Ф-03- лекция 5. Тройной интеграл.

П.1 Измеримые множества в пространстве.

«Кирпичиком» для построения измеримых множеств в пространстве R^3 является параллелепипед $\Pi_{abc}=\{(x,y,z): x_i\le x\le x_i+a,\ y_j\le y\le y_j+b,\ z_k\le z\le z_k+c\}$ с вершиной в точке (x_i,y_j,z_k), его параметр $d(\Pi_{abc})=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ - диагональ параллелепипеда.

ОПР. Телом G в пространстве называют открытую, односвязную и ограниченную область в R^3. Замкнутая область – это $\overline{G}=G\cup\partial G$, где ∂G - совокупность граничных точек.

ОПР. Ступенчатым телом G_ξ называют объединение параллелепипедов Π_σ, возможно пересекающихся по границе, $G_\xi=\bigcup\limits_{\sigma\in\xi}\Pi_\sigma$. Ступенчатое тело G_ξ вписано в G, если $\Pi_\sigma\subset G, \forall\sigma\in\xi$, и описано, если $G_\xi\supset G$. Параметром $d(G_\xi)$ ступенчатого тела называют число $d(G_\xi)=\max\limits_{\sigma\in\xi}d(\Pi_\sigma)$.

ОПР. Нижней мерой тела G называется число $\underline{\mu}(G)=\sup\limits_{\xi}\mu(G_\xi)$, где верхняя грань берется по всем ступенчатым телам, вписанным в G. Верхняя мера тела G называется число $\overline{\mu}(G)=\inf\limits_{\xi}\mu(G_\xi)$, где G_ξ - ступенчатые тела, описанные около G. Числа $\underline{\mu}(G)$ и $\overline{\mu}(G)$ существуют для любого G.

ОПР. Тело G измеримо в пространстве, если $\underline{\mu}(G)=\overline{\mu}(G)=\mu(G)$.

Число $\mu(G)$ называется мерой тела G или его объемом.

ПРИМЕРЫ измеримых областей.

1. $\Pi_{abc}=\{(x,y,z)\in R^3: x_0\le x\le x_0+a, y_0\le y\le y_0+b, z_0\le z\le z_0+c\}$ - параллелепипед со сторонами a,b,c и вершиной (x_0,y_0,z_0), $\mu(\Pi_{abc})=abc$

2. $T_D^{a,b}=D\times[a;b]=\{(x,y,z):(x,y)\in D,\ z\in[a;b]\}$ - прямой цилиндр, образующая которого перпендикулярна плоскости ХОУ, с основанием D и высотой $b-a$, где $\mu(D)$ - площадь области D.

ПОЯСНЕНИЕ. Если $D_\xi=\bigcup\limits_{\sigma}\Pi_\sigma$ ступенчатая область, вписанная в D, то объединение параллелепипедов $\Pi_\sigma\times[a;b]$ является ступенчатым телом, вписанным в $T_D^{a,b}$

Его объем при $d(D_\xi)\to 0$ стремится к величине $\mu(T_D^{a,b})=(b-a)\cdot\mu(D)$.

3. $V_D^{f,g}=\{(x,y,z):(x,y)\in D, g(x,y)\le z\le f(x,y)\}$ - стандартная область по оси OZ, где $g(x,y), f(x,y)$ – кусочно-гладкие функции в измеримой области D на плоскости R^2.

$\mu(V_D^{f,g})=\iint\limits_D(f(x,y)-g(x,y))dxdy$.

ПОЯСНЕНИЕ. Если $D_\xi=\bigcup\limits_{\sigma}\Pi_\sigma$ ступенчатая область, вписанная в D и

$$m_\sigma(f)=\min_{M\in\Pi_\sigma}f(M),\ M_\sigma(f)=\max_{M\in\Pi_\sigma}f(M).$$

Тогда объединение параллелепипедов $\Pi_\sigma\times[M_\sigma(g);m_\sigma(f)]$ представляет ступенчатое тело, вписанное в $V_D^{f,g}$, а объединение параллелепипедов $\Pi_\sigma\times[m_\sigma(g);M_\sigma(f)]$ - ступенчатое тело, описанное около $V_D^{f,g}$. Предел объемов каждого из них при $d(D_\xi)\to 0$ равен

$$\mu(V_D^{f,g})=\iint\limits_D(f(x,y)-g(x,y))dxdy.$$

4. Тело G_c с измеримыми сечениями. Рассматриваются тела G, у которых сечения плоскостями перпендикулярными координатным осям, например, плоскостями с уравнением $z=p$, измеримы на плоскости ХОУ, т.е. для любого $p\in[a,b]$ область

