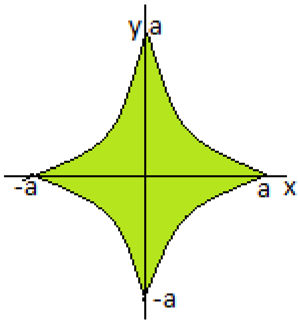
$$= 2\pi\left(-r\cos r\Big|_\pi^{2\pi} + \int\limits_\pi^{2\pi}\cos r\,dr\right) = -6\pi^2 .$$

Обобщенная полярная замена

Замена $\begin{cases} x = a\cdot r^\alpha \cdot \cos^\beta\varphi \\ y = b\cdot r^\alpha \cdot \sin^\beta\varphi \end{cases}$, $r \ge 0, \varphi \in [0;2\pi)$ называется обобщенной полярной заменой. Ее якобиан

$$J(r,\varphi)=\begin{vmatrix} a\cdot\alpha r^{\alpha-1}\cos^{\beta}\varphi & b\cdot\alpha r^{\alpha-1}\sin^{\beta}\varphi \\ -a\cdot r^{\alpha}\beta\cos^{\beta-1}\varphi\sin\varphi & b\cdot r^{\alpha}\beta\sin^{\beta-1}\varphi\cos\varphi \end{vmatrix}=ab\alpha\beta\cdot r^{2\alpha-1}\cdot\sin^{\beta-1}\varphi\cdot\cos^{\beta-1}\varphi$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\iint\limits_G \sqrt{|xy|}dxdy$, где $G=\left\{(x;y)\in R^2:\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}\le\sqrt{a}\right\}$



$\iint\limits_G \sqrt{|xy|}dxdy=4\iint\limits_{G^+}\sqrt{xy}dxdy$. Сделаем замену $\begin{cases} x=ar\cos^4\varphi \\ y=ar\sin^4\varphi \end{cases}$ с якобианом $J=4a^2r\sin^3\varphi\cos^3\varphi$.

Тогда граница области

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}\to\sqrt{a}\cdot\sqrt{r}\cos^2\varphi+\sqrt{a}\cdot\sqrt{r}\sin^2\varphi=\sqrt{a}\cdot\sqrt{r}=\sqrt{a}\to\sqrt{r}=1\to r=1$ Область

$G^+_{r,\varphi}=\left\{(r,\varphi):0\le r\le 1, 0\le\varphi\le\pi/2\right\}$ - прямоугольник, $\sqrt{xy}=ar\sin^2\varphi\cos^2\varphi$

Тогда

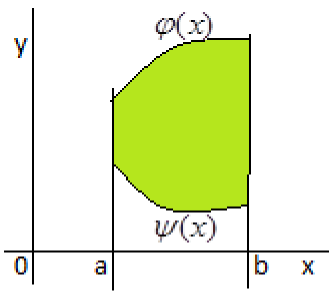
$$\iint\limits_{G^+}\sqrt{xy}dxdy=\iint\limits_{G^+_{r,\varphi}}4a^3r^2\sin^5\varphi\cos^5\varphi drd\varphi=4a^3\int\limits_0^1 r^2dr\int\limits_0^{\pi/2}\sin^5\varphi\cos^5\varphi d\varphi=\frac{a^3}{24}\int\limits_0^{\pi/2}\sin^5 2\varphi d\varphi=$$

$$=\frac{a^3}{48}\int\limits_0^{\pi}\sin^5 tdt=\frac{a^3}{48}\int\limits_{-1}^{1}(1-u^2)^2du=\frac{a^3}{45}$$

$$\iint\limits_G\sqrt{|xy|}dxdy=4\iint\limits_{G^+}\sqrt{xy}dxdy=\frac{4a^3}{45}$$

П.3 Формула Грина для двойного интеграла

Рассмотрим двойной интеграл по криволинейной трапеции $K_{a,b}(\varphi,\psi,x)$ от частной производной функции $f(x,y)$ по переменной y:



$$\iint\limits_K\frac{\partial f}{\partial y}dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\psi(x)}^{\varphi(x)}\frac{\partial f}{\partial y}dy=\int\limits_a^b\left(f(\varphi(x))-f(\psi(x))\right)dx=\int\limits_a^b f(\varphi(x))dx+\int\limits_b^a f(\psi(x))dx$$

Пример 5 Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_K xy^2dxdy$ по области

$$K=\left\{(x,y)\in R^2:1\le x\le 2,\frac{1}{x}\le y\le x\right\}$$

Решение

Если $f(x,y)=\frac{1}{3}xy^3$, то $xy^2=\frac{\partial f}{\partial y}$. Тогда по формуле Грина

$$\iint\limits_K xy^2dxdy=\frac{1}{3}\int_1^2\left(x\cdot x^3-x\cdot\frac{1}{x^3}\right)dx=\frac{1}{3}\left(\frac{x^5}{5}+\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^2=\frac{1}{3}\left(\frac{31}{5}-\frac{1}{2}\right)=\frac{19}{10}$$

П. 5 «Дифференцирование» интеграла по области.

