Ф-03-Лекция 13. Функциональные последовательности и ряды.

П.1 Функциональные последовательности.

ОПР. Областью определения D_∞ функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ называется множество значений $x \in R$, для которых определены все функции $f_n(x)$, $n = 1,2,...$

ОПР. Областью сходимости D_{cx} функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ называется множество значений $x \in D_{cx}$, для которых существует $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ (поточечная сходимость), т.е.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in D_{cx}\ \exists N = N(x,\varepsilon) : \forall n > N \Rightarrow \left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon \qquad (1)$$

ОПР. Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к функции $f(x)$ на $D \subset D_{cx}$ равномерно, обозначение $f_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows} f(x)$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N, \forall x \in D \Rightarrow \left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon \qquad (2)$$

Отличие сходимости от равномерной сходимости проявляется в том, что в первом случае число N зависит от точки x и может неограниченно расти при изменении x, а во втором - N выбирается единым для всех $x \in D$.

Необходимый и достаточный признак равномерной сходимости последовательности

$$f_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows} f(x) \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N \Rightarrow \sup_{x\in D} \left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon \quad (3)$$

Пример 1. Последовательность $f_n(x) = \dfrac{1}{nx}$ сходится к $f(x) \equiv 0$ на множестве $D_{cx} = R/\{0\}$.

Действительно,

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in D_{cx} \exists N = \left[\frac{1}{\varepsilon |x|} \right] > \frac{1}{\varepsilon |x|} - 1 : \forall n > N \to n > \frac{1}{\varepsilon |x|} \to \left| f_n(x) - f(x) \right| = \frac{1}{n|x|} < \varepsilon$$

Эта сходимость равномерная на любом множестве вида $D = (-\infty; -a] \cup [a; +\infty)$, $a > 0$

Действительно,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = \left[\frac{1}{a\varepsilon} \right] : \forall x \in D, \forall n > N \to n > \frac{1}{a\varepsilon} \to \left| \frac{1}{nx} - f(x) \right| = \frac{1}{n|x|} \le \frac{1}{na} < \varepsilon$$

Пример 2. Последовательность $f_n(x) = x^n$ на множестве $D = (-1;1]$ сходится к функции $f(x) = \begin{cases} 0,\ x \in (-1;1) \\ 1,\ x = 1 \end{cases}$ неравномерно, поскольку $\sup\limits_{x\in D} \left| f_n(x) - f(x) \right| \ge \sup\limits_{x\in(-1;1)} \left| x^n - f(x) \right| = 1$ для любого n.

Пример 3. Последовательность $f_n(x) = \begin{cases} n \cdot \sin(nx),\ x \in \left[0; \dfrac{\pi}{n}\right] \\ 0,\ x \in \left(\dfrac{\pi}{n}; \pi\right] \end{cases}$ сходится к $f(x) \equiv 0$ на множестве $D = [0; \pi]$, но неравномерно, поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \left| f_n(x) - f(x) \right| \Big|_{x = 1/n^2} = 1$ и $\sup\limits_{x\in D} \left| f_n(x) - f(x) \right| \ge 1$.

Пример 4. Последовательность $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + n^2 x^2}$ на отрезке $[0;1]$ сходится к функции $f(x) \equiv 0$ не только поточечно, но и равномерно.

Действительно, $f_n'(x)=\dfrac{(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2}=0\to x=\pm\dfrac{1}{n}$ В точке $x=\dfrac{1}{n}\in[0;1]$ функция

$f_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}$ достигает максимальное значение на отрезке $[0;1]$, равное $\dfrac{1}{2n}$.

Тогда $\sup\limits_{x\in[0;1]}\left|f_n(x)-f(x)\right|=\max\limits_{x\in[0;1]}\dfrac{x}{1+n^2x^2}=\dfrac{1}{2n}<\varepsilon$ для $n>N=\left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right], x\in[0;1]$.

КРИТЕРИЙ КОШИ равномерной сходимости.

Последовательность функций $\{f_n(x)\}$ сходится на множестве D равномерно в том и только в том случае, если

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N=N_\varepsilon:\forall n\geq N \text{ и } \forall m>n\to\sup_{x\in D}\left|f_m(x)-f_n(x)\right|\leq\varepsilon \qquad (4)$$

Свойства равномерно сходящихся последовательностей.

1. О возможности предельного перехода по x.