$D_p = \{(x,y)\in R^2 : (x,y,p)\in G\}$ измерима и ее мера $\mu(D_p)$ непрерывная функция переменной p на отрезке $[a;b]$. Множество $G^p = \{(x,y,z):(x,y)\in D_p, z=p\}$ назовем сечением тела G плоскостью $z=p$. Тогда тело $G_c = \bigcup_{p\in[a,b]} G^p$ и $\mu(G_c)=\int_a^b \mu(D_p)dp$ ее объем.

ПОЯСНЕНИЕ. Если $\xi = (a=\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_k,\xi_{k+1},\ldots\xi_n=b)$ разбиение отрезка $[a;b]$ с параметром разбиения d_ξ. Разбиение пересечения $D_{\xi_k}\cap D_{\xi_{k+1}}$ на прямоугольники $D_{\xi_k}\cap D_{\xi_{k+1}} = \bigcup_\sigma \Pi_\sigma$ порождает разбиение тела G на параллелепипеды $\Pi_\sigma\times[\xi_k;\xi_{k+1}]$. Объем ступенчатого тела, построенного из них равен $\sum_{л=0}^{n}(\mu(D_{\xi_k})+\Delta\mu)(\xi_{k+1}-\xi_k)$, где $\Delta\mu=o(1)$ при $d(D_\xi)\to 0$, стремится к $\mu(G)=\int_a^b \mu(D_p)dp$ при уменьшении параметра разбиения.

В частности, цилиндр 2) тело с измеримыми сечениями и $\mu(D_p)=\mu(D)$ - постоянная на отрезке $[a,b]$ функция.

ПРИМЕР 1. Найти объем тела ограниченного поверхностями:

$$z=x+y,\ z=xy,\ x+y=1, x=0,\ y=0.$$

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим сечения плоскостями $y=p\in[0;1]$.Тогда область D_p (трапеция) на плоскости XOZ имеет границы $z=x+p$, $z=px$, $x=1-p$, $x=0$ и ее мера (площадь) $\mu(D_p)=\int_0^{1-p}(x+p-px)dx = \left(\frac{(x+p)^2}{2}-\frac{px^2}{2}\right)\Big|_0^{1-p} = \frac{1}{2}\left(1-p(1-p)^2-p^2\right)$ - непрерывная функция на отрезке [0;1]. Тогда объем тела G равен: $\mu(G)=\frac{1}{2}\int_0^1\left(1-p(1-p)^2-p^2\right)dp =$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(1-p+p^2-p^3\right)dp=\frac{7}{24}.$$

П.2 Тройной интеграл.

Пусть G - измеримое тело и $G_\xi = \bigcup_{\sigma\in\xi}\Pi_\sigma$ соответствующее разбиение G на параллелепипеды. В каждом параллелепипеде Π_σ выберем произвольную точку $P_\sigma\in\Pi_\sigma$.

ОПР. Интегральной суммой функции $f(x,y,z)$ по области G называют выражение:

$$S_f(G_\xi)=\sum_{\sigma\in\xi} f(P_\sigma)\mu(\Pi_\sigma).$$

ОПР. Тройным интегралом Римана функции $f(x,y,z)$ по области G называют число:

$$\iiint_G f(x,y,z)dxdydz = \lim_{d(\xi)\to 0} S_f(G_\xi).$$

Если функция имеет тройной интеграл, то она называется интегрируемой по Риману в области G.

ТЕОРЕМА 1. (необходимое условие интегрируемости)

Если функция $f(x,y,z)$ интегрируема в измеримой области G, то она ограничена в $\overline{G}$.

ДОК. (аналогично соответствующей теореме для двойного интеграла)

ТЕОРЕМА 2. (достаточное условие интегрируемости)

Всякая кусочно-непрерывная на измеримом множестве $\overline{G}$ функция интегрируема по Риману.

ДОК. (аналогично соответствующей теореме для двойного интеграла)

СВОЙСТВА ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА. (аналогичны свойствам двойного интеграла).

