

Лекция 37. Криволинейные интегралы.

П.1 Кривые в пространстве. Длина кривой.

ОПР. Кривая L в пространстве в векторной форме задается уравнением (параметрическим) $\vec{r} = \vec{r}(t), t \in [a; b]$

или в скалярном виде $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$ с заданными функциями $x(t), y(t)$ и $z(t)$.

Точки $A = \vec{r}(a)$ и $B = \vec{r}(b)$ называются началом и концом дуги кривой. Если $A = B$, то кривая называется замкнутой.

Кривая не имеет самопересечений, если отображение $\vec{r} = \vec{r}(t), t \in [a; b]$ биективное.

Кривая называется гладкой (кусочно-гладкой), если функции $x(t), y(t), z(t)$ непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a; b]$ или кусочно-гладкой, если соответствующие функции имеют кусочно-непрерывные производные на отрезке $[a; b]$.

Пусть $\xi = (a = \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n = b)$ - разбиение отрезка $[a; b]$ и соответствующее ему разбиение кривой L точками $M_k = \vec{r}(\xi_k)$. Через L_ξ обозначим ломаную линию, составленную из отрезков $[M_k; M_{k+1}]$, $k = 1, 2, \dots, n$, а l_ξ - длину ломаной L_ξ , т.е.

$$l_\xi = \sum_{k=0}^n \rho(M_k, M_{k+1}) = \sum_{k=0}^n \sqrt{(x(\xi_{k+1}) - x(\xi_k))^2 + (y(\xi_{k+1}) - y(\xi_k))^2 + (z(\xi_{k+1}) - z(\xi_k))^2}.$$

ОПР. Кривая L называется спрямляемой, если $\sup_{\xi} l_\xi < \infty$

ОПР. Длиной дуги $[A, B]$ кривой L называют число $l = \lim_{d_\xi \rightarrow 0} l_\xi$, если оно существует.

Если кривая имеет длину, то она спрямляема и наоборот. Действительно, если $\tilde{\xi}$ последующее разбиение $\xi < \tilde{\xi}$, то $l_\xi \leq l_{\tilde{\xi}}$, т.е. длина ломаной монотонно растет при измельчении разбиения и спрямляемости (ограниченности) достаточно для существования предела. Обратно, существование предела обеспечивает ограниченность l_ξ , а значит и спрямляемость кривой.

ТЕОРЕМА 1.

Если кривая L кусочно-гладкая, то она имеет длину, вычисляемую по формуле:

$$l = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt \quad (1)$$

ДОК. Докажем формулу (1) для гладкой кривой L . По теореме о среднем для производных для каждого k существуют точки $c_k^1, c_k^2, c_k^3 \in [\xi_k, \xi_{k+1}]$, для которых

$$\begin{aligned} l_\xi &= \sum_{k=0}^n \Delta \xi_k \cdot \sqrt{(x'(c_k^1))^2 + (y'(c_k^2))^2 + (z'(c_k^3))^2} = \sum_{k=0}^n \Delta \xi_k \cdot \left(\sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\xi_k))^2 + (z'(\xi_k))^2} + o(1) \right) = \\ &= \sum_{k=0}^n \Delta \xi_k \cdot \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\xi_k))^2 + (z'(\xi_k))^2} + o(1) \end{aligned}$$

Первое слагаемое справа – интегральная сумма для интеграла (1) и ее предел при $d(\xi) \rightarrow 0$

с одной стороны равен интегралу $\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$, а с другой – длине дуги

AB .

Замечание. Для кривой $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), t \in [a; b] \end{cases}$ на плоскости справедлива формула (1*):

$$l = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \quad (1^*)$$

УПРАЖНЕНИЕ. Докажите, что если кривая L на плоскости задается графиком непрерывно дифференцируемой функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$, то длина кривой вычисляется по формуле:

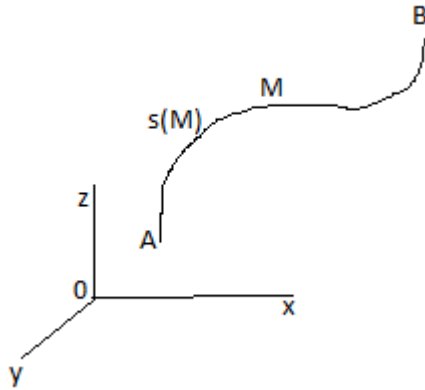
$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad (2)$$

ДОК. Уравнение кривой можно записать в параметрической форме
$$\begin{cases} x = t, \\ y = f(t), \\ z = 0 \end{cases}, t \in [a; b]$$

Тогда $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} = \sqrt{1 + (f'(t))^2}$ и формула (1) переходит в (2).