Теорема 1. Пусть $f_n(x)\overset{D}{\rightrightarrows} f(x)$ и $\exists\lim\limits_{x\to a}f_n(x)=a_n$. Тогда $\exists\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A, \exists\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$

Док. Заметим, что $x\to a$ предполагает, что $x\in D$, поэтому a – предельная точка для D.

Пусть $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}, x_k\in D:\lim\limits_{k\to\infty}x_k=a$ - произвольная последовательность (предел по Гейне).

Из условия $\lim\limits_{x\to a}f_n(x)=a_n\to\forall\varepsilon>0\ \exists N_1:\forall k>N_1\to\left|f_n(x_k)-a_n\right|<\varepsilon/3$ (*)

Тогда из (4)$\to\forall\varepsilon>0\ \exists\ N_2=N_2(\varepsilon):\forall m,n>N_2\to\left|f_n(x_k)-f_m(x_k)\right|<\varepsilon/3, \forall k$

Переходя в последнем неравенстве к пределу по k, получим $\left|a_m-a_n\right|<\varepsilon/3$. Последнее означает фундаментальность последовательности $\{a_n\}$ и существование у нее предела $A=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ и неравенства $\left|A-a_n\right|<\varepsilon/3,\ \forall n<N_3$ (**). Предельный переход в том же неравенстве по m, приведет к неравенству $\left|f_n(x_k)-f(x_k)\right|<\varepsilon/3, \forall k$ (***).

Объединяя неравенства (*), (**), (***) для $n,k>\max(N_1;N_2;N_3)$ получим

$$\left|f(x_k)-A\right|\leq\left|f(x_k)-f_n(x_k)\right|+\left|f_n(x_k)-a_n\right|+\left|a_n-A\right|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

Последнее означает, что $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$.

2. Об ограниченности предельной функции.

Теорема 2. Если последовательность ограниченных на множестве D функций $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на D к функции $f(x)$, то функция $f(x)$ ограничена на D.

ДОК. Из ограниченности $f_n(x)$ следует, что существуют константы C_n, для которых $\left|f_n(x)\right|\leq C_n\ \ \forall x\in D$. Из условия равномерной сходимости $\{f_n(x)\}$ следует, что для $\varepsilon=1\ \exists\ N:\forall x\in D,\forall n\geq N\to\left|f_n(x)-f(x)\right|\leq 1$.

Тогда $\left|f(x)\right|=\left|f_N(x)\right|+\left|f(x)-f_N(x)\right|\leq C_N+1,$ для всех $x\in D$.

3. О непрерывности предельной функции.

Теорема 3. Если последовательность непрерывных на множестве D функций $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на D к функции $f(x)$, то функция $f(x)$ также непрерывна на D.

ДОК. Пусть x_0 - произвольная точка множества D. Из равномерной сходимости следует, что $\forall\varepsilon>0\ \exists N=N_\varepsilon:\forall n\geq N$ и $\forall x\in D\to\left|f(x)-f_n(x)\right|\leq\dfrac{\varepsilon}{3}$, в частности, $\left|f_N(x_0)-f(x_0)\right|\leq\dfrac{\varepsilon}{3}$

Из непрерывности функции $f_N(x)$ в точке x_0 следует, что

$\exists\delta=\delta_\varepsilon:\forall x\in D:|x-x_0|<\delta\to|f_N(x)-f_N(x_0)|\le\frac{\varepsilon}{3}$. Тогда $\forall x\in D:|x-x_0|<\delta\to$

$|f(x)-f(x_0)|\le|f(x)-f_N(x)|+|f_N(x)-f_N(x_0)|+|f_N(x_0)-f(x_0)|\le\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$.

Упражнение. На каком множестве последовательность функций $f_n(x)=\frac{1}{1+x^n}$ сходится равномерно?

4. Интегрирование равномерно сходящихся последовательностей

Теорема 4. (О интегрировании функциональной последовательности)

Пусть $\{f_n(x)\}$ последовательность непрерывных на $[a;b]$ функций равномерно сходится к функции $f(x)$. Тогда для любого $x_0\in[a;b]$ функциональная последовательность

$\varphi_n(x)=\int\limits_{x_0}^{x}f_n(t)dt$ равномерно сходится к функции $\varphi(x)=\int_{x_0}^{x}f(t)dt$.

