Лекция 9. Основные формулы векторного анализа

Полем $\overline{F}(x,y,z)=\{P(x,y,z);Q(x,y,z);R(x,y,z)\}$ называют векторнозначную функцию, заданную в некоторой области $G\in R^3$. Предполагаем, что функции P,Q и R имеют непрерывные частные производные.

Векторные линии

Векторной линией поля $\overline{F}$ называют кривую в R^3, в каждой точке $M(x;y;z)$ которой вектор $\overline{F}(x,y,z)$ является направляющим вектором прямой касательной к кривой в точке M.

Векторная линия, проходящая через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$, является решением системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}\ (1)\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{Q}{R}\\ \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{R}{P}\end{cases}(2)\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=P\\ \dfrac{dy}{dt}=Q\\ \dfrac{dz}{dt}=R\end{cases}(3)$$

с начальными условиями: $y(x_0)=y_0,\ z(x_0)=z_0$ или $x(t_0)=x_0,\ y(t_0)=y_0,\ z(t_0)=z_0$.

Если $\varphi_1(x;y;z)=c_1$ первый интеграл уравнения $\dfrac{dx}{P}=\dfrac{dy}{Q}$, а $\varphi_2(x;y;z)=c_2$ - интеграл для уравнения $\dfrac{dy}{Q}=\dfrac{dz}{R}$ с произвольными c_1 и c_2, то при выполнении условий теоремы существования и единственности через каждую точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ проходит единственная векторная линия с уравнением $\begin{cases}\varphi_1(x;y;z)=\varphi_1(x_0,y_0,z_0)\\ \varphi_2(x;y;z)=\varphi_2(x_0,y_0,z_0)\end{cases}$.

Пример 1 Найти векторную линию поля $\overline{F}=\{-y;x;b\}$, проходящую через точку $M_0(1;0;0)$.

Запишем дифференциальное уравнение векторной линии в форме (1):

$\dfrac{dx}{-y}=\dfrac{dy}{x}=\dfrac{dz}{b}\to xdx+ydy=0\to x^2+y^2=c_1>0$, т.е. винтовая линия лежит на поверхности цилиндра с радиусом $\sqrt{c_1}$. Параметризуем окружность: $x=\sqrt{c_1}\cos t,\ y=\sqrt{c_1}\sin t$ и решаем уравнение:

$$\frac{dy}{x}=\frac{dz}{b}\to\frac{\sqrt{c_1}\cos t\cdot dt}{\sqrt{c_1}\cos t}=\frac{dz}{b}\to dz=bdt\to z=bt+c_2$$

Тогда векторная линия имеет параметрическое уравнение:

$\begin{cases} x=\sqrt{c_1}\cos t \\ y=\sqrt{c_1}\sin t \\ z=bt+c_2 \end{cases}$, которое с учетом начальных условий примет вид $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ z=bt \end{cases}$ (винтовая линия).

Пример 2 Найти векторные линии магнитного поля бесконечного проводника тока.

Полагаем, что проводник направлен по оси oz, ток $\overline{I}=I\cdot\overline{k}$, точка $M(x;y;z)$ находится на расстоянии ρ от оси провода и $\overline{r}=\{x;y;z\}$ – радиус вектор точки $M(x;y;z)$.

Тогда вектор напряженности H магнитного поля задается равенством:

$$\overline{H}=\frac{1}{\rho^2}\cdot\left[\overline{I},\overline{r}\right]=\frac{1}{\rho^2}\cdot\left\|\begin{pmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & I \\ x & y & z \end{pmatrix}\right\|=\frac{1}{\rho^2}\cdot(-yi+xj+ok)$$

Уравнение векторных линий:

$$\frac{dx}{-y}=\frac{dy}{x}=\frac{dz}{0}\to xdx+ydy=0\to x^2+y^2=c_1>0,\ z=c_2,$$

т.е. векторные линии являются окружностями, лежащими в параллельных плоскостях.

Поток векторного поля

Потоком Π векторного поля $\overline{F}$ через ориентированную поверхность $S^{\downarrow}$ называют поверхностный интеграл первого типа от проекции поля $\overline{F}$ на нормаль к поверхности:

$$\Pi=\iint\limits_{S^{\downarrow}}(F,n_e)ds \qquad (1)$$

где $\overline{n}_e$ – единичный вектор нормали.

