Кратные интегралы и ряды, 3 семестр

Лектор: Теляковский Дмитрий Сергеевич
Автор конспекта: Клинов Никита

Осенний семестр 2022-23 гг.

Оглавление

Часть I

Функциональные последовательности и ряды

Глава 1

Числовые ряды

1.1 Понятие ряда

Определение: Ряд – бесконечная сумма членов некоторой последовательности a_n.
Обозначение:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ или } \sum a_n$$

Определение: Ряд называется сходящимся, если последовательность $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ сходится и тогда данный ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$$

Теорема 1.1.1 (критерий Коши). *Ряд* $\sum a_n$ *сходится* $\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N} : m > n \geq N$

$$\left| \sum_{i=n+1}^{m} a_i \right| < \varepsilon$$

Теорема 1.1.2 (Необходимое условие сходимости ряда). *Если ряд* $\sum a_n$ *сходится, то* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Пример: Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ сходится при $|z| < 1$, при этом очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} z^n = 0$.

1.2 Действия с рядами

Теорема 1.2.1 (Арифметическое свойство рядов). *Если* $\sum a_n$ *и* $\sum b_n$ *сходятся, то* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\sum \alpha a_n + \beta b_n = \alpha \sum a_n + \beta \sum b_n$$

Замечание: Если $\sum a_n + b_n$ сходится, то это не значит, что $\sum a_n$ и $\sum b_n$ сходятся.

1.3 Ряды с неотрицательными членами

В данном параграфе все ряды подразумеваются как ряды с неотрицательными членами.

Теорема 1.3.1. *Ряд* $\sum a_n$ *сходится* $\Leftrightarrow$ *последовательность частичных сумм* $\{S_n\}$ *ограничена.*

Теорема 1.3.2 (Мажоритарный признак/признак сравнения)**.** *Имеем два знакоположительных ряда* $\sum a_n$ *и* $\sum b_n$*.*

1. *Если* $\forall n\, a_n \geq b_n$*, то*
   (a) $\sum a_n$ *сходится* $\Rightarrow \sum b_n$ *сходится,*
   (b) $\sum b_n$ *расходится* $\Rightarrow \sum a_n$ *расходится.*
2. *Если* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ *и* $\sum b_n$ *сходятся и расходятся одновременно.*

Теорема 1.3.3 (Признак д'Аламбера)**.** *Для знакоположительного ряда* $\sum a_n$ *справедливы следующие утверждения:*

1. *Если* $\exists q \in \mathbb{R}\, \forall k \in \mathbb{N} : \dfrac{a_{k+1}}{a_k} \leq q < 1$*, то ряд сходится;*
2. *Если* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{k+1}}{a_k} = q$*, то*
   (a) *Если* $q < 1$*, то ряд сходится,*
   (b) *Если* $q > 1$*, то ряд расходится.*

Теорема 1.3.4 (Радикальный признак Коши)**.** *Пусть* $q = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n}$ *для знакоположительного ряда* $\sum a_n$*. Тогда:*

1. *Если* $q < 1$*, то ряд сходится*
2. *Если* $q > 1$*, то ряд расходится.*

Теорема 1.3.5 (Интегральный признак сходимости)**.** *Пусть* $f(x)$ *– монотонно убывающая функция,* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$*. Тогда* $\sum f(n)$ *и* $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ *сходятся и расходятся одновременно.*

Например, $\sum \frac{1}{n^p}$ сходится $\Leftrightarrow \int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^p}$ сходится при $p > 1$.

1.4 Знакочередующийся ряд

Теорема 1.4.1 (Теорема Лейбница)**.** *Неотрицательная последовательность* $\{a_n\}$ *убывает и* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$*. Тогда ряд* $\sum(-1)^n a_n$ *сходится.*

1.5 Абсолютная и условная сходимость

$\sum a_n$ сходится **абсолютно**, если сходится ряд $\sum |a_n|$.
$\sum a_n$ сходится **условно**, если сходится ряд $\sum a_n$, но ряд $\sum |a_n|$ расходится.

По неравенству треугольника и по критерию Коши:

$$\left|\sum_{i=n+1}^{m} a_i\right| \leq \sum_{i=n+1}^{m} |a_i| < \varepsilon$$

– из абсолютной сходимости следует сходимость.

Лемма 1.5.1. *Имеется знакоположительный ряд $\sum a_n$. Пусть $\{a'_i\}$ – некоторая перестановка исходной последовательности. Тогда $\sum a'_n$ сходится, причём*

$$\sum a'_n = \sum a_n$$

Доказательство: Пусть $\{S_n\}$ – последовательность частичных сумм $\{a_n\}$, а $\{S'_n\}$ – последовательность частичных сумм $\{a'_n\}$. Т.к. $\sum a_n$ сходится, то $\{S_n\}$ ограничена. Докажем ограниченность $\{S'_n\}$
$\sum a_n$ сходится $\Rightarrow \exists M > 0\ \forall N \geq 1 : \sum_{n=1}^{N} a_n < M$ (ограниченность S_n)
Тогда $\forall N_1\ \sum_{n=1}^{N_1} a'_n \leq \sum_{n=1}^{N_2} a_n < M \Rightarrow \{S'_n\}$ ограничена, где N_2 – максимальный номер члена из $a'_1, a'_2, \ldots, a'_{N_1}$ в исходной последовательности.
Пояснение: Допустим, мы как-то перемешали члены последовательности $\{a_n\}$ и она стала иметь следующий вид: $a_5, a_1, a_9, a_4, a_{11}, \ldots$ Если брать $N_1 = 5$, то максимальный номер в исходной последовательности $N_2 = 11$. И тогда утверждается, что $a_5 + a_1 + a_9 + a_4 + a_{11} \leq a_1 + a_2 + \ldots + a_{11} < M$, т.к. правая сумма содержит все слагаемые левой суммы.
Получаем что ряд $\sum a'_n$ сходится причём $\sum a'_n \leq \sum a_n$. Аналогично можно доказать что $\sum a'_n \geq \sum a_n$, если рассматривать $\{a_n\}$ как перестановку $\{a'_n\}$. Получаем, что $\sum a'_n = \sum a_n$. □

Теорема 1.5.1. *Пусть ряд $\sum a_n$ сходится абсолютно. Тогда для любой перестановки $\{a'_n\}$ последовательности $\{a_n\}$ справедливо, что:*

$$\sum a'_n = \sum a_n$$

и ряд $\sum a'_n$ также сходится абсолютно.

Доказательство: Рассмотрим два случая:

1. Действительный случай $\mathbb{R}$

   Введём следующие последовательности:

$$a_k^+ = \begin{cases} a_k, & \text{если } a_k \geq 0, \\ 0, & \text{если } a_k < 0. \end{cases} \qquad a_k^- = \begin{cases} -a_k, & \text{если } a_k \leq 0, \\ 0, & \text{если } a_k > 0. \end{cases}$$

   Тогда $a_k = a_k^+ - a_k^-$.

   Ряд $\sum a_k^+$ сходится по признаку сравнения с рядом $\sum |a_k|$ ($\forall k\ a_k^+ \leq |a_k|$). Аналогично сходится ряд $\sum a_k^-$. Тогда по лемме сходятся ряды $\sum {a'_k}^+$ и $\sum {a'_k}^-$. Тогда мы можем разбить ряд на два:

$$\sum a'_k = \sum ({a'_k}^+ - {a'_k}^-) = \sum {a'_k}^+ - \sum {a'_k}^- = \sum a_k^+ - \sum a_k^- = \sum (a_k^+ - a_k^-) = \sum a_k$$

2. Комплексный случай $\mathbb{C}$

   По условии теоремы $\sum w_k = \sum (u_k + iv_k)$ сходится абсолютно. Из определения модуля комплексного числа $|u_k|, |v_k| \leq |w_k|$. Тогда по признаку сравнения абсолютно сходятся ряды $\sum u_k$ и $\sum v_k$. Берём перестановку $\{w'_k\} = \{u'_k + iv'_k\}$. По пункту 1 ряды $\sum u'_k$ и $\sum v'_k$ сходятся. Тогда

$$\sum w'_k = \sum (u'_k + iv'_k) = \sum u'_k + i \sum v'_k = \sum u_k + i \sum v_k = \sum (u_k + iv_k) = \sum w_k$$

□

Абсолютная сходимость важна при перестановках. Если ряд сходится условно, то при перестановке членов ряда сумма может поменяться, либо ряд вообще может перестать сходиться.

Пример: $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots = \ln 2.$

Ряд сходится условно. Переставим члены следующим образом. Первым членом будет 1. Дальше по порядку берём отрицательные члены до тех пор, пока частичная сумма не станет меньше нуля. Затем по порядку берём положительные члены до тех пор, пока частичная сумма не станет больше единицы и так далее. Мы можем делать так, потому что ряд абсолютно не сходится, а значит последовательность частичных сумм модулей неограничена, а значит, набирая таким образом элементы, мы всегда сможем получить частичную сумму меньше 0 или больше 1. Полученный ряд естественно не сходится, т.к. последовательность частичных сумм колеблется между 0 и 1.

Теорема 1.5.2. *Ряды $\sum u_k$ и $\sum v_k$ сходятся абсолютно. $\{w_k\}$ – последовательность, составленная из попарных произведений взятых по 1 разу в произвольном порядке (т.е. последовательность, члены который имеют вид $u_i v_j$, и ни одна пара членов последовательности не имеет одинаковые индексы i и j). Тогда $\sum w_k$ сходится абсолютно и*

$$\sum w_k = \sum u_k \cdot \sum v_k$$

Доказательство:

1. Доказательство абсолютной сходимости

   Пусть $\{i_k\}$ – последовательность индексов членов последовательности первого ряда в последовательности w_k, а $\{j_k\}$ – последовательность индексов последовательности второго ряда. Тогда $\forall n \in \mathbb{N}$:

   $$\sum_{k=1}^{n} |w_k| = \sum_{k=1}^{n} |u_{i_k} v_{j_k}| \leq \sum_{k=1}^{N} |u_k| \cdot \sum_{k=1}^{N} |v_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |u_k| \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |v_k|,$$

   где $N = \max(\max\limits_{k\in\{1,\ldots,n\}} i_k, \max\limits_{k\in\{1,\ldots,n\}} j_k)$. Получается, что последовательность частичных сумм $\{|w_k|\}$ ограниченна произведением рядов из модулей $\{|u_k|\}$ и $\{|v_k|\}$, а значит $\sum w_k$ сходится абсолютно.

2. Докажем равенство Раз ряд $\sum w_k$ сходится абсолютно, то его члены мы можем расставить в любом порядке. Возьмём следующий порядок: $u_1v_1, u_2v_1, u_1v_2, u_2v_2, u_3v_1, u_1v_3, u_3v_2, u_2v_3, u_3v_3, \ldots$. Заметим, что в первых N^2 членах последовательности такого порядка перечислены все возможные пары индексов, не превышающие N. Тогда

   $$\sum_{k=1}^{N^2} w_k = \sum_{k=1}^{N} u_k \cdot \sum_{k=1}^{N} v_k$$

   Если устремить N к бесконечности, то получим искомое равенство:

   $$\sum_{k=1}^{\infty} w_k = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \cdot \sum_{k=1}^{\infty} v_k$$

□

1.6 Признаки Абеля и Дирихле

Имеется ряд $\sum a_k b_k$, $\{a_k\}$ – монотонная последовательность.

Теорема 1.6.1 (Признак Абеля)**.** *Если* $\{a_k\}$ *в дополнение к условиям выше ограничена, а* $\sum b_k$ *сходится, то ряд* $\sum a_k b_k$ *сходится.*

Теорема 1.6.2 (Признак Дирихле)**.** *Если* $\{a_k\} \to 0$ *в дополнение к условиям выше , а последовательность частичных сумм* $\{\sum b_k\}$ *ограничена, то ряд* $\sum a_k b_k$ *сходится.*

1.7 Оценка остатка

В некоторых ситуациях требуется посчитать сумму ряда с некоторой точностью $\varepsilon > 0$. Задача состоит в том, чтобы узнать сколько нужно слагаемых для того, чтобы посчитать сумму ряда с данной точностью, т.е. пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S_n + R_n,$$

где S_n – n-ая частичная сумма, а R_n – остаток. Нужно найти такое минимальное n, что $|R_n| < \varepsilon$.

Примеры: $\varepsilon = 10^{-3}$

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e.$

   $$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots\right)$$

   $$< \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots\right) = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{(n+1)!} < \varepsilon$$

   При $n = 5$ $R_n = \frac{7}{6} \cdot \frac{1}{720} \approx 0,0016\ldots > \varepsilon.$

   При $n = 6$ $R_n = \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{5040} \approx 0,000227\ldots < \varepsilon.$

2. Применение интегралов для оценки рядов Если $f(x)$ – выпуклая вниз на отрезке $[1; +\infty]$ функция, то справедлива следующая оценка:

   $$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \leq \int\limits_{n}^{\infty} f(x)dx$$

   Рассмотрим ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

   $$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \int\limits_{n}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{n} < \varepsilon = 10^{-3} \Rightarrow n > 10^3$$

Глава 2

Функциональные последовательности и ряды

2.1 Сходимость и равномерная сходимость функциональных последовательностей

Рассматривается последовательность $\{f_n(x)\}$ функций на множестве $X \subset \mathbb{R}$.
Определение: $\{f_n\}$ сходится на X (поточечно), если $\forall x \in X$ числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится.
Обозначение: $f_n(x) \to f(x)$ на X.
Определение: Расстояние по Чебышёву между функциями $f(x)$ и $g(x)$ на множестве X – функция $\rho(f, g)$:

$$\rho(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$

Определение 1: Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится к функции $f(x)$, если $\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \, \forall n > n_\varepsilon, \forall x \in X$:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Определение 2: Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится к функции $f(x)$, если последовательность $\{\rho_n\} = \{\rho(f, f_n)\} \to 0$ при $n \to \infty$.
Обозначение: $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$.
На рисунке 2.1 представлен график некоторой функции $f(x)$, выделенный красным цветом. Чёрным цветом на рисунке показан график функции $f_n(x)$. Серой областью выделена так называемая ε-трубочка, которая показывает пределы, в которых может находится функция $f_n(x)$:

$$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$$

Если для каждой такой трубочки найдётся номер N, начиная с которого все функции $f_n(x)$ будут находиться в пределах этой трубочки, то последовательность сходится равномерно к $f(x)$.

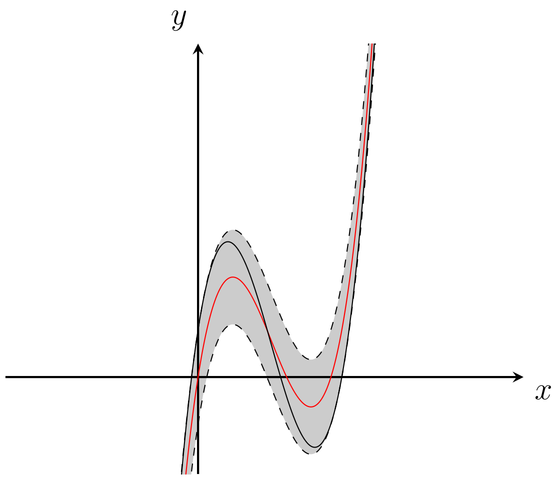


Рис. 2.1: Графическое представление равномерной сходимости

Определение: Функциональный ряд $\sum u_n(x)$, $x \in X$ сходится равномерно, если последовательность частичных сумм $S_m = \{\sum_{n=1}^{m} u_n(x)\}$ сходится равномерно.

Теорема 2.1.1 (Критерий Коши)**.** *$f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на X тогда и только тогда, когда $f_n(x)$ фундаментальная в смысле равномерной метрики (метрики Чебышева), т.е.* $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n, m > n_\varepsilon\ \forall x \in X$:

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Доказательство:

1. Доказательство необходимости.
   По определению равномерной сходимости $\forall \varepsilon > 0\, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\, \forall n > n_\varepsilon, \forall x \in X$:

   $$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

   Тогда мы можем взять два натуральных числа $m, n > n_\varepsilon$ и воспользоваться неравенством треугольника:

   $$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2},\ |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \varepsilon > |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| \geq |f_n(x) - f_m(x)|$$

2. Доказательство достаточности
   Зафиксируем некоторый $x' \in X$. Тогда $\{f_n(x')\}$ – фундаментальная числовая последовательность, которая по критерию Коши для числовой последовательности сходится. Пусть $\forall x \in X$:

   $$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

   Докажем, что $f_n(x)$ равномерно сходится к $f(x)$. $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n, m > n_\varepsilon\ \forall x \in X$:

   $$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

   Сделаем предельный переход: рассмотрим данное выражение при $m \to \infty$. Получим, что:

   $$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \Rightarrow f_n(x) \rightrightarrows f(x)$$

$\square$

Теорема 2.1.2 (Критерий Коши для функциональных рядов)**.** *Функциональный ряд* $\sum u_n(x)$ *сходится равномерно на* X *тогда и только тогда, когда* $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n > n_\varepsilon, p \in \mathbb{N}$ $\forall x \in X$:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon$$

Доказательство сводится к критерию Коши для функциональных последовательностей.

Теорема 2.1.3 (Необходимое условие сходимости функционального ряда)**.** *Если* $\sum u_k(x)$ *сходится на* X *равномерно, то* $u_k(x) \rightrightarrows 0$ *на* X.

Доказательство. Воспользуемся критерием Коши: $\forall\varepsilon > 0\,\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\,\forall p \in \mathbb{N}\,\forall x \in X$:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon$$

Раз неравество выполняется при всех натуральных p, то возьмём $p = 1$:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+1} u_k(x)\right| = |u_{n+1}(x)| < \varepsilon$$

Правое неравенство означает равномерную сходимость $u_k(x)$ к нулю. □

Теорема 2.1.4 (Признак Вейерштрасса равномерной сходимости)**.** *Имеется функциональный ряд* $\sum u_k(x)$ *на* X. *Если существует такая числовая последовательность* $\{\alpha_k\}$, *что* $\forall x \in X$ $|u_k(x)| \le \alpha_k$ *и* $\sum \alpha_k$ *сходится, то* $\sum u_k(x)$ *сходится абсолютно и равномерно.*

Доказательство. Воспользуемся критерием Коши для числового ряда и неравенством треугольника: $\forall\varepsilon > 0\,\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\,\forall n > n_\varepsilon$, $\forall p \in \mathbb{N}$:

$$\varepsilon > \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k \ge \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \ge \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right|$$

Последние два неравенства означают абсолютную и равномерную сходимости соответственно. □

2.2 Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов

Теорема 2.2.1 (Теорема о предельном переходе)**.** *Пусть* $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ *на* $(a;b)$ *и* $\forall n \in \mathbb{N}$ *существует конечный предел при* $x \to a+0$ *у* $f_n(x)$. *Тогда существует конечный предел при* $x \to a+0$ *у* $f(x)$ *и*

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to a+0} f_n(x)\right)$$

Доказательство. Пусть $A_n = \lim_{x\to a+0} f_n(x)$.

1. Докажем, что $\{A_n\}$ сходится.
   Т.к. $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, то воспользуемся критерием Коши: $\forall\varepsilon > 0\,\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\,\forall n, m > n_\varepsilon\,\forall x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Сделаем предельный переход: устремим x к a справа. Тогда получим, что $|A_n - A_m| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Отсюда A_n – фундаментальная числовая последовательность, т.е. по критерию Коши она сходится. Пусть она сходится к A.

2. Докажем, что $f(x) \to A$ при $x \to a+0$.
$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \, \forall n > n_\varepsilon, \forall x \in (a;b)$:

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{и} \quad |A_n - A| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Возьмём $n = n_\varepsilon + 1$. Тогда, т.к. $f_n(x)$ сходится к A_n по условию, то $\exists \delta_{n_\varepsilon} > 0 \; \forall x \in (a; a + \delta_{n_\varepsilon})$:

$$|f_n(x) - A_n| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Получаем, что $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta_\varepsilon = \delta_{n_\varepsilon} > 0 \; \forall x \in (a; a + \delta_\varepsilon)$:

$$|f(x) - A| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - A_n| + |A_n - A| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

Что и требовалось доказать.

□

Теорема 2.2.2 (Теорема о предельном переходе для функциональных рядов)**.** $\sum u_k(x)$ *сходится равномерно на* $(a;b)$ *и* $\forall k \in \mathbb{N}$ $u_k(x) \to u_k$ *при* $x \to a+0$. *Тогда ряд* $\sum u_k(x)$ *сходится и*

$$\sum u_k = \lim_{x \to a+0} \left(\sum u_k(x) \right)$$

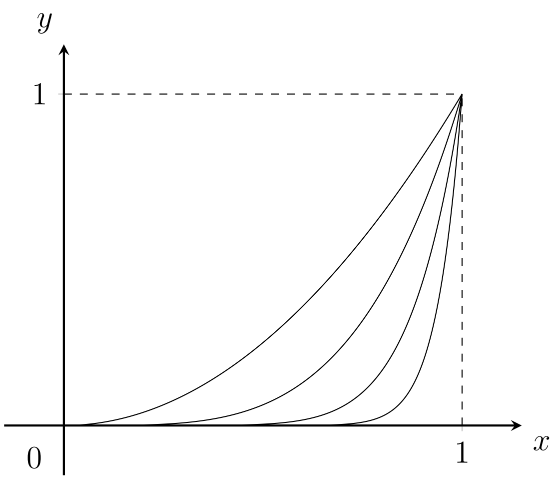
Теорема 2.2.3 (Теорема о последовательности непрерывных функций)**.** $\forall n \in \mathbb{N} f_n(x)$ – *непрерывная функция на* $\langle a;b \rangle$ *и* $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ *на* $\langle a;b \rangle$. *Тогда* $f(x)$ – *непрерывная на* $\langle a;b \rangle$ *функция.*

Доказательство. Для любой точки $x_0 \in \langle a;b \rangle$ $f_n(x) \to f_n(x_0)$ при $x \to x_0$. $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $(x_0; b\rangle$. Тогда по теореме 2.2.1 существует конечный предел у $f(x)$ при $x \to x_0 + 0$ и он равен:

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = \lim_{n \to \infty} \left(\lim_{x \to x_0+0} f_n(x) \right) = \lim_{n \to \infty} f_n(x_0) = f(x_0)$$

Отсюда следует односторонняя непрерывность. На самом деле в теореме 2.2.1 необязательно использовать односторонний предел справа крайней точки. Доказательство пройдёт для любой точки $(a;b)$. Поэтому на самом деле из этой теоремы следует непрерывность. □

Пример: Функциональная последовательность $f_n(x) = x^n$ на $X = [0;1]$. При $n \to \infty$ $x_n \to 0$, если $x \in [0;1)$ и $x \to 1$, если $x = 1$. Получаем, что функция $f(x)$, к которой последовательность сходится поточечно, разрывна, а значит равномерной сходимости нет.