ДОК. Из равномерной сходимости $\forall\varepsilon>0\ \exists N=N_\varepsilon:\forall n\ge N$ и

$\forall x\in[a;b]\to|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$. Тогда $|\varphi_n(x)-\varphi(x)|=\left|\int_{x_0}^{x}(f_n(t)-f(t))dt\right|\le$

$\le\int_{x_0}^{x}|f_n(t)-f(t)|dt\le\frac{\varepsilon}{b-a}\cdot|x-x_0|\le\varepsilon$ для всех $x\in[a;b]$.

4. возможность дифференцировать равномерно сходящиеся последовательности.

Теорема 5. (О дифференцировании последовательности функций)

Пусть $\{f_n(x)\}$ последовательность непрерывно дифференцируемых на $[a;b]$ функций, причем последовательность из производных $\{f_n'(x)\}$ равномерно сходится на $[a,b]$ к функции $F(x)$ и существует $x_0\in[a;b]$, для которого числовая последовательность $\{f_n(x_0)\}$ сходится, причем $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x_0)=A$.

Тогда последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на $[a,b]$ к функции

$f(x)=A+\int_{x_0}^{x}F(t)dt$ и поэтому $f'(x)=F(x)$.

ДОК. Воспользуемся теоремой 4: последовательность $\int_{x_0}^{x}f_n'(t)dt=f_n(x)-f_n(x_0)$ равномерно сходится к функции $\int_{x_0}^{x}F(t)dt$. Тогда последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится к $A+\int_{x_0}^{x}F(t)dt$.

5. Достаточные условия равномерной сходимости последовательности

Теорема 6 (Дини) (без доказательства)

Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$, $x\in[a;b]$ удовлетворяет условиям:

А) $f_n(x)\in C[a;b]$;

Б) $\forall x\in[a;b]$ числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ монотонная;

В) предельная функция $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)\in C[a;b]$.

Тогда $f_n(x)\overset{[a;b]}{\Rightarrow}f(x)$

П.2 Функциональные ряды.

ОПР. Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ (1) сходится на множестве D, если на этом множестве сходится последовательность $S_k(x)=\sum_{n=1}^{k} a_n(x)$ его частичных сумм, т.е. существует функция $S(x)$, определенная на D, для которой $\lim_{k\to\infty} S_k(x)=S(x)$.

ОПР. Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится на множестве D равномерно, если последовательность $\{S_k(x)\}$ сходится к $S(x)$ равномерно на D.

Справедлив КРИТЕРИЙ КОШИ равномерной сходимости функционального ряда:
Ряд (1) сходится на D равномерно в том и только в том случае, если
$\forall\varepsilon>0\,\exists N=N_\varepsilon:\forall n,m\ge N, m>n$ и $\forall x\in D\Rightarrow \left|a_n(x)+a_{n+1}(x)+\ldots+a_m(x)\right|<\varepsilon$.

Пример 5. Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n}$.

Ряд знакочередующийся, поэтому его остаток $\varphi_m(x)=\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n}$ оценивается $\left|\varphi_m(x)\right|\le\frac{1}{x^2+m+1}\le\frac{1}{m+1}, \forall x\in(-\infty;+\infty)$ и, по определению, ряд сходится равномерно для всех x. Ряд сходится условно для всех x.

Пример 6. Найти область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^2+\frac{1}{n}\right)^n$

Для каждого x члены ряда положительные, применим радикальный признак Коши:
$\sqrt[n]{a_n(x)}=\left(x^2+\frac{1}{n}\right)\xrightarrow{n\to\infty} x^2<1$ сходится, при $x^2>1$ расходится. При $x^2=1$ ряд расходится по невыполнению необходимого признака, т.е. $D_{cx}=(-1;1)$. Сходимость равномерная на любом отрезке $[a;b]\subset(-1;1)$

Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов
1. О возможности предельного перехода

Теорема 7. Если функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\overset{D}{\rightrightarrows} f(x)$ и $\forall n\,\exists\lim_{x\to a} a_n(x)=a_n$, то

1) числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и имеет сумму A;

2) $\exists\lim_{x\to a} f(x)=A$

Док. см. теорему 1 для равномерно сходящейся последовательности частичных сумм ряда.
Таким образом, для равномерно сходящихся рядов знак предела и суммы могут быть переставлены:

$$\lim_{x\to a}\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to a} a_n(x)$$

2. существование мажорирующего ряда

Теорема 8. (Достаточный признак равномерной сходимости Вейерштрасса)

Если для функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x),\ x \in D$ найдется сходящийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n > 0$, для которого $|f_n(x)| \le a_n,\ \forall x \in D, \forall n \ge n_0$ (мажорирующий ряд). Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на D.