1. линейность: $\iiint\limits_G (\alpha f+\beta g)dxdydz)=\alpha\iiint\limits_G fdxdydz+\beta\iiint\limits_G gdxdydz$

2. аддитивность по множеству $G=G_1\cup G_2$, где G_1 и G_2 - измеримые множества, пересекающиеся по границе. Тогда $\iiint\limits_G fdxdydz=\iiint\limits_{G_1} fdxdydz+\iiint\limits_{G_2} fdxdydz$.

3. теорема о среднем. Если $f(x,y,z)$ непрерывна на $\overline{G}$, то существует точка $(x_c,y_c,z_c)\in\overline{G}$, для которой $\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz=f(x_c,y_c,z_c)\cdot\mu(G)$.

4. Оценка отклонения интеграла от интегральной суммы:

$$\left|\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz-S_f(G_\xi)\right|\le\omega_f(\delta)\cdot\mu(G),$$

где G_ξ - любое разбиение G на параллелепипеды с параметром $d_\xi<\delta$, а $\omega_f(\delta)$ - функция колебания $f(x,y,z)$: $\omega_f(\delta)=\sup\limits_{\rho(M_1,M_2)\le\delta}\left|f(M_1)-f(M_2)\right|$

Для непрерывной функции $f(x,y,z)$ на $\overline{G}$ колебание $\omega_f(\delta)$ бесконечно малая функция в точке $\delta=0$.

5. Если $\chi(x,y,z)=\begin{cases}1,\ (x,y,z)\in G\\0,\ (x,y,z)\notin G\end{cases}$ - характеристическая функция области G, то

$$\mu(G)=\iiint\limits_G \chi(x,y,z)dxdydz.$$

П.3 Повторные интегралы.

Вычисление тройного интеграла сводится к вычислению двойных и одномерных интегралов, т.е. к повторному интегрированию. Для областей, рассмотренных выше, эта процедура следующая (рассматриваются функции $F(x,y,z)$ кусочно-непрерывные в $\overline{G}$).

1. Для $G=\Pi_{abc}$:

$$\iiint\limits_G F(x,y,z)dxdydz=\int\limits_{x_0}^{x_0+a}dx\int\limits_{y_0}^{y_0+b}dy\int\limits_{z_0}^{z_0+c}F(x,y,z)dz \quad (1)$$

Внутренний одномерный интеграл берется по переменной z на отрезке $[z_0;z_0+c]$, при фиксированных (x,y) и поэтому является непрерывной функцией двух переменных (x,y).

Интегрирование этой функции по переменной y на отрезке $[y_0;y_0+b]$ при фиксированном x задает функцию переменной x, которая интегрируется на отрезке $[x_0;x_0+a]$

Док.

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+a}dx\int\limits_{y_0}^{y_0+b}dy\int\limits_{z_0}^{z_0+c}F(x,y,z)dz=\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{x_0}^{x_0+a}dx\int\limits_{y_0}^{y_0+b}dy\int\limits_{z_k}^{z_{k+1}}F(x,y,z)dz=\sum_{k=1}^{n}\Delta z_k\int\limits_{x_0}^{x_0+a}dx\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{y_j}^{y_{j+1}}F(x,y,\tilde{z}_k)dy=$$

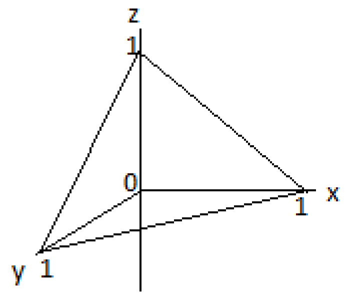
$$=\sum_{k,j=1}^{n,m}\Delta z_k\Delta y_j\sum_{i=1}^{p}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}F(x,\tilde{y}_j,\tilde{z}_k)dx=\sum_{k,j,i=1}^{n,m,p}F(\tilde{x}_i,\tilde{y}_j,\tilde{z}_k)\Delta x_i\Delta y_j\Delta z_k$$

для некоторых точек $(\tilde{x}_i,\tilde{y}_j,\tilde{z}_k),\tilde{x}_i\in(x_i;x_{i+1}),\tilde{y}_j\in(y_j;y_{j+1}),\tilde{z}_k\in(z_k;z_{k+1})$. Последнее представляет интегральную сумму тройного интеграла и ее предел равен с одной стороны тройному интегралу, а с другой повторному.

Порядок интегрирования по прямоугольнику может быть изменен.