П.2 Криволинейные интегралы первого рода.

Пусть на плоскости или в пространстве задана гладкая кривая L , а в точках кривой и их окрестностях - непрерывная функция $F(x, y, z)$.



Кривую L можно параметризовать длиной $s = s(M)$ дуги AM кривой, где M – произвольная точка дуги AB :

$$\begin{cases} x = x(M(s)) \\ y = y(M(s)) \\ z = z(M(s)) \end{cases}$$

Разбиение ξ отрезка $[a; b]$ порождает разбиение дуги AB точками $M_k, k = 0, 1, 2, \dots, n$ на дуги $M_k M_{k+1}$ длины $\Delta s_k = s(M_{k+1}) - s(M_k)$. На каждой дуге $M_k M_{k+1}$ выберем произвольную точку $\tilde{M}_k(x(c_k), y(c_k), z(c_k)), c_k \in [\xi_k; \xi_{k+1}]$.

Рассмотрим сумму $S_F(L, \xi) = \sum_{k=0}^n F(r(c_k)) \Delta s_k$.

ОПР. Криволинейным интегралом первого рода функции $F(x, y, z)$ по длине кривой L называют число

$$\int_L F(x(s), y(s), z(s)) ds = \lim_{d_\xi \rightarrow 0} S_F(L, \xi), \quad (3)$$

если предел существует. При этом выражение $S_F(L, \xi)$ называется его интегральной суммой.

ТЕОРЕМА 2. (необходимое условие существования криволинейного интеграла)

Если функция $F(x, y, z)$ имеет криволинейный интеграл первого рода, то она ограничена на множестве точек кривой.

ДОК. аналогично доказательству необходимого условия интегрируемости функции на отрезке или интегрируемости функции двух переменных в области.

ТЕОРЕМА 3. Если функция $F(x, y, z)$ непрерывна в окрестности $U_\theta(L)$ кусочно-гладкой кривой L , то она имеет криволинейный интеграл первого рода по этой кривой.

ДОК. (без доказательства)

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие непрерывности функции $F(x, y, z)$ можно понизить до ее кусочно-непрерывности

СВОЙСТВА криволинейного интеграла.

$$1. \text{ линейность } \int_L (\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2) ds = \lambda_1 \int_L F_1 ds + \lambda_2 \int_L F_2 ds.$$

2. аддитивность по кривой.

Если кривая L состоит из двух, не имеющих общих точек, кроме граничных, кусков L_1 и L_2 , т.е. $L = L_1 \cup L_2$, то $\int_{L_1 \cup L_2} F ds = \int_{L_1} F ds + \int_{L_2} F ds$.

3. интегрирование неравенств

Если $F_1(x, y, z) \leq F_2(x, y, z)$ в точках кривой L , то $\int_L F_1 ds \leq \int_L F_2 ds$.

4. оценка интеграла

Если $m = \min_{P \in L} F(P)$ и $M = \max_{P \in L} F(P)$, то $m \cdot l \leq \int_L F ds \leq M \cdot l$.

5. теорема о среднем для криволинейного интеграла.

Если кривая гладкая, а функция $F(x, y, z)$ непрерывная в окрестности кривой, то существует точка $C \in L$, для которой $\int_L F ds = F(C) \cdot l$.

6. Независимость интеграла от направления обхода кривой:

$$\int_{AB} F ds = \int_{BA} F ds$$

Вычисление интеграла первого рода

ТЕОРЕМА 4. Формула для вычисления криволинейного интеграла первого рода.