Док. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon : \forall m,n > N \to |f_{m+1}(x) + f_{m+2}(x) + ... + f_n(x)| \le \sum_{k=m+1}^{n} |f_k(x)| \le \sum_{k=m+1}^{n} a_k < \varepsilon, \forall x \in D$ т.е. ряд сходится равномерно на множестве D по признаку Коши.

В качестве мажорирующего ряда иногда удается взять ряд с общим членом $\alpha_n = \sup_{x \in D} |a_n(x)|$, если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ сходится.

Пример 7. Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n!}$ на отрезке $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$.

Для любого $x \in \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ $|a_n(x)| = |x|^{n!} \le \frac{1}{2^{n!}}$ и мажорирующий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n!}}$ сходится по признаку Даламбера.

Пример. Сколько слагаемых ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \sqrt{1+(2n-1)x}}$ следует взять, чтобы вычислить его сумму с точностью $0,01$ для всех $x \in [0;\infty)$?

Для любых $x \in [0;\infty)$ ряд мажорируется числовым рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$. Тогда остаток ряда

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{3^n \sqrt{1+(2n-1)x}} \le \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3^{m+1}(1-1/3)} = \frac{1}{2 \cdot 3^m} \le 0,01 \to 3^m \ge 50 \to m \ge 4$$

Таким образом, указанную точность обеспечивают 4 слагаемые ряда.

3. непрерывность суммы ряда

Теорема 9. Если члены $a_n(x)$ функционального ряда (1) непрерывные функции на D, ряд (1) равномерно сходится на D и имеет сумму $S(x)$, то $S(x)$ - непрерывная на D функция.

ДОК. Следует из теоремы 3 для функциональных последовательностей, поскольку частичные суммы ряда $S_k(x)$ непрерывны и равномерно сходятся к $S(x)$, которая в силу этого непрерывна.

Пример 8. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{\left(1+x^2\right)^n}$ на области сходимости ряда.

Для $x \ne 0$ $f(x) = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} = x \frac{1/(1+x^2)}{1-\frac{1}{1+x^2}} = \frac{1}{x}$. При $x = 0 \to f(0) = 0$

4.Интегрирование равномерно сходящихся рядов.

Теорема 10. (Об интегрировании функционального ряда)

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ (1) из непрерывных на $[a,b]$ функций $a_n(x)$ равномерно сходится на отрезке $[a,b]$. Тогда для любого $x_0 \in [a;b]$ функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$, где $\varphi_n(x) = \int_{x_0}^{x} a_n(t)dt$, сходится равномерно на отрезке $[a,b]$.

ДОК. Из равномерной сходимости ряда (1) следует, что

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N = N_\varepsilon : \forall n \ge N, \forall m > n, \forall x \in [a;b] \Rightarrow |a_n(x) + a_{n+1}(x) + \ldots + a_m(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Тогда $|\varphi_n(x) + \varphi_{n+1}(x) + \ldots + \varphi_m(x)| \le$

$\le \int_{x_0}^{x} |a_n(t) + a_{n+1}(t) + \ldots + a_m(t)| dt \le \frac{\varepsilon}{b-a} |x - x_0| \le \varepsilon$ для всех $x \in [a;b]$.

Пример 9. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n$, $x \in (-1,1)$.

Ряд сходится абсолютно и равномерно на любом отрезке $[-a,a], 0 < a < 1$, поскольку имеется мажорирующий ряд для ряда, составленного из модулей: $(n+1)(n+2)|x|^n \le (n+1)(n+2)a^n$. Мажорирующий ряд сходится, например, по признаку Даламбера: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)(n+3)a^{n+1}}{(n+1)(n+2)a^n} = \frac{(n+3)}{(n+1)} a \xrightarrow{n\to\infty} a < 1$

Интегрируем почленно ряд на отрезке $[0;x]$ дважды:

$$\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(n+2)t^n dt = \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)x^{n+1}, \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)t^{n+1} dt = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+2} = \frac{x^3}{1-x}, x \in (-1;1).$$

Для получения суммы исходного ряда достаточно дважды продифференцировать полученный результат:

$$\left(-x^2 + x - 1 - \frac{1}{x-1}\right)'' = -2 - \frac{2}{(x-1)^3}$$

5. дифференцирование равномерно сходящихся рядов

Теорема 11.

