Числовые ряды

Термины:

1) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a_n – общий член ряда

2) $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ – n-ая частичная сумма ряда, $\{S_n\}$ – посл. частичных сумм

3. $\lim_{n\to\infty} S_n = S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) наз сходящимся

<u>Пример</u> сход. ряда $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, $S_n = a_1 + a_1 q + \ldots + a_1 q^{n-1} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

$|q|<1 \to S_\infty = \frac{a_1}{1-q} = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$ сход ряд

Пример $a_n = (-1)^n$

$S_1 = a_1 = -1$

$S_2 = -1+1 = 0$

$S_3 = -1$

$S_4 = 0$

$\nexists \lim_{n\to\infty} S_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ – расходится

Т. Необх. признак сходимости

Пусть $\sum a_n$ (1) сходится. Тогда $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\triangleright$ $a_n = \underset{\downarrow S}{S_n} - \underset{\downarrow S}{S_{n-1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} S - S = 0$ $\triangleleft$

Т. Критерий Коши. (необх. и дост. условие сход. ряда)

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon : \forall n > N, \forall m > n \Rightarrow |\underbrace{a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_m}_{= S_m - S_n}| < \varepsilon$

Свойства рядов. $\sum a_n$ (1), $\sum b_n$ (2) сходящиеся.

1. Линейность. $\sum c_n$ сходится, где $c_n = \lambda a_n + \beta b_n$

2. Если (1) сходится, а ряд (2) расходится, то $\sum \underbrace{(a_n + b_n)}_{c_n}^{(3)}$ – расходится

Если (3) сход, то $b_n = c_n - a_n \to$ {2} – сходится

3. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1), $\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$ (2) Сходимость (и расход.) рядов (1) и (2) одновремен.

$S_n^{(1)} = S_n^{2} + S_m^{(1)}$

4. $\underbrace{(a_1 + a_2 + a_{n_1})}_{b_1} + \underbrace{(a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \ldots + a_{n_2})}_{b_2} + (\ldots) \quad \underbrace{(\quad)}_{b_k}$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся и расх. одновременно и имеют одинаковую сумму

2. $\sum a_n$, $a_n > 0$ – ряды с положительными членами.

Т. (необх. и дост. условие сходимости рядов $a_n > 0$)

$S_n \uparrow$ мон. возрастает $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n > 0 \to S_{n+1} > S_n\ \forall n$

Сходимость (1) $\Leftrightarrow$ ограниченность $\{S_n\}$

Достаточные признаки сходимости рядов с $a_n > 0$

1. Признак сравнения I (в форме неравенств)

Дано: 1) $\sum a_n$ (1) $\sum b_n$ (2) 2) $a_n \le b_n$ $\forall n \geq n_0$

Тогда 1) из сход (2) $\Rightarrow$ сход (1)

2) из расх (1) $\Rightarrow$ расх (2)

$\triangleright$ $a_n \le b_n \to S_n^{(1)} \le \underbrace{S_n^{(2)}}_{\text{сход (2)}} < C \Rightarrow S_n^{(1)} < C \Rightarrow$ (1) сход

(1) расх $\Rightarrow S_n^1$ – неограничен $\Rightarrow S_n^2$ – неогран. $\Rightarrow$ (2) расх.

2. Признак сравнения II (в форме отношения)

Дано 1) (1) и (2) 2) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda$

Тогда при $\lambda > 0$, то сход (и расх) рядов (1) и (2) одновременно

при $\lambda = 0$ из сход (2) $\Rightarrow$ сход (1)

из расх (1) $\Rightarrow$ расх. (2)

Случай $\lambda > 0$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon : \forall n > n_\varepsilon \Rightarrow \lambda - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < \lambda + \varepsilon$

$\varepsilon = \frac{\lambda}{2} \to \frac{\lambda}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2}\lambda \to \left[\begin{array}{l} a_n < \frac{3}{2}\lambda b_n \\ a_n > \frac{\lambda}{2} b_n \end{array}\right.$

(2) сход $\to$ сход (1)

(2) расх $\to$ расх (1)

(1) сход $\to$ (2) сход

(1) расх $\to$ (2) расх.

Случай $\lambda = 0$ $\to$ $a_n < \varepsilon \cdot b_n$

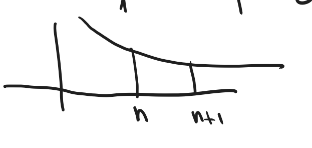
3. Интегральный признак Коши

Дано: 1) $\sum a_n$, $a_n > 0$ 2) $a_n = f(n)$: а) $f(x) > 0$, $x \geq 1$, $f(x) \downarrow 0$

б) $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходится

Тогда сход (1).

