Знаконеопределенные ряды (чередование)

$\sum a_n$ (1) $\quad \sum |a_n|$ (2)

(2) сходится $\to$ (1) сходится абсолютно.

(1) сход, а (2) расходится $\Rightarrow$ (1) сходится условно

I Признак Лейбница. 1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$, $a_n > 0$ (знакочередующиеся ряды)

$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots$

2) $a_n \downarrow 0$ монотонно!

Тогда ряд (1) сходится

$\triangleright$ $S_{2n} = a_0 - \underbrace{(a_1 - a_2)}_{\geq 0} - \underbrace{(a_3 - a_4)}_{\geq 0} - \ldots - \underbrace{(a_{2n-1} - a_{2n})}_{\geq 0}$ – четная частичная сумма ряда

$\to S_{2n} < a_0 \qquad S_{2n+1} = S_{2n} - a_{2n+1} < a_0 \Rightarrow \boxed{|S_m| < |a_0| \ \forall m}$

$S_m + \underbrace{a_{m+1} - a_{m+2} + \ldots}_{r_m \text{ – остаток } \rho} \Rightarrow \boxed{|r_m| \leq |a_{m+1}|} \ \forall m$

$S_{2n+1} = \underbrace{(a_0 - a_1)}_{\geq 0} + \underbrace{(a_2 - a_3)}_{\geq 0} + \ldots + \underbrace{(a_{2n} - a_{2n+1})}_{\geq 0} \uparrow$ монотонно и ограничена

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = S \qquad S_{2n} = \underbrace{S_{2n+1}}_{\downarrow S} + \underbrace{a_{2n+1}}_{\downarrow 0} \xrightarrow{n\to\infty} \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$

$\Rightarrow$ ряд сходится

Преобразование Абеля $\boxed{\sum\limits_{k=1}^{m} a_k b_k = a_m B_m - \sum\limits_{k=1}^{m-1} a'_k B_k}$, где (*)

$a'_k = a_{k+1} - a_k$, $\quad B_k = b_1 + b_2 + \ldots + b_k$

$\triangleright$ (*) по индукции $\underbrace{C_1}_{\text{верно}} \quad C_2 \qquad \underbrace{C_k}_{\text{верно.}} \to \underbrace{C_{k+1}}_{\text{верно}} \ldots$

$m=2 \quad a_1 b_1 + a_2 b_2 = a_2 B_2 - a'_1 B_1 = a_2(\cancel{b_1} + b_2) - (\cancel{a_2} - a_1) b_1$ $\blacktriangleleft$

m - верно $\Rightarrow$ верно для m+1

$\sum\limits_{k=1}^{m+1} a_k b_k = a_{m+1} b_{m+1} + a_m B_m - \sum\limits_{k=1}^{m-1} a'_k B_k = a_{m+1} b_{m+1} + a_m B_m - \sum\limits_{k=1}^{m} a'_k B_k + (a_{m+1} - a_m) B_m$

$= a_{m+1} B_{m+1} - \sum\limits_{k=1}^{m} a'_k B_k$ * $\blacktriangleleft$

2. Признак Абеля $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ (1) $\{a_n\}, \{b_n\}$ – заданные последоват.

1) $\sum a_n$ – сходится

2) $\{b_n\}$ – ограничена и монотонная ($\uparrow$ или $\downarrow$)

Тогда ряд Абеля (1) сходится.

$\left|\sum\limits_{k=n}^{m} a_k b_k\right| \overset{(*)}{=} \left| b_m (a_n + a_{n+1} + \ldots + a_m) - \sum\limits_{k=n}^{m-1} (b_{k+1} - b_k)(a_n + a_{n+1} + \ldots + a_k)\right| \leq$ (сохраняет знак)

1) $\sum a_k$ – сходится $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n \geq N, m > n \to |a_n + a_{n+1} + \ldots + a_m| < \frac{\varepsilon}{2B}$, где B – константа

$|b_n| \leq B$, $\quad |b_m - b_n| \leq B$

$\leq |b_m| \cdot |a_n + a_{n+1} + \ldots + a_m| + \frac{\varepsilon}{2B} \sum\limits_{k=n}^{m-1} (b_{k+1} - b_k) \leq B \cdot \frac{\varepsilon}{2B} + \frac{\varepsilon}{2B} \underbrace{(b_m - b_n)}_{\leq B} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ ($\uparrow \{b_n\}$)

Критерий Коши для ряда Абеля выполнен $\Rightarrow$ (1) сходится

3. Признак Дирихле $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ (1) $\quad \{a_n\}, \{b_n\}$ – две последовательности

1) $S_m = \sum\limits_{k=1}^{m} a_k$, $\{S_m\}$ – ограничена.