Теорема 2.2.4 (Теорема о непрерывном функциональном ряде)**.** *Пусть* $\forall n \in \mathbb{N}\, u_n(x)$ *– непрерывная функция на* $\langle a;b\rangle$*. Если* $\sum u_n(x)$ *сходится на* $\langle a;b\rangle$ *равномерно, то* $\sum u_k(x)$ *– непрерывная функция.*

Теорема 2.2.5 (Теорема об интегральном переходе для функциональных последовательностей)**.** *Пусть* $\forall n \in \mathbb{N}\, f_n(x)$ *– интегрируемая по Риману функция на отрезке* $[a;b]$ *и* $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ *на* $[a;b]$*. Тогда* $f(x)$ *интегрируема на* $[a;b]$ *по Риману и*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)dx$$

Доказательство. Пусть $I_n = \int\limits_a^b f_n(x)dx$.

1. Докажем, что I_n сходится. Воспользуемся тем, что $f_n(x)$ равномерно сходится к $f(x)$, а значит эта функциональная последовательность фундаментальна в смысле метрики Чебышева по критерию Коши, т.е. $\forall \varepsilon > 0\, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\, \forall m,n > n_\varepsilon\, \forall x \in [a;b]:$

$$\rho(f_n, f_m) < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

   Тогда при тех же условиях:

$$|I_n - I_m| = \left|\int\limits_a^b f_n(x)dx - \int\limits_a^b f_m(x)dx\right| = \left|\int\limits_a^b (f_n(x) - f_m(x))dx\right| \leq \int\limits_a^b |f_n(x) - f_m(x)|dx \leq$$

$$\leq \sup_{x\in[a;b]} |f_n(x) - f_m(x)|(b-a) = \rho(f_n, f_m)(b-a) < \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(b-a) = \varepsilon$$

   По критерию Коши для числовой последовательности $\{I_n\}$ сходится. Пусть $I = \lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

2. Докажем, что $\exists \int\limits_a^b f(x)dx = I$.

   (a) $\forall \varepsilon > 0\, \exists n'_\varepsilon \in \mathbb{N}\, \forall n > n'_\varepsilon\, \forall x \in [a;b]:$

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

   по условию. Тогда $\forall (P,\xi):$

$$\left|\sum_{j=1}^{N_P} f(\xi_j)\Delta x_j - \sum_{j=1}^{N_P} f_n(\xi_j)\Delta x_j\right| = \left|\sum_{j=1}^{N_P}(f(\xi_j) - f_n(\xi_j))\Delta x_j\right| \leq \sum_{j=1}^{N_P} |f(\xi_j) - f_n(\xi_j)|\Delta x_j <$$

$$< \sum_{j=1}^{N_P} \frac{\varepsilon}{3(b-a)}\Delta x_j = \frac{\varepsilon}{3(b-a)}\sum_{j=1}^{N_P}\Delta x_j = \frac{\varepsilon}{3(b-a)}\cdot(b-a) = \frac{\varepsilon}{3}$$

   (b) В пункте 1 мы обозначили, что $I = \lim\limits_{n\to\infty} I_n$. Это означает, что $\forall \varepsilon > 0\, \exists n''_\varepsilon \in \mathbb{N}\, \forall n > n''_\varepsilon\, \forall x \in [a;b]:$

$$|I_n - I| < \frac{\varepsilon}{3}$$

(c) По определению $I_n : \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta_\varepsilon > 0\, \forall (P, \xi) : \lambda_P < \delta_\varepsilon :$

$$|\sigma(f_n; P, \xi) - I_n| = \left| \sum_{j=1}^{N_P} f_n(\xi_j) \Delta x_j - I_n \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

В пунктах (a) и (b) возьмём $n = \max(n'_\varepsilon, n''_\varepsilon) + 1 > n'_\varepsilon, n''_\varepsilon$. Тогда для $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta_\varepsilon > 0\, \forall x \in [a; b]\, \forall (P, \xi) : \lambda_P < \delta_\varepsilon :$

$$\left| \sum_{j=1}^{N_P} f(\xi_j) \Delta x_j - I \right| \le \left| \sum_{j=1}^{N_P} f(\xi_j) \Delta x_j - \sum_{j=1}^{N_P} f_n(\xi_j) \Delta x_j \right| + \left| \sum_{j=1}^{N_P} f_n(\xi_j) \Delta x_j - I_n \right| + |I_n - I| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Отсюда $\exists \int\limits_a^b f(x)dx = I$.

□

Теорема 2.2.6 (Теорема об интегральном переходе для функциональных рядов)**.** *Пусть* $\sum u_k(x)$ *– равномерно сходящийся ряд на* $[a; b]$*, причём* $\forall k \in \mathbb{N}\, u_k(x)$ *– интегрируемая по Риману на отрезке* $[a; b]$ *функция. Тогда* $\sum u_k(x)$ *интегрируема по Риману на* $[a; b]$ *и:*

$$\int\limits_a^b \left(\sum u_k(x) \right) dx = \sum \int\limits_a^b u_k(x) dx$$

Теорема 2.2.7 (Теорема о производной функционального предела)**.** *Пусть* $\{f_n(x)\}$ *– последовательность дифференцируемых на* $[a; b]$ *функций. Причём*

1. *Существует такая точка* $x_0 \in [a; b]$*, что числовая последовательность* $\{f_n(x_0)\}$ *сходится.*

2. *Последовательность* $\{f'_n(x)\}$ *равномерно сходится на* $[a; b]$*.*

Тогда $f_n(x)$ *равномерно сходится к некоторой дифференцируемой функции (пусть* $f(x)$*) на* $[a; b]$ *и*

$$f'(x) = \lim_{n \to \infty} f'_n(x)$$

Доказательство.

1. Возьмём любые натуральные числа n и m. Проверим $\{f_n(x)\}$ на фундаментальность в смысле равномерной метрики Чебышёва

   Рассмотрим функцию $h(x) = f_n(x) - f_m(x)$. Она дифференцируема на промежутке между x и x_0, а значит по теореме Лагранжа о конечных приращениях $\exists \xi$ между x и x_0 такая, что:

   $$h(x) - h(x_0) = h'(\xi)|x - x_0| \Leftrightarrow |(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))| = |(f'_n(\xi) - f'_m(\xi))(x - x_0)|$$

   $\forall \varepsilon > 0\, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\, \forall m, n > n_\varepsilon\, \forall x \in [a; b] :$

   $$|f'_n(x) - f'_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \text{и} \quad |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Для тех же условий:

$$|f_n(x)-f_m(x)| \le |(f_n(x)-f_m(x))-(f_n(x_0)-f_m(x_0))|+|f_n(x_0)-f_m(x_0)| =$$

$$= |(f_n'(\xi)-f_m'(\xi))(x-x_0)|+|f_n(x_0)-f_m(x_0)| \le |f_n'(\xi)-f_m'(\xi)|(b-a)+|f_n(x_0)-f_m(x_0)| \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\cdot(b-a)+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

Получили фундаментальность $\{f_n(x)\}$, тогда последовательность сходится равномерно. Пусть она сходится к $f(x)$.

2. Очевидно, что $\forall x' \in [a;b]$, $\forall x \in [a;b] \setminus \{x'\}$

$$\frac{f_n(x)-f_n(x')}{x-x'} \to \frac{f(x)-f(x')}{x-x'}$$

Докажем, что сходимость равномерная. Проверим фундаментальность $\left\{\frac{f_n(x)-f_n(x')}{x-x'}\right\}$ на $[a;b]\setminus\{x'\}$. $\forall\varepsilon>0\,\exists N\in\mathbb{N}\;\forall m,n\in\mathbb{N}: n,m\ge N\;\forall x\in[a;b]\setminus\{x'\}$

$$\left|\frac{f_n(x)-f_n(x')}{x-x'}-\frac{f_m(x)-f_m(x')}{x-x'}\right| = \frac{|(f_n(x)-f_m(x))-(f_n(x')-f_m(x'))|}{|x-x'|} =$$

По теореме Лагранжа о конечных приращениях $\exists\xi$ между x и x' такое, что:

$$= \frac{|f_n'(\xi)-f_m'(\xi)|\cdot|x-x'|}{|x-x'|} = |f_n'(\xi)-f_m'(\xi)| < \varepsilon$$

Получили фундаментальность, а отсюда следует равномерная сходимость, причём к $\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}$.

Пусть $g_n(x)=\frac{f_n(x)-f_n(x')}{x-x'}$, а $g(x)=\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}$. Тогда $g_n(x)\rightrightarrows g(x)$ и $\forall n\in\mathbb{N}$ у $g_n(x)$ существует конечный предел при $x\to x'$ и он равен $f_n'(x)$. По теореме о предельном переходе существует конечный предел при $x\to x'$ у $g(x)$ и:

$$\lim_{x\to x'} g(x)=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x'} g_n(x)$$

$$\lim_{x\to x'}\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}=\lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

$$f'(x)=\lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

Что и требовалось доказать.

□

Теорема 2.2.8. *Пусть* $\sum u_k(x)$ *– ряд дифференцируемых на* $[a;b]$ *функций, причём* $\exists x_0\in[a;b]$ *такая, что* $\sum u_k(x_0)$ *сходится, а ряд производных* $\sum u_k'(x)$ *сходится равномерно на* $[a;b]$*. Тогда* $\sum u_k(x)$ *сходится равномерно на* $[a;b]$ *и дифференцируем, причём*

$$\left(\sum u_k(x)\right)'=\sum u_k'(x)$$

Глава 3

Степенные ряды

3.1 Круг и радиус сходимости

Определение: Пусть $\{c_n\}$ – последовательность комплексных чисел, $z \in \mathbb{C}$ – переменная, $z_0 \in \mathbb{C}$. Тогда степенным рядом называют

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

Число z_0 называют центром степенного ряда. *Примеры:*

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^n z^n$. Рассмотрим радикальный признак Коши:

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n^n z^n|} = \varlimsup_{n\to\infty} |nz| = \lim_{n\to\infty} n|z| = \begin{cases} +\infty, & \text{если } z \neq 0, \\ 0, & \text{если } z = 0. \end{cases}$$

2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$. Воспользуемся признаком д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{z^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0, \text{при } z \in \mathbb{C}$$

3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$.

   Этот ряд можно рассмотреть как геометрическую прогрессию, по признаку д'Аламбера и по признаку Коши. Результат один – ряд сходится при $|z| < 1$.

4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n}$. Воспользуемся признаком д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{z^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{z^n}\right| = |z| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = |z|$$

   Получаем, что при $|z| < 1$ ряд сходится, при $|z| > 1$ ряд расходится. Рассмотрим случай $|z| = 1$. Т.к. модулб числа равен 1, то его можно представить следующим образом: $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Тогда:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n}$$

По признаку Дирихле полученные ряды сходятся условно, если $\varphi \neq 0$. Если $\varphi = 0$, то ряд очевидно расходится.

5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$.

   Аналогичным пункту 4 образом можно получить, что ряд сходится при $|z| \leq 1$, расходится при $|z| > 1$.

Определение: Кругом сходимости для степенного ряда $\sum c_n(z-z_0)^n$ является круг $B(z_0, r)$, если ряд сходится внутри него, т.е. сходится при $|z - z_0| < r$ и расходится при $|z - z_0| > r$. В действительном случае эквивалентом кругу сходимости является отрезок $(x_0-r; x_0+r)$.

Теорема 3.1.1 (Формула Коши-Адамара)**.** *Имеется степенной ряд $\sum c_n(z - z_0)^n$. Пусть $\alpha = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$, $R = \dfrac{1}{\alpha}$ (если $\alpha = 0$, то $R = \infty$, если $\alpha = \infty$, то $R = 0$). Тогда ряд сходится в $B(z_0, R)$ (если $R = \infty$, то ряд сходится на $\mathbb{C}$, если $R = 0$, то ряд сходится в $z = z_0$).*

Доказательство. Воспользуемся радикальным признаком Коши.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n(z - z_0)^n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} |z - z_0| \sqrt[n]{|c_n|} = |z - z_0| \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = |z - z_0|\alpha$$

- Если $\alpha = 0$, то очевидно, что ряд сходится везде, т.е. $R = \infty$.
- Если $\alpha = \infty$, то очевидно, что ряд сходится только при $z = z_0$, т.е. $R = 0$.
- Если $\alpha \in (0; \infty)$, то если $|z - z_0| < \frac{1}{\alpha}$, то ряд сходится, а если $|z - z_0| > \frac{1}{\alpha}$, то ряд сходится. Тогда по определению $R = \frac{1}{\alpha}$.

□

3.2 Свойства степенного ряда

Теорема 3.2.1. *Пусть степенной ряд $\sum c_n(z - z_0)^n$ сходится при $|z - z_0| < R < \infty$ (R – необязательно радиус сходимости). Пусть $f(z) = \sum c_n(z - z_0)^n$ при $|z - z_0| < R < \infty$. Тогда $\forall\varepsilon \in (0; R)$ ряд сходится равномерно в $B(z_0, R-\varepsilon)$, а функция $f(z)$ дифференцируема внутри $B(z_0, R)$ и*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z - z_0)^{n-1}$$

Доказательство.

1. Докажем равномерную сходимость в $B(z_0, R - \varepsilon)$.

   $\forall\varepsilon \in (0; R)\forall z \in B(z_0, R-\varepsilon)|c_n(z-z_0)^n| \leq |c_n|(R-\varepsilon)^n$. $\sum |c_n|(R-\varepsilon)^n$ сходится, т.к. точка $z = z_0 + R - \varepsilon \in B(z_0, R - \varepsilon)$, а по условию ряд сходится в любой точке $B(z_0, R - \varepsilon)$. Следовательно по признаку Вейерштрасса $\sum |c_n|(z - z_0)^n$ сходится равномерно в $(z_0, R - \varepsilon)$. Следовательно $\sum |c_n|(z - z_0)^n$ равномерно сходится на $B(z_0, R)$, а $f(z)$ непрерывна на этом круге.

2. Докажем, что $\sum nc_n(z - z_0)^{n-1}$ сходится внутри $B(z_0, R)$.

   $\sum nc_n(z - z_0)^{n-1} = \frac{1}{z-z_0} \sum nc_n(z - z_0)^n$. По формуле Коши-Адамара

   $$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n|c_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$$

   Отсюда радиус сходимости не изменился, т.е. данный ряд равномерно сходится там же, где и ряд $\sum c_n(z - z_0)^n$.

3. $\sum nc_n(z-z_0)^{n-1}$ и $\sum c_n(z-z_0)^n$ сходятся равномерно на $B(z_0,R)$, $c_n(z-z_0)^n$ дифференцируема и $(c_n(z-z_0)^n)' = nc_n(z-z_0)^{n-1}$. Значит, по теореме о почленном дифференцировании ряда (в комплексном случае) функция $f(z) = \sum c_n(z-z_0)^n$ дифференцируема и производная равна $\sum nc_n(z-z_0)^{n-1}$.

□

Теорема 3.2.2 (Следствие из 3.2.1)**.** *$f(z) = \sum c_n(z-z_0)^n$ сходится при $|z-z_0| < R$. Тогда $f(z)$ бесконечно дифференцируема в $|z-z_0| < R$ и*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} c_n (z-z_0)^{n-k}$$

При $z = z_0$

$$f^{(k)}(0) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} c_n 0^{n-k} = k! \cdot c_k \Rightarrow c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

Отсюда можно сделать вывод о единственности разложения функции в степенной ряд:

Теорема 3.2.3 (Единственность разложения)**.** *Разложение $f(x)$ в степенной ряд единственно, если возможно*

Доказательство. От противного, предположим, что

$$f(z) = \sum a_n(z-z_0)^n = \sum b_n(z-z_0)^n, a_n \neq b_n$$

Тогда по ранее выведенной формуле $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ и $b_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Отсюда $a_n = b_n$ – противоречие. □

Единственность не значит существование. Функция может быть бесконечно дифференцируема, но не иметь разложения.

Пример: Пусть $f(x)$ задаётся следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{при } x \neq 0, \\ 0, & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Попробуем найти разложение в точке $z_0 = 0$:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x - 0} = \lim_{t\to\infty} te^{-t^2} = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^{t^2}} = 0$$

В точках $x \neq 0$ производная равна:

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3} \to 0 \text{ при } x \to 0$$

Дифференцирование можно продолжить и дальше. $f^{(n)}(x)$ будет представлять из себя сумму произведений экспоненты $e^{-\frac{1}{x^2}}$ с некоторой отрицательной степенью x, которые при $x \to 0$ будут давать 0. В итоге мы получим, что функция бесконечно дифференцируема и $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0$$

Т.е. ряд, который будет соответствовать $f(x)$ равен $\sum c_n x^n = \sum 0 \cdot x^n = 0$, что естественно даёт равенство только в $x = 0$.

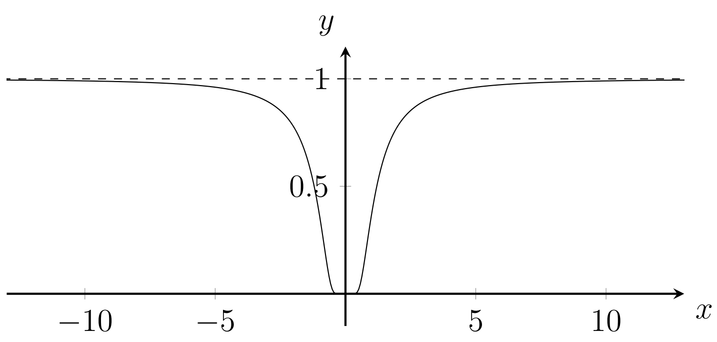


Рис. 3.1: График $f(x)$

Теорема 3.2.4. *Пусть* $f(x) = \sum a_n(x-x_0)^n$ *сходится при* $|x-x_0| < R \in (0;+\infty]$. *Тогда* $\forall x \in (x_0-R; x_0+R)$

$$\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$$

Доказательство. Т.к. ряд сходится, то $\forall [a;b] \subset (x_0-R; x_0+R)$ ряд сходится равномерно по теореме 3.2.1. Все члены ряда интегрируемы, а значит по теореме об интегриральном переходе для функциональных рядов

$$\int\limits_{a}^{b} f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{a}^{b} a_n(x-x_0)^n dx$$

Тогда возьмём $a = x_0$, $b = x \in (x_0-R; x_0+R)$ и получим:

$$\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{x_0}^{x} a_n(x-x_0)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$$

□

3.3 Аналитические функции. Ряд Тейлора

Определение: $f(z)$ называется аналитической функцией в точке z_0, если существует открытый круг $B(z_0, r)(r > 0)$, в котором $f(z)$ можно представить как степенной ряд:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \forall z \in B(z_0, r)$$

Теорема 3.3.1 (Разложение в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа)**.** *Пусть* $f(x) \in C^{n+1}(x_0-h, x_0+h)$. *Тогда* $\forall x \in (x_0-h; x_0+h)\, \exists \xi$ *между* x_0 *и* x *такое, что*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Теорема 3.3.2 (Достаточное условие разложимости в степенной ряд)**.** *Функция* $f(x)$ *бесконечно дифференцируема на* $(x_0-h; x_0+h)$ *и все производные* $f^{(n)}(x)$ *ограничены на* $(x_0-h; x_0+h)$ *в совокупности, т.е.* $\exists M > 0\, \forall n \in \mathbb{N}\, \forall x \in (x_0-h; x_0+h)\, |f^{(n)}(x)| < M$. *Тогда* $f(x)$ *разлагается в ряд Тейлора (степенной ряд):*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Доказательство. Для доказательства воспользуемся теоремой 3.3.1. $\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in (x_0 - h; x_0 + h) \, \exists \xi$ между x_0 и x :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Обозначим остаток в форме Лагранжа как R_n. Тогда:

$$|R_n| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1} \leq \frac{M}{(n+1)!}h^{n+1} = M\frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

Тогда устремим n к бесконечности в представлении $f(x)$ и получим что $f(x)$ раскладывается в ряд Тейлора:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \to \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

□

3.4 Разложение элементарных функций в ряд Тейлора

Для начала сформулируем теорему

1. e^x

   Проверим, возможно ли разложить e^x в степенной ряд. Эта функция бесконечно дифференцируема и для любого $h > 0$ на отрезке $(-h; h)$ будет выполняться $|e^x| < e^h$ – ограниченность в совокупности. Тогда для всех h выполняется достаточное условие, а значит ряд можно представить для всех $x \in \mathbb{R}$. Из курса матанализа 1 семестра

   $$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

   Определим комплексную экспоненту как

   $$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

   Проверим, выполянется ли для такого представления одно из основных свойств экспоненты: $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 \cdot z_2}$:

   $$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!} =$$

   Мы имеем право перемножить данные ряды по 1.5.2, т.к. ряд сходится абсолютно. Для того, чтобы перемножить все члены воспользуемся таблицей, в которой указан порядок взятия слагаемых:

	1	$z_1/1!$	$z_1^2/2!$	$z_1^3/3!$	$\dots$
1	1	3	6	10	$\dots$
$z_2/1!$	2	5	9	13	$\dots$
$z_2^2/2!$	4	8	12	15	$\dots$
$z_2^3/3!$	7	11	14	16	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

$$= 1\cdot 1 + \left(\frac{z_1}{1!}\cdot 1 + 1\cdot\frac{z_2}{1!}\right) + \left(\frac{z_1^2}{2!}\cdot 1 + \frac{z_1\cdot z_2}{1!\cdot 1!} + 1\cdot\frac{z_2^2}{2!}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \left(\frac{z_1^n}{n!}\cdot 1 + \frac{z_1^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\frac{z_2}{1!} + \ldots + \frac{z_1}{1!}\cdot\frac{z_2^{n-1}}{(n-1)!} + 1\cdot\frac{z_2^n}{n!}\right) + \ldots = 1 + \frac{1}{1!}(z_1+z_2) +$$

$$+\frac{1}{2!}\left(z_1^2 + \frac{2!}{1!\cdot 1!}z_1z_2 + z_2^2\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(z_1^n + \frac{n!}{1!(n-1)!}z_1^{n-1}z_2 + \frac{n!}{2!(n-2)!}z_1^{n-2}z_2 + \ldots + z_2^n\right) + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}z_1^k z_2^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z_1+z_2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z_1+z_2)^n}{n!} = e^{z_1+z_2}$$

2. $\sin x$ и $\cos x$

   Эти функции бесконечно дифференцируемы и $\forall x \in \mathbb{R}\, |\sin x| < 2$ и $|\cos x| < 2$ (производные $\sin x$ и $\cos x$ – синусы и косинусы со знаками). Значит, синусы можно разложить в степенные ряды:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{и} \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

   В комплексной плоскости $\sin z$ и $\cos z$ определяются через эти ряды:

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{и} \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

   Докажем формулу Эйлера: $e^{iz} = \cos z + i\sin z$:

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n\cdot z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^{2n}\cdot z^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^{2n+1}\cdot z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot z^{2n}}{(2n)!} +$$

$$+ i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos z + i\sin z$$

3. $(1+x)^\alpha$. Найдём формулу для возможного разложения этой функции:

$$f^{(n)}(x) = \alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

$$f^{(n)}(0) = \alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)$$

$$(1+x)^\alpha \sim \sum_{n=0}^{\infty}\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!}$$

   (a) $\alpha \in \mathbb{N}$. При $n > \alpha f^{(n)}(x) \equiv 0$. Тогда ряд превращается в:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\alpha}\frac{\alpha!}{(\alpha-n)!}\cdot\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\alpha}C_\alpha^n x^n = (1+x)^\alpha$$

   (b) $\alpha \notin \mathbb{N}$. При $|x| < 1$ очевидно, что ряд сходится, однако точно сказать будет ли этот ряд равен $(1+x)^\alpha$ – достаточно сложная задача.