Если поверхность замкнутая, то нормаль выбирается внешней. Если $\overline{n}_e=\{\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma\}$, то поток Π представляется интегралом

$$\Pi=\iint\limits_{S^{\downarrow}}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)ds=\iint\limits_{S^{\downarrow}}Pdydz+Qdxdz+Rdxdy \qquad (1)^*$$

Свойство потока.

1. $\iint\limits_{S^{\downarrow}}(F,n_e)ds=-\iint\limits_{S^{\uparrow}}(F,n_e)ds$

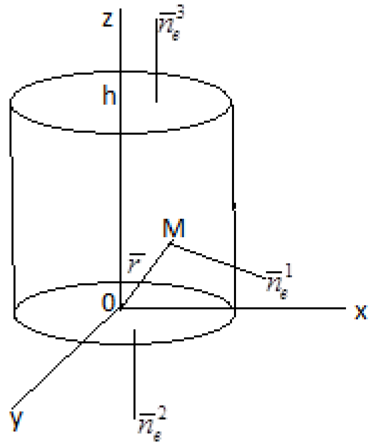
2. линейность

$$\iint\limits_{S^{\downarrow}}(\overline{F}_1+\overline{F}_2,n_e)ds=\iint\limits_{S^{\downarrow}}(\overline{F}_1,n_e)ds+\iint\limits_{S^{\downarrow}}(\overline{F}_2,n_e)ds$$

3. аддитивность по поверхности. Если $S^{\downarrow}=S_1^{\downarrow}\cup S_2^{\downarrow}$, то

$$\iint\limits_{S^{\downarrow}}(\overline{F},\overline{n}_e)ds=\iint\limits_{S_1^{\downarrow}}(\overline{F},\overline{n}_e)ds+\iint\limits_{S_2^{\downarrow}}(\overline{F},\overline{n}_e)ds$$

Пример 2 Вычислить поток векторного поля $\bar{F} = \{x; y; z\}$ через поверхность цилиндра с радиусом основания R и высотой h.



Поверхность цилиндра является объединением поверхностей:

1. S_1 – боковая поверхность цилиндра с внешней нормалью

$$\bar{n}_e^1 = \left\{\frac{x}{R}; \frac{y}{R}; 0\right\} \to (\bar{F}, \bar{n}_e^1) = \frac{x^2 + y^2}{R} = R \to \Pi_1 = \iint_{S_1} R ds = 2\pi R^2 h$$

2. S_2 – нижнее основание

$$\bar{n}_e^2 = \{0; 0; -1\} \to (\bar{F}, \bar{n}_e^2) = -z = 0 \to \Pi_2 = 0$$

3. S_3 – верхнее основание

$$\bar{n}_e^3 = \{0; 0; 1\} \to (\bar{F}, \bar{n}_e^3) = z = h \to \Pi_3 = \iint_{S_3} h ds = \pi h R^2$$

Складываем потоки: $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 = 2\pi h R^2 + \pi h R^2 = 3\pi h R^2$

Методы вычисления потока поля через поверхность

1. Метод проекции (сведение к двойному интегралу)

Пусть поверхность S задается явно уравнением $z = f(x, y)$ и проектируется на область D_{xy} координатной плоскости xoy. Тогда нормаль $\bar{n}_e = \pm \dfrac{grad\left(z - f(x,y)\right)}{\left|grad\left(z - f(x,y)\right)\right|} = \pm \dfrac{-f_x' i - f_y' j + k}{\sqrt{f_x'^2 + f_y'^2 + 1}}$. Знак

$\oplus$ выбирается в случае, когда выбранная нормаль составляет острый угол с осью oz и минус – в противном случае. Тогда

$$\Pi = \iint_S \left(\bar{F}, \bar{n}_e\right) ds = \iint_{D_{xy}} \frac{\left(\bar{F}, \bar{n}_e\right)}{|\cos\gamma|} dxdy,$$

где $\dfrac{1}{|\cos\lambda|} = \sqrt{f_x'^2 + f_y'^2 + 1}$ и вместо z следует подставлять $f(x, y)$.

Пример 3. Найти поток векторного поля $\bar{F}=\{0;y^2;z\}$ через часть поверхности параболоида $z=x^2+y^2$ ограниченной плоскостью $z=2$ и ориентированной внешней нормалью.

