Ф-03-Лекция - 15. Ряды Тейлора. Разложение функций в степенные ряды.

Пусть функция $f(x)$ имеет производные всех порядков в точке $x = x_0$. Тогда ей можно сопоставить степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n, \; c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \; , \qquad (1)$$

который называется рядом Тейлора функции $f(x)$. Для $x_0 = 0$ такие ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \; c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \qquad (2)$$

называются рядами Маклорена функции $f(x)$.

Если ряд, например, (2) имеет радиус сходимости $R > 0$ и имеет в интервале сходимости $(-R; R)$ сумму $S(x)$, возникает вопрос: как связаны между собой функции $S(x)$ и $f(x)$?

Опр. Если $f(x) \equiv S(x), \; x \in (-R; R)$, то говорят, что функция $f(x)$ разложима в ряд, в данном случае, Маклорена на интервале сходимости степенного ряда (2).

Может случиться, что равенство $f(x) \equiv S(x)$ достигается и на концах интервала сходимости (хотя бы одном). Тогда говорят о множестве, на котором функция раскладывается в степенной ряд, состоящем из интервала сходимости и, возможно, его концов. По теореме о единственности для степенного ряда можно заключить, что если $f(x)$ разложена в степенной ряд $(1')$, то это обязательно ее ряд Маклорена. Аналогичное утверждение справедливо для рядов Тейлора.

Следующий пример показывает, что равенство $f(x) \equiv S(x)$ возможно и только в одной точке x_0, т.е. радиус сходимости $R = 0$.

Пример. $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$

Вычисление первой и второй производных функции $f(x)$ при $x \neq 0$ дают результат:

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}, \; f''(x) = \left(\frac{-6}{x^4} + \frac{4}{x^6} \right) e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ и } \lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} f''(x) = 0$$

Производная порядка n по структуре имеет вид $f^{(n)}(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^{(n)}}{x^{n+2k}} \right) e^{-\frac{1}{x^2}}$ и $\lim_{x \to 0} f^{(n)}(x) = 0, \; \forall n$,

поскольку после замены $t = \frac{1}{x^2} \xrightarrow{x \to 0} +\infty$ и $\lim_{t \to +\infty} \frac{t^m}{e^t} = 0, \; \forall m > 0$

Таким образом, $f(x)$ при $x = 0$ равна нулю вместе со всеми производными любого порядка и все коэффициенты ряда Макрорена функции $f(x)$ равны нулю, т.е. ряд имеет нулевую сумму, совпадающую с $f(x)$ только в одной точке $x = 0$.

Приведем необходимый и достаточный признак разложимости функции в ряд Тейлора.

Заметим, что частичная сумма $S_n^f(x)$ ряда Тейлора (1) совпадает с многочленом Тейлора $T_n(f,x,x_0)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ функции $f(x)$ порядка n. По формуле Тейлора остаток ряда $R_n^{\infty}(f,x,x_0)=f(x)-T_n(f,x,x_0)=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ равен остатку $R_n^f(x,\xi)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, |\xi-x_0|<|x-x_0|$ формулы Тейлора (в форме Лагранжа).

Сходимость ряда Тейлора в точке x равносильно тому, что $\lim_{n\to\infty}R_n^f(x,\xi)=0$.

Например,

$$f(x)=\sin x,\ f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right), \left|f^{(n)}(\xi)\right|\le 1,\ \forall\xi\in(-\infty;+\infty):0\le\left|R_n^f(x,\xi)\right|\le\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}\quad (*)$$

Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$ сходится по признаку Даламбера при любом x его общий член $b_n(x)=\frac{|x-x_0|^n}{(n+1)!}\xrightarrow{n\to\infty}0,\ \forall x\in(-\infty;+\infty)$ и из неравенства (*) следует, что $\lim_{n\to\infty}R_n^f(x,\xi)=0$, а ряд Тейлора сходится при любом x ($R=\infty$)

Можно обобщить идею примера разложимости $\sin x$ и сформулировать достаточные условия разложимости функций в ряды Тейлора на множестве D. Если функция $f(x)$ удовлетворяет условию:

$$\exists M>0:\forall x\in D,\forall n\to\left|f^{(n)}(x)\right|\le M\ ,$$

то она разложима в ряд Тейлора на множестве D.