Если функция $F(x, y, z)$ непрерывна в окрестности $U_\theta(L)$ кусочно-гладкой кривой

L , заданной параметрическими уравнениями
$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), t \in [a; b], \\ z = z(t) \end{cases}$$
 то

$$\int_L F ds = \int_a^b F(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt \quad (4)$$

Рассмотрим случай, когда кривая гладкая (без разбиения отрезка на конечное число гладких кривых). Тогда представим интегральную сумму криволинейного интеграла в виде:

$$S_F(L, \xi) = \sum_{k=0}^n F(M_k) \Delta s_k = \sum_{k=0}^n F(M_k) \cdot \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

Применим к внутреннему интегралу теорему о среднем:

$$\int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt = \sqrt{x'(\tilde{c}_k)^2 + y'(\tilde{c}_k)^2 + z'(\tilde{c}_k)^2} \Delta \xi_k, \tilde{c}_k \in [\xi_k; \xi_{k+1}]$$

Тогда с учетом непрерывности производных и того, что $M_k(x(c_k), y(c_k), z(c_k)), c_k \in [\xi_k; \xi_{k+1}]$, получим

$$S_F(L, \xi) = \sum_{k=0}^n F(M_k) \sqrt{x'(\tilde{c}_k)^2 + y'(\tilde{c}_k)^2 + z'(\tilde{c}_k)^2} \Delta \xi_k = \sum_{k=0}^n F(M_k) \sqrt{x'(c_k)^2 + y'(c_k)^2 + z'(c_k)^2} \Delta \xi_k + o(1)$$

Первое слагаемое правой части равенства представляет собой интегральную сумму для интеграла Римана в формуле (4) и по условию теоремы она стремится к интегралу при $d(\xi) \rightarrow 0$. С другой стороны, в левой части равенства находится интегральная сумма криволинейного интеграла, поэтому ее предел равен этому интегралу.

Если кривая L кусочно-гладкая, то она представляет объединение конечного числа гладких кусков, для каждого из которых справедлива формула (4) и общий результат следует из свойства аддитивности по кривой криволинейного интеграла.

Пример 1. Вычислить $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} ds$, где L задается уравнением $x^2 + y^2 = ax$.

РЕШЕНИЕ. Запишем параметрические уравнения окружности L , используя полярные координаты,

$$r = a \cos \varphi \rightarrow \begin{cases} x = a \cos^2 \varphi, \\ y = a \cos \varphi \sin \varphi \end{cases}, \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

$$\text{Тогда } (x')^2 + (y')^2 = a^2 \text{ и } \int_L \sqrt{x^2 + y^2} ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^2 \cos \varphi d\varphi = 2a^2.$$

П.3 Криволинейный интеграл второго рода.

1. Рассмотрим не замкнутую гладкую кривую L на плоскости $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), t \in [a; b] \end{cases}$, и

непрерывную функцию $P(x, y)$, определенную в окрестности кривой. Разбиение ξ отрезка $[a; b]$ точками $(\xi_0 = a, \xi_1, \dots, \xi_n = b)$ порождает разбиение кривой точками

$M_k(x(\xi_k), y(\xi_k))$ на дуги $M_k M_{k+1}$. Для произвольного набора точек $\tilde{M}_k \in M_k M_{k+1}$

рассмотрим сумму (интегральная сумма для криволинейного интеграла второго рода)

$$S_x(P, L, \xi) = \sum_{i=0}^n P(\tilde{M}_k)(x(\xi_{k+1}) - x(\xi_k)) = \sum_{i=0}^n P(\tilde{M}_k) \Delta x_k$$

Ее предел при $d(\xi) \rightarrow 0$, если он существует, называется криволинейным интегралом второго рода от функции $P(x, y)$ на кривой L по оси x . Обозначение

$$\int_L P(x, y) dx = \lim_{d(\xi) \rightarrow 0} S_x(P, L, \xi)$$

Аналогично, выражение $S_y(Q, L, \xi) = \sum_{i=0}^n Q(\tilde{M}_k)(y(\xi_{k+1}) - y(\xi_k)) = \sum_{i=0}^n Q(\tilde{M}_k) \Delta y_k$ называют

интегральной суммой криволинейного интеграла второго рода от функции $Q(x, y)$ на кривой L по оси y . Ее предел при $d(\xi) \rightarrow 0$, если он существует, обозначают $\int_L Q(x, y) dy$.

Наконец, сумму таких интегралов $\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ также называют криволинейным интегралом второго рода по кривой $L = AB$.

Вычисление криволинейных интегралов второго рода.