Пример 2. Вычислить интеграл $\iiint\limits_G \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$, где область G ограничена плоскостями $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1$

Решение



Рассматривается функция

$$F(x,y,z)=\begin{cases}1/(1+x+y+z)^3,\ (x,y,z)\in G\\ 0,\ (x,y,z)\in \Pi_{1,1,1}\setminus \mathrm{G}\end{cases}.$$

Тогда по формуле вычисления интеграла по параллелепипеду

$$\iiint\limits_G \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}=\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1 F(x,y,z)dxdydz=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y}\frac{dz}{(1+x+y+z)^3}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(-\frac{1}{(1+x+y+z)^2}\right)\Bigg|_{z=0}^{z=1-x-y} dy=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(\frac{1}{(1+x+y)^2}-\frac{1}{4}\right)dy=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{1+x}-\frac{(1-x)}{4}-\frac{1}{2}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{5}{8}\right)$$

2. Если $G=T_D^{a,b}$, то $\iiint\limits_G F(x,y,z)dxdydz=\int_a^b dz\iint\limits_D F(x,y,z)dxdy$ (2)

Внутренний двойной интеграл берется по области D на плоскости ХОУ при фиксированном z и является непрерывной функцией этой переменной, которая интегрируется на отрезке $[a;b]$.

Док. $\int_a^b dz\iint\limits_D F(x,y,z)dxdy=\sum_{k=1}^n\int_{z_k}^{z_{k+1}} dz\iint\limits_D F(x,y,z)dxdy=\sum_{k=1}^n \Delta z_k\iint\limits_D F(x,y,\tilde{z}_k)dxdy$

Пусть D_ξ - ступенчатая область, являющаяся объединением прямоугольников $\Pi_\sigma,\sigma\in\xi$, вписанная в D. Тогда $\iint\limits_D F(x,y,\tilde{z}_k)dxdy=\sum_\sigma F(\tilde{x}_\sigma,\tilde{y}_\sigma,\tilde{z}_k)\Delta x_\sigma\Delta y_\sigma+o(1)$ и

$$\int_a^b dz\iint\limits_D F(x,y,z)dxdy=\sum_{i=1}^n\sum_\sigma F(\tilde{x}_\sigma,\tilde{y}_\sigma,\tilde{z}_k)\Delta x_\sigma\Delta y_\sigma\Delta z_k+o(1)$$

Второе слагаемое справа – интегральная сумма для тройного интеграла и ее предел равен самому интегралу с одной стороны, а с другой – повторному интегралу.

3. Если $G=V_D^{f,g}$, то $\iiint\limits_G F(x,y,z)dxdydz=\iint\limits_D dxdy\int_{g(x,y)}^{f(x,y)} F(x,y,z)dz$ (3)

Внутренний одномерный интеграл берется по переменной z при фиксированных (x,y) на отрезке $[g(x,y);f(x,y)]$ и является непрерывной функцией этих переменных. Последняя функция интегрируется по области D, и полученное число представляет тройной интеграл функции $F(x,y,z)$ по области G.

Док. Пусть $m = \min\limits_{(x,y)\in D} g(x,y)$, $\mathrm{M} = \max\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$ и

$$\tilde{F}(x,y,z) = \begin{cases} F(x,y,z),\ g(x,y) \le z \le f(x,y),\ (x,y)\in D \\ 0,\ z\in\left[m, g(x,y)\right] \cup \left[f(x,y), M\right], (x,y)\in G \end{cases}$$

Тогда

$$\iint\limits_D dxdy \int\limits_{g(x,y)}^{f(x,y)} F(x,y,z)dz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_m^M \tilde{F}(x,y,z)dz = \sum_{k=1}^n \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_k}^{z_{k+1}} \tilde{F}(x,y,z)dz =$$

$$= \sum_{k=1}^n \Delta z_k \iint\limits_D \tilde{F}(x,y,\tilde{z}_k)dxdy = \sum_{k=1}^n \Delta z_k \left(\sum_{\sigma\in\xi} \tilde{F}(x_\sigma, y_\sigma, \tilde{z}_k)\Delta x_\sigma \Delta y_\sigma + o(1) \right) =$$

$$= \sum_{k,\sigma} \tilde{F}(x_\sigma, y_\sigma, \tilde{z}_k)\Delta x_\sigma \Delta y_\sigma \Delta z_k + o(1) = \sum_{k,\sigma} F(x_\sigma, y_\sigma, \tilde{z}_k)\Delta x_\sigma \Delta y_\sigma \Delta z_k + o(1)$$

Первое слагаемое в правой части равенства – интегральная сумма тройного интеграла $\iiint\limits_G F(x,y,z)dxdydz$, который существует, а левая часть равенства – повторный интеграл.