Пусть для функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ известно, что

1) функции $a_n(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a,b]$;

2) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$ из производных равномерно сходится на $[a,b]$ и имеет сумму $g(x)$;

3) существует точка $x_0 \in [a;b]$, для которой числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_0)$ сходится и имеет сумму A.

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равномерно сходится на $[a,b]$ и имеет непрерывно дифференцируемую сумму $f(x)$, причем $f'(x) = g(x)$ для $x \in [a;b]$.

ДОК. По условию 2) и теореме 6 последовательность частичных сумм

$S_k'(x) = \sum_{n=1}^{k} \int_{x_0}^{x} a_n'(t)dt = \sum_{n=1}^{k} a_n(x) - \sum_{n=1}^{k} a_n(x_0)$ равномерно сходится к функции $\int_{x_0}^{x} g(t)dt$.

Из условия 3) следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на $[a,b]$ и имеет сумму $f(x) = A + \int_{x_0}^{x} g(t)dt$. Тогда $f'(x) = g(x)$ для $x \in [a;b]$.

6. Признаки равномерной сходимости знакопеременных функциональных рядов

Теорема 12. Признак равномерной сходимости Дирихле.

Для функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \cdot b_n(x),\ x \in D$ выполняются условия:

А) $\forall x \in D$ последовательность $\{a_n(x)\}$ монотонная;

Б) $a_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows} a(x) \equiv 0$;

В) Частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ равномерно ограничены, т.е. существует константа $M > 0$, для которой $\forall x \in D,\ \forall k \to \left|\sum_{n=1}^{k} b_n(x)\right| \le M$.

Тогда функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \cdot b_n(x)$ равномерно сходится на D.

Теорема 14. Признак равномерной сходимости Абеля

Для функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \cdot b_n(x),\ x \in D$ выполняются условия:

А) $\forall x \in D$ последовательность $a_n(x)$ монотонна;

Б) последовательность $a_n(x)$ равномерно ограничена в совокупности, т.е.
$\exists M > 0 : \forall x \in D,\ \forall n \to |a_n(x)| \le M$;

В) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ сходится равномерно на D.

Тогда функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \cdot b_n(x)$ равномерно сходится на D.

Пример 10. Дзета-функция Римана

Сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = \zeta(x),\ x \in (1;+\infty)$ (*) называется дзета-функцией Римана.

На любом отрезке $[x_1; x_2] \subset (1;+\infty)$ ряд сходится равномерно, поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = \zeta(x),\ x \in [x_1; x_2]$ мажорируется числовым сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{x_1}}$.

Отсюда, по теореме, функция $\zeta(x)$ непрерывна в каждой точке отрезка $[x_1; x_2]$, а в силу произвольности отрезка $[x_1; x_2]$ заключаем, что $\zeta(x)$ непрерывна в каждой точке полуоси $(1;\infty)$.

Формальное дифференцирование ряда (*) приводит к ряду $-\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x},\ x \in (1,+\infty)$ (**), который равномерно не сходится на $(0;+\infty)$, (его предел при $x \to 1+0$ приводит к расходящемуся ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$), но на любом отрезке $[x_1; x_2] \subset (1;+\infty)$ сходимость (**)

равномерная и , по теореме, его сумма равна $\zeta'(x), \forall x \in (1;+\infty)$. Аналогично, можно доказать, что функция $\zeta(x)$ имеет бесконечное число производных и

$$\zeta^{(k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^k n}{n^x}, k = 1, 2, ..., x \in (1;+\infty)$$

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ.

1. Сходимость функциональной последовательности, равномерная сходимость на множестве, критерий Коши равномерной сходимости. Теорема о равномерной сходимости последовательности ограниченных функций.
2. Теоремы о пределе равномерно сходящихся последовательностей и рядов.
3. Теорема о равномерной сходимости последовательности непрерывных функций.
4. Теорема о дифференцировании и интегрирования равномерно сходящихся последовательностей
5. Функциональные ряды, сходимость. Равномерная сходимость, критерий Коши равномерной сходимости рядов. Достаточный признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.
6.Теоремы об интегрировании и дифференцируемости равномерно сходящегося ряда.