4. $\ln(1+x)$

$$\ln'(1+x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

Последнее равенство имеет место только при $|x| < 1$. Воспользуемся интегральным переходом и получим:

$$\ln(1+x) = \int\limits_0^x \ln'(1+t)dt + ln(1+0)$$

$$\ln(1+x) = \int\limits_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int\limits_0^x (-1)^n t^n dt\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$$

Рассмотрим граничный случай: $x = \pm 1$. При $x = -1$ логарифм не определён и при этом ряд превращается в гармонический не сходящийся ряд. При $x = 1$ ряд сходится условно по признаку Лейбница. Для доказательства того, что ряд сходится именно к $\ln 2$, докажем, что ряд сходится равномерно на $[0;1]$. Воспользуемся критерием Коши: $\forall \varepsilon > 0\, \exists n_\varepsilon = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil\ \forall m > n_\varepsilon, p \in \mathbb{N}\, \forall x \in [0;1]$:

$$\left|\sum_{n=m+1}^{m+p}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}\right| < \frac{x^n}{m+1} < \frac{1}{m+1} < \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$$

Глава 4

Ряды Фурье

4.1 Равномерно сходящиеся тригонометрические ряды

Определение: Сумма вида

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

– тригонометрический полином степени n на $[-\pi; \pi]$.
Определение: Тригонометрическим рядом на $[-\pi; \pi]$ называют

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Определение: Систему функций $\{\cos 0x, \sin 0x, \cos x, \sin x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots\}$ – тригонометрическая система на $[-\pi; \pi]$.

Утверждение 4.1.1. *Выполнены следующие свойства:*

1.

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mx \, dx = 0 \ \forall k, m : k \neq m$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin mx \, dx = 0 \ \forall k, m : k \neq m$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin mx \, dx = 0 \ \forall k, m \in \mathbb{N}$$

2.

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx \, dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx \, dx = \pi \ \forall k \in \mathbb{N}$$

Доказательство.

1. $\forall k, m \in \mathbb{N} : k \neq m$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mx\, dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} (\cos(k+m)x + \cos(k-m)x) dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(k+m)x\, dx$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(k-m)x\, dx = \frac{1}{2(k-m)}(\sin(k-m)x)|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2(k+m)}(\sin(k+m)x)|_{-\pi}^{\pi} = 0+0=0$$

Аналогично доказываются остальные два интеграла, для второго применяется формула произведения синусов: $\sin kx \sin mx = 1/2(\cos(k-m)x - \cos(k+m)x)$, для третьего произведение синуса и косинуса: $\sin kx \cos mx = 1/2(\sin(k+m)x + \sin(k-m)x)$.

2. $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx\, dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2kx}{2} dx = \pi + \frac{1}{4k}(\sin 2kx)|_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx\, dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} (1-\cos^2 kx) dx = 2\pi - \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx\, dx = \pi$$

□

Теорема 4.1.1. *Пусть имеется тригонометрический равномерно сходящийся ряд. Пусть $f(x) =:$*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Тогда числа a_n и b_n можно выразить следующим образом:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx$$

Доказательство. Функции $\cos nx$ и $\sin nx$ непрерывны на $[-\pi; \pi]$, отсюда они интегрируемы, отсюда $f(x)$ интегрируема. Получается, что функции $f(x)\cos nx$ и $f(x)\sin nx$ также интегрируемы.

$$f(x)\cos nx = \frac{a_0 \cos nx}{2} + \cos nx \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx = \frac{a_0}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx\, dx + b_k \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin kx\, dx \right) =$$

$$= 0 + \pi a_n + 0 = \pi a_n \Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx$$

Аналогично можно доказать, что

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx$$

□

Определение: $f(x)$ интегрируема на $[-\pi;\pi]$. Тогда тригонометрический ряд, у которого

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

называется тригонометрическим рядом Фурье на $[-\pi;\pi]$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

4.2 Пространство кусочно-непрерывных функций с квадратичной мерой

Определение: $f(x)$ – кусочно-непрерывная функция на $[a;b]$, если $f(x)$ непрерывна на $[a;b]\setminus E$, где E – конечное множество точек, причём если $a\in E$, то у $f(x)$ существуют односторонние пределы в точке a. Введём скалярное произведение для функций в таком пространстве следующим образом:

$$(f,g) = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx$$

Данное скалярное произведение соответствует всем свойствам, за исключением одного:

- $(f_1+f_2,g) = (f_1,g)+(f_2,g)$ – выполнено
- $(f,g) = (g,f)$ – выполнено
- $(\alpha f,g) = \alpha(f,g)$ – выполнено
- $(f,f)\geq 0$ и $(f,f)=0 \Leftrightarrow f=0$ – выполнено только первое

Например, возьмём такую функцию на отрезке $[0;1]$:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{если } x\in\{0,1\}, \\ 0 & \text{иначе.}\end{cases}$$

$f(x)\neq 0$, но $(f,f)=0$. Такая проблема возникает из-за кусочной непрерывности функций, поэтому не будем различать функции, которые различаются в конечном множестве точек. Если так, то тогда свойство $(f,f)=0 \Leftrightarrow f=0$ выполнено. Введём следующую норму:

$$\|f\| = \sqrt{(f,f)} = \sqrt{\int\limits_a^b f^2(x)dx}$$

Определение: $C'[a;b]$ с данной нормой – пространство кусочно-непрерывных функций с квадратичной нормой.

4.3 Свойства рядов Фурье

Теорема 4.3.1 (Минимальное свойство рядов Фурье)**.** *Пусть $f(x) \in C'[-\pi;\pi]$. S_n – частичные суммы ряда Фурье для $f(x)$. T_n – произвольный тригонометрический многочлен. Тогда*

$$\|f - S_n\| = \min_{T_n} \|f - T_n\|$$

Доказательство.

$$T_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos kx + B_k \sin kx$$

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

Оценим $\|f - T_n\|$:

$$\|f - T_n\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - T_n(x))^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx + \int_{-\pi}^{\pi} T_n^2(x)dx - 2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)T_n(x)dx$$

Упростим последние два слагаемых:

$$\int_{-\pi}^{\pi} T_n^2(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos kx + B_k \sin kx\right)^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{A_0^2}{4}dx + \int_{-\pi}^{\pi} A_0 \sum_{k=1}^{n}(A_k \cos kx + B_k \sin kx)dx +$$

$$+\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=1}^{n}(A_k \cos kx + B_k \sin kx)\right)^2 dx = \frac{\pi A_0^2}{2} + 0 + \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=1}^{n}(A_k \cos kx + B_k \sin kx)\right)^2 dx =$$

В третьем слагаемом получится большая сумма из произведений синуса и косинуса ($\sin kx \cos mx$), произдведений синусов ($\sin kx \sin mx$) и произведений косинусов($\sin kx \sin mx$). Все слагаемые, кроме квадратов синусов и квадратов косинусов дадут ноль в интеграле, поэтому:

$$= \frac{\pi A_0^2}{2} + \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=1}^{n} A_k^2 \cos^2 kx + B_k^2 \sin^2 kx\right) dx = \pi\left(\frac{A_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(A_k^2 + B_k^2)\right)$$

Второе слагаемое:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)T_n(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos kx + B_k \sin kx\right) dx = \frac{A_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx +$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(A_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx + B_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\, dx\right) = \pi\left(A_0 a_0 + \sum_{k=1}^{n}(A_k a_k + B_k b_k)\right)$$

Вернёмся к оценке $\|f - T_n\|$:

$$\|f - T_n\|^2 = \ldots = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx + \pi\left(\frac{A_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(A_k^2 + B_k^2)\right) - 2\pi\left(A_0 a_0 + \sum_{k=1}^{n}(A_k a_k + B_k b_k)\right) =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx + \pi\left(\frac{(A_0 - a_0)^2}{2} - \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}((A_k - a_k)^2 + (B_k - b_k)^2) - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2\right)$$

Полученное выражение принимает наименьшее значение, если $A_i = a_i$ и $B_i = b_i$, т.е. когда $T_n = S_n$. $\square$

Теорема 4.3.2 (Неравенство Бесселя). $f(x) \in C'[-\pi;\pi]$. *Этой функции соответствует тригонометрический ряд Фурье с коэффициентами* $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$. *Тогда справедливо неравентсво:*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$$

Доказательство. Вспомним доказательство предыдущей теоремы. Если взять $T_n(x) = S_n(x)$, то мы получим, что:

$$\|f - S_n(x)\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right) \geq 0$$

Т.е. мы получаем, что $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \geq \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \geq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)$$

Тогда произведём предельный переход ($n \to \infty$) и получим необходимое неравенство:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \geq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$$

□

Следствие: $a_k \to 0, b_k \to 0$ при $k \to \infty$.

Теорема 4.3.3 (Равенство Парсеваля). *Для* $f(x) \in C'[-\pi;\pi]$ *справедливо следующее равенство:*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

4.4 Ряд Фурье с геометрической точки зрения

Пусть E – конечномерное евклидово пространство ($\dim E = n$). В нём имеется некоторый ортонормированный базис $\mathscr{E} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Пусть $a \in E$, тогда:

$$a = \sum_{j=1}^{n} a_j e_j \Rightarrow (a, e_k) = \sum_{j=1}^{n} a_j(e_j, e_k) = \sum_{j=1}^{n} a_j \delta_{jk} = a_k$$

Отсюда

$$a = \sum_{j=1}^{n}(a, e_j)e_j$$

Теперь пусть $\mathscr{E}' = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ – ортонормированная система векторов ($m \leq n$), $L = \mathscr{L}(e_1, \ldots, e_m)$. Пусть вектор $a \notin L$. Найдём такой вектор $b \in L$:

$$\|a - b\| = \min_{x \in L}\|a - x\|$$

$$\|a-b\|^2 = \left\| a - \sum_{j=1}^{m} b_j e_j \right\| = \left(a - \sum_{j=1}^{m} b_j e_j, a - \sum_{j=1}^{m} b_j e_j \right) = (a,a) - 2\left(a, \sum_{j=1}^{m} b_j e_j \right) +$$

$$+\left(\sum_{j=1}^{m} b_j e_j, \sum_{j=1}^{m} b_j e_j \right) = (a,a) - 2\sum_{j=1}^{m} b_j(a,e_j) + \sum_{j=1}^{m} b_j^2 = (a,a) + \sum_{j=1}^{m} a_j^2 - 2\sum_{j=1}^{m} a_j b_j + \sum_{j=1}^{m} b_j^2 -$$

$$-\sum_{j=1}^{m} a_j^2 = (a,a) + \sum_{j=1}^{m} (a_j - b_j)^2 - \sum_{j=1}^{m} a_j^2$$

Минимум полученного выражения достигатеся при $b_j = a_j, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, т.е. когда b – проекция вектора a в L. Полученное неравенство является аналогом неравенства Бесселя, но только в общем случае. Но что в случае $C'[-\pi;\pi]$ является ОНБ базисом? На самом деле базисом является нормированная тригонометрическая система $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx\}$. Она является ортогональной вследствие утверждения 4.1.1, но не является нормированной. Нормированная система будет иметь вид:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right\}$$

4.5 Поточечная сходимость рядов Фурье

Представим n-ую частичную сумму ряда Фурье следующим образом:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos kx}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\, dt +$$

$$+\frac{\sin kx}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos kx \cos kt + \sin kt \sin kx\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos k(t-x)\right) dt =$$

Определение: $D_n(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos kx$ – n-ое ядро Дирихле.

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t-x)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(z+x) D_n(z)dz =$$

Периодически продолжим функцию $f(x)$, как показано на рисунке ниже:

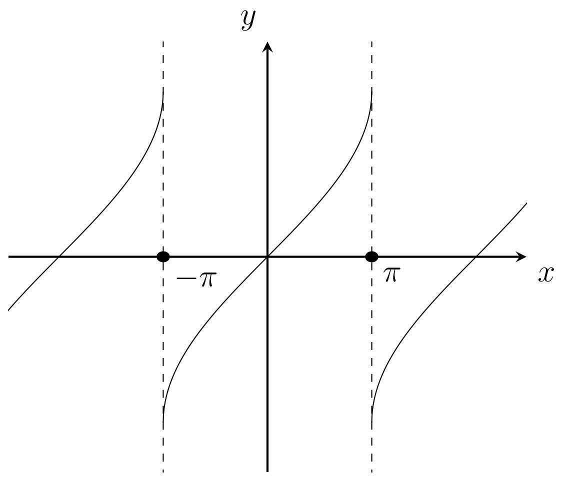


Рис. 4.1: Периодическое продолжение функции

Тогда $f(z+x)D_n(z)$ – периодическая функция, а поэтому интеграл по любому интервалу длинной в период (2π) будет величнной постоянной, поэтому:

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(z+x)D_n(z)dz$$

Найдём более удобное представления ядра Дирихле, которое впоследстие нам пригодится:

$$D_n(u) = 1+2\sum_{k=1}^{n}\cos ku = \frac{1}{\sin\frac{u}{2}}\left(\sin\frac{u}{2} + \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{u}{2}\cos ku\right) = \frac{1}{\sin\frac{u}{2}}\left(\sin\frac{u}{2} + \sum_{k=1}^{n}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)u -\right.$$

$$\left. - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)u\right) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{u}{2}}$$

Отсюда получаем следующее равенство:

$$D_n(u) = \begin{cases} 1+2n, & \text{если } u = 0,\\ \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{u}{2}}, & \text{если } u \neq 0. \end{cases}$$

Выделим также одно из свойств ядра Дирихле:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(u)du = \int\limits_{-\pi}^{\pi} du + 2\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx = 2\pi$$

Определение: ξ – регулярная точка функции $f(x)$, если

$$f(\xi) = \lim_{h\to+0}\frac{f(\xi+h)+f(\xi-h)}{2}$$

Из определения следует, что если ξ – регулярная точка, то это либо точка неперерывности, либо разрыв I рода, причём значение функции в этой точке равно среднему арифметическому значений слева и справа.

Теорема 4.5.1 (Достаточное условие сходимости Дини)**.** *$f(x)$ кусочно непрерывна на $[-\pi;\pi]$ и регулярна в точке x и при некоторых $\delta > 0$ сходятся следующие интегралы:*

$$\int_{-\delta}^{0}\left|\frac{f(x+z)-f(x-0)}{z}\right|dz \quad \textit{и} \quad \int_{0}^{\delta}\left|\frac{f(x+z)-f(x+0)}{z}\right|dz$$

Тогда $S_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Оценим $S_n(x) - f(x)$:

$$S_n(x) - f(x) = S_n - \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+z)D_n(z)dz -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(z)\cdot\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}dz = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x+z)-\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}\right)D_n(z)dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(x+z)D_n(z)dz + \int_{0}^{\pi} f(x+z)D_n(z)dz - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-0)D_n(z)dz - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+0)D_n(z)dz\right) =$$

Т.к. $f(x-0)$ и $f(x+0)$ – числа, а $D_n(z)$ – чётная функция, то мы можем вместо того, чтобы брать интеграл по $[-\pi;\pi]$ взять интеграл по $[0;\pi]$ или по $[-\pi;0]$ и удвоить:

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(x+z)D_n(z)dz + \int_{0}^{\pi} f(x+z)D_n(z)dz - \int_{-\pi}^{0} f(x-0)D_n(z)dz - \int_{0}^{\pi} f(x+0)D_n(z)dz\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(f(x+z)-f(x-0))D_n(z)dz + \int_{0}^{\pi}(f(x+z)-f(x+0))D_n(z)dz\right)$$

Оценим второе слагаемое (назовём его I_2, а первое I_1), для первого оценка будет аналогична:

$$\int_{0}^{\pi}(f(x+z)-f(x+0))D_n(z)dz = 2\int_{0}^{\pi}\frac{f(x+z)-f(x+0)}{z}\cdot\frac{z/2}{\sin\frac{z}{2}}\cdot\sin\frac{2n+1}{2}zdz$$

По условию $\exists\delta > 0 : \int_{0}^{\delta}\left|\frac{f(x+z)-f(x+0)}{z}\right|dz$ сходится. Рассмотрим два случая:

1. Интеграл выше является собственным. Тогда функция $\left|\frac{f(x+z)-f(x+0)}{z}\right|$ ограничена. Пусть она ограничена числом M. Тогда $\forall\varepsilon > 0\ \delta_1 = \frac{\varepsilon}{2M} : \int_{0}^{\delta_1}\left|\frac{f(x+z)-f(x+0)}{z}\right|dz < \frac{\varepsilon}{2}$.

2. Интеграл является несобственным. Но тогда:

$$\exists \lim_{\nu\to+0}\int_{\nu}^{\delta}\left|\frac{f(x+z)-f(x+0)}{z}\right|dz = \int_{0}^{\delta}\left|\frac{f(x+z)-f(x+0)}{z}\right|dz \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\nu\to+0} \int\limits_0^{\nu} \left|\frac{f(x+z)-f(x+0)}{z}\right| dz = 0$$

Тогда получаем, что $\forall\varepsilon > 0\,\exists\delta_2 > 0\,\forall\nu \in (0;\delta_2]$:

$$\left|\int\limits_0^{\nu} \left|\frac{f(x+z)-f(x+0)}{z}\right| dz\right| = \int\limits_0^{\nu} \left|\frac{f(x+z)-f(x+0)}{z}\right| dz < \frac{\varepsilon}{2}$$

Это справедливо в частном случае для $\nu = \delta_2$.