Предельный переход при $d(\xi) \to 0$ доказывает формулу (3).

Пример 3. Вычислить интеграл $\iiint\limits_G zdxdydz$, где область G ограничена поверхностью конуса $z^2 = \dfrac{h^2}{R^2}(x^2+y^2)$ и плоскостью $z = h$.

Решение

$\iiint\limits_G zdxdydz = \int\limits_0^h zdz \iint\limits_{D_z} dxdy$, где $D-$ круг $x^2+y^2 \le \dfrac{z^2R^2}{h^2}$. Во внутреннем интеграле вычисляется площадь круга, т.е. $\dfrac{\pi R^2 z^2}{h^2}$ и $\iiint\limits_G zdxdydz = \pi R^2 \cdot \left.\dfrac{z^4}{4h^2}\right|_{z=0}^{z=h} = \dfrac{\pi R^2 h^2}{4}$

4. Если $G = G_c$, то $\iiint\limits_G F(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dp \iint\limits_{D_p} F(x,y,p)dxdy$ (4)

Внутренний двойной интеграл берется по сечению области G плоскостью $z = p$, а внешний одномерный интеграл берется по отрезку значений параметра p, при которых эти сечения не пусты.

ДОК. Разобьем отрезок $\left[a;b\right]$ на отрезки $\left[p_k; p_{k+1}\right]$ длиной Δp_k .По теореме о среднем для одномерного интеграла на отрезке $\left[p_k; p_{k+1}\right]$ существует точки $\tilde{p}_k \in \left[p_k; p_{k+1}\right]$, для которых $\int\limits_a^b dp \iint\limits_{D_p} F(x,y,p)dxdy = \sum\limits_{k=1}^n \iint\limits_{D_{\tilde{p}_k}} F(x,y,\tilde{p}_k)dxdy \cdot \Delta p_k$. Оценим двойной интеграл с помощью интегральной суммы:

$$\iint\limits_{D_{\tilde{p}_k}} F(x,y,\tilde{p}_k)dxdy = \sum_\sigma F(x_\sigma, y_\sigma, \tilde{p}_k)\Delta x_\sigma \Delta y_\sigma + o(1),$$

построенной по ступенчатой области $D_k(\xi)$, являющейся объединением прямоугольников $\Pi_{k,\sigma}$, $\mu\left(\Pi_{k,\sigma}\right) = \Delta x_\sigma \Delta y_\sigma$. Тогда повторный интеграл можно представить в виде:

$$\sum_{k=1}^n \iint\limits_{D_{\tilde{p}_k}} F(x,y,\tilde{p}_k)dxdy \cdot \Delta p_k = \sum_{k,\sigma} F(x_\sigma, y_\sigma, \tilde{p}_k)\Delta x_\sigma \Delta y_\sigma \Delta p_k + o(1)$$

Выражение справа при $d(\xi) \to 0$ имеет предел, равный тройному интегралу, а выражение слева равно повторному интегралу.

Пример 4. Вычислить интеграл $\iiint\limits_G x^2 dxdydz$, где область G ограничена поверхностями:

$z=y^2$, $z=4y^2$, $z=x$, $z=2x$, $z=1$, $y>0$.

РЕШЕНИЕ. Буква z наиболее часто встречается в уравнениях границы, поэтому сечения следует проводить перпендикулярно оси OZ плоскостями $z=p$. Сечением являются прямоугольники D_p, границы которого имеют уравнения:

$x=\dfrac{p}{2}$, $x=p$, $y=\dfrac{\sqrt{p}}{2}$, $y=\sqrt{p}$, $p\in[0;1]$.

Тогда

$$\iiint\limits_G x^2 dxdydz=\int\limits_0^1 dp\iint\limits_{D_p} x^2 dxdy=\int\limits_0^1 dp\int\limits_{p/2}^{p} x^2 dx\int\limits_{\sqrt{p}/2}^{\sqrt{p}} dy=\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{8}\cdot\int\limits_0^1 p^{\frac{7}{2}}dp=\frac{7}{108}.$$

П.3 Замена переменной в тройном интеграле.