П.2 Разложимость в ряд Маклорена табличных функций.

1. $f(x)=\sin x$

Вычислим коэффициенты ряда Маклорена:

$$(\sin x)^{(n)}\Big|_{x=0}=\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)\Bigg|_{x=0}=\sin\frac{\pi n}{2}=\begin{cases}0,\ n=2k,k\in N\\(-1)^{k-1},n=2k-1,\ k\in N\end{cases}$$

Тогда ряд Маклорена имеет вид:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+...=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}x^{2k-1}}{(2k-1)!},\quad\forall x\in(-\infty;+\infty)\quad (3)$$

Его сходимость для всех x ($R=\infty$) следует из ограниченности производных на всей оси.

2. $f(x)=\cos x$

Вычислять производные при $x=0$ нет необходимости, поскольку ряд (3) по теореме сходится равномерно на любом отрезке $[-a;a],\forall a>0$ и его можно проинтегрировать на отрезке $[0;x]$:

$$\int_0^x \sin t dt = 1-\cos x = \int_0^x \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{t^{2k-1}}{(2k-1)!} dt = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k}}{(2k-1)!\cdot 2k}$$

Выражая отсюда $\cos x$, получим

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...+(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}+... = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad x\in(-\infty;+\infty) \qquad (4)$$

3. $f(x)=e^x$

Все производные функции в точке $x=0$ равны $f^{(n)}(x)\big|_{x=0} = e^x\big|_{x=0} = 1$ и ряд Маклорена имеет вид:

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \qquad x\in(-\infty;+\infty) \qquad (5)$$

Для выяснения области сходимости ряда (5), оценим остаточный член формулы Маклорена функции $y=e^x$:

$$R_n^{e^x}(x,\xi) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad \xi\in(0;x)$$

Для любого $x\in(-\infty;+\infty)$ справедливо неравенство $0\le \left|R_n^{e^x}(x,\xi)\right| \le \frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^n$ (**)

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^n$ сходится по признаку Даламбера для любого x, поэтому общий член ряда

$\frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^n \xrightarrow{n\to\infty} 0, \forall x$ и из неравенства (**) следует стремление к нулю остаточного члена формулы Маклорена.

4. $f(x)=\frac{1}{1-x}$, $f(x)=\frac{1}{1+x}$. Ряд геометрической прогрессии.

$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, x\in(-1;1)$ (6) $\qquad\qquad$ $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, x\in(-1;1)$ (7)

На концах интервала сходимости не выполнен необходимый признак, поэтому ряды (6-7) расходятся.

5. $y=\ln(1+x)$

Ряд (7) равномерно сходится на каждом отрезке $[-a;a], \forall a: 0<a<1$ и его можно интегрировать на отрезке $[0;x]\in[-a;a]$:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1+x) = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Поскольку для любого $x \in (-1;1)$ найдется отрезок $[-a;a]$, которому он принадлежит ряд для $\ln(1+x)$ сходится $\forall x \in (-1;1)$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}, \ \ \forall x \in (-1;1] \qquad (8)$$

Заметим, что при $x=1$ ряд (8) превращается в сходящийся ряд Лейбница. Тогда по теореме Абеля ряд (8) сходится равномерно на отрезке $[0,1]$ и предельный переход при $x \to 0$ дает сумму ряда Лейбница:

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

6. $f(x) = (1+x)^{\alpha}$. Биномиальный ряд

Вычислим производную $f^{(n)}(x)$:

$$(1+x)^{\alpha(n)}\Big|_{x=0} = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}\Big|_{x=0} = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)$$

Если $\alpha = 0,1,2,...$ все члены биномиального ряда, начиная с некоторого номера, нулевые и ряд конечный. Если отрицательное или не целое, все коэффициенты ряда не нулевые.