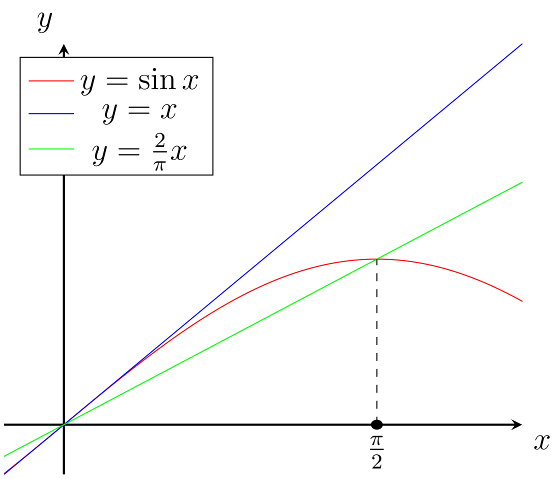
Пусть $\delta = \min\{\delta_1;\delta_2\}$. Тогда независимо от того, собственный интеграл или нет, мы получаем, что:

$$\int\limits_0^{\delta} \left|\frac{f(x+z)-f(x+0)}{z}\right| dz < \frac{\varepsilon}{2}$$

Оценим следующий интеграл:

$$\left|\int\limits_0^{\delta} \frac{f(x+z)-f(x+0)}{z}\cdot\frac{z/2}{\sin\frac{z}{2}}\cdot\sin\frac{2n+1}{2}zdz\right| \le \int\limits_0^{\delta} \left|\frac{f(x+z)-f(x+0)}{z}\right|\cdot\frac{z/2}{\sin\frac{z}{2}}\cdot\left|\sin\frac{2n+1}{2}z\right| dz \le$$

Первый множитель мы уже оценили, третий не превышает 1. Для оценки второго докажем, что $\forall x \in (0;\frac{\pi}{2}]\ \frac{2}{\pi}z < \sin z \le z$. Для этого просто стоит взгянуть на графики этих функций:



Тогда $\frac{2}{\pi}z < \sin z \le z \Rightarrow \frac{2}{\pi} < \frac{\sin z}{z} \le 1 \Rightarrow \frac{\pi}{2} > \frac{z}{\sin z}$ или что тоже самое в контексте данной задачи $\frac{\pi}{2} > \frac{z/2}{\sin z/2}$. Тогда

$$\le \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\delta} \left|\frac{f(x+z)-f(x+0)}{z}\right| dz < \frac{\pi\varepsilon}{4}$$

Оценим аналогичный интеграл но уже на промежутке $[\delta;\pi]$:

$$\int\limits_{\delta}^{\pi} \frac{f(x+z)-f(x+0)}{z}\cdot\frac{z/2}{\sin\frac{z}{2}}\cdot\sin\frac{2n+1}{2}zdz = \int\limits_{\delta}^{\pi} \frac{f(x+z)-f(x+0)}{z}\cdot\frac{z/2}{\sin\frac{z}{2}}\cdot$$

$$\cdot\left(\sin nz\cdot\cos\frac{z}{2}+\cos nz\cdot\sin\frac{z}{2}\right)dz=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi}\left(\frac{\pi(f(x+z)-f(x+0))}{2}\operatorname{ctg}\frac{z}{2}\right)\sin nz\,dz+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi}\left(\frac{\pi(f(x+z)-f(x+0))}{2}\right)\cos nz\,dz$$

Пусть:

$$\varphi(z)=\begin{cases}\frac{\pi(f(x+z)-f(x+0))}{2}\operatorname{ctg}\frac{z}{2}, & \text{если } z\in[\delta;\pi],\\ 0, & \text{если } z\in[-\pi;\delta]\end{cases}\quad\text{и}\quad\psi(z)=\begin{cases}\frac{\pi(f(x+z)-f(x+0))}{2}, & \text{если } z\in[\delta;\pi],\\ 0, & \text{если } z\in[-\pi;\delta]\end{cases}$$

Тогда этот интеграл представляется как сумма коэффициентов ряда Фурье a_n и b_n, которые при $n\to\infty$ стремятся к 0. Т.е. $\forall\varepsilon>0\,\exists N\in\mathbb{N}\,\forall n>N:$

$$\int\limits_{\delta}^{\pi}\frac{f(x+z)-f(x+0)}{z}\cdot\frac{z/2}{\sin\frac{z}{2}}\cdot\sin\frac{2n+1}{2}zdz<\frac{\pi\varepsilon}{4}$$

Наконец, возвращаемся к I_2:

$$I_2=2\int\limits_{0}^{\pi}\frac{f(x+z)-f(x+0)}{z}\cdot\frac{z/2}{\sin\frac{z}{2}}\cdot\sin\frac{2n+1}{2}zdz=2\left(\int\limits_{0}^{\delta}(\ldots)dz+\int\limits_{\delta}^{\pi}(\ldots)dz\right)<2\cdot2\cdot\frac{\pi\varepsilon}{4}=\pi\varepsilon$$

Возвращаемся к $S_n(x)-f(x)$. $\forall\varepsilon>0\,\exists N\in\mathbb{N}\,\forall n>N:$

$$S_n(x)-f(x)=\frac{1}{2\pi}(I_1+I_2)<\frac{1}{2\pi}\cdot2\pi\varepsilon=\varepsilon$$

□

Следствие 1: Если $f(x)$ дифференцируем в какой-то точке x_0, то $S_n(x_0)\to f(x_0)$ при $n\to\infty$.

Следствие 2: Если $f(x)$ имеет производные справа и слева в x_0, то $S_n(x_0)\to f(x_0)$ при $n\to\infty$.

Теорема 4.5.2 (Условие сходимости Липшица). *Если* $\exists L>0\,\exists U(x_0)\,\forall x\in U(x_0):\ |f(x)-f(x_0)|<L|x-x_0|$, *то* $S_n(x_0)\to f(x_0)$ *при* $n\to\infty$.

Определение: Пусть x_0 – точка разрыва I рода $f(x)$. $f(x)$ имеет в x_0 обобщённую производную справа, если существует следующий предел:

$$\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0+0)}{x-x_0}$$

Аналогично определяется обобщённую производную слева.
Следствие 3: Если $f(x)$ кусочно-непрерывна, периодическая с периодом 2π, регулярная в каждой точке разрыва, имеет обобщённую производную справа и слева, то $\forall x S_n(x)\to f(x)$ при $n\to\infty$.

Теорема 4.5.3 (Теорема Липшица). $f(x)$ *– периодическая функция с периодом* 2π *и абсолютно интегрируема на любом отрезке* $[c;d]$. *Если на интервале* $(A;B)$ $f(x)$ *удовлетворяет условию Липшица, то* $\forall[a;b]\subset(A;B)$ $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$.

Утверждение 4.5.1. *$v(x) \in C^1[a;b], u(x) \in C[a;b]$ и $u'(x)$ имеет одну точку разрыва I рода $c \in [a;b]$. Тогда:*

$$\int\limits_a^b u dv = (uv)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v du$$

Доказательство.

$$\int\limits_a^b u dv = \int\limits_a^c u dv + \int\limits_c^b u dv = (uv)\Big|_a^c - \int\limits_a^c v du + (uv)\Big|_c^b - \int\limits_c^b v du = (uv)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v du$$

□

Теорема 4.5.4. *$f(x)$ – непрерывная кусочно-гладкая функция (т.е. $f'(x)$ определена везде кроме каких-то изолированных точек разрыва I рода) с периодом 2π. Тогда ряд Фурье этой функции сходится к $f(x)$ равномерно.*

Доказательство. По 1-ому следствию теоремы 4.5.1 получаем, что ряд сходится к $f(x)$ в каждой точке.

Пусть a_n, b_n – коэффициенты Фурье $f(x)$, a'_n, b'_n – коэффициенты Фурье $f'(x)$. Тогда:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi n}\left((f(x)\sin nx)\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,dx\right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,dx = -\frac{b'_n}{n}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = -\frac{1}{\pi n}\left((f(x)\cos nx)\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\,dx = \frac{a'_n}{n}$$

Докажем что сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n|$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a'_n| + |b'_n|}{n}$$

Воспользуемся равенством Парсеваля для ряда Фурье $f'(x)$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a'^2_n + b'^2_n$ сходится. Отсюда, если:

$$\frac{|a'_n|}{n} = \sqrt{\frac{|a'_n|^2}{n^2}} = \sqrt{\frac{1}{n^2}\cdot {a'_n}^2} \le \frac{\frac{1}{n^2} + {a'_n}^2}{2} \quad \text{и аналогично} \quad \frac{|{b'_n}^2|}{n} \le \frac{\frac{1}{n^2} + {b'_n}^2}{2}$$

то получаем, что:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a'_n| + |b'_n|}{n} \le \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n^2} + {a'_n}^2 + {b'_n}^2\right) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a'_n| + |b'_n|}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n| \text{ сходится}$$

Тогда по признаку Вейерштрасса о равномерной сходимости ряд Фурье для $f(x)$ сходится равномерно, т.к.:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n|$$

$\square$

4.6 Ряд Фурье в комплексном виде. Неполные ряды Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cosh inx + \frac{1}{i} b_n \sinh inx =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \cdot \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} =$$

$$= \underbrace{\frac{a_0}{2}}_{C_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \right)}_{C_n} e^{inx} + \underbrace{\frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{int} dt \right)}_{C_{-n}} e^{-inx} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{inx}$$

Таким образом получаем выражение ряда Фурье в комплексной форме:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} C_n e^{inx}, \text{ где } C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$$

Определение: Разложение функции $f(x)$ на отрезке $[0; \pi]$ в ряд вида $\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx$ называется разложением в неполный ряд по косинусам

Определение: Разложение функции $f(x)$ на отрезке $[0; \pi]$ в ряд вида $\sum b_n \sin nx$ называется разложением в неполный ряд по синусам

Алгоритм разложения функции в неполный ряд по синусам/косинусам: Если требуется разложить функцию на $[0; \pi]$ по косинусам, то для этого нужно разложить в обычный ряд Фурье следующую функцию:

$$f(x) = \begin{cases} f(-x), & x \in [-\pi; 0], \\ f(x), & x \in [0; \pi] \end{cases}$$

Т.е. нужно продолжить функицю $f(x)$ на $[-\pi; 0]$ чётным образом. Если требуется разложить функцию на $[0; \pi]$ по синусам, то для этого нужно разложить в обычный ряд Фурье следующую функцию:

$$f(x) = \begin{cases} -f(-x), & x \in [-\pi; 0], \\ f(x), & x \in [0; \pi] \end{cases}$$

Т.е. нужно продолжить функицю $f(x)$ на $[-\pi; 0]$ нечётным образом.

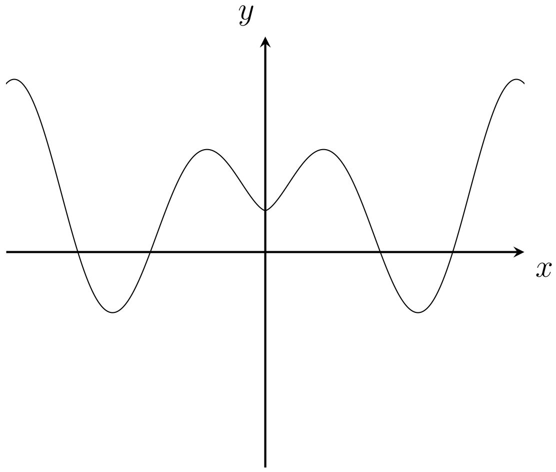


Рис. 4.2: Чётное продолжение функции

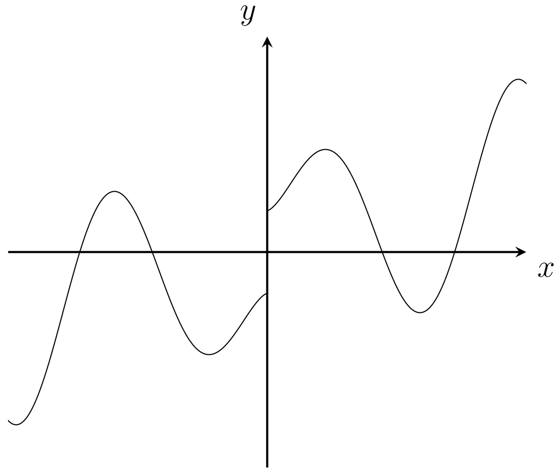


Рис. 4.3: Нечётное продолжение функции

Разложение функции на произвольном симметричном отрезке: Требуется разложить функцию на отрезке $[-l; l]$. Для этого «вытянем» вытянем функцию так, чтобы при $x \in [-\pi; \pi]$ она принимала все те же значения, что и на $[-l; l]$. Вытянутая функция будет иметь вид: $f^*(x) = f\left(\frac{lx}{\pi}\right)$. Идея заключается в том, чтобы разложить эту функцию в ряд Фурье на $[-\pi; \pi]$, а затем «втянуть» обратно. Пусть:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

Тогда:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^*(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lx}{\pi}\right) \cos nx \, dx =$$

Сделаем замену $t = \frac{lx}{\pi} \Leftrightarrow x = \frac{t\pi}{l}$. Тогда получим что:

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-l}^{l} f(t) \cos\left(n\frac{\pi t}{l}\right) \frac{\pi}{l} dt = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(t) \cos n\frac{\pi t}{l} \, dt$$

Аналогично можно получить что:

$$b_n = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(t) \sin n\frac{\pi t}{l} \, dt$$

И при этом формула для ряда будет выглядеть следующим образом:

$$f(x) = f^*\left(\frac{\pi x}{l}\right) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)$$

Окончательно можно записать ряд Фурье для произвольного симметричного отрезка $[-l; l]$ следующим образом:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \text{ где}$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} \, dx \quad \text{и} \quad b_n = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \, dx$$

Часть II

Интегральное исчисление функций нескольких переменных

Глава 5

Кратные интегралы по интервалам в $\mathbb{R}^n$

5.1 Определение интеграла Римана по интервалу $\mathbb{R}^n$

Определение: Интервалом I в $\mathbb{R}^n$ называют множество таких точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, что для некоторых фиксированных точек $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ выполнено $\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $a_j \leq x_j \leq b_j$. Точки a и b называют концами главной диагонали.
Определение: Диаметр интервала I $\operatorname{diam} I = \rho(a, b)$.

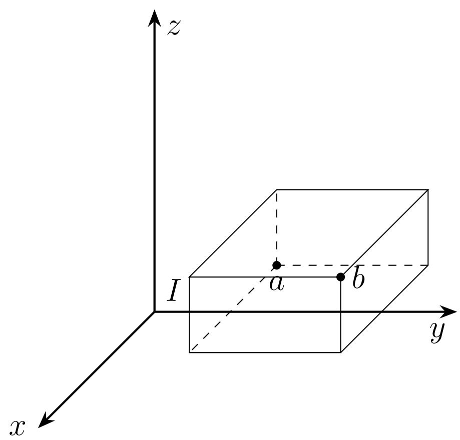


Рис. 5.1: Интервал в $\mathbb{R}^3$

В $\mathbb{R}^2$ интервал представляет из себя прямоугольник, а в $\mathbb{R}^3$ – прямоугольный параллелепипед (см. рис. 5.1)
Обозначение: $I_{a,b}$ или $R(a, b)$ (от слова «rectangle» - прямоугольник).
Определение: $|I_{a,b}| = \prod_{j=1}^{n}(b_j - a_j)$ – объём интервала.
Другие обозначения: $\mu(I), \operatorname{meas}_n(I)$ (от слова «measure» – мера).

Лемма 5.1.1. *Мера интервала обладает следующими свойствами:*

1. *Однородность:* $|I_{\lambda a, \lambda b}| = \lambda^n |I_{a,b}|$, *для* $\lambda \geq 0$.

2. *Аддитивность: Если* $\{I_n\}$ *– система неперекрывающихся интервалов и* $I = \bigcup_{j=1}^{n} I_j$ *– интервал, то*

$$|I| = \sum_{k=1}^{n} |I_j|$$

3. *Если интервал* $I \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n} I_j$, *то* $|I| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} |I_j|$.

Доказательство. 1. Проверим равенство:

$$|I_{\lambda a, \lambda b}| = \prod_{j=1}^{n} (\lambda b_j - \lambda a_j) = \prod_{j=1}^{n} \lambda(b_j - a_j) = \lambda^n \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j) = \lambda^n |I_{a,b}|$$

2. Рассмотрим частный случай (на примере $\mathbb{R}^2$): Пусть прямоугольник разбит на прямоугольники клетчато, т.е. как показано на рисунке.

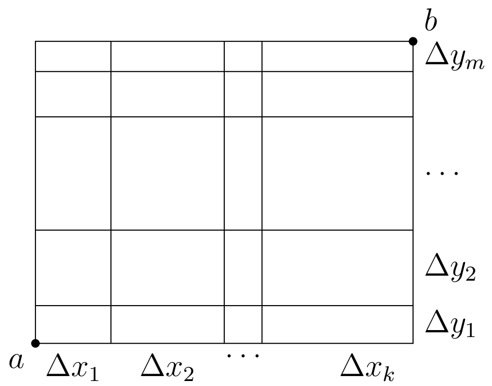


Рис. 5.2: Клетчатое разбиение прямоугольника

Тогда сумма мер (площадей) прямоугольников равна:

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} \Delta x_i \Delta y_j = \sum_{i=1}^{k} \Delta x_i \sum_{j=1}^{m} \Delta y_j = \sum_{i=1}^{k} \Delta x_i (b_y - a_y) = (b_x - a_x)(b_y - a_y) = |I_{a,b}|$$

Общий случай: абсолютно случайное разбиение. Продлим все стороны внутренних прямоугольников, тем самым сведём задачу к частному случаю:

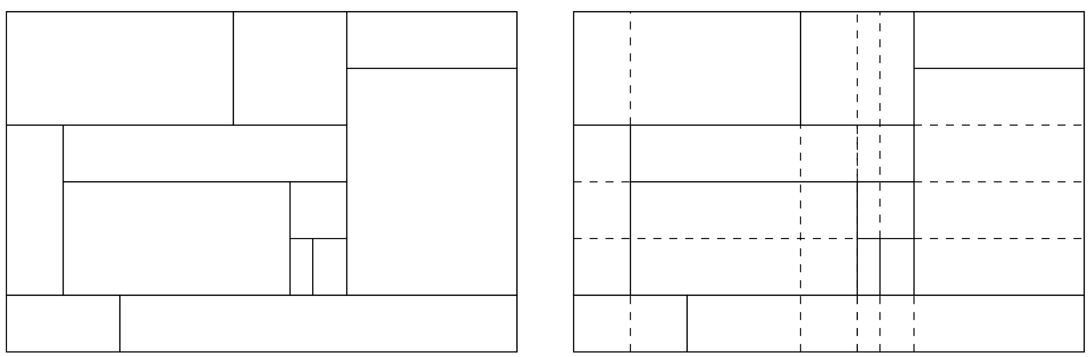


Рис. 5.3: Продление сторон прямоугольников

Как можно заметить, не только сам прямоугольник разбит клетчато, но и внутренние прямоугольники тоже, при этом ни один прямоугольник не может быть внутренним сразу для двуз и более прямоугольников. Поэтому в сумме $\sum |I_j|$ каждая мера $|I_j|$ разбивается на сумму мер внутренних прямоугольников. Тогда мы получим сумму мер маленьких прямоугольников, что из частного случая равно мере исходного прямоугольника.

3. Доказывается с помощью такого же разбиения как и в пункте 2.

$\square$

Определение: Разбиение P интервала I называют систему непересекающихся интервалов $\{I_j\}$ такую, что $I = \bigcup I_j$

Определение: Диаметром разбиения P интервала I называется величина

$$\lambda_P = \max_{j\in\{0,\ldots,N_P\}} (\operatorname{diam} I_j)$$

Определение: Система отмеченных точек $\{\xi_j\}$ разбиения P – система таких точек, что $\forall j \in \{0, 1, \ldots, N_P\} : \ \xi_j \in I_j$. Разбиение с системой отмеченных точек будем обозначать (P, ξ).

Определение: Пусть $f(x) : I \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Интегральной суммой Римана функции $f(x)$ на интервале I с разбиением (P, ξ) называют следующую величину:

$$\sigma(f; P, \xi) = \sum_{j=1}^{N_P} f(\xi_j)|I_j|$$

Определение: Если для $f(x)$ на интервале $I \subset \mathbb{R}^n$ существует предел при $\lambda_P \to 0$ интегральной суммы Римана $\sigma(f; P, \xi)$, то $f(x)$ интегрируема на I по Риману.

Обозначение: $f(x) \in \mathcal{R}(I)$

$$\lim_{\lambda_P\to 0} \sigma(f; P, \xi) = \int\limits_I f(x)dx$$

Также интеграл в $\mathbb{R}^n$ обозначают следующим образом:

$$\overbrace{\int\!\!\cdots\!\!\int\limits_I}^{n} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

В частности для $n = 2$ и $n = 3$:

$$\iint\limits_I f(x, y)\, dx\, dy \qquad \iiint\limits_I f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

5.2 Критерий Коши существования интеграла. Необходимое условие интегрируемости

Теорема 5.2.1 (Критерий Коши существования интеграла)**.** *Функция $f(x)$ интегрируема по Риману на интервале I тогда и только тогда, когда* $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall(P_1, \xi_1), (P_2, \xi_2) :$ $\lambda_{P_1}, \lambda_{P_2} < \delta :$

$$|\sigma(f; P_1, \xi_1) - \sigma(f; P_2, \xi_2)| < \varepsilon$$

Доказательство.

1. Доказательство необходимости. По определению интегрируемости: $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ $\forall(P_1, \xi_1), (P_2, \xi_2) :\ \lambda_{P_1}, \lambda_{P_2} < \delta :$

$$\begin{cases} |\sigma(f; P_1, \xi_1) - J| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ |\sigma(f; P_2, \xi_2) - J| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{cases} \quad , \text{ где } J = \int\limits_I f(x)dx$$

Сложим два неравенства воспользуемся неравенством треугольника и получим:

$$|\sigma(f; P_1, \xi_1) - \sigma(f; P_2, \xi_2)| < |\sigma(f; P_1, \xi_1) - J| + |\sigma(f; P_2, \xi_2) - J| < \varepsilon$$

2. Доказательство достаточности
   Считаем, что для данной функции $f(x)$ справедливо, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall (P_1, \xi_1), (P_2, \xi_2) :\ \lambda_{P_1}, \lambda_{P_2} < \delta :\ |\sigma(f; P_1, \xi_1) - \sigma(f; P_2, \xi_2)| < \varepsilon$.

   Раз выражение справедливо для произволльного ε, возьмём $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$ и возьмём соответствующий ему $\delta_1 > 0$. Возьмём произвольное разбиение с отмеченными точками $(P_1, \xi_1) :\ \lambda_{P_1} < \delta_1$. Тогда $\forall (P, \xi) :\ \lambda_P < \delta_1$ справедливо следующее:

$$\sigma(f; P, \xi) \in \left[\sigma(f; P_1, \xi_1) - \frac{1}{2}; \sigma(f; P_1, \xi_1) + \frac{1}{2}\right]$$

   Обозначим данный отрезок Δ_1. Теперь возьмём $\varepsilon_2 = \frac{1}{4}$ и возьмём соответствующее ему $\delta_2 : \delta_1 > \delta_2 > 0$.

   Почему мы сможем найти такое δ_2? Потому что если $|\sigma(f; P_1, \xi_1) - \sigma(f; P_2, \xi_2)| < \varepsilon$ справедливо для разбиений радиуса, меньшего чем некоторое δ, то оно автоматически справедливо для разбиений радиуса, меньшего чем $\delta' < \delta$.

   Теперь снова возьмём произвольное разбиение с отмеченными точками $(P_2, \xi_2) : \lambda_{P_2} < \delta_2 < \delta_1$. Отсюда получаем, что $\sigma(f; P_2, \xi_2) \in \Delta_1$ и для произвольного $(P, \xi) : \lambda_P < \delta_2$:

$$\sigma(f; P, \xi) \in \left[\sigma(f; P_2, \xi_2) - \frac{1}{4}; \sigma(f; P_2, \xi_2) + \frac{1}{4}\right] = \Delta_2'$$

   Пусть $\Delta_2 = \Delta_1 \cap \Delta_2'$. Пересечение этих отрезков существует, т.к. $\sigma(f; P_2, \xi_2) \in \Delta_1$, причём это пересечение также является отрезком длины как минимум $\frac{1}{4}$.