ОПР. Заменой переменной в пространстве называют биективное отображение $G_{u,v,w}\xrightarrow{f}G_{x,y,z}$ области $G_{u,v,w}$ в R^3 на область $G_{x,y,z}$ в R^3, при котором каждая точка $Q(u,v,w)\in G_{u,v,w}$ переходит в точку $P(x,y,z)\in G_{x,y,z}$, причем $\begin{cases} x=x(u,v,w),\\ y=y(u,v,w),\\ z=z(u,v,w)\end{cases}$.

Отображение задается непрерывно дифференцируемыми функциями $x=x(u,v,w)$, $y=y(u,v,w)$, $z=z(u,v,w)$

Определитель $J(u,v,w)=\begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w\\ y'_u & y'_v & y'_w\\ z'_u & z'_v & z'_w\end{vmatrix}\neq 0$ называется якобианом отображения f.

Пример 5 (сферическая замена переменных)

Положение точки Q в пространстве можно характеризовать тремя числами $u=r$, $v=\varphi$, $w=\theta$ - сферическими координатами точки. Здесь r - расстояние точки Q до точки O - начала координат $r\geq 0$. Если Q' проекция точки Q на плоскость XOY, то φ - угол, который образует вектор $\overline{OQ'}$ с положительным направлением оси OX, $\varphi\in[0;2\pi)$.

Наконец, θ - угол, который образует вектор $\overline{OQ}$ с плоскостью XOY, $\theta\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$

Связь между декартовыми и сферическими координатами осуществляется по формулам : $\begin{cases} x=r\cos\varphi\cos\theta,\\ y=r\sin\varphi\cos\theta,\\ z=r\sin\theta\end{cases}$. Например, прообразом шара: $x^2+y^2+z^2\leq R^2$ при отображении сферической замены является параллелепипед $\left\{(r,\varphi,\theta): 0\leq r\leq R,\ 0\leq\varphi<2\pi,\ -\dfrac{\pi}{2}\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

Якобиан сферической замены $J(r,\varphi,\theta)=\begin{vmatrix}\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\cos\theta & -r\cos\varphi\sin\theta\\ \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta\\ \sin\theta & 0 & r\cos\theta\end{vmatrix}=$

$=r^2\sin^2\theta\cos\theta\begin{vmatrix}-\sin\phi & -\cos\phi\\ \cos\phi & -\sin\phi\end{vmatrix}+r^2\cos^3\theta\begin{vmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi\end{vmatrix}=r^2\cos\theta$

ЗАМЕЧАНИЕ.

Иногда в сферической замене вместо угла θ используют угол $\theta' = \frac{\pi}{2} - \theta$, $\theta' \in [0;\pi]$, образуемый вектором $\overline{OQ}$ с положительным направлением оси OZ. В этом случае соответствующая замена переменных задается формулами: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \sin\theta', \\ y = r\sin\varphi \sin\theta', \\ z = r\cos\theta' \end{cases}$

с якобианом $J(r,\phi,\theta') = r^2 \sin\theta'$.

Пример 6. (Цилиндрическая замена)

Положение точки Q в пространстве можно характеризовать тремя числами $u = r$, $v = \varphi$ и $w = h$ называемыми цилиндрическими координатами точки Q. Здесь r - длина вектора $\overline{OQ'}$ на плоскости ХОУ, $r \ge 0$, φ - угол, который образует вектор $\overline{OQ'}$ с положительным направлением оси ОХ, $\varphi \in [0;2\pi)$, и h - проекция вектора $\overline{OQ}$ на ось OZ, $h \in R$.

Связь между декартовыми и цилиндрическими координатами осуществляется по формулам $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = h \end{cases}$

УПРАЖНЕНИЕ. Вычислить якобиан цилиндрической замены переменных.

Ответ: $J(r,\varphi,h) = r$.

Прообразом прямого кругового цилиндра $\{(x,y,z): x^2 + y^2 \le R^2, 0 \le z \le H\}$ при отображении цилиндрической замены является параллелепипед $\{(r,\varphi,h): 0 \le r \le R, 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le h \le H\}$.