Если кривая $L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), t \in [a; b] \end{cases}$ гладкая, а функция $P(x, y)$ непрерывная в окрестности кривой, то

$$\int_L P(x, y) dx = \int_a^b P(x(t), y(t)) x'(t) dt \quad (5)$$

Док.

$$\begin{aligned} \int_a^b P(x(t), y(t)) x'(t) dt &= \sum_{k=0}^n \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} P(x(t), y(t)) x'(t) dt = \sum_{k=0}^n P(x(t_k), y(t_k)) \cdot x'(t_k) \Delta \xi_k = \\ &= \sum_{k=0}^n P(x(t_k), y(t_k)) \cdot (x'(\tilde{t}_k) + o(1)) \Delta \xi_k = \sum_{k=0}^n P(x(t_k), y(t_k)) \cdot \left(\frac{\Delta x_k}{\Delta \xi_k} + o(1) \right) \Delta \xi_k = \\ &= S_x(P, L, \xi) + o(1) \end{aligned}$$

Здесь $\tilde{t}_k \in [\xi_k, \xi_{k+1}]$ точка, для которой $x(\xi_{k+1}) - x(\xi_k) = \Delta x_k = x'(\tilde{t}_k) \cdot \Delta \xi_k$.

Тогда предельный переход при $d(\xi) \rightarrow 0$ приводит к результату (5).

Аналогичная формула справедлива для вычисления криволинейного интеграла по оси oy :

$$\int_L Q(x, y) dy = \int_a^b Q(x(t), y(t)) y'(t) dt \quad (6)$$

Наконец, для вычисления общего криволинейного интеграла пользуются формулой:

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b (P(x(t), y(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t)) y'(t)) dt \quad (7)$$

Если гладкая кривая L расположена в пространстве $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t), t \in [a; b] \end{cases}$ и в окрестности ее

задано непрерывное поле $\bar{F} = (P(x, y, z); Q(x, y, z); R(x, y, z))$, то вычисление

криволинейного интеграла $\int_L P dx + Q dy + R dz = \int_L (\bar{F}, d\bar{r})$ сводится к применению формулы:

$$\int_L P dx + Q dy + R dz = \int_L (\bar{F}, d\bar{r}) = \int_a^b (P(\bar{r}(t)) x'(t) + Q(\bar{r}(t)) y'(t) + R(\bar{r}(t)) z'(t)) dt \quad (8)$$

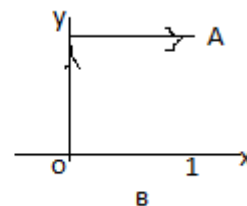
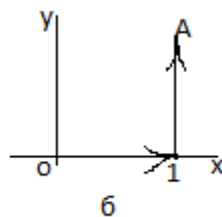
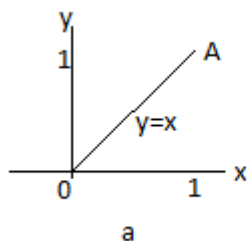
Если кривая L кусочно-гладкая, то она представляет собой объединение конечного числа гладких кусков, для которых справедлива формула (8) и возможность ее применения следует из свойства аддитивности интеграла по множеству.

ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждение теоремы остается справедливым для кусочно-непрерывных векторных полей $\bar{F}(x, y, z)$ в окрестности кривой L .

Зависимость интеграла от направления обхода дуги AB .

$$\int_{AB} P dx = - \int_{BA} P dx$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_L (x - y^2) dx + 2xy dy$, где L дуги кривых представленных на рис.



Случай а. $\int_L (x - y^2)dx + 2xydy = \int_0^1 (x - x^2 + 2x^2)dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

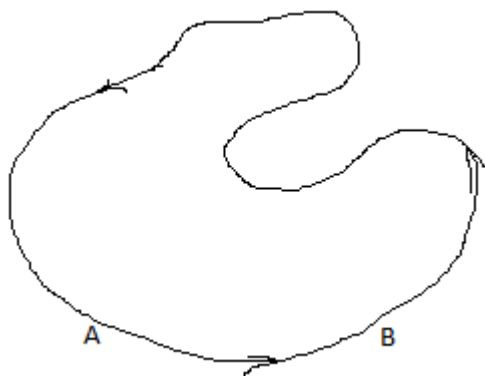
Случай б. $\int_L (x - y^2)dx + 2xydy = \int_0^1 xdx + \int_0^1 2ydy = \frac{3}{2}$

Случай в. $\int_L (x - y^2)dx + 2xydy = \int_0^1 (x - 1)dx = -\frac{1}{2}$

2. Рассмотрим замкнутую гладкую кривую L на плоскости

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), t \in [a; b] \end{cases}, \quad x(a) = x(b), \quad y(a) = y(b)$$

Поскольку криволинейный интеграл зависит от направления обхода кривой, то полагают, что плоскость ориентирована положительно, если направление обхода замкнутой кривой происходит против часовой стрелки.