Решение

$$\bar{n}_e=\left\{\frac{2x}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}};\frac{2y}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}};-\frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\right\},\left(\bar{F},\bar{n}_e\right)=\frac{2y^3-z}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}},$$

$$\frac{\left(\bar{F},\bar{n}_e\right)}{|\cos\gamma|}=-\frac{\left(\bar{F},\bar{n}_e\right)}{\cos\gamma}=2y^3-z=2y^3-x^2-y^2$$

Тогда $\varPi=\iint\limits_{D_{xy}}\left(2y^3-x^2-y^2\right)dxdy=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{2}}r(2r^3\sin^3\varphi-r^2)dr=\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{8\sqrt{2}}{5}\sin^3\varphi-1\right)d\varphi=-2\pi$

2. Метод проектирования на все три координатные плоскости.

Пусть поверхность S задается неявно уравнением $g(x,y,z)=0$, причем она однозначно проектируется на области D_{xy}, D_{xz}, D_{yz} координатных осей. Пусть единичная нормаль $\bar{n}_e=\pm\{\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma\}=\pm\dfrac{grad g(x,y,z)}{|grad g(x,y,z)|}$ ориентирует поверхность и знак в выражениях

$\begin{cases} ds\cos\alpha=\pm dydz \\ ds\cos\beta=\pm dxdz \\ ds\cos\gamma=\pm dydz \end{cases}$ определяется таким же, как знак соответствующего косинуса.

Тогда поток по поверхности определяется по формуле:

$$\varPi=\pm\iint\limits_{D_{yz}}P(x(y,z),y,z)dydz\pm\iint\limits_{D_{xz}}Q(x,y(x,z),z)dxdz\pm\iint\limits_{D_{xy}}R(x,y,z(x,y))dydz.$$

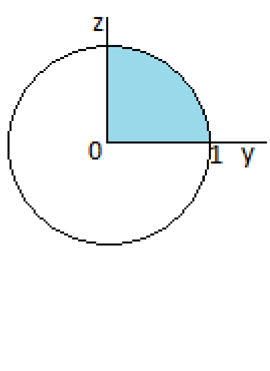
Пример 4. Найти поток векторного поля $\bar{F}=\{xy;yz;xz\}$ через внешнюю сторону сферы $x^2+y^2+z^2=1$, заключенной в первом октанте.

Решение

Вычисление нормали:

$$n=grad(x^2+y^2+z^2-1)=\{2x;2y;2z\}\to n_e=\{x;y;z\}\to\cos\alpha=x\ge0,\cos\beta=y\ge0,\cos\gamma=z\ge0$$

Тогда $\varPi=\iint\limits_{D_{yz}}xydydz+\iint\limits_{D_{xz}}yzdxdz+\iint\limits_{D_{xy}}xzdxdy=3\iint\limits_{D_{yz}}xydydz$, поскольку все интегралы одинаковые.



$$\Pi = 3\iint\limits_{D_{yz}} xydydz = 3\int\limits_0^{\pi/2} \sin\varphi d\varphi \int\limits_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}dr = 3\int\limits_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}dr .$$

Замена переменной: $r = \sin t,\ t \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$

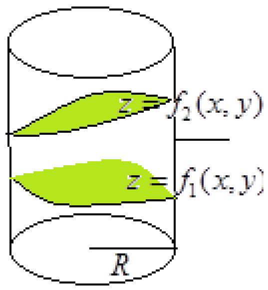
$$\Pi = 3\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 t\cos^2 tdt = \frac{3}{4}\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 2tdt = \frac{3}{8}\int\limits_0^{\pi/2} (1-\cos 4t)dt = \frac{3\pi}{16} .$$

3. Метод введения криволинейных координат на поверхности.

Иногда введение координат на поверхности позволяет найти нормаль, проекцию поля на нормаль и вычислить поток векторного поля через поверхность.

Пример 5 Рассмотрим поверхность S прямого кругового цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$, ограниченного сверху и снизу поверхностями $z = f_1(x,y),\ \ z = f_2(x,y),\ f_1(x,y) \le f_2(x,y),\ x^2 + y^2 = R^2$.