Пусть g - произвольная измеримая подобласть G. Числовую функцию $F(g)$ назовем аддитивной по g, если $\forall g=g_1\cup g_2$, где g_1 и g_2 пересекаются только по границе, выполняется равенство $F(g)=F(g_1)+F(g_2)$

Например, 1) $F(g)=S(g)-$ площадь области g;

2) $F(g)=\iint\limits_g f(x,y)dxdy$;

3) $G-$ область с поверхностно распределенной массой, $F(g)-$ масса области g;

4) $G-$ область с поверхностно распределенным давлением, $F(g)-$ давление на область g.

Пусть $M-$ фиксированная точка области G, а $g_M\subset G$ - произвольная измеримая область, содержащая M.

Производной функции $F(g)$ по области в точке M называют предел $\lim\limits_{\mu(g)\to 0}\frac{F(g_M)}{\mu(g_M)}=f(M)$, если он существует.

Например, для $F(g)=S(g)$ ее производная по области равна $f(M)=1$ и $S_g=\iint\limits_g 1\cdot dxdy$

Покажем, что если $F(g)=\iint\limits_g f(x,y)dxdy$ с непрерывной функцией $f(x,y)$ в области G, то ее производная по области в точке $M(x,y)$ равна $f(x,y)$.

Действительно, по теореме о среднем

$$F(g_M)=f(\tilde{x},\tilde{y})\cdot\mu(g_M)\to\lim_{\mu(g_M)\to 0}\frac{F(g_M)}{\mu(g_M)}=\lim_{\mu(g_M)\to 0}f(\tilde{x},\tilde{y})=f(x,y)$$

В этом смысле двойной интеграл является «первообразной» подынтегральной функции.

Если через $\rho(x,y)$ обозначить производную по области функции $F(g)$ из примера 3, то ее называют поверхностной плотностью и масса пластины g вычисляется с использованием интеграла

$$m=\iint\limits_{g}\rho(x,y)dxdy$$

В примере 4 давление на пластину g определяется интегралом $P_g=\iint\limits_{g}p(x,y)dxdy$, где функция $p(x,y)$ удельного давления – производная функции $F(g)$ по области.

П.6 Двойной интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница для прямоугольника.

Рассмотрим двойной интеграл от непрерывной функции $f(u,v)$ по прямоугольнику с переменными длинами сторон $\Pi_{a,x}^{c,y}$: $F(x,y)=\int\limits_{a}^{x}\int\limits_{c}^{y}f(u,v)dudv$

Тогда

$$F'_x=\int\limits_{c}^{y}f(x,v)dv,\ \ F'_y=\int\limits_{a}^{x}f(u,y)du,\ \ F''_{xy}=f(x,y)$$

Действительно, при фиксированном y производная функции $F(x,y)=\int\limits_{a}^{x}du\int\limits_{c}^{y}f(u,v)dv$ по x равна $F'_x=\int\limits_{c}^{y}f(x,v)dv$. При повторном дифференцировании по y получим $F''_{xy}=f(x,y)$.

Тогда

$$\iint\limits_{\Pi_{a,b}^{c,d}}f(x,y)dxdy=\iint\limits_{\Pi_{a,b}^{c,d}}\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}dxdy=\int\limits_{a}^{b}dx\int\limits_{c}^{d}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)dy=\int\limits_{a}^{b}\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,d)-\frac{\partial F}{\partial x}(x,c)\right)dx=$$
$$=\int\limits_{a}^{b}\frac{\partial F}{\partial x}(x,d)dx-\int\limits_{a}^{b}\frac{\partial F}{\partial x}(x,c)dx=F(b,d)-F(a,d)-F(b,c)+F(a,c)$$

Последняя формула является аналогом формулы Ньютона-Лейбница для одномерных интегралов Римана.

Вопросы к экзамену

1. Линейная замена в двойном интеграле. Формула для вычисления двойного интеграла с помощью линейной замены.

1. Нелинейная замена переменной в двойном интеграле, якобиан преобразования. Формула для вычисления двойного интеграла с помощью замены переменных.

2. Полярная замена переменной. Обобщенная полярная замена. Примеры.