Общий член ряда Маклорена $a_n(x) = c_n x^n = \dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n$. Применим к ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n(x)|$ признак Даламбера $\dfrac{|a_{n+1}(x)|}{|a_n(x)|} = \dfrac{|\alpha-n|}{n+1}|x| \xrightarrow{n\to\infty} |x| < 1$. Следовательно, на интервале $(-1;1)$ ряд сходится. Вне интервала – расходится по невыполнению необходимого признака. Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости $x = \pm 1$.

При $\alpha \le -1$, применим признак Даламбера в до предельной форме:

$\dfrac{|a_{n+1}(\pm 1)|}{|a_n(\pm 1)|} = \dfrac{n-\alpha}{n+1} \ge 1$ и ряд расходится по невыполнению необходимого признака.

При $\alpha > -1$ применим признак Раабе:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{|a_n(\pm 1)|}{|a_{n+1}(\pm 1)|} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{n+1}{n-\alpha} - 1\right) = \alpha + 1 > 1 \to \alpha > 0, a \notin N$$

Ряд сходится абсолютно на обоих концах интервала. При $\alpha < 0$ абсолютной сходимости на концах нет.

При $\alpha \in (-1;0)$ $c_n = \dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} = (-1)^n |c_n| = (-1)^n \dfrac{(-\alpha)(1-\alpha)...(n-1-\alpha)}{n!}$

Тогда ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(-1) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|$ с положительными членами расходится (абсолютной сходимости нет при $\alpha < 0$).

Ряд(***) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(1) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n |c_n|$ знакочередующийся и последовательность $|c_n|$ монотонно убывает:

$$|c_{n+1}| = |c_n| \cdot \frac{n-\alpha}{n+1} < |c_n|.$$

Для сходимости ряда (***) по признаку Лейбница осталось установит, что $\lim_{n\to\infty}|c_n| = 0$. Для этого оценим величину

$$-\ln|c_n| = -\ln(-\alpha) - \ln\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) - \ldots - \ln\left(1 - \frac{1+\alpha}{n}\right)$$

Ряд $-\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1-\frac{1+\alpha}{n})$ с положительными членами сравним и расходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, поэтому сам расходится, поэтому $\lim_{n\to\infty}\ln|c_n| = -\infty \to |c_n| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Результаты исследования сходимости биномиального ряда при разных α внесены в таблицу

$\alpha = 0, \alpha \in N$	$\alpha \notin N, \alpha > 0$	$\alpha \in [-1;0)$	$\alpha \in (-\infty;-1)$
Конечное число членов	$D = [-1;1]$	$D = (-1;1]$	$D = (-1;1)$

Пример. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$.

$$f(x) = \frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} \to \begin{cases} A+B=0 \\ -3A-2B=1 \end{cases} \to f(\mathrm{x}) = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} =$$

$$= -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n, \quad x \in (-2;2)$$

Пример. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \arccos\frac{x}{2}$.

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2/4}}$$

Рассмотрим биномиальный ряд

$$(1+t)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}t + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}t^2 + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}t^3 + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\ldots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!}t^n + \ldots =$$

$$= 1 + \sum_{n=}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}t^n, t \in (-1;1]$$

Подставляя $t = -x^2/4$, получим степенной ряд $-\frac{1/2}{\sqrt{1-x^2/4}} = -1/2 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{3n+1}n!}x^{2n}, x \in (-2;2)$.

Интегрируем полученный ряд на отрезке $[0;x]$ внутри интервала сходимости:

$$\int_0^x f'(x)dx = f(x) - \frac{\pi}{2} = -\frac{x}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{3n+1} \cdot n! \cdot (2n+1)} x^{2n+1}, x \in (-2; 2)$$

Вопросы к экзамену

1. Ряды Тейлора. Условия разложимости функций в ряды Тейлора.

2. Разложение функций $\sin x, \cos x$ в ряд Макрорена.

3. Разложение функций $e^x, \ln(1+x)$ в ряд Маклорена.

4. Разложение функции $(1+x)^\alpha$ в ряд Маклорена. Область сходимости биномиального ряда при различных α .