   Дальше возьмём $\varepsilon_3 = \frac{1}{8}$, соответствующее ему $\delta_3 : \delta_2 > \delta_3 > 0$. Возьмём произвольное разбиение $(P_3, \xi_3) :\ \lambda_{P_3} < \delta_3 < \delta_2 < \delta_1$. Тогда из того, что радиус этого разбиения меньше δ_2 следует, что интегральная сумма по этому отрезку лежит в Δ_2', а из того, что радиус разбиения меньше δ_1 следует, что сумма лежит в Δ_1, т.е. сумма лежит в пересечении этих отрезков, т.е. Δ_2. Для произвольного разбиения $(P, \xi) :\ \lambda_P < \delta_3$

$$\sigma(f; P, \xi) \in \left[\sigma(f; P_3, \xi_3) - \frac{1}{8}; \sigma(f; P_3, \xi_3) + \frac{1}{8}\right] = \Delta_3'$$

   Пусть $\Delta_3 = \Delta_2 \cap \Delta_3'$. Пересечение этих отрезков существует, т.к. $\sigma(f; P_3, \xi_3) \in \Delta_2$, причём это пересечение также является отрезком длины как минимум $\frac{1}{8}$.

   Продолжая подобные рассуждения получим систему вложенных отрезков $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \Delta_3 \supset \ldots \supset \Delta_n \supset \ldots$. Длина каждого отрезка $|\Delta_n|$ определённо меньше или равна $\frac{1}{2^{n-1}}$, поэтому длина отрезков стремится к нулю при $n \to \infty$. По теореме Кантора о системе вложенных отрезков существует единственная точка $J : J \in \bigcap \Delta_n$. Докажем, что интеграл существует и равен J.

   Возьмём произвольный $\varepsilon > 0$. Так как $\{\Delta_n\}$ сходится к J, то найдётся такое натуральное $N :\ \forall n > N :\ \Delta_n \subset (J - \varepsilon; J + \varepsilon)$. Тогда возьмём $\delta = \delta_{N+1}$. $\forall (P, \xi) :\ \lambda_P < \delta$:

$$\sigma(f; P, \xi) \in \Delta_{N+1} \subset (J - \varepsilon; J + \varepsilon) \Rightarrow |\sigma(f; P, \xi) - J| < \varepsilon$$

□

Теорема 5.2.2 (Необходимое условие интегрируемости)**.** *$f(x)$ – функция на $I \subset \mathbb{R}^n$. Если функция $f(x)$ интегрируема на интервале I то она ограничена на I.*

Доказательство. От противного. Пусть $f(x)$ неограничена на I. Т.к. функция интегрируема на интервале тогда выполняется критерий Коши:

$$\forall\varepsilon > 0\,\exists\delta > 0\,\forall(P_1,\xi_1),(P_2,\xi_2):\ \lambda_{P_1},\lambda_{P_2} < \delta : |\sigma(f;P_1,\xi_1) - \sigma(f;P_2,\xi_2)| < \varepsilon$$

$f(x)$ неограничена на I, значит она неограничена на каком-то подинтервале I_k. Выберем некоторое разбиение P, которое содержит этот интервал I_k и выберем две системы отмеченных точек $\{\xi\}$ и $\{\xi'\}$ таких, что $\forall j \neq k:\ \xi_j = \xi'_j$. Точку ξ'_k возьмём такую, что $f(\xi'_k) > f(\xi_k) + \frac{1}{|I_k|}$. Возьмём $\varepsilon = 1$. Тогда

$$|\sigma(f;P,\xi) - \sigma(f;P,\xi')| < \varepsilon = 1$$

$$\left|\sum_{j=1}^{N_P} f(\xi_j)|I_j| - \sum_{j=1}^{N_P} f(\xi'_j)|I_j|\right| < 1$$

$$\left|\sum_{j=1}^{N_P} |f(\xi_j) - f(\xi'_j)|\cdot|I_j|\right| < 1$$

$$|f(\xi_k) - f(\xi'_k)|\cdot|I_k| < 1$$

$$f(\xi_k) - \frac{1}{|I_k|} < f(\xi'_k) < f(\xi_k) + \frac{1}{|I_k|} \text{ – противоречие}$$

□

5.3 Критерии интегрируемости

Определение: Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ имеет меру нуль по Лебегу в $\mathbb{R}^n$ если $\forall\varepsilon > 0\,\exists\{I_k\}$ – конечный или счётный набор интервалов: $\sum_{k=1}^{n}|I_k| < \varepsilon$ и $E \subset \bigcup I_j$.

Теорема 5.3.1 (Критерий Лебега интегрируемости по Риману)**.** *$f(x)$ на $I \subset \mathbb{R}^n$. $f(x)$ интегрируема на I тогда и только тогда, когда $f(x)$ ограничена на I и множество точек разрыва имеет меру нуль.*

Вспомним материал прошлого семестра: суммы и интегралы Дарбу и их свойства для $\mathbb{R}$. Всё это переносится и на $\mathbb{R}^n$:
Определение: $f(x)$ ограничена на I, P – некоторое разбиение этого интервала. $m_j = \inf\limits_{x\in I_j} f(x)$ и $M_j = \sup\limits_{x\in I_j} f(x)$. Тогда:

$$S_P(x) = \sum_{j=1}^{N_P} M_j|I_j| \text{ – верхняя сумма Дарбу}$$

$$s_P(x) = \sum_{j=1}^{N_P} m_j|I_j| \text{ – нижняя сумма Дарбу}$$

Свойства сумм Дарбу

1. Если разбиение P' получено из разбиения P путём разбиения некоторых интервалов, то $S_{P'} \leq S_P$ и $s_P \leq s_{P'}$.

2. Для любых разбиений P_1 и P_2 справедливо: $s_{P_1} \leq S_{P_2}$

3. Суммы Дарбу можно определить через следующие равенства:

$$s_P = \inf_{\{\xi\}} \sigma(f;P,\xi) \qquad S_P = \sup_{\{\xi\}} \sigma(f;P,\xi)$$

4. $S_P - s_P = \sum\limits_{j=1}^{N_P} \omega(f,I_j)|I_j|$, где $\omega(f,E)$ – колебание функции $f(x)$ на множестве E.

Определение: $\mathcal{I}^* = \inf\limits_{\forall P} S_P$ – верхний интеграл Дарбу.
Определение: $\mathcal{I}_* = \sup\limits_{\forall P} s_P$ – нижний интеграл Дарбу.

Теорема 5.3.2 (Теорема об интегрируемости Дарбу). *Ограниченная на $I \subset \mathbb{R}^n$ функция $f(x)$ интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{\lambda_P \to 0}(S_P - s_P) = 0$.*

Доказательство.

1. Необходимость.
   $f(x)$ интегрируема на I. Пусть J – интеграл $f(x)$ на I.
   $$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall (P,\xi) :\ \lambda_P < \delta :\ J - \varepsilon < \sigma(f;P,\xi) < J + \varepsilon$$
   По свойству 3 сумм Дарбу $s_P = \inf_{\{\xi\}} \sigma(f;P,\xi)$ и $S_P = \sup_{\{\xi\}} \sigma(f;P,\xi)$ и $s_P \leq S_P$. Тогда:
   $$J - \varepsilon \leq s_P \leq S_P \leq J + \varepsilon\ \Rightarrow S_P - s_P < \varepsilon$$

2. Достаточность.
   $f(x)$ ограничена на I и $\lim\limits_{\lambda_P \to 0}(S_P - s_P) = 0$. Из свойства 3 сумм Дарбу следует, что $\forall P\ s_P \leq \mathcal{I}_* \leq \mathcal{I}^* \leq S_P$. Т.к. $\mathcal{I}_*$ и $\mathcal{I}^*$ – фиксированные числа, не зависящие от разбиения, то $\mathcal{I}^* = \mathcal{I}_* = J$.

   Докажем, что $\sigma(f;P,\xi) \to J$ при $\lambda_P \to 0$. $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall (P,\xi) :\ \lambda_P < \delta :\ |\sigma(f;P,\xi) - J| < |S_P - s_P| < \varepsilon$.

□

Следствие из теоремы: $f(x) \in \mathcal{R}(I) \Leftrightarrow \lim\limits_{\lambda_P \to 0} \sum\limits_{j=1}^{N_P} \omega(f;I_j)|I_j| = 0$

5.4 Свойства интеграла Римана по отрезку

Теорема 5.4.1 (Линейность интеграла). *Пусть $f(x), g(x) \in \mathbb{R}(I)$. Тогда $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:*

$$\int\limits_I (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int\limits_I f(x)\, dx + \beta \int\limits_I g(x)\, dx$$

Доказательство. Пусть $J_1 = \int_I f(x)\, dx$, $J_1 = \int_I g(x)\, dx$. Тогда: $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall (P,\xi) :\ \lambda_P < \delta :$

$$|\sigma(\alpha f + \beta g;P,\xi) - \alpha J_1 - \beta J_2| = |\alpha(\sigma(f;P,\xi) - J_1) + \beta(\sigma(g;P,\xi) - J_2)| \leq$$
$$\leq |\alpha| \cdot |\sigma(f;P,\xi) - J_1| + |\beta| \cdot |\sigma(g;P,\xi) - J_2| < (|\alpha| + |\beta|)\varepsilon$$

□

Теорема 5.4.2 (Интегрируемость произведения функций). *Если $f, g \in \mathcal{R}(I)$, то $f \cdot g \in \mathcal{R}(I)$.*

Доказательство. Если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на I, то они ограничены на этом интервале. Пусть $|f(x)| < M_1$ и $|g(x)| < M_2$ на интервале I. Докажем интегрируемость функции $f^2(x)$. $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall P:\ \lambda_P < \delta:$

$$\sum_{j=1}^{N_P} \omega(f^2, I_j)|I_j| = \sum_{j=1}^{N_P} \sup_{x',x''\in I} |f^2(x') - f^2(x'')| \cdot |I_j| \leq \sum_{j=1}^{N_P} |I_j| \cdot \sup_{x',x''\in I} |f(x') - f(x'')| \cdot |f(x') + f(x'')| \leq$$

$$\leq 2M_1 \cdot \sum_{j=1}^{N_P} |I_j| \cdot \sup_{x',x''\in I} |f(x') - f(x'')| = 2M_1 \cdot \sum_{j=1}^{N_P} \omega(f, I_j)|I_j| < \varepsilon$$

Аналогично интегрируема функции $g^2(x)$ и $(f(x) + g(x))^2$. Тогда функция $f(x)g(x) = \frac{1}{2}((f(x) + g(x))^2 - f^2(x) - g^2(x))$ также интегрируема. □

Теорема 5.4.3 (Интегрируемость модуля функции). *Если $f(x)$ интегрируема на I, то $|f(x)|$ также интегрируема на I, а также выполняется неравенство:*

$$\left| \int\limits_I f(x)\, dx \right| \leq \int\limits_I |f(x)|\, dx$$

Доказательство. Т.к. функция $f(x)$ интегрируема на I, то выполняется следующее: $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall P : \lambda_P < \delta :$

$$\sum_{j=1}^{N_P} \omega(f, I_j)|I_j| < \varepsilon$$

Используя модификацию неравенства треугольника ($|a - b| > ||a| - |b||$) получим:

$$\sum_{j=1}^{N_P} \omega(f, I_j)|I_j| = \sum_{j=1}^{N_P} |I_j| \cdot \sup_{x',x''\in I} |f(x') - f(x'')| \geq \sum_{j=1}^{N_P} |I_j| \cdot \sup_{x',x''\in I} ||f(x')| - |f(x'')|| =$$

$$= \sum_{j=1}^{N_P} \omega(|f|, I_j)|I_j| \Rightarrow \sum_{j=1}^{N_P} \omega(|f|, I_j)|I_j| < \varepsilon \Rightarrow |f(x)| \text{ интегрируема}$$

Оценим интегральную сумму с помощью неравенства треугольника $|f(x)|$:

$$\sigma(|f|; P, \xi) = \sum_{j=1}^{N_P} |f(\xi_j)| \cdot |I_j| \geq \left| \sum_{j=1}^{N_P} f(\xi_j)|I_j| \right| = |\sigma(f; P, \xi)| \Rightarrow \int\limits_I |f(x)|\, dx \geq \left| \int\limits_I f(x)\, dx \right|$$

□

Глава 6

Интегралы по множеству в $\mathbb{R}^n$

6.1 Мера Жордана

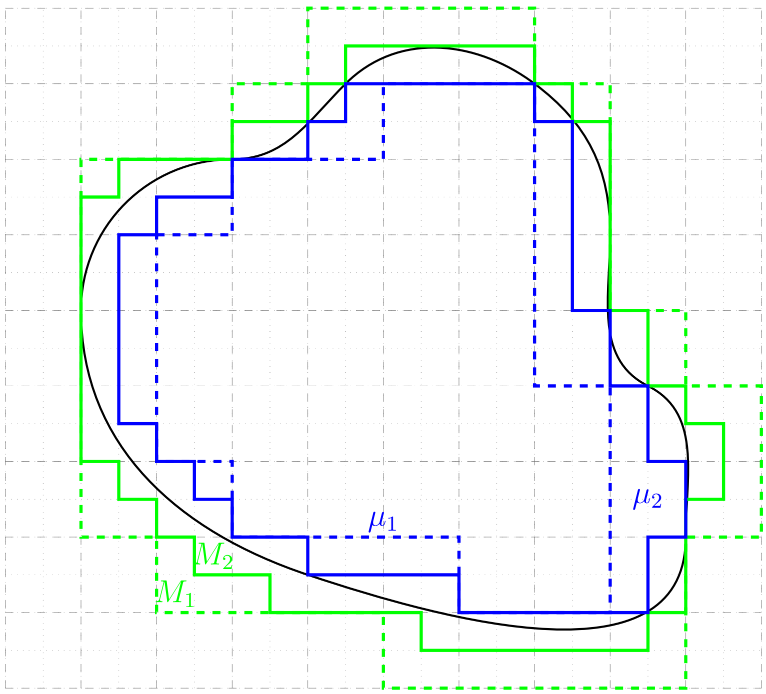


Рис. 6.1: Аппроксимация вписанными и описанными прямоугольными ломаными

Определение: Множество E имеет меру нуль по Жордану, если $\forall\varepsilon > 0$ существует конечное покрытие множества интервалами I_j такое, что $\sum |I_j| < \varepsilon$.
Определение: Множество G измеримо по Жордану, если граница ∂G имеет меру нуль по Жордану.
Мера Жордана определяется описыванием вокруг множества и вписыванием в него объединений всё более мелких непересекающихся интервалов (см. рис. 6.1). Если предел меры системы описывающих интервалов равен пределу меры системы вписанных интервалов, то тогда множество измеримо и его мера равна этим пределам:

$$\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu_n = \lim_{n\to\infty} M_n$$

Лемма 6.1.1. *Если множества A и B имеют меру нуль по Жордану, то их объединение $A \cup B$ тоже имеет меру нуль по Жордану.*

Доказательство. Раз множества A и B имеют меру нуль по Жордану, то $\forall \varepsilon > 0$ существует такое покрытие I'_j для множества A и I''_j для B, что

$$\sum |I'_j| < \frac{\varepsilon}{2} \sum |I''_j| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Для объединения множеств можно использовать покрытие $\{I'_j\} \cup \{I''_j\}$ (то что некоторые интервалы будут перекрываться или даже совпадать не страшно, определение покрытия допускает такую ситуацию). Тогда для $A \cup B$

$$\sum |I'_j| + \sum |I''_j| < \varepsilon$$

Отсюда множество $A \cup B$ имеет меру нуль по Жордану □

Теорема 6.1.1 (Измеримость пересечения, объединения и разности)**.** *Если A и B – измеримые по Жордану множества, то $A \cup B$, $A \cap B$ и $A \setminus B$ – измеримые по Жордану множества.*

Доказательство. Т.к. A и B измеримые по Жордану множества то ∂A и ∂B имеют меру нуль. Рассмотрим $\partial(A \cup B)$. По определению границы множества, $\partial(A \cup B)$ – множество точек, для каждой из которых справедливо, что в любой её окрестности есть как точки принадлежащие $A \cup B$ (т.е. принадлежащие либо A, либо B, либо двум множествам сразу), так и не принадлежащие этому множеству (т.е. не принадлежащие ни одному из этих множеств). Тогда это означает, что $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$. Из определения меры очевидно, что мера подмножества множества не больше меры самого множества (если оно измеримо). По лемме 6.1.1 $\mu(\partial A \cup \partial B) = 0$, а значит $\mu(\partial(A \cup B)) = 0$. Тогда объединение является измеримым по Жордану множеством.

Аналогичными рассуждениями можно доказать измеримость пересечения измеримых по Жордану множеств и их разности. □

6.2 Интегралы по множествам в $\mathbb{R}^n$

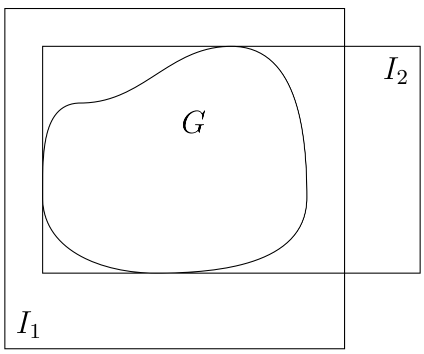
G – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, G измеримо по Жордану ($\mu(\partial G) = 0$), $f : G \to \mathbb{R}$.
Определение: Пусть $G \subset I \subset \mathbb{R}^n$. Пусть $g(x)$ определена на I следующим образом:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in G, \\ 0, & \text{если } x \notin G \end{cases}$$

Тогда интегралом Римана по множеству G называют следующую величину:

$$\int\limits_G f(x)\,dx = \int\limits_I g(x)\,dx$$

Заметим, что интеграл не зависит от выбора I. Покажем это. Рассмотрим две области $I_1, I_2 : G \subset I_1, G \subset I_2$.



Пусть $I = I_1 \cap I_2$.
$I_1 \backslash I$ разобьём на конечное число прямоугольников ΔI_j, $I_2 \backslash I$ на конечное число прямоугольников $\Delta I'_j$.
Тогда можно сказать, что:

$$\int\limits_{I_1} f(x)\,dx = \int\limits_{I} f(x)\,dx + \underbrace{\sum \int\limits_{\Delta I_j} f(x)\,dx}_{=0} = \int\limits_{I} f(x)\,dx + \underbrace{\sum \int\limits_{\Delta I'_j} f(x)\,dx}_{=0} = \int\limits_{I_2} f(x)\,dx$$

6.3 Переход от двойного интеграла к повторному

Теорема 6.3.1 (Переход от двойного интеграла к повторному (случай прямоугольника))**.** *$f(x,y)$ определеная на $I = [a;b] \times [c;d]$, $f(x) \in \mathcal{R}(I)$, $\forall x_0 \in [a;b]$ $f(x_0, y) \in \mathcal{R}[c;d]$. Тогда если $I(x) = \int\limits_c^d f(x,y)\,dy$, то $I(x) \in \mathcal{R}[a;b]$ и*

$$\iint\limits_I f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b I(x)\,dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy$$

Доказательство. Разбиваем I на прямоугольники I_{jk}, $j \in \{0,1,\ldots,n\}, k \in \{0,1,\ldots,m\}$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_m = d$$

$$I_{jk} = [x_{j-1}; x_j] \times [y_{k-1}; y_k]$$

Пусть $m_{jk} = \inf_{I_{jk}} f(x,y)$, $M_{jk} = \sup_{I_{jk}} f(x,y)$. Пусть $\xi_j \in [x_{j-1}; x_j]$ – система отмеченных точек.

$$m_{jk}\Delta y_k \le \int\limits_{y_{k-1}}^{y_k} f(\xi_j, y)\,dy \le M_{jk}\Delta y_k \ \forall k \in \{0,1,\ldots,m\}$$

$$\sum_{k=1}^m m_{jk}\Delta y_k \le \sum_{k=1}^m \int\limits_{y_{k-1}}^{y_k} f(\xi_j, y)\,dy = \int\limits_c^d f(\xi_j,y)\,dy \le \sum_{k=1}^m M_{jk}\Delta y_k$$

$$\sum_{k=1}^m m_{jk}\Delta y_k \Delta x_j \le \Delta x_j \int\limits_c^d f(\xi_j,y)\,dy \le \sum_{k=1}^m M_{jk}\Delta y_k \Delta x_j$$

$$\sum_{k=1}^m m_{jk}|I_{jk}| \le \Delta x_j \int\limits_c^d f(\xi_j,y)\,dy \le \sum_{k=1}^m M_{jk}|I_{jk}|$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m m_{jk}|I_{jk}| \le \sum_{j=1}^n \Delta x_j \int\limits_c^d f(\xi_j,y)\,dy \le \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m M_{jk}|I_{jk}|$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m m_{jk}|I_{jk}| \le \sum_{j=1}^n I(\xi_j)\Delta x_j \le \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m M_{jk}|I_{jk}|$$

$$s(f(x,y), P) \le \sigma(I(x), P, \xi) \le S(f(x,y), P)$$

При $\lambda_P \to 0$:

$$\iint\limits_I f(x,y)\,dxdy \le \int\limits_a^b I(x)\,dx \le \iint\limits_I f(x,y)\,dxdy$$

□

Теорема 6.3.2 (Аддитивность интеграла по множеству)**.** *G – область. G_1, G_2 – измеримые по Жордану множества такие, что $\overline{G} = \overline{G}_1 \cup \overline{G}_2$ и $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. $f(x) \in \mathcal{R}(G)$ тогда и только тогда, когда $f(x) \in \mathcal{R}(G_1)$ и $f(x) \in \mathcal{R}(G_2)$. И при любом изначальном условии:*

$$\int\limits_G f(x)\,dx = \int\limits_{G_1} f(x)\,dx + \int\limits_{G_2} f(x)\,dx$$

Теорема 6.3.3 (Теорема о среднем)**.** *$f(x), g(x)$ интегрируемы на G, $g(x)$ сохраняет знак или равна нулю на G. Если $M = \sup_G f(x)$ и $m = \inf_G f(x)$, то $\exists \mu \in [m; M]$:*