~~б~~ в) $\int_1^{\infty} f(x)dx$ расход., то (1) расх.



$f(n+1) \le f(x) \le f(n)$

$f(n+1) \le \int_n^{n+1} f(x)dx \le f(n)$

$S_k = f(1) + f(2) + \ldots + f(k) \geq \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \ldots + \int_k^{k+1} = \int_1^{k+1} f(x)dx \to \infty$ (если $\int$ расход)

$\Rightarrow S_k \to \infty \to$ (1) расх.

$\underbrace{f(n) + f(n+1) + \ldots + f(m)}_{=|S_m - S_{n-1}|} < \int_{n-1}^{n} f(x)dx + \int_n^{n+1} f(x)dx + \ldots + \int_{m-1}^{m} f(x)dx = \int_{n-1}^{m} f(x)dx$

$|S_m - S_{n-1}| = \int_{n-1}^{m} f(x)dx < \varepsilon$ крит. Коши для сход несоб. интегр. $\Rightarrow$ (1) сход.

<u>Пример</u> $\sum \frac{1}{n^p}$ (обобщ. гармонический ряд)

$p > 1$ – ряд сход. при $p \le 1$ расходится.

$f(x) = \frac{1}{x^p}$ $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right|_1^{\infty}$

$1-p > 0$ расход. $\int \to p < 1$

$1-p < 0$ сход $\to p > 1$

<u>$p=1$</u> $f(x) = \frac{1}{x}$ $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^{\infty} = \infty$

4. Признак Даламбера ($a_n > 0$)

А. $\exists \lambda : 0 < \lambda < 1 : a_{n+1} \le \lambda a_n$, $\forall n > n_0$, то ряд (1) сходится

Б. Если $a_{n+1} \geq a_n$ $\forall n > n_0$, то (1) расход.

В. $\exists \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda < 1$, то ряд (1) сходится

$\exists \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda > 1$, то ряд (1) расходится.

$\triangleright$ А: $a_{k+1} \le \lambda a_k$, $k = n_0, n_0+1, \ldots n-1$

$\otimes$ $\cancel{a_{n_0+1}} \cdot \cancel{a_{n_0+2}} \cdots a_n \le \lambda^{n-n_0} \underline{a_{n_0}} \cdot \cancel{a_{n_0+1}} \cdot a_{n-1} \to a_n \le \underbrace{\lambda^{n-n_0} a_{n_0}}_{b_n - \text{геом. прогр.}}$

при $\lambda < 1$ (1) сход по признаку сравнения I

$\triangleright$ Б $a_{n+1} > a_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ – ряд (1) расход по невыполнению необх. признака

$\triangleright$ С. λ $\lambda+\varepsilon$ 1 конечное число

$\varepsilon = \frac{1-\lambda}{2}$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \lambda + \varepsilon = \frac{1+\lambda}{2} < 1 \to$

$\forall n > n_0$

$a_{n+1} < \left(\frac{1+\lambda}{2}\right) \cdot a_n$

$\lambda_1 \to$ (А) $\to$ (1) – сходится

$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda > 1$

$\lambda-\varepsilon$ 1 λ конечное число член $\frac{a_{n+1}}{a_n}$

$\varepsilon = \frac{\lambda-1}{2}$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} > \lambda - \varepsilon = \frac{1+\lambda}{2} > 1$ $\forall n > n_0$

$a_{n+1} > a_n \to$ (Б) $\to$ (1) расход.

5. Радикальный признак Коши $\sum a_n$, $a_n > 0$

А. a_n удовл. н-ству $\exists \lambda : \sqrt[n]{a_n} \le \lambda < 1$ ($\forall n \geq n_0$). Тогда (1) сход.

Б. Если $\exists \{n_k\}_{k=1}^{\infty} : \sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geq 1$. Тогда (1) расх.

В. Если $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \lambda < 1$, то ряд (1) сход.

Если $\underline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \lambda > 1$, то ряд (1) расх.

λ $\lambda+\varepsilon$ 1 не больше n_0

$\varepsilon = \frac{1-\lambda}{2}$ $\Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \le \lambda + \varepsilon = \frac{1+\lambda}{2} < 1$

$\Rightarrow a_n \le \underbrace{\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)^n}_{\text{геом}} \to$ (1) сход

$\lambda-\varepsilon$ 1 λ $n < n_0$

$\varepsilon = \frac{\lambda-1}{2}$

$\sqrt[n]{a_n} > \lambda - \varepsilon = \frac{1+\lambda}{2} > 1 \to \exists\ a_n > 1$ (1) расх.