ТЕОРЕМА 3. (О замене переменной в тройном интеграле)

Пусть функция $F(x,y,z)$ непрерывна на замкнутой, ограниченной и измеримой области $\overline{G}_{x,y,z}$. На замкнутой, ограниченной и измеримой области $\overline{G}_{u,v,w}$ задано отображение $\begin{cases} x = x(u,v,w), \\ y = y(u,v,w), \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$, осуществляющее биекцию области $\overline{G}_{u,v,w}$ на $\overline{G}_{x,y,z}$, причем функции $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$, $z = z(u,v,w)$ непрерывно дифференцируемые в точках области $G_{u,v,w}$. Тогда имеет место формула:

$$\iiint\limits_{G_{x,y,z}} F(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{G_{u,v,w}} F(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) |J(u,v,w)| dudvdw.$$

ДОК. (Без доказательства)

Пример 7. Вычислить интеграл $\iiint\limits_G (x^2 + y^2) dxdydz$, где область G, ограничена поверхностями $x^2 + y^2 = 2z$, $z = 2$

РЕШЕНИЕ. Сделаем цилиндрическую замену. Для этого подставим формулы перехода в уравнения границы области $r^2 = 2h$, $h = 2$. Прообразом области G является область $G_{r,\varphi,h} = \{(r,\varphi,h): 0 \le \varphi < 2\pi, 0 \le h \le 2, 0 \le r \le \sqrt{2h}\}$. Тогда по формуле замены:

$$\iiint\limits_G (x^2 + y^2) dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dh \int_0^{\sqrt{2h}} r^3 dr = 2\pi \int_0^2 h^2 dh = \frac{16\pi}{3}.$$

Приложение тройного интеграла

1. Масса тела

$m(G)-$ масса тела – аддитивная функция множества. Ее производная по множеству $\rho(x,y,z)=\lim\limits_{\delta\to 0}\dfrac{m(U_\delta(M))}{\mu(U_\delta(M))}$, где $U_\delta(M)-$ шар радиуса δ с центром в точке $M(x,y,z)$, называется плотностью распределения массы. Тогда

$$m(G)=\iiint\limits_G \rho(x,y,z)dxdydz$$

Статические моменты относительно координатных плоскостей вычисляются по формулам

$$M_{xy}=\iiint\limits_G z\rho dxdydz,\quad M_{xz}=\iiint\limits_G y\rho dxdydz,\quad M_{yz}=\iiint\limits_G x\rho dxdydz$$

Центр тяжести тела определяется по формулам:

$$x_ц=\frac{M_{yz}}{m(G)},\quad y_ц=\frac{M_{xz}}{m(G)},\quad z_ц=\frac{M_{xy}}{m(G)}$$

Пример 8 Найти массу и координаты центра тяжести тела, ограниченного поверхностью $x^2+y^2+z^2=2az$ с плотностью $\rho(x,y,z)=k/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Решение. Перейдем к сферическим координатам в интеграле $m=\iiint\limits_G \dfrac{kdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Уравнение поверхности: $r=2a\sin\theta,\ \theta\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right],\ \varphi\in[0;2\pi],\ \rho=\dfrac{k}{r}$

$$m(G)=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}d\theta\int\limits_0^{2a\sin\theta}r^2\cos\theta\cdot\frac{k}{r}dr=2\pi k\int\limits_0^{\pi/2}\cos\theta d\theta\cdot\frac{r^2}{2}\Bigg|_0^{2a\sin\theta}=4a^2\pi k\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2\theta d\sin\theta=\frac{4a^2\pi k}{3}$$

Вычисление момента M_{xy}:

$$M_{xy}=\iiint\limits_G zdxdydz=k\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta d\theta\int\limits_0^{2a\sin\theta}r^2dr=\frac{16\pi a^3k}{3}\int\limits_0^{\pi/2}\cos\theta\sin^4\theta d\theta=\frac{16\pi a^3k}{15}$$

Тогда $z_ц=\dfrac{M_{xy}}{m}=\dfrac{4a}{5}$, $x_ц=y_ц=0$

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ.

1. Измеримые множества в R^3. Мера множества. Примеры измеримых множеств.
2. Понятие тройного интеграла. Необходимое условие интегрируемости функции. Достаточное условие интегрируемости функции. Свойства тройного интеграла.
3. Повторное интегрирование. Вычисление тройного интеграла через повторные по стандартным областям.
4. Замена переменной в пространстве, якобиан преобразования. Формула замены переменной в тройном интеграле.
5. Сферическая и цилиндрическая замены переменных. Вычисление якобианов преобразований. Формулы вычисления тройных интегралов в сферической и цилиндрической системе координат.