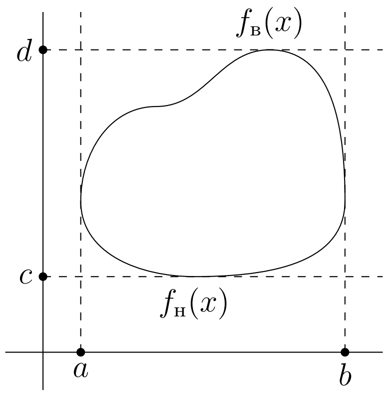
$$\int\limits_G f(x)g(x)\,dx = \mu \int\limits_G g(x)\,dx$$

Теорема 6.3.4 (Теорема о переходе от двойного интеграла к повторному)**.** *G - измеримая по Жордану замкнутая область. $f(x,y)$ интегрируема на G. $\forall (x,y) \in G$ $a \le x \le b$ и $\forall \xi \in [a;b]$ $G \cap \{x = \xi\}$(отрезок) $= [(\xi, f_н(\xi)); (\xi, f_в(\xi))]$. Также $\forall x_0 \in [a;b]$ $f(x_0, y)$ интегрируема на $[f_н(x_0); f_в(x_0)]$. Пусть $J(x) = \int\limits_{f_н(x)}^{f_в(x)} f(x,y)\,dy$. Тогда $J(x)$ интегрируема на $[a;b]$ и*

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b I(x)\,dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{f_н(x)}^{f_в(x)} f(x,y)\,dy$$

Доказательство. Пусть $F(x)$ определена следующим образом:

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & x \in G \\ 0, & x \notin G \end{cases}$$



Рассмотрим эту функцию в интервале $I = [a;b] \times [c;d]$: $G \subset I$. Раз G измеримо по Жордану, то $I \backslash G$ измеримо по Жордану. Отсюда нулевая функция интегрируема по

Риману в $I\backslash G$. $F(x,y) = f(x,y) \in \mathcal{R}(G)$ в G и $F(x,y) = 0 \in \mathcal{R}(I\backslash G)$ в $I\backslash G$. В силу аддитивности интеграла $F(x,y) \in \mathcal{R}(G \cup (I\backslash G)) = \mathcal{R}(I)$. В силу аддитивности интеграла:

$$\int\limits_{f_\text{н}(x)}^{f_\text{в}(x)} f(x_0,y)\,dy = \int\limits_{c}^{f_\text{н}(x)} 0\,dy + \int\limits_{f_\text{н}(x)}^{f_\text{в}(x)} f(x_0,y)\,dy + \int\limits_{f_\text{в}(x)}^{d} 0\,dy = \int\limits_{c}^{f_\text{н}(x)} F(x_0,y)\,dy + \int\limits_{f_\text{н}(x)}^{f_\text{в}(x)} F(x_0,y)\,dy +$$

$$+\int\limits_{f_\text{в}(x)}^{d} F(x_0,y)\,dy = \int\limits_{c}^{d} F(x_0,y)\,dy$$

Т.е. $\forall x_0 \in [a;b]$ $F(x_0,y) \in \mathcal{R}[c;d]$. Получили условие теоремы о переходе к повторному интегралу для интервалов:

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_I F(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d F(x,y)\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{f_\text{н}(x)}^{f_\text{в}(x)} f(x_0,y)\,dy$$

□

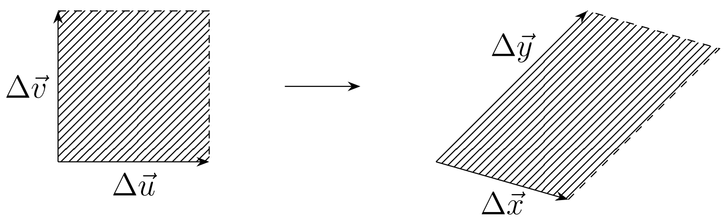
Замечание 1: Порядок интегрирования можно менять.
Замечание 2: Произвольную область G можно разбить на области из предыдущей теоремы.

6.4 Замена переменных

Пусть имеется взаимно однозначное гладкое отображение:

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{bmatrix}$$

Посмотрим как меняется элемент малой площади при переходе от переменных u и v к переменным x, y.



$$\Delta\vec{x} = \frac{\partial x}{\partial u}\Delta\vec{u} + \frac{\partial x}{\partial v}\Delta\vec{v}$$
$$\Delta\vec{y} = \frac{\partial y}{\partial u}\Delta\vec{u} + \frac{\partial y}{\partial v}\Delta\vec{v}$$

Площадь малого элемента площади (почти параллелограмма) равна модулю векторного произведения векторов $\Delta\vec{x}$ и $\Delta\vec{y}$:

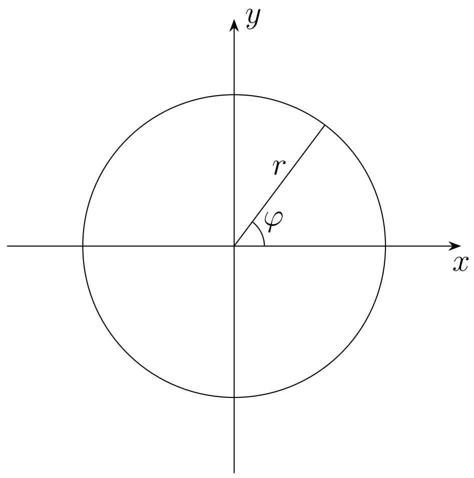
$$\Delta S = |\Delta\vec{x} \times \Delta\vec{y}| = |\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u & \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u & \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v & 0 \end{vmatrix}| = |\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}|\Delta u\Delta v = |J|\Delta u\Delta v$$

Выше было представлено довольно нестрогое доказательство формулы замены координат в кратном интеграле:

$$dxdy = |J|dudv$$

Примеры:

1. Полярная замена:



$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

$$dx\,dy = |J|dr\,d\varphi = |\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix}|dr\,d\varphi = |\begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix}|dr\,d\varphi = r\,dr\,d\varphi$$

2. Цилиндрическая замена:

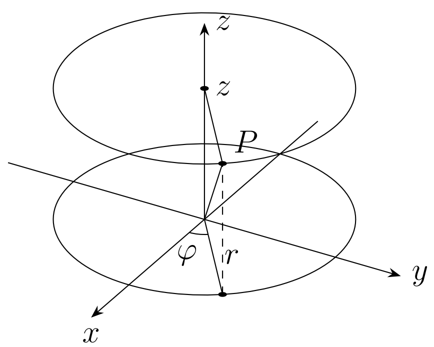


Рис. 6.2: Иллюстрация цилиндрической замены

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

$$dx\,dy\,dz = |J|dr\,d\varphi\,dz = |\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix}|dr\,d\varphi\,dz = |\begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}|dr\,d\varphi\,dz = r\,dr\,d\varphi\,dz$$

3. Сферическая замена 1

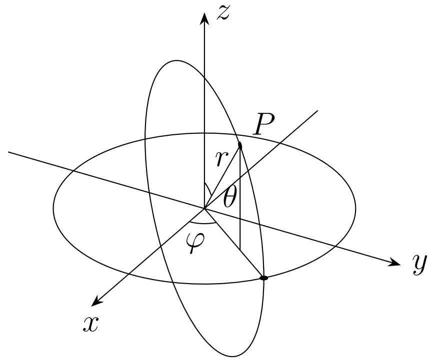


Рис. 6.3: Иллюстрация сферической замены 1

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = \cos\theta \begin{vmatrix} r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} +$$

$$+r\sin\theta \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} = r^2\cos^2\theta\sin\theta(\cos^{\varphi} + \sin^2\varphi) + r^2\sin^3\theta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) =$$

$$= r^2\sin\theta(\cos^{\theta} + \sin^2\theta) = r^2\sin\theta$$

Тогда $dx\,dy\,dz = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$

4. Сферическая замена 2

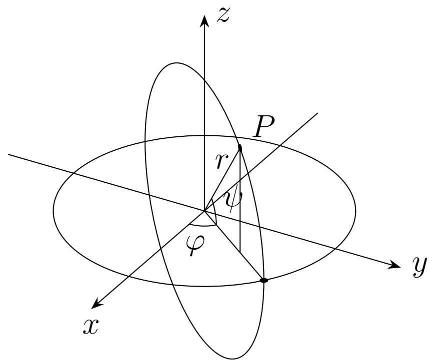


Рис. 6.4: Иллюстрация сферической замены 2

$$\begin{cases} x = r\cos\psi\cos\varphi \\ y = r\cos\psi\sin\varphi \\ z = r\sin\psi \end{cases}$$

$$J = r^2\cos\psi$$

Глава 7

Криволинейные интегралы

7.1 Кривые

Вспомним и выделим основные определения по кривым.
Определение: Кривая – траектория движения частицы со строгим порядком точек в этой траектории. Говоря математическим языком, кривая – зависимость координат точки от некоторой независимой переменной(например, времени):

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}, t \in [\alpha; \beta]$$

Определение: Кривая называется гладкой, если $x(t), y(t), z(t) \in C^1[\alpha; \beta]$. Кривая называется кусочно-гладкой, если она гладкая во всех точках кроме некоторого конечного множества точек.
Определение: Гладкая кривая называется вырожденной, если $\exists t \in [\alpha; \beta]$:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 0$$

Определение: Кривая называется самопересекающейся, если $\exists t_1, t_2 \in [\alpha; \beta] : t_1 \neq t_2$ и

$$\begin{cases} x(t_1) = x(t_2), \\ y(t_1) = y(t_2), \\ z(t_1) = z(t_2) \end{cases}$$

Определение: Кривая называется регулярной, если она гладкая, невырожденная, несамопересекающаяся.
Определение: Длина кривой $|\gamma|$ – её первая мера по Жордану:

$$|\gamma| = \mu(\gamma) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt$$

7.2 Криволинейные интегралы I рода

γ – гладкая кривая. Функция $f(x, y, z)$ задана на γ.
$\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta; T : \Delta t_j = [t_{j-1}; t_j]$ – разбиение отрезка $[\alpha; \beta]$
$A_j = (x(t_j), y(t_j), z(t_j))$ – точки разбиения кривой.

$\Delta\gamma_j = \gamma$ на Δt_j – разбиение кривой.
$\{\xi_j\} : \xi_j \in \Delta t_j$ – набор отмеченных точек.
$\{\Xi_j\} : \Xi_j = (x(\xi_j), y(\xi_j), z(\xi_j))$ – набор отмеченных точек на кривой
$\lambda_P = \max\limits_{j\in\{0,\dots,n\}} |\Delta\gamma_j|$ – димаметр разбиения P.

Определение: Интегральной суммой функции $f(x, y, z)$ по кривой γ I рода называют

$$\sigma_\gamma(f; P, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(x(\xi_k), y(\xi_k), z(\xi_k))|\Delta\gamma_k|$$

Определение: Функцию $f(x, y, z)$ называют интегрируемой на кривой γ, если $\exists I \in \mathbb{R}\, \forall\varepsilon > 0\, \exists\delta > 0\, \forall(P, \xi) : \lambda_P < \delta :$

$$|I - \sigma_\gamma(f; P, \xi)| < \varepsilon$$

Проще говоря, если существует предел интегральной суммы при $\lambda_P \to 0$

$$\lim_{\lambda_P\to 0} \sigma_\gamma(f; P, \xi) = \int\limits_\gamma f(x, y, z)\, dl$$

Здесь I – интеграл по кривой I рода, dl – дифференциал длины дуги. Из 2 семестра есть формула:

$$dl = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt$$

Теорема 7.2.1. *γ – регулярная кривая, а $f(x, y, z)$ непрерывна на γ. Тогда f интегрируема на γ и:*

$$\int\limits_\gamma f(x, y, z)\, dl = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt$$

Доказательство. $f(x(t), y(t), z(t))$ непрерывна на $[\alpha; \beta]$, отсюда ограничена. Значит функция $f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$ тоже ограничена, а значит интеграл

$$\int\limits_\alpha^\beta f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt$$

сходится (пусть сходится к I). Т.е. $\forall\varepsilon > 0\, \exists\delta_1 > 0\, \forall(T, \xi) : \lambda_P < \delta_1 :$

$$|I - \sum_{k=1}^{n} f(x(\xi_k), y(\xi_k), z(\xi_k))\sqrt{\dot{x}^2(\xi_k) + \dot{y}^2(\xi_k) + \dot{z}^2(\xi_k)}|\Delta t_k|| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|I - \sum_{k=1}^{n} f(\Xi_k) \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\dot{x}^2(\xi_k) + \dot{y}^2(\xi_k) + \dot{z}^2(\xi_k)}\, dt| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Докажем, что интеграл по кривой также сходится к I.

$$|I - \sigma_\gamma(f; P, \xi)| = |I - \sum_{k=1}^{n} f(\Xi_k)|\Delta\gamma_k|| =$$

$$|I - \sum_{k=1}^{n} f(\Xi_k) \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt| < |I - \sum_{k=1}^{n} f(\Xi_k) \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\dot{x}^2(\xi_k) + \dot{y}^2(\xi_k) + \dot{z}^2(\xi_k)}\, dt| +$$

$$+|\sum_{k=1}^{n} f(\Xi_k)\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\left(\sqrt{\dot{x}^2(\xi_k)+\dot{y}^2(\xi_k)+\dot{z}^2(\xi_k)}-\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\right)dt| <$$

По теореме Кантора непрерывная на отрезке $[\alpha;\beta]$ функция $\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}$ равномерно непрерывна на нём, т.е. $\exists\delta_2>0\ \exists t'_k\in[t_{k-1};t_k]\ |t_k-t'_k|<\delta_2:$

$$|\sqrt{\dot{x}^2(t_k)+\dot{y}^2(t_k)+\dot{z}^2(t_k)}-\sqrt{\dot{x}^2(t'_k)+\dot{y}^2(t'_k)+\dot{z}^2(t'_k)}|<\frac{\varepsilon}{2M_k(\beta-\alpha)}$$

где M_k – максимальное значение функции f на $\Delta\gamma_k$. Тогда для $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$:

$$<\frac{\varepsilon}{2}+|\sum_{k=1}^{n} M_k\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\frac{\varepsilon}{2M_k(\beta-\alpha)}\,dt|=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

□

Заметим, что интеграл по кривой не должен зависеть от параметризации этой кривой, т.е. не важно с какой скоростью в каждой точке траектории проходит частица. Пусть функция прохождения параметра – $s(t)$. Функция монотонна, непрерывна, т.е. дифференцируема и обратима. Теперь параметр t меняется от $s^{-1}(\alpha)$ до $s^{-1}(\beta)$. Тогда интеграл по кривой:

$$\int\limits_{\gamma} f(x(s(t)),y(s(t)),z(s(t)))\,dl=$$

$$=\int\limits_{s^{-1}(\alpha)}^{s^{-1}(\beta)} f(x(s),y(s),z(s))\sqrt{\dot{x}^2(s)\dot{s}^2(t)+\dot{y}^2(s)\dot{s}^2(t)+\dot{z}^2(s)\dot{s}^2(t)}\,dt=$$

$$=\int\limits_{s^{-1}(\alpha)}^{s^{-1}(\beta)} f(x(s),y(s),z(s))\sqrt{\dot{x}^2(s)+\dot{y}^2(s)+\dot{z}^2(s)}\dot{s}(t)\,dt=$$

$$=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(s),y(s),z(s))\sqrt{\dot{x}^2(s)+\dot{y}^2(s)+\dot{z}^2(s)}\,ds$$

Теорема 7.2.2 (Оценка интеграла)**.** *Функция $f(x,y,z)$ ограничена на γ: $|f(x,y,z)|<M$. Тогда:*

$$\left|\int\limits_{\gamma} f(x,y,z)\,dl\right|\le M|\gamma|$$

Доказательство. Для любого разбиения P и набора отмеченных точек ξ:

$$|\sigma_\gamma(f;P,\xi)|=\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)|\Delta\gamma_k|\right|\le\sum_{k=1}^{n}|f(\xi_k)|\cdot|\Delta\gamma_k|\le M\sum_{k=1}^{n}|\Delta\gamma_k|=M|\gamma|$$

□

Теорема 7.2.3. *Справедливы два следующих выражения:*

1. *$f_n(x,y,z) \rightrightarrows f(x,y,z)$ на γ. Тогда*

$$\left\{\int\limits_{\gamma} f_n(x,y,z)\,dl\right\} \to \int\limits_{\gamma} f(x,y,z)\,dl$$

2.

$$\begin{cases} x_n(t) \rightrightarrows x(t), \\ y_n(t) \rightrightarrows y(t), \\ z_n(t) \rightrightarrows z(t), \\ \dot{x}_n(t) \rightrightarrows \dot{x}(t), \\ \dot{y}_n(t) \rightrightarrows \dot{y}(t), \\ \dot{z}_n(t) \rightrightarrows \dot{z}(t) \end{cases} \Rightarrow \int\limits_{\gamma_n} f(x,y,z)\,dl \to \int\limits_{\gamma} f(x,y,z)\,dl$$

7.3 Криволинейные интегралы II рода

γ – регулярная кривая. $\vec{f}(x,y,z) = \{P(x,y,z); Q(x,y,z); R(x,y,z)\}$ – векторная функция.
P, ξ – разбиение кривой γ с отмеченными точками.
$\vec{a}_i = \overrightarrow{A_{i-1}A_i}$
Определение: Интегральной суммой векторной функции $f(x,y,z)$ по кривой γ II рода называют:

$$\sigma_\gamma(\vec{f}; P, \xi) = \sum_{k=1}^{n} (\vec{f}(\Xi_k), \vec{a}_k) = \sum_{k=1}^{n} \left(P(\Xi_k)\Delta x_k + Q(\Xi_k)\Delta y_k + R(\Xi_k)\Delta z_k\right)$$

Определение: Векторная функция $\vec{f}(x,y,z)$ интегрируема по кривой γ, если существует предел интегральной суммы II рода при $\lambda_P \to 0$:

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \sigma_\gamma(\vec{f}, P, \xi) = \int\limits_{\gamma} (\vec{f}, \vec{dl}) = \int\limits_{\gamma} (P\,dx + Q\,dy + R\,dz)$$

Заметим, что интегральная сумма векторной функции II рода равна сумме интегральных сумм проекций вектора на оси:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(P(\Xi_k)\Delta x_k + Q(\Xi_k)\Delta y_k + R(\Xi_k)\Delta z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(\Xi_k)\Delta x_k + \sum_{k=1}^{n} Q(\Xi_k)\Delta y_k + \sum_{k=1}^{n} R(\Xi_k)\Delta z_k$$

И тоже самое с интегралами:

$$\int\limits_{\gamma} (\vec{f}, \vec{dl}) = \int\limits_{\gamma} P\,dx + \int\limits_{\gamma} Q\,dy + \int\limits_{\gamma} R\,dz$$

Теорема 7.3.1. *Скалярная функция $P(x,y,z)$ непрерывна на регулярной кривой γ. Тогда:*

$$\int\limits_{\gamma} P(x,y,z)\,dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t), z(t))\dot{x}(t)\,dt$$

Доказательство. Т.к. функция $P(x(t), y(t), z(t))\dot{x}(t)$ непрерывна на $[\alpha;\beta]$, то она ограничена, а значит интегрируема (пусть интеграл сходится к I). $\forall\varepsilon > 0\,\exists\delta_1 > 0\,\forall(T,\xi) : \lambda_T < \delta_1$

$$|I - \sigma(P\dot{x}; T, \xi)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Докажем, что интегральная сумма по кривой проекции вектора тоже сходится к I.

$$|I - \sigma_{\gamma,x}(P; T, \xi)| < |I - \sigma(P\dot{x}; T, \xi)| + |\sigma(P\dot{x}; T, \xi) - \sigma_{\gamma,x}(P; T, \xi)|$$

Рассмотрим второе слагаемое:

$$|\sigma(P\dot{x}; T, \xi) - \sigma_{\gamma,x}(P; T, \xi)| = \left|\sum_{k=1}^{n} P(\Xi_k)(\dot{x}(\xi_k)|\Delta t_k| - (x(t_k) - x(t_{k-1})))\right| =$$

По теореме Лагранжа $\exists\xi'_k \in \Delta t_k : x(t_k) - x(t_{k-1}) = \dot{x}(\xi'_k)|\Delta t_k|$

$$= \left|\sum_{k=1}^{n} P(\Xi_k)|\Delta t_k|(\dot{x}(\xi_k) - \dot{x}(\xi'_k))\right| < \sum_{k=1}^{n} |P(\Xi_k)| \cdot |\Delta t_k| \cdot |\dot{x}(\xi_k) - \dot{x}(\xi'_k)| <$$

Функция $P(x, y, z)$ непрерывна на γ, значит ограничена на ней. Пусть $|P(x, y, z)| < M$ на кривой. И раз функция $\dot{x}(t)$ непрерывна на Δt_k, то по теореме Кантора она равномерно непрерывная на ней: $\exists\delta_2 > 0\,\exists t', t'' \in \Delta t_k\ |t' - t''| < \delta_2$:

$$|\dot{x}(t') - \dot{x}(t'')| < \frac{\varepsilon}{2M(\beta-\alpha)}$$

Тогда:

$$< \sum_{k=1}^{n} M \cdot |\Delta t_k| \cdot \frac{\varepsilon}{2M(\beta-\alpha)} = \frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)} \sum_{k=1}^{n} |\Delta t_k| = \frac{\varepsilon}{2}$$

А интегральная сумма для $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$:

$$< |I - \sigma(P\dot{x}; T, \xi)| + |\sigma(P\dot{x}; T, \xi) - \sigma_{\gamma,x}(P; T, \xi)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

□

Для криволинейного интеграла II рода справедлива формула:

$$\int_{\gamma} (\vec{f}, \vec{dl}) = \int_{\gamma} (P\,dx + Q\,dy + R\,dz) = \int_{\alpha}^{\beta} (P\dot{x} + Q\dot{y} + R\dot{z})\,dt$$

7.4 Формула Грина

Определение: Положительно ориентированной границей ∂G^+ области G будем называть границу области G с таким выбранным направлением обхода, что вектор нормали $\vec{n}$ (тангенциальный вектор, направленный по обходу, но повёрнутый на $\pi/2$) в каждой точке направлен внутрь области.