2) $\{b_n\}$ – монотонна ($\uparrow$ или $\downarrow$) и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

Тогда (1) сходится

Пример 1 Доказать абс. сходимость $\sum a_n$, где $a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt[5]{n}}\right) \operatorname{arctg} \frac{\sin n}{n}$

$|a_n| = \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt[5]{n}}\right) \operatorname{arctg} \frac{|\sin n|}{n} \leq \underbrace{\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt[5]{n}}\right) \operatorname{arctg} \frac{1}{n}}_{b_n}$

$b_n \sim \frac{1}{\sqrt[5]{n}} \cdot \frac{1}{n} = \underbrace{\frac{1}{n^{6/5}}}_{c_n}$

$\ln(1+x) \sim x$
$\operatorname{arctg} x \sim x$
при $x \to 0$

$\sum c_n$ – сходится (обобщ. гармонич. $p = 6/5 > 1$)

$\sum c_n$ сравним II (отношен.) с $\sum b_n \to \sum b_n$ – сходится

$\sum |a_n|$ сходится по сравнению I (неравенств.) с $\sum b_n$

$\Rightarrow \sum a_n$ – сходится абсолютно

Упражнение $\sum a_n \sin n\alpha$ (1) $\quad \sum a_n \cos n\alpha$ (2) $\quad a_n \downarrow 0$

Докажем, что (1) и (2) сходятся по признаку Дирихле

$S_m = \sin\alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin m\alpha = \frac{(\sin\alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin m\alpha) \sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha/2} =$

$= \frac{1}{2\sin\alpha/2} \cdot \left(\cos\frac{\alpha}{2} - \cancel{\cos\frac{3\alpha}{2}} + \cancel{\cos\frac{3\alpha}{2}} - \cancel{\cos\frac{5\alpha}{2}} + \ldots \cancel{\cos\frac{(2m-1)\alpha}{2}} - \cos\frac{(2m+1)\alpha}{2}\right) = \frac{\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{(2m+1)\alpha}{2}}{2\sin\alpha/2}$

$\alpha \neq 2\pi k$

ограниченость $\{S_m\} \overset{D}{\Rightarrow}$ (1) сходится

Пример Исследовать на сходимость ряд $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^{n-1}}$

$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^{n-1}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 + \underbrace{\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}}_{t}\right)^{-1} = \left| (1+t)^{-1} = 1 - t + \underbrace{t^2 + o(t^2)}_{O(t^2)} = 1 - t + O(t^2) \right| =$

$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \underbrace{\underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{b_n} + \underbrace{\frac{1}{n}}_{c_n}} + \underbrace{O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)}_{d_n}$

$\sum d_n$, $|d_n| \leq \underbrace{\frac{C}{n^{3/2}}}_{u_n} \qquad \sum u_n$ – обобщ. гарм. $p = 3/2 > 1 \overset{\text{ср. I}}{\Rightarrow} \sum |d_n|$ – сходится $\to$

$\to \sum d_n$ – сходится абс.

$\sum b_n = \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ – сход. условно $\xrightarrow{\text{свойств.}} \sum (b_n + c_n)$ – расход. $\Rightarrow \sum a_n = \underbrace{\sum (b_n + c_n)}_{\text{расх.}} + \overset{\text{абс. сход.}}{d_n}$

$\sum c_n = \sum \frac{1}{n}$ – гарм. расход.

Пример $\sum \underbrace{\frac{\sin n\alpha}{\ln(\ln(n+2))}} \cdot \underbrace{\cos\frac{1}{n}}$ (1) $\underline{\alpha \neq 2\pi k}$

$a_n = \frac{\sin n\alpha}{\ln(\ln(n+2))} \qquad b_n = \cos\frac{1}{n} \qquad \{b_n\} \uparrow$ и ограничен

$\sum a_n = \sum \underbrace{\frac{1}{\ln(\ln(n+2))}}_{c_n} \cdot \underbrace{\sin n\alpha}_{d_n}$ – сходится по Дирихле

$c_n \downarrow 0$

Ряд (1) сход по Абелю.

$|a_n| = \frac{|\sin n\alpha|}{\ln(\ln(n+2))} \cdot \cos\frac{1}{n} \geq \frac{\sin^2 n\alpha}{\ln(\ln(n+2))} \cdot \cos\frac{1}{n} = \underbrace{\underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\ln(\ln(n+2))}}_{\substack{b_n \\ \text{расх}}} - \underbrace{\frac{\cos 2n\alpha}{2\ln(\ln(n+2))}}_{\substack{c_n \\ \text{сходи}}}}_{\text{расход.}}$

$\sum b_n$ – расходится. $\underset{\text{расх.}}{\frac{1}{\ln(n+2)}} \not< \frac{1}{\ln(\ln(n+2))}$

Вывод (1) сходится условно!