Найти формулу для вычисления потока поля $\overline{F} = \left\{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\right\}$ через поверхность S



Введем координаты
$\varphi \in [0; 2\pi],\ z \in [\, f_1(R\cos\varphi, R\sin\varphi);\ f_2(R\cos\varphi, R\sin\varphi)],\ x = R\cos\varphi,\ y = R\sin\varphi$

Тогда внешняя единичная нормаль $n_e = \{\cos\varphi; \sin\varphi; 0\}$, $ds = Rd\varphi dz$,
$(\overline{F}, n_e) = P(R\cos\varphi, R\sin\varphi, z)\cos\varphi + Q\left(R\cos\varphi, R\sin\varphi, z\right)\sin\varphi$ и

$$\Pi = \iint\limits_S \left(\overline{F}, n_e\right)ds = R\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{f_1(R\cos\varphi, R\sin\varphi)}^{f_2(R\cos\varphi, R\sin\varphi)} (P(R\cos\varphi, R\sin\varphi, z)\cos\varphi + Q\left(R\cos\varphi, R\sin\varphi, z\right)\sin\varphi)dz$$

Например, $\overline{F} = \{x; y; z\}$, $f_1 = 0,\ f_2 = H$

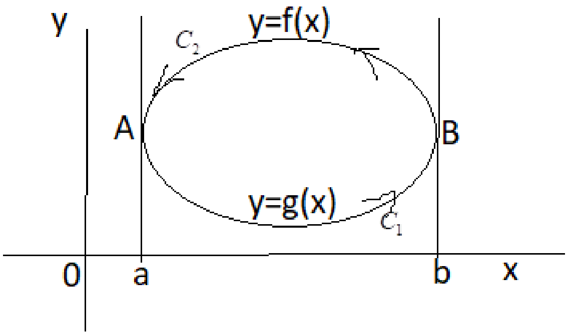
Тогда $\Pi = R\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^H (R\cos^2\varphi + R\sin^2\varphi)dz = 2\pi R^2 H$.

4. Формула Грина

Пусть задано кусочно-гладкое поле $\vec{F} = \left\{P(x,y); Q(x,y)\right\}$, определенное в области D с кусочно-гладкой границей C, ориентированной положительным направлением обхода. Тогда справедлива формула:

$$\oint_C P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \qquad (2)$$

Доказательство.



$$\int_{C\downarrow} P(x,y)dx = \int_{C_1\downarrow} P(x,y)dx + \int_{C_2\downarrow} P(x,y)dx = \int_a^b P(x,g(x)dx + \int_b^a P(x, f(x))dx =$$

$$= \int_a^b P(x,g(x)dx - \int_a^b P(x, f(x))dx = -\int_a^b dx \int_{g(x)}^{f(x)} \frac{\partial}{\partial y} P(x,y)dy = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$$

Аналогично,

$$\oint_C Q(x,y)dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy$$

Объединяя два криволинейных интеграла, получим формулу (2).

Пример. Вычислить криволинейный интеграл второго типа $\oint_C \left(xy + x + y\right)dx + (xy + x - y)dy$, где C – окружность $x^2 + y^2 = ax$, ориентированная в положительном направлении.

Решение

$$P = xy + x + y \to \frac{\partial P}{\partial y} = x + 1, Q = xy + x - y \to \frac{\partial Q}{\partial x} = y + 1$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y - x$$

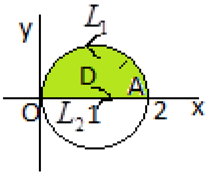
$$\oint_C \left(xy + x + y\right)dx + (xy + x - y)dy = \iint_D (y - x)dxdy =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\sin\varphi - \cos\varphi\right)d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} r^2 dr =$$

$$= \frac{a^3}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3\varphi(\sin\varphi - \cos\varphi)d\varphi = -\frac{a^3}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\varphi d\varphi =$$

$$= -\frac{a^3}{12} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1 + \cos 2\varphi\right)^2 d\varphi = -\frac{a^3}{12} \cdot \frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi a^3}{8}$$

Пример 7. Вычислить по формуле Грина криволинейный интеграл: $\int_L Pdx + Qdy$ для поля $\bar{F} = \left\{e^x \sin y - y; e^x \cos y - 1\right\}$ по верхней полуокружности $x^2 + y^2 = 2x$, проходимой от точки $A(2;0)$ до точки $O(0;0)$



$Q'_x - P'_y = e^x \cos y - e^x \cos y + 1 = 1$. Тогда по формуле Грина

$$\int_{L_1 \cup L_2} Pdx + Qdy = \iint_D 1dxdy = \frac{\pi}{2} = \int_{L_1} Pdx + Qdy + \int_{L_2} Pdx + Qdy$$

Интеграл по L_2 (отрезку) равен: $\int_{L_2} Pdx + Qdy = \int_0^2 P(x,0)dx = 0$ и $\int_L Pdx + Qdy = \frac{\pi}{2}$.