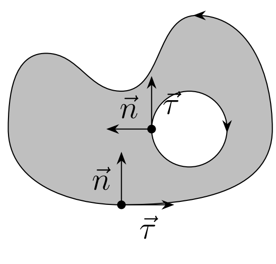


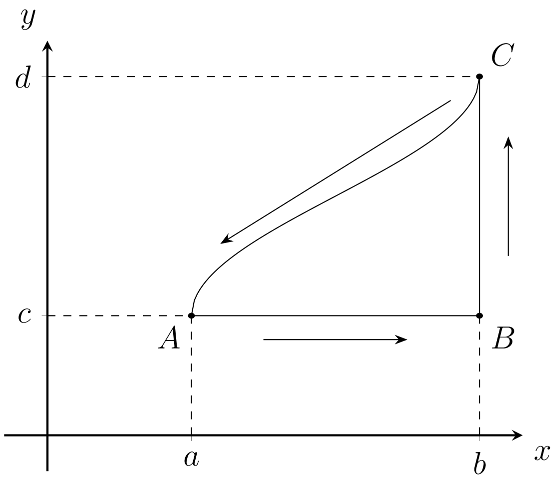
Рис. 7.1: Выбор положительного направления обхода области

Теорема 7.4.1 (Формула Грина)**.** *G – область с кусочно-гладкой, невырожденной границей ∂G, $\overline{G} \subset \Omega$. Функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ и $\frac{\partial P}{\partial y}$ непрерывны в Ω. Тогда справедлива формула Грина:*

$$\oint\limits_{\partial G^+} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{G} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy$$

Доказательство. Начнём с доказательства частного случая и затем постепенно начнём увеличивать общность .

1. G – криволинейный прямоугольный треугольник (катеты параллельны осям, гипотенуза – график строго возрастающей функции)



Пусть $y = \lambda(x)$ – функция, график которой является гипотенузой треугольника. Т.к. она монотонна, то она обратима, т.е. $\exists \lambda^{-1}(x)$. Обозначим обратную функцию $x = \mu(y)$.

$$\iint\limits_{G} \left(-\frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy = -\iint\limits_{G} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{c}^{\lambda(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy =$$

$$= -\int\limits_{a}^{b} (P(x,\lambda(x)) - P(x,c))\,dx \int\limits_{a}^{b} P(x,c)\,dx - \int\limits_{a}^{b} P(x,\lambda(x))\,dx$$

По формуле **??** первый интеграл равен интегралу $P(x,y)$ по отрезку AB в положительном направлении обхода, а второй интеграл с минусом равен интегралу $P(x,y)$ по кривой гипотенузе в положительном направлении. Интеграл $P(x,y)$ по отрезку BC равен нулю, т.к. отрезок вертикальный, а значит приращение x равно нулю везде. Тогда можно записать следующее:

$$= \int\limits_{[AB]} P(x,y)\,dx + \int\limits_{\overset{\frown}{CA}} P(x,y)\,dx + \int\limits_{[BC]} P(x,y)\,dx = \oint\limits_{\partial G^+} P(x,y)\,dx$$

Теперь расмотрим двойной интеграл $\frac{\partial Q}{\partial x}$:

$$\iint\limits_{G} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{\mu(y)}^{b} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx = \int\limits_{c}^{d} (Q(b,y) - Q(\mu(y),y))\,dy =$$

$$= \int\limits_c^d Q(b,y)\,dy - \int\limits_c^d Q(\mu(y),y)\,dy =$$

Первый интеграл равен интегралу по отрезку BC, второй равен интегралу по кривой гипотенузе. Интеграл по отрезку AB равен нулю, т.к. он горизонтален, а значит приращение y везде равно нулю. Тогда:

$$= \int\limits_{[BC]} Q(x,y)\,dy + \int\limits_{\overset{\frown}{CA}} Q(x,y)\,dy + \int\limits_{[AB]} Q(x,y)\,dy = \oint\limits_{\partial G^+} Q(x,y)\,dy$$

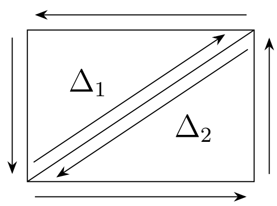
Если сложить два двойных интеграла получим формулу Грина:

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint\limits_G \left(-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy + \iint\limits_G \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy =$$

$$= \oint\limits_{\partial G^+} P(x,y)\,dx + \oint\limits_{\partial G^+} Q(x,y)\,dy = \oint\limits_{\partial G^+} P\,dx + Q\,dy$$

2. Случаю любой другой ориентации криволинейного прямоугольного треугольника с катетами, паралелльными осям доказываются аналогично

3. Прямоугольник



Этот случай сводится к сложению двух прямоугольных треугольников:

$$\oint\limits_{\partial R^+} = \oint\limits_{\partial \Delta_1^+} + \oint\limits_{\partial \Delta_2^+} = \iint\limits_{\Delta_1} + \iint\limits_{\Delta_2} = \iint\limits_R$$

4. Произвольная область[1]
Тогда область разбивается на прямоугольники и криволинейные трапеции:

Рис. 7.2: Пример разбития произвольной области на криволинейные треугольники и прямоугольники

□

[1]Для данного доказательства не проходят области, которые содержат счётное бесконечное множество локальных экстремумов, например, прямоугольник, верхняя сторона которого представляет из себя часть графика функции $x^2 \sin\frac{1}{x}$ около нуля

7.5 Условие независимости криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования

Теорема 7.5.1 (Условие независимости криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования). *$P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны в области G. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *$P\,dx + Q\,dy$ – полный дифференциал, т.е. существует однозначная функция $u(x,y)$, дифференцируемая в G, для которой $du = P\,dx + Q\,dy$.*

2. *Для любого замкнутого кусочно-гладкого контура γ:*

$$\oint\limits_{\gamma} P\,dx + Q\,dy = 0$$

3. *Для любых точек $A, B \in G$*

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx + Q\,dy$$

   не зависит от кусочно-гладкого пути $\overset{\frown}{AB}$, а зависит только от точек A и B.

Доказательство. Докажем, что из 1 утверждения следует 2, из 2 следует 3, из 3 следует 1. Тогда мы докажем эквивалентность данных утверждений.

1. Из утверждения 1 следует 2.
   Пусть $du = P\,dx + Q\,dy$. Тогда выполняется формула Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{a}^{b} (P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t))\,dt = \int\limits_{a}^{b} u(x(t),y(t))'_t\,dt =$$

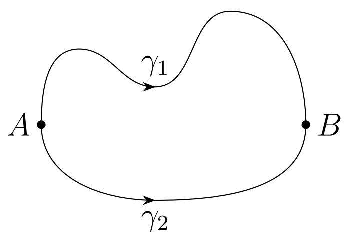
$$= u(B) - u(A)$$

   γ – кусочно-гладкий замкнутый контур, т.е. он соединяет некоторуб точку A из области G с точкой A. Поэтому:

$$\oint\limits_{\gamma} P\,dx + Q\,dy = u(A) - u(A) = 0$$

2. Из второго следует третье

$$\oint\limits_{\gamma} P\,dx + Q\,dy = 0$$



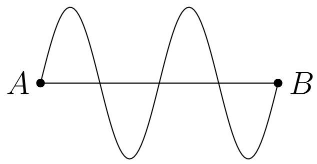
Пусть A и B – любые неравные точки γ. Тогда

$$0 = \oint\limits_{\gamma} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy - \int\limits_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy$$

Отсюда:

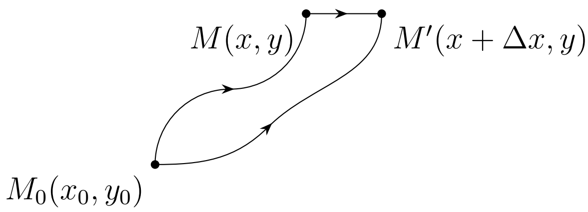
$$\int\limits_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy$$

Проблема возникает, когда γ самопересекается. Тогда можно рассмотреть контуры, образованные точками самопересечения.



Однако это не решает проблему, если количество самопересечений счётно.

3. Из третьего следует первое



Пусть $u(x, y) = \int_{\gamma_M} P\,dx + Q\,dy$, где γ_M – случайная кривая, соединяющая фиксированную точку $M_0(x_0, y_0)$ и точку $M(x, y)$. Рассмотрим частное разностное отношение при $\Delta x \to 0$:

$$\frac{u(x+\Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} = \frac{\int\limits_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy - \int\limits_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\int\limits_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy + \int\limits_{[MM']} P\,dx + Q\,dy - \int\limits_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \int\limits_{[MM']} P\,dx + Q\,dy =$$

$$= \frac{1}{\Delta x} \int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(t, y)\,dt = \underbrace{\frac{1}{\Delta x} \int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(x, y)\,dt}_{P(x,y)} + \frac{1}{\Delta x} \int\limits_{x}^{x+\Delta x} (P(t, y) - P(x, y))\,dt$$

Т.к. $P(x, y)$ – непрерывная функция, то $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall t \in [x; x+\Delta x]\, |\Delta x| < \delta :$

$$|P(t, y) - P(x, y)| < \varepsilon$$

Тогда:

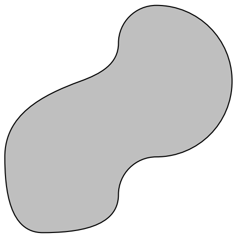
$$\left| \frac{1}{\Delta x} \int\limits_{x}^{x+\Delta x} (P(t, y) - P(x, y))\,dt \right| \leq \frac{1}{|\Delta x|} \left| \int\limits_{x}^{x+\Delta x} |P(t, y) - P(x, y)|\,dt \right| < \frac{1}{|\Delta x|} \varepsilon |\Delta x| = \varepsilon$$

Т.е. при $\Delta x \to 0$ разностное отношение стремится к $P(x, y)$, а это доказывает, что $\frac{\partial u}{\partial x} = P$. Аналогично доказывается, что $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$. Получили, что у $u(x, y)$ существуют частные непрерывные производные, а значит она дифференцируема и

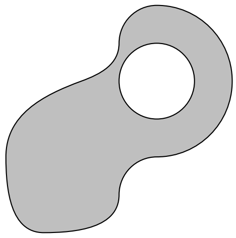
$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = P\,dx + Q\,dy$$

□

Определение: Плоская область G односвязна, если для любого контура γ без самопересечений, лежащего внутри G, внутренность γ целиком лежит в G.



Односвязная область



Неодносвязная область

Теорема 7.5.2. *G – односвязная область. Функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ и $\frac{\partial P}{\partial y}$ непрерывны в области G. Тогда условия 1, 2 и 3 из теоремы 7.5.1 эквиваленты следующему:*

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

Доказательство. Докажем следствие этого утверждения из утверждения 1 и следствие утверждения 2 из данного

1. Из первого утверждения следует $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$
   Существует функция $u(x, y)$, для которой $\frac{\partial u}{\partial x} = P$ и $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$. Тогда

   $$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

   По условию теорему частные производные P и Q непрерывны, а значит непрерывны смешанные производные функции $u(x, y)$. Тогда по теореме о смешанных производных они равны.

2. Из $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ следует второе утверждение.

   (a) γ не самопересекается
   Т.к. G односвязна, то вся область S лежащая внутри γ лежит внутри G, а значит $\gamma = \partial S^{\pm}$. Тогда справедлива формула Грина:

   $$\oint\limits_{\partial S^{\pm}} P\,dx + Q\,dy = \pm \iint\limits_{S} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy = 0$$

   (b) Если контур самопересекается, то нужно рассмотреть отдельно контуры, образованные точками самопересечения. Для них воспользоваться формулой Грина

□

Глава 8

Поверхностные интегралы

8.1 Площадь поверхности

Пусть поверхность задаётся функцией $z = f(x, y)$, $(x, y) \in G$, G – область в $\mathbb{R}^2$.

Теорема 8.1.1. *$G \subset \Omega$ (т.е $\overline{G} = G \cup \partial G \subset \Omega$), $f(x, y) \in C^1(\Omega)$. Тогда график $z = f(x, y)$ имеет площадь и площадь равна*

$$S = \iint\limits_G \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy$$

Доказательство. $\overline{G}$ ограничена, $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на $\overline{G}$. Отсюда $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ ограничены, а значит ограничена и функция $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$ на $\overline{G}$, а значит интегрируема на G.
P – разбиение $G = \bigcup \Delta G_j$, M_j – отмеченная точка ΔG_j, $M_j = (x_j, y_j)$. Каждому фрагменту ΔG_j пусть соответствует фрагмент ΔS_j поверхности. При малых разбиениях фрагменты ΔS_j можно считать приблизительно плоскими. Тогда по формуле площади проекции плоской фигуры:

$$\mu(\Delta G_j) = \mu(\Delta S_j)|\cos(\vec{k} \wedge \vec{n})|$$

где $\vec{n}$ – вектор единичной нормали к ΔS_j, а орта оси Oz $\vec{k}$ является нормалью плоскости Oxy. Из второго семестра помним, что вектор нормали (не единичной) к плоскости равен

$$\vec{N} = \left\{\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}; -1\right\}$$

Нормированный вектор будет иметь вид:

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} \left\{\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}; -1\right\}$$

Косинус угла между двумя единичными векторами равен их скалярному произведению, поэтому:

$$\cos(\vec{k} \wedge \vec{n}) = -\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}$$

Тогда:

$$\mu(\Delta S_j) = \mu(\Delta G_j)\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

Площадь всей поверхности равна:

$$S = \sum_{k=1}^{n} \mu(\Delta S_k) = \lim_{\lambda_P \to 0} \left(\sum_{k=1}^{n} \mu(\Delta G_j) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \right) =$$

$$= \lim_{\lambda_P \to 0} \sigma \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}; P, \xi \right) = \iint\limits_G \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy$$

□

Поверхность можно также задать параметрически:

$$S : \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v) \end{cases} , (u, v) \in \Omega$$

Чтобы поверхность была гладкой $x(u, v), y(u, v), z(u, v) \in C^1(\Omega)$. При этом между Ω и S должно быть взаимооднозначное соответствие (т.е. нет самопересечений). Также выделим следующее условие и для этого введём следующее обозначение для якобианов:

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Тогда среди следующих трёх якобианов должен быть хотя бы один ненулевой:

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)}, \frac{D(y, z)}{D(u, v)}, \frac{D(z, x)}{D(u, v)}$$

Для чего нужно это условие станет ясно дальше. Выведем формулу для площади поверхности, заданной параметрически. Для этого выразим ранее полученную формулу через переменные u и v, а также функции $x(u, v), y(u, v)$ и $z(u, v)$:

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du\, dv$$

По формуле производной сложной функции нескольких переменных частные производные z по u и по v равны:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \end{cases}$$

Заметим, что мы получили линейную систему уравнений с двумя неизвестными ($\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$). Остальные величины нам известны. Тогда по теореме Крамера эта система имеет единственное решение, если:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \neq 0$$

Отсюда и возникает необходимость в неравенстве хотя бы одного из якобианов нулю (это необязательно должен быть якобиан по x и y, ведь мы могли бы взять уравнение плоскости не через ось z, а через другую). Итак, раз $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\frac{D(z,y)}{D(u,v)}}{\frac{D(x,y)}{D(u,v)}} = -\frac{\frac{D(y,z)}{D(u,v)}}{\frac{D(x,y)}{D(u,v)}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\frac{D(x,z)}{D(u,v)}}{\frac{D(x,y)}{D(u,v)}} = -\frac{\frac{D(z,x)}{D(u,v)}}{\frac{D(x,y)}{D(u,v)}}$$

Тогда элемент площади dS равен:

$$dS = \sqrt{1 + \left(-\frac{\frac{D(y,z)}{D(u,v)}}{\frac{D(x,y)}{D(u,v)}}\right)^2 + \left(-\frac{\frac{D(z,x)}{D(u,v)}}{\frac{D(x,y)}{D(u,v)}}\right)^2} \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| du\, dv =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right)^2} du\, dv \ = \left|\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\vec{i} + \frac{D(z,x)}{D(u,v)}\vec{j} + \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\vec{k}\right| du\, dv =$$

$$= | \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} |\, du\, dv = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right| du\, dv$$

где за векторы $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ и $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ обозначены векторы $\left\{\frac{\partial x}{\partial u}; \frac{\partial y}{\partial u}; \frac{\partial z}{\partial u}\right\}$ и $\left\{\frac{\partial x}{\partial v}; \frac{\partial y}{\partial v}; \frac{\partial z}{\partial v}\right\}$ соответственно. Распишем модуль векторного произведения следующим образом:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\alpha = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha)^2} = \sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a}, \vec{b})^2}$$

Введём следующие обозначения:

$$E = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right|^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$

$$G = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

$$F = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right) = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$$

Тогда, наконец, элемент площади dS можно записать как:

$$dS = \sqrt{EG - F^2} du\, dv$$

Примеры:

1. Круговой конус:

$$z^2 = a^2(x^2 + y^2)\ (a > 0)$$

   Тогда $z = \pm a\sqrt{x^2 + y^2}$, а малый элемент площади:

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx\, dy = \sqrt{1 + \left(\pm\frac{ax}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\pm\frac{ay}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2} dx\, dy =$$

$$= \sqrt{1 + \frac{a^2x^2}{x^2 + y^2} + \frac{a^2y^2}{x^2 + y^2}} dx\, dy = \sqrt{1 + a^2}\, dx\, dy$$

2. Сфера:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Тогда $z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, а малый элемент площади:

$$dS = \sqrt{1 + \left(\mp\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\right)^2 + \left(\mp\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\right)^2} dx\,dy =$$

$$= \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}} dx\,dy = \frac{R\,dx\,dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = \frac{R}{|z|}\,dx\,dy$$

3. Цилиндр

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi, \\ y = R\sin\varphi, \\ z = t \end{cases}$$

Здесь поверхность задана параметрически, а значит можно воспользоваться второй формулой

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2 = R^2\sin^2\varphi + R^2\cos^2\varphi + 0 = R^2$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 = 0 + 0 + 1 = 1$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial\varphi}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial\varphi}\frac{\partial z}{\partial t} = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$dS = \sqrt{EG - F^2}\,d\varphi\,dt = R\,d\varphi\,dt$$

4. Сфера в сферических координатах

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi\sin\theta, \\ y = R\sin\varphi\sin\theta, \\ z = R\cos\theta \end{cases}$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = \{-R\sin\varphi\sin\theta; R\cos\varphi\sin\theta; 0\}$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = \{R\cos\varphi\cos\theta; R\sin\varphi\cos\theta; -R\sin\theta\}$$

$$E = (-R\sin\varphi\sin\theta)^2 + (R\cos\varphi\sin\theta)^2 = R^2\sin\theta$$

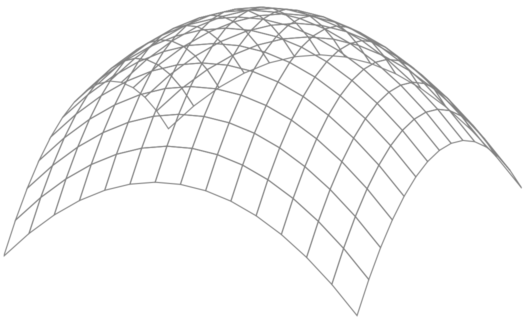
$$G = (R\cos\varphi\cos\theta)^2 + (R\sin\varphi\cos\theta)^2 + (-R\sin\theta)^2 = R^2$$

$$F = -R\sin\varphi\sin\theta\cos\varphi\cos\theta + R\sin\varphi\sin\theta\cos\varphi\cos\theta + 0 = 0$$

$$dS = \sqrt{EG - F^2}\,d\varphi\,d\theta = R^2\sin\theta\,d\varphi\,d\theta$$

8.2 Поверхностные интегралы I рода

Определение: S – регулярная поверхность, если она гладкая, невырожденная, без самопересечений.
Определение: Разбиение P поверхности S – система поверхностей ΔS_j.



Определение: Диаметром множества E называют следующую величину:

$$\operatorname{diam} E = \sup_{x',x''\in E} \rho(x',x'')$$

Определение: Диаметр разбиения P плоскости называют следующую величину:

$$\lambda_P = \max_{j\in\{0,\dots,n\}} \operatorname{diam} \Delta S_j$$

Определение: Интегральной суммой I рода функции $f(x,y,z)$ по регулярной поверхности называют S

$$\sigma_S(f;P,\xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\Xi_j)\mu(\Delta S_j)$$

Определение: Функция $f(x,y,z)$ интегрируема на регулярной поверхности S, если существует предел при $\lambda_P \to 0$ интегральной суммы I рода:

$$\lim_{\lambda_P\to 0} \sigma_S(f;P,\xi) = \iint\limits_S f(x,y,z)\,dS$$

Теорема 8.2.1. *S – регулярная поверхность, $f(x,y,z)$ – функция, непрерывная на S. Тогда $f(x,y,z)$ интегрируема на S и*

1. *Если поверхность S задана уравнением $z = z(x,y), (x,y) \in G$, то*

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,dS = \iint\limits_G f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$$

2. *Если поверхность S задана параметрически, то:*

$$\iint\limits_\Omega f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$$

Доказательство. Доказательство представим только для случая задания поверхности через $z = z(x,y)$. Для параметрического задания поверхности рассуждения аналогичны.

Функция $f(x,y,z(x,y))$ непрерывна на G, а значит функция $g(x,y) = f(x,y,z(x,y))$ $\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$ непрерывна на G, а значит обе ограничены (пусть $|f(x,y,z(x,y))| < M$) и интеграл сходится (пусть сходится к I).