В противном случае, ориентация плоскости отрицательная, а направление обхода кривой происходит по часовой стрелке. Если не говорено противное, мы всегда будем полагать, что ориентация плоскости положительная.

Интеграл не зависит от выбора начальной (и конечной) точки A на замкнутой кривой.

Действительно, если точке A соответствует значение параметра $t = a$, а точке B - значение $t = c$, то интеграл по контуру с началом в точке A равен

$$\int_{L_B} Pdx = \int_{a+c}^{b+c} P(x(\tau), y(\tau))x'(\tau)d\tau \Big|_{t=\tau-c} = \int_a^b P(x(t+c), y(t+c))x'(t+c)d(t+c) = \int_{L_A} Pdx$$

Пример 3. Вычислить $\int_L (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$, где $L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ y = xtga \end{cases}$.

РЕШЕНИЕ. Напишем параметрические уравнения окружности L , используя сферические координаты:

$$x = a \cos \theta \cos \varphi, \quad y = a \cos \theta \sin \varphi, \quad z = a \sin \theta \rightarrow \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \alpha \rightarrow \varphi = \alpha.$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } L: & \begin{cases} x = a \cos \alpha \cos \theta, \\ y = a \sin \alpha \cos \theta, \quad \theta \in [0; 2\pi] \text{ и } \int_L (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz = \\ z = a \sin \theta \end{cases} \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} \left(-(\sin \alpha \cos \theta - \sin \theta) \cos \alpha \sin \theta - (\sin \theta - \cos \alpha \cos \theta) \sin \alpha \sin \theta + (\cos \alpha - \sin \alpha) \cos^2 \theta \right) d\theta = \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} (\cos \alpha - \sin \alpha) d\theta = 2\pi a^2 (\cos \alpha - \sin \alpha). \end{aligned}$$

УСЛОВИЯ НЕЗАВИСИМОСТИ криволинейного интеграла от пути.

ОПР. Поле $\bar{F}(x, y, z) = \{P(x, y, z); Q(x, y, z); R(x, y, z)\}$ определенное в области G называется потенциальным, если существует скалярная функция $U(x, y, z)$, для которой $dU = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$ в каждой точке $(x, y, z) \in G$. Функция $U(x, y, z)$ называется потенциалом поля $\bar{F}(x, y, z)$.

Поле $\bar{F}(x, y, z)$ потенциально в том и только в том случае, если справедливы тождества

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \quad (9)$$

Необходимость следует из равенства смешанных производных:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) \rightarrow \frac{\partial}{\partial y} P = \frac{\partial}{\partial x} Q. \text{ Остальные соотношения}$$

устанавливаются аналогично.

Если (9) выполняются в открытой односвязной области, то функция

$$U = \int_{x_0}^x P(t, y_0, z_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, t, z_0) dt + \int_{z_0}^z R(x, y, t) dt + C$$

является потенциалом $\bar{F}(x, y, z)$. Здесь $(x_0, y_0, z_0) \in G$ фиксированная точка,

C – произвольная константа.

$$\text{Действительно, } \frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y_0, z_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial Q}{\partial x}(x, t, z_0) dt + \int_{z_0}^z \frac{\partial R}{\partial x}(x, y, t) dt =$$

$$= P(x, y_0, z_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial P}{\partial y}(x, t, z_0) dt + \int_{z_0}^z \frac{\partial P}{\partial z}(x, y, t) dt =$$

$$P(x, y_0, z_0) + P(x, y, z_0) - P(x, y_0, z_0) + P(x, y, z) - P(x, y, z_0) = P(x, y, z).$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y, z_0) + \int_{z_0}^z \frac{\partial R}{\partial y}(x, y, t) dt =$$

$$= Q(x, y, z_0) + \int_{z_0}^z \frac{\partial Q}{\partial z}(x, y, t) dt = Q(x, y, z_0) + Q(x, y, z) - Q(x, y, z_0) = Q(x, y, z).$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = R(x, y, z).$$

Если поле потенциально, то криволинейный интеграл $\int_L Pdx + Qdy + Rdz$ зависит только от

начальной и конечной точек кривой L , а именно, $\int_L Pdx + Qdy + Rdz = U(B) - U(A)$,

где $A = \bar{r}(a)$, $B = \bar{r}(b)$. Действительно,

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz = \int_a^b \left(\frac{\partial U}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial U}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial U}{\partial z} z'(t) \right) dt = \int_a^b \frac{dU}{dt} dt = U(B) - U(A).$$

СЛЕДСТВИЕ. Если поле $\vec{F}(x, y, z)$ потенциально в области G , то $\int_L Pdx + Qdy + Rdz = 0$

для любой замкнутой кривой $L \subset G$.