5. Теорема Гаусса-Остроградского

Пусть область $G_D^{f,g} = \left\{(x,y,z) \in R^3 : (x,y) \in D, g(x,y) \le z \le f(x,y)\right\}$ стандартная по оси z ограниченная цилиндрической поверхностью с направляющей ∂D и образующей, параллельной оси oz, и двумя поверхностями $z = g(x,y)$ (нижняя) и $z = f(x,y)$ (верхняя). Поверхность, ограничивающая область $G_D^{f,g}$, ориентирована внешней нормалью.

Вычислим тройной интеграл

$$\iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint_D dxdy \int_{g(x,y)}^{f(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz =$$
$$\iint_D R(x,y,f(x,y))dxdy - \iint_D R(x,y,g(x,y))dxdy =$$
$$= \iint_{S_2} R(x,y,z)dxdy + \iint_{S_1} R(x,y,z)dxdy$$

Поверхностный интеграл по боковой поверхности S_3 равен нулю, поскольку она проектируется на плоскость xoy в границу ∂D, имеющую меру ноль. Тогда интеграл по поверхности $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ равен

$$\iint_S R(x,y,z)dxdy = \iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz \qquad (2)$$

Аналогичные формулы справедливы для других осей ox и oy:

$$\iint_S Q(x,y,z)dxdz = \iiint_G \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz, \quad \iint_S P(x,y,z)dydz = \iiint_G \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz \qquad (2)^*$$

Объединяя (2) и (2)*,получим формулу Гаусса- Остроградского:

$$\iint\limits_S Pdydz+Qdxdz+Rdydx=\iiint\limits_G \left(P'_x+Q'_y+R'_z\right)dxdydz \qquad (3)$$

Пример 6. Вычислить поток поля $\bar{F}=\left\{\dfrac{x^2y}{1+y^2}+6yz^2;2xarctgy;-\dfrac{2xz(1+y)+1+y^2}{1+y^2}\right\}$ через внешнюю сторону поверхности параболоида $z=1-x^2-y^2,\ z\ge 0$

$P'_x+Q'_y+R'_z=\dfrac{2xy}{1+y^2}+\dfrac{2x}{1+y^2}-\dfrac{2x(1+y)}{1+y^2}=0$. Тогда поток по замкнутой поверхности $S=S_1\cup S_2$ (параболоид + круг) равен нулю. Поток по кругу $x^2+y^2\le 1$ на плоскости xoy равен:

$$\bar{F}_{z=0}=\left\{\frac{x^2y}{1+y^2};2xarctgy;-1\right\},\ n_e=\{0;0;-1\}\to\left(F,n_e\right)=1\to \mathit{П}=\iint\limits_{S_2}1ds=\pi$$

Тогда поток по поверхности параболоида $\iint\limits_{S_1}\left(\bar{F},\bar{n}_e\right)ds=-\pi$

Циркуляция векторного поля

Циркуляцией векторного поля $\bar{F}=\{P;Q;R\}$ вдоль замкнутой ориентированной кривой L называют интеграл

$$\mathit{Ц}=\oint\limits_L Pdx+Qdy+Rdz=\oint\limits_L\left(\bar{F},dr\right)$$

Пример 8. Вычислить циркуляцию векторного поля $\bar{F}=\left\{-y^3;x^3\right\}$ вдоль эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, проходимого в положительном направлении.