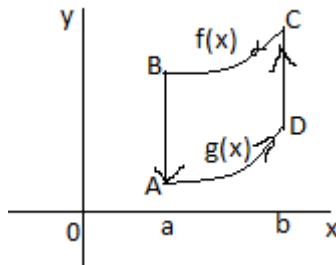
Пример 4. Вычислить интеграл $\int_L \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, где L - кривая, соединяющая точку A на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ и точку B на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$.

РЕШЕНИЕ. Потенциал поля равен $U = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ и поэтому

$$\int_L \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = U(B) - U(A) = b - a.$$

Вычисление площади области с помощью криволинейного интеграла по ее границе

Для начала найдем выражение площади стандартной области $G_{a,b}^{f,g}$ по оси ox :



На границе ∂G стандартной области введем положительное направление обхода. Тогда

$S_G = \int_a^b f(x)dx + \int_b^a g(x)dx$. Для функции $P(x, y) = y$ интеграл

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_{CB} P(x, y)dx = - \int_{CB} ydx, \text{ а интеграл } \int_b^a g(x)dx = - \int_{AD} P(x, y)dx = - \int_{AD} ydx$$

Поскольку $\int_{BA} P(x, y)dx = \int_{DC} P(x, y)dx = 0$ имеем по аддитивности интеграла, что

$$S_G = - \int_{\partial G} P(x, y)dx = - \int_{\partial G} ydx$$

Для стандартной области по оси oy эта формула примет вид $S_G = \int_{\partial G} xdy$. Если область G

такова, что ее можно рассматривать как стандартную по обоим осям, то эти формулы объединяются

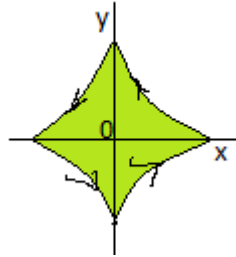
$$S_G = \frac{1}{2} \int_{\partial G} xdy - ydx \quad (10)$$

Наконец, область G более общего вида всегда можно представить в виде объединения областей G_i , пересекающихся только по границе, являющихся стандартными по обоим осям (см рис)



Тогда по аддитивности площади приходим к справедливости формулы (10) для таких областей (все внутренние границы положительно ориентированных областей G_i проходятся дважды и в противоположных направлениях, поэтому их вклад в криволинейный интеграл нулевой)

Пример 5. Найти площадь области, ограниченной кривой астроиды $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t, t \in [0; 2\pi] \end{cases}$.

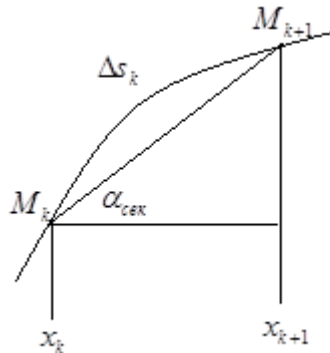


Решение.

$$x dy - y dx = 3a^2 (\cos^4 t \cdot \sin^2 t + \cos^2 t \cdot \sin^4 t) = 3a^2 \sin^2 t \cdot \cos^2 t = \frac{3a^2}{4} \sin^2 t = \frac{3a^2}{8} (1 - \cos 2t)$$

$$S_G = \frac{1}{2} \int_{\partial G} x dy - y dx = \frac{3a^2}{16} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t) dt = \frac{3a^2 \pi}{8}$$

Связь между криволинейными интегралами первого и второго типа



На рис изображен фрагмент разбиения кривой точками M_k , соответствующих разбиению ξ отрезка $[a; b]$. Тогда интегральная сумма криволинейного интеграла $\int_L P dx$ второго рода