Параметризация эллипса $\begin{cases}x=a\cos\varphi\\ y=b\sin\varphi\end{cases}$, $\varphi\in[0;2\pi)$, $d\bar{r}=\{dx;dy\}=\{-a\sin\varphi d\varphi;b\cos\varphi d\varphi\}$

$$Pdx+Qdy=(ab^3\sin^4\varphi+ba^3\cos^4\varphi)d\varphi\to\int\limits_L Pdx+Qdy=ab\int\limits_0^{2\pi}(b^2\sin^4\varphi+a^2\cos^4\varphi)d\varphi=$$

$$=\frac{ab}{4}\int\limits_0^{2\pi}(b^2(1-\cos2\varphi)^2+a^2(1+\cos2\varphi)^2)d\varphi=\frac{3\pi ab(a^2+b^2)}{4}$$

Ротор векторного поля

Ротором векторного поля $\bar{F}=\{P;Q;R\}$ называется вектор $rot\bar{F}=\begin{pmatrix} i & j & k\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ P & Q & R\end{pmatrix}$.

Пример 9. Найти ротор поля $\bar{F}=\left\{x+z;y+z;x^2+z\right\}$

$$rot\bar{F}=\begin{pmatrix} i & j & k\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ x+z & y+z & x^2+z\end{pmatrix}=\{-1;1-2x;0\}$$

Свойства ротора

1. линейность

$rot\left(F_1+F_2\right)=rotF_1+rotF_2,\ \ rot(\lambda\overline{F})=\lambda rot\overline{F}$

2. $rot(\varphi(x,y,z)\cdot\overline{F})=\varphi\cdot rot\overline{F}+\left[grad\varphi,\overline{F}\right]$

$$rot(\varphi\cdot\overline{F})=\begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \varphi\cdot P & \varphi\cdot Q & \varphi\cdot R \end{pmatrix}=\left(\varphi\cdot R'_y+\varphi'_y\cdot R-\varphi\cdot Q'_z-\varphi'_z\cdot Q\right)i-\left(\varphi\cdot R'_x+\varphi'_x\cdot R-\varphi\cdot P'_z-\varphi'_z\cdot P\right)j+$$

$$+\left(\varphi\cdot Q'_x+\varphi'_x\cdot Q-\varphi\cdot P'_y-\varphi'_y\cdot P\right)k=\varphi\cdot rot\overline{F}+\begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial\varphi/\partial x & \partial\varphi/\partial y & \partial\varphi/\partial z \\ P & Q & R \end{pmatrix}=\varphi\cdot rot\overline{F}+\left[grad\varphi,\overline{F}\right]$$

3. Если $\overline{a},\overline{b}-$ постоянные поля (векторы), $\overline{r}=\{x;y;z\}$, то $rot\left(\left(\overline{r},\overline{a}\right)\cdot\overline{b}\right)=\left[\overline{a},\overline{b}\right]$

Если $\overline{F}=\overline{b}$, $\varphi=(\overline{r},\overline{a})=xa_1+ya_2+za_3$, то по свойству 2

$rot\left(\left(\overline{r},\overline{a}\right)\cdot\overline{b}\right)=\left[\mathrm{grad}\,\varphi,\overline{b}\right]=\left[\overline{a},\overline{b}\right]$

4. Пусть $\overline{r}=\{x;y;z\}$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $f(r)-$ дифференцируемая функция. Тогда

$rot(f(r)\cdot\overline{a})=\dfrac{f'(r)}{r}\cdot\left[\overline{r},\overline{a}\right]$

Действительно, по свойству 2 для $\overline{F}=\overline{a}$ имеем:

$rot(f(r)\cdot\overline{a})=\left[gradf(r),\overline{a}\right]=\left[\dfrac{f'}{r}\overline{r},\overline{a}\right]=\dfrac{f'}{r}\left[\overline{r},\overline{a}\right]$

5. Для полей $\overline{F}_1,\overline{F}_2$ справедливо равенство $div\left[\overline{F}_1,\overline{F}_2\right]=\left(\overline{F}_2,rot\overline{F}_1\right)=-(\overline{F}_1,rot\overline{F}_2)$

Действительно, $rot\overline{F}_1=\Delta\times\overline{F}_1$, где $\Delta=\left\{\dfrac{\partial}{\partial x};\dfrac{\partial}{\partial y};\dfrac{\partial}{\partial z}\right\}$ - оператор Гамильтона

$$(\overline{F}_2,rot\overline{F}_1)=\begin{vmatrix} P_2 & Q_2 & R_2 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P_1 & Q_1 & R_1 \end{vmatrix}=\left|\text{нечетная перестановка}\right|=-\begin{vmatrix} P_1 & Q_1 & R_1 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P_2 & Q_2 & R_2 \end{vmatrix}=$$

$$=-\left(\overline{F}_1,rot\overline{F}_2\right)=\left|\text{перестановка строк}\right|=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P_1 & Q_1 & R_1 \\ P_2 & Q_2 & R_2 \end{vmatrix}=div\left[\overline{F}_1,\overline{F}_2\right]$$

Теорема Стокса

Циркуляция поля $\bar{F} = \{P;Q;R\}$ по замкнутому, положительно ориентируемому контуру L на поверхности S равна потоку поля $rot\bar{F}$ через поверхность S.

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_S \left(rot\bar{F}, \bar{n}_e\right) dS \qquad (7)$$

Док. Пусть поверхность S задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v), (u,v) \in D_{u,v} \\ z = z(u,v) \end{cases}$

$$\oint\limits_L Pdx = \oint\limits_{\partial D_{uv}} P\left(x'_u du + x'_v dv\right) = \textit{формула Грина} = \iint\limits_{D_{uv}} \left(\frac{\partial}{\partial u}\left(Px'_v\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(Px'_u\right)\right) dudv =$$
$$= \iint\limits_{D_{uv}} \left((P'_x x'_u + P'_y y'_u + P'_z z'_u)x'_v + Px''_{uv} - ((P'_x x'_v + P'_y y'_v + P'_z z'_v)x'_u + Px''_{uv})\right) dudv =$$
$$= \iint\limits_{D_{uv}} \left(P'_z(z'_u x'_v - z'_v x'_u) - P'_y(x'_u y'_v - x'_v y'_u)\right) dudv = \iint\limits_{D_{uv}} (P'_z B - P'_y C) dudv = \iint\limits_S (P'_z \cos\beta - P'_y \cos\gamma) ds$$

Напоминаем, что $r'_u \times \bar{r}'_v = \{A;B;C\}$, $\cos\alpha = \dfrac{A}{|r'_u \times \bar{r}'_v|}; \cos\beta = \dfrac{B}{|r'_u \times \bar{r}'_v|}; \cos\gamma = \dfrac{C}{|r'_u \times \bar{r}'_v|}$

Аналогично, $\oint\limits_L Qdy = \iint\limits_S \left(Q'_x \cos\gamma - Q'_z \cos\alpha\right) ds$ и $\oint\limits_L Rdz = \iint\limits_S \left(R'_y \cos\alpha - R'_x \cos\beta\right) ds$.

Складывая интегралы, получим

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_S \left((R'_y - Q'_z)\cos\alpha - (R'_x - P'_z)\cos\beta + (Q'_x - P'_y)\cos\gamma\right) ds = \iint\limits_S \left(rot\bar{F}, \bar{n}_e\right) ds$$

Пример 10. Вычислить циркуляцию векторного поля $\bar{F} = \{y; x^2; -z\}$ по контуру $L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 3 \end{cases}$

а) непосредственно; б) по формуле Стокса

$$Ц = \oint\limits_L ydx + x^2dy - zdz = \left| \begin{cases} x = 2\cos\varphi \\ y = 2\sin\varphi \\ z = 3 \end{cases} \to \begin{cases} dx = -2\sin\varphi d\varphi \\ dy = 2\cos\varphi d\varphi \\ dz = 0 \end{cases} \right| = \int\limits_0^{2\pi} \left(-2\sin^2\varphi + 8\cos^3\varphi\right) d\varphi = -4\pi$$

По формуле Стокса:

$$rot\bar{F} = \left| \begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y & x^2 & -z \end{pmatrix} \right| = \{0;0;2x-1\},\ \bar{n}_e = \{0;0;1\} \to \left(rot\bar{F}, \bar{n}_e\right) = 2x - 1$$

$$Ц = \iint\limits_{\odot} (2x-1) ds = \iint\limits_{\odot} 2x dxdy - 4\pi = 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 r^2 \cos\varphi dr - 4\pi = 0 - 4\pi = -4\pi$$

Вопросы к экзамену

1. Формула Грина для сведения криволинейного интеграла к двойному.

2. Формула Остроградского-Гаусса для сведения поверхностного интеграла к тройному.

3. Ротор векторного поля. Свойства ротора

4. Циркуляция векторного поля. Формула Стокса для сведения криволинейного интеграла к поверхностному