может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n P(M_k) (x_{k+1} - x_k) &= \sum_{k=0}^n P(M_k) |M_k M_{k+1}| \cos \alpha_{сек} = \sum_{k=0}^n P(M_k) (\Delta s_k + o(1)) (\cos \alpha_{кас} + o(1)) = \\ &= \sum_k P(M_k) \Delta s_k \cos \alpha_{кас} + o(1) \end{aligned}$$

где Δs_k – длина дуги $M_k M_{k+1}$, $\alpha_{кас}$ – угол, образованной касательной к кривой в точке M_k с осью ox . В правой части равенства присутствует интегральная сумма для интеграла первого рода $\int_L P \cos \alpha ds$. В условиях непрерывности функции P , непрерывности угла

$\alpha = \alpha(M)$ между осью ox и касательной к кривой в точке M интеграл $\int_L P \cos \alpha ds$

существует. Предельный переход при $d\xi \rightarrow 0$ приводит к соотношению:

$\int_L P dx = \int_L P \cos \alpha ds$. Аналогичное равенство есть и для криволинейных интегралов по другим осям: $\int_L Q dy = \int_L Q \cos \beta ds$ и $\int_L R dz = \int_L R \cos \gamma ds$. Здесь α, β – углы, образованные касательной к кривой в произвольной точке M с осями ou и oz .

Складывая полученные выражения, получим формулу:

$$\int_L P dx + Q dy + R dz = \int_L (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds \quad (11)$$

Приложения криволинейных интегралов.

1. Работа силового поля вдоль пути.

Пусть материальная точка движется по кривой L под действием силового поля

$\bar{F}(M) = (P(M); Q(M); R(M))$. Работа по перемещению точки на величину $\Delta \bar{r} = (\Delta x; \Delta y; \Delta z)$

равна скалярному произведению $(\bar{F}, \Delta \bar{r})$, поэтому суммируя их получим интегральную сумму для интеграла в левой части равенства (11). Предельный переход при $d(\xi) \rightarrow 0$ приведет к формуле для работы:

$$A = \int_L P dx + Q dy + R dz = \int_L (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds$$

В плоскостном случае $\bar{F}(x, y) = \{P(x, y); Q(x, y)\}$ и формула для работы имеет вид:

$$A = \int_L P dx + Q dy \quad (11)^*$$

Поле называется потенциальным, если существует функция $U(x, y)$ такая, что

$$P(x, y) = \frac{\partial U(x, y)}{\partial x}, \quad Q(x, y) = \frac{\partial U(x, y)}{\partial y}$$

В случае потенциального поля его работа по перемещению точки A в точку B вдоль пути L не зависит от пути, а зависит от его начала и конца. Действительно, для любого

$$L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), t \in [a; b] \end{cases}, A(x(a); y(a)), B(x(b); y(b))$$

$$A = \int_L P dx + Q dy = \int_L \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy = \int_a^b \left(\frac{\partial U}{\partial x} x' + \frac{\partial U}{\partial y} y' \right) dt = U(x(t), y(t)) \Big|_{t=a}^{t=b} = U(B) - U(A)$$

Если поле $\bar{F}(x, y) = \{P(x, y); Q(x, y)\}$ потенциально, то

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (12)$$

$$\text{поскольку } \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Если частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в односвязной области D и выполнено (12), то поле потенциально.

Пример 5. Поле ньютоновского притяжения $F = \frac{m}{r^2}$ единичной массы, расположенной на расстоянии r от массы m , находящейся в начале координат. Направление силы определяется единичным вектором $\left(-\frac{x}{r}; -\frac{y}{r}\right)$, тогда

$$\bar{F}(x, y) = -\frac{m}{r^3} \bar{r} = \left(-\frac{mx}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}; -\frac{my}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \right) = (P; Q)$$

Найдем дифференциал функции $U = \frac{m}{r}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$:

$$dU = d\left(\frac{m}{r}\right) = -\frac{m}{r^2} dr = -\frac{m}{r^2} d(\sqrt{x^2 + y^2}) = -\frac{m}{r^3} (x dx + y dy) = P dx + Q dy$$

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ.

1. Кривые в пространстве. Длина кривой и способ ее вычисления.
2. Понятие криволинейного интеграла первого рода. Формула вычисления криволинейного интеграла первого рода.
3. Понятие криволинейного интеграла второго рода. Формула вычисления криволинейного интеграла второго рода.
4. Потенциальные поля, условия потенциальности. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования.
5. Связь между интегралами первого и второго рода по кривой.