По определению сходимости интеграла: $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall (P_G, \xi_G) :\ \lambda_{P_G} < \delta :$

$$|I - \sigma(g; P_G, \xi_G)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\left| I - \sum_{k=1}^{n} g(\xi_{Gk})\mu(\Delta G_k) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Докажем, что и интегральная сумма по поверхности сходится к I. Пусть разбиению P_G области G соответствует разбиение поверхности P_S, отмеченным точкам ξ_G соответствуют отмеченные точки ξ_S. Тогда:

$$|I - \sigma_S(f; P_S, \xi_S)| = \left| I - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_{Sk})\mu(\Delta S_k) \right| =$$

$$= \left| I - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_{Sk}) \iint\limits_{\Delta G_k} \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy \right| <$$

$$< \underbrace{\left| I - \sum_{k=1}^{n} g(\xi_{Gk})\mu(\Delta G_k) \right|}_{A_1} + \left| \sum_{k=1}^{n} \left(g(\xi_{Gk})\mu(\Delta G_k) - f(\xi_{Sk}) \iint\limits_{\Delta G_k} \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy \right) \right| \leq$$

$$\leq A_1 + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \left| g(\xi_{Gk})\mu(\Delta G_k) - f(\xi_{Sk}) \iint\limits_{\Delta G_k} \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy \right|}_{A_2}$$

Отдельно рассмотрим A_2:

$$\sum_{k=1}^{n} \left| f(\xi_{Sk}) \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\Bigg|_{\xi_{Gk}}+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\Bigg|_{\xi_{Gk}}}\,\mu(\Delta G_k) - f(\xi_{Sk}) \iint\limits_{\Delta G_k} \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy \right| =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |f(\xi_{Sk})| \cdot \left| \iint\limits_{\Delta G_k} \left(\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\Bigg|_{\xi_{Gk}}+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\Bigg|_{\xi_{Gk}}} - \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \right) dx\,dy \right| \leq$$

Обозначим $\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$ за $h(x,y)$.

$$\leq \sum_{k=1}^{n} |f(\xi_{Sk})| \cdot \iint\limits_{\Delta G_k} |h(\xi_{Gk}) - h(x,y)|\,dx\,dy <$$

Функция $h(x,y)$ непрерывна на G, значит по теореме Кантора она равномерно непрерывна на G, т.е. $\exists \delta_2 > 0\, \forall (x',y'),(x'',y'') \in G :\ \rho((x',y'),(x'',y'')) < \delta_2$

$$|h(x',y') - h(x'',y'')| < \frac{\varepsilon}{2\mu(G)M}$$

Тогда:

$$< \sum_{k=1}^{n} M \iint\limits_{\Delta G_k} \frac{\varepsilon}{2\mu(G)M} dx\,dy = \sum_{k=1}^{n} M \frac{\varepsilon\mu(\Delta G_k)}{2\mu(G)M} = \frac{\varepsilon}{2\mu(G)} \sum_{k=1}^{n} \mu(\Delta G_k) = \frac{\varepsilon}{2}$$

Если взять $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, то тогда и $A_1 < \varepsilon/2$ и $A_2 < \varepsilon/2$:

$$|I - \sigma_S(f; P_S, \xi_S)| < A_1 + A_2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\square$

8.3 Поверхностные интегралы II рода

Пусть имеется векторное поле $\vec{F}(x, y, z) = \{P(x, y, z); Q(x, y, z); R(x, y, z)\}$ и двусторонняя поверхность S[1]

Определение: Поверхностным интегралом II рода поля $\vec{F}$ по стороне поверхности S называют следующий интеграл I рода:

$$\iint\limits_{S^+} (\vec{F}, d\vec{S}) = \iint\limits_{S} (\vec{F}, \vec{n}^+)\, dS$$

Здесь $\vec{n}^+$ – вектор положительной нормали к выбранной стороне поверхности, а $d\vec{S} = \vec{n}^+ dS$ – ориентированный элемент поверхности.

Если поверхность задана уравнением $z = z(x, y)$, то нормаль $\vec{n}^+$ равна:

$$\vec{n}^+ = \pm \frac{\left\{\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1\right\}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}$$

Неопределённость знака вызвана выбором одной из двух сторон поверхности. В первом параграфе главы мы выразили частные производные z по x и y через параметрическое задание:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{D(y,z)}{D(u,v)}}{\frac{D(x,y)}{D(u,v)}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{D(z,x)}{D(u,v)}}{\frac{D(x,y)}{D(u,v)}}$$

Тогда вектор нормали можно записать следующим образом:

$$\vec{n}^+ = \pm \frac{\left\{\frac{D(y,z)}{D(u,v)}; \frac{D(z,x)}{D(u,v)}; \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right\}}{\sqrt{\left(\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right)^2}}$$

А ориентированные элемент поверхности тогда равен:

$$d\vec{S} = \vec{n}^+ dS = \pm \left\{\frac{D(y, z)}{D(u, v)}; \frac{D(z, x)}{D(u, v)}; \frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right\} du\,dv$$

[1]Примером двусторонней поверхности может служить любая поверхность второго порядка, плоскость и т.д. Также существуют односторонние поверхности, например, лента Мёбиуса или бутылка Клейна

Посчитав скалярное произведение, можно записать выражение для интеграла II рода:

$$\iint\limits_{S^+} (\vec{F}, d\vec{S}) = \pm \iint\limits_{\Omega} \left(P\frac{D(y,z)}{D(u,v)} + Q\frac{D(z,x)}{D(u,v)} + R\frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right) du\, dv$$

Вспомним формулу замены переменных в интегралах: $dx\,dy = |J|\,du\,dv$. Т.к. отображение из (u,v) в (x,y), (y,z) и (z,x) не меняет ориентацию, то все якобианы положительны, а значит модуль можно убрать. Если все эти отображения взаимооднозначны, то интеграл можно записать следующим образом:

$$\iint\limits_{S^+} (\vec{F}, d\vec{S}) = \pm \iint\limits_{S_x} P(x(y,z), y, z)\, dy\, dz \pm \iint\limits_{S_y} Q(x, y(z,x), z)\, dz\, dx \pm \iint\limits_{S_z} R(x, y, z(x,y))\, dx\, dy$$

В связи с этим поверхностные интегралы II рода часто записывают следующим образом:

$$\iint\limits_{S^+} (\vec{F}, d\vec{S}) = \iint\limits_{S^+} P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy$$

8.4 Скалярные и векторные поля

Определение: Оператор набла – векторный дифференциальный оператор, компоненты которого являются частными производными по координатам. Обозначается ∇

$$\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}; \frac{\partial}{\partial x_2}; \ldots; \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$$

Примером применения оператора набла может послужить градиент функции: если имеется дифференцируемая функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то её градиент – набла от функции:

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}; \frac{\partial f}{\partial x_2}; \ldots; \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\}$$

Определение: Дивергенция – дифференциальный оператор, отображающий векторное поле на скалярное: если $\vec{F} = \{F_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_n(x_1, \ldots, x_n)\}$ – векторное поле, то дивергенция поля $\vec{F}$ равна:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$$

Дивергенцию поля можно определить с помощью оператора набла:

$$\operatorname{div} \vec{F} = (\nabla, \vec{F})$$

Определение: Ротор – векторный дифференциальный оператор над векторным трёхмерным полем: если $\vec{F} = \{F_x, F_y, F_z\}$ – векторное поле, то его ротор равен:

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Ротор можно определить через оператор набла следующим образом:

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F}$$

Градиент, дивергенция и ротор не зависят от того, в каком ортонормированном базисе мы рассматриваем то или иное поле. Для того, чтобы это доказать посмотрим как меняется оператор набла при переходе от одного базиса к другому. Пусть есть ОНБ $\mathscr{E} = \{e_x, e_y, e_z\}$ и мы переходим к ОНБ $\mathscr{E}' = \{e'_x, e'_y, e'_z\}$. Матрица перехода $T_{\mathscr{E}\to\mathscr{E}'}$:

$$T_{\mathscr{E}\to\mathscr{E}'} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}$$

Из курса линейной алгебры помним, что преобразование координат вектора $\vec{a} = \{x, y, z\}$ при переходе из одного базиса в другой происходит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T_{\mathscr{E}\to\mathscr{E}'} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = t_{11}x' + t_{12}y' + t_{13}z' \\ y = t_{21}x' + t_{22}y' + t_{23}z' \\ z = t_{31}x' + t_{32}y' + t_{33}z' \end{cases}$$

Посмотрим как будет выглядеть набла в базисе $\mathscr{E}'$:

$$\nabla' = \left\{ \frac{\partial}{\partial x'}; \frac{\partial}{\partial y'}; \frac{\partial}{\partial z'} \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x'} = t_{11}\frac{\partial}{\partial x} + t_{21}\frac{\partial}{\partial y} + t_{31}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y'} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y'} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y'} = t_{12}\frac{\partial}{\partial x} + t_{22}\frac{\partial}{\partial y} + t_{32}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z'} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z'} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial z'} = t_{13}\frac{\partial}{\partial x} + t_{23}\frac{\partial}{\partial y} + t_{33}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x'} \\ \frac{\partial}{\partial y'} \\ \frac{\partial}{\partial z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} \\ t_{12} & t_{22} & t_{32} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x'} \\ \frac{\partial}{\partial y'} \\ \frac{\partial}{\partial z'} \end{pmatrix} = T^T_{\mathscr{E}\to\mathscr{E}'} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Не забываем, что переход происходит между двумя ортонормированными базисами, а значит матрица перехода. Из курса специальных глав линейной алгебры известно, что матрица перехода между двумя ортонормированными базисами ортогональная, т.е. $T^T_{\mathscr{E}\to\mathscr{E}'} = T^{-1}_{\mathscr{E}\to\mathscr{E}'} = T_{\mathscr{E}'\to\mathscr{E}}$. Тогда окончательно получаем, что:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x'} \\ \frac{\partial}{\partial y'} \\ \frac{\partial}{\partial z'} \end{pmatrix} = T_{\mathscr{E}'\to\mathscr{E}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Теперь перейдём к доказательству независимости градиента, дивергенции и ротора от ОНБ:

1. Независимость градиента:

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix} =$$

   Теперь применим определения матрицы перехода и ранее полученную формулу преобразования оператора набла:

$$= \begin{pmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \end{pmatrix} \cdot T_{\mathscr{E}'\to\mathscr{E}} \cdot T_{\mathscr{E}\to\mathscr{E}'} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x'} \\ \frac{\partial u}{\partial y'} \\ \frac{\partial u}{\partial z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x'} \\ \frac{\partial u}{\partial y'} \\ \frac{\partial u}{\partial z'} \end{pmatrix} = \nabla' u$$

2. Независимость дивергенции:

$$\operatorname{div} \vec{u} = (\nabla, \vec{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} =$$

   Применим полученную формулу преобразований и формулу преобразований координат вектора:

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}^T \cdot T_{\mathscr{E}\to\mathscr{E}'} \cdot \begin{pmatrix} u_{x'} \\ u_{y'} \\ u_{z'} \end{pmatrix} = \left(T_{\mathscr{E}\to\mathscr{E}'} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x'} \\ \frac{\partial}{\partial y'} \\ \frac{\partial}{\partial z'} \end{pmatrix} \right)^T \cdot T_{\mathscr{E}\to\mathscr{E}'} \cdot \begin{pmatrix} u_{x'} \\ u_{y'} \\ u_{z'} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x'} & \frac{\partial}{\partial y'} & \frac{\partial}{\partial z'} \end{pmatrix} \cdot T_{\mathscr{E}'\to\mathscr{E}} \cdot T_{\mathscr{E}\to\mathscr{E}'} \cdot \begin{pmatrix} u_{x'} \\ u_{y'} \\ u_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x'} & \frac{\partial}{\partial y'} & \frac{\partial}{\partial z'} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{x'} \\ u_{y'} \\ u_{z'} \end{pmatrix} = (\nabla', \vec{u}')$$

3. Независимость ротора:

$$\operatorname{rot} \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} =$$

   Вспомним, что определитель ортогональной матрицы равен ± 1, а значит если домножить на определитель матрицы перехода может поменяться только знак:

$$= \pm \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} \cdot |T_{\mathscr{E}\to\mathscr{E}'}| = \pm \left| \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{pmatrix} \cdot T_{\mathscr{E}\to\mathscr{E}'} \right| = \pm \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ \frac{\partial}{\partial x'} & \frac{\partial}{\partial y'} & \frac{\partial}{\partial z'} \\ u_{x'} & u_{y'} & u_{z'} \end{vmatrix}$$

   Получаем, что при переходе в другой ОНБ может поменяться только знак. Поменяться он может из-за того, что ориентация базисных векторов может смениться с левой на правую и наоборот.

8.5 Формула Гаусса-Остроградского

Определение: Потоком векторного поля $\vec{F} = \{F_x; F_y; F_z\}$ через сторону поверхности S^+ называют поверхностный интеграл II рода вектора через эту сторону:

$$\iint\limits_{S^+} (\vec{F}, d\vec{S}) = \iint\limits_{S^+} F_x \, dy \, dz + F_y \, dz \, dx + F_z \, dx \, dy$$

Определение: Если векторное поле $\vec{F}$ таково, что для любой замкнутой кусочно-гладкой поверхности S справедливо, что поток через S^+ равен нулю:

$$\oiint\limits_{S^+} (\vec{F}, d\vec{S}) = 0$$

то такое поле называют соленоидальным.

Теорема 8.5.1 (Формула Гаусса-Остроградского). *Имеется область $G \subset \mathbb{R}^3$ такая, что её граница ∂G – кусочно-гладкая поверхность. Пусть есть векторное поле $\vec{F} = \{P(x,y,z); Q(x,y,z); R(x,y,z)\} \in C^1(G)$. Тогда справедлива формула Гаусса-Остроградского:*

$$\oiint\limits_{\partial G^+} (\vec{F}, d\vec{S}) = \iiint\limits_{G} \operatorname{div} \vec{F}\, dx\, dy\, dz$$

где ∂G^+ – внешняя сторона ∂G.

Доказательство. В дальнейшем область G будем называть телом. Рассмотрим интеграл дивергенции поля и докажем, что он равен потоку поля через поверхность:

$$\iiint\limits_{G} \operatorname{div} \vec{F}\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_{G} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz$$

Рассмотрим интеграл по одному из слагаемых, например по $\frac{\partial R}{\partial z}$. Для этого рассмотрим несколько случаев:

1. Тело является цилиндроидом относительно оси Oz, т.е. оно представляет из себя тело, ограниченное плоскостями $z_в = z_в(x,y)$(«верхняя крышка») и $z_н = z_н(x,y)$, $(x,y) \in G_z$(«нижняя крышка»), $\forall (x,y) \in G_z$ $z_н(x,y) \le z_в(x,y)$. Здесь G_z – проекция G на плоскость Oxy. Тогда можно применить переход от кратного интеграла к повторному:

$$\iiint\limits_{G} \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{G_z} dx\, dy \int\limits_{z_н(x,y)}^{z_в(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\, dz = \iint\limits_{G_z} (R(x,y,z_в(x,y)) - R(x,y,z_н(x,y)))\, dx\, dy =$$

$$= \iint\limits_{G_z} R(x,y,z_в(x,y))\, dx\, dy - \iint\limits_{G_z} R(x,y,z_н(x,y))\, dx\, dy =$$

Получили интегралы II рода по верхней и нижней «крышкам». Положительной нормалью $\vec{n}^+$ будет в этом случае та, что в скалярном произведении сохраняет знак выражения, т.е. та, у которой компонента по z. Тогда в интеграле по верхней крышке нас интересует положительная нормаль, а в интеграле по нижней отрицательная (т.к. нормаль должна быть направлена из тела). Что касается интеграла по цилиндрической поверхности, то он равен 0, т.к. компонента нормали по z равна 0. Получаем

$$= \iint\limits_{z_в^+} R\, dx\, dy - \iint\limits_{z_н^+} R\, dx\, dy + \iint\limits_{S_ц} R\, dx\, dy = \iint\limits_{z_в^+} R\, dx\, dy +$$

$$+ \iint\limits_{z_н^-} R\, dx\, dy + \iint\limits_{S_ц} R\, dx\, dy = \oiint\limits_{\partial G^+} R\, dx\, dy$$

2. Тело является выпуклым относительно оси Oz, т.е. в пересечении этого тела с какой либо прямой, параллельной оси Oz получается либо пустое множество, либо точка, либо отрезок. На изображении ниже показано невыпуклое тело (т.к. в пересечении с данной прямой получается два отрезка):

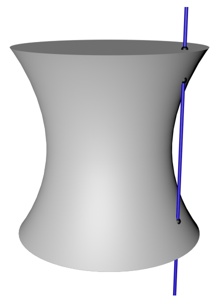


Рис. 8.1: Пример невыпуклого тела относительно оси z

Тогда такое тело можно разбить на несколько цилиндроидов и применить аддитивность интеграла. Обозначим цилиндроиды за G_j, их верхние крышки за S_j, нижние – s_j, те части цилиндрических поверхностей, что являются частью поверхности ∂G – C_j.

$$\iiint\limits_G \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \sum_{j=1}^{n} \iiint\limits_{G_j} \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \sum_{j=1}^{n} \left(\iint\limits_{S_j^+} R\,dx\,dy + \iint\limits_{s_j^-} R\,dx\,dy \right)$$

$$+ \underbrace{\sum_{j=1}^{m} \iint\limits_{C_j} R\,dx\,dy}_{0} = \oiint\limits_{\partial G^+} R\,dx\,dy$$

3. Невыпуклые тела. Предполагается, что тогда их можно разбить на несколько выпуклых тел и проинтегрировать их по отдельности, а затем их просуммировать

Проделаем для каждой из осей рассуждения, описанные ниже и просуммируем полученные равенства:

$$\iiint\limits_G \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz + \iiint\limits_G \frac{\partial Q}{\partial y}\,dx\,dy\,dz + \iiint\limits_G \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \oiint\limits_{\partial G^+} P\,dy\,dz + \oiint\limits_{\partial G^+} Q\,dz\,dx + \oiint\limits_{\partial G^+} R\,dx\,dy$$

$$\iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx\,dy\,dz = \oiint\limits_{\partial G^+} (P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy)$$

$$\iiint\limits_G \operatorname{div} \vec{F}\,dx\,dy\,dz = \oiint\limits_{\partial G^+} (\vec{F}, d\vec{S})$$

□

8.6 Формула Стокса

Определение: Область $G \subset \mathbb{R}^3$ называется односвязной, если любой замкнутый контур в этой области можно непрерывно «стянуть» в точку. Например, шар является односвязным, а тор – нет (нельзя стянуть контур, который замкнут вокруг отверстия тора).
Определение: Циркуляцией вектора $\vec{F}$ по замкнутому контуру с выбранным направлением γ называется криволинейный интеграл II рода этого вектора по данной кривой:

$$\oint\limits_{\gamma}(\vec{F}, d\vec{l}) = \oint\limits_{\gamma} F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$$

Определение: Векторное поле $\vec{F}$ называется потенциальным, если для любого замкнутого контура γ циркуляция $\vec{F}$ по контуру будет равна 0:

$$\oint\limits_{\gamma}(\vec{F}, d\vec{l}) = 0$$

Теорема 8.6.1 (Формула Стокса)**.** *Пусть есть область $G \subset \mathbb{R}^3$ – пространственно односвязная область. γ – замкнутый дважды гладкий контур ($\in C^2(G)$) в G с выбранным направлением обхода. S – кусочно-гладкая незамкнутая двусторонняя поверхность, натянутая на контур γ (положительная сторона этой поверхности выбирается следующим образом: с конца вектора нормали к этой поверхности направление обхода γ идёт против часовой стрелки(см. рисунок ниже)). $\vec{F} = \{P; Q; R\}$ – векторное непрерывное поле в G. Тогда справедлива формула Стокса:*

$$\oint\limits_{\gamma^+}(\vec{F}, d\vec{l}) = \iint\limits_{S^+}(\operatorname{rot}\vec{F}, d\vec{S})$$

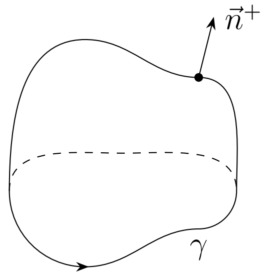


Рис. 8.2: Пример выбора правильной ориентации поверхности

Доказательство. Во избежание излишней громоздкости выражений рассмотрим векторное поле вида $\vec{F} = \{P, 0, 0\}$. Приведём оба интеграла к одному выражению, тем самым доказав их равенство. Начнём с поверхностного интеграла. Пусть $\vec{n}^+ = \{\cos\varphi; \cos\theta; \cos\psi\}$. Тогда:

$$\iint\limits_{S^+}(\operatorname{rot}\vec{F}, d\vec{S}) = \iint\limits_{S}\left(\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{pmatrix}\cos\varphi & \cos\theta & \cos\psi\end{pmatrix}\right) dS = \iint\limits_{S}\begin{vmatrix} \cos\varphi & \cos\theta & \cos\psi \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & 0 & 0 \end{vmatrix} dS =$$

$$= \iint\limits_{S}\left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\theta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\psi\right) dS = \iint\limits_{S^+}\left(\frac{\partial P}{\partial z}\,dz\,dx - \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy\right)$$

Последний переход объясняется тем, что проекция элемента площади dS на плоскость, например Oxy, равна произведению dS на косинус угла между нормалью к этому элементу и осью Oz, т.е. $\cos\psi$. А сама проекция равна $dx\,dy$.

Теперь приведём к такому же виду криволинейный интеграл. Пусть поверхность задана параметрически:

$$S : \begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

где $(u,v) \in G_0 \subset \mathbb{R}^2$, а функции $x(u,v), y(u,v), z(u,v) \in C^2(G_0)$. Здесь G_0 – прообраз S. Тогда кривую можно параметризовать следующим образом:

$$\gamma : \begin{cases} x = x(u(t),v(t)), \\ y = y(u(t),v(t)), \\ z = z(u(t),v(t)) \end{cases}$$

где $t \in [a;b]$. Пусть γ_0 – прообраз γ на плоскости uv, т.е. плоская кривая, задаваемая через $u = u(t)$ и $v = v(t)$. Причём раз отображение непрерывное, то γ_0 – граница G_0. Тогда:

$$\oint\limits_{\gamma}(\vec{F}, d\vec{l}) = \oint\limits_{\gamma} P\,dx = \oint\limits_{\gamma_0^+} P\left(x\left(u,v\right), y\left(u,v\right), z\left(u,v\right)\right)\, d\left(x\left(u,v\right)\right) =$$

$$= \oint\limits_{\gamma_0^+} P\left(x\left(u,v\right), y\left(u,v\right), z\left(u,v\right)\right) \left(\frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv\right)$$

Заметим, что функции $P\frac{\partial x}{\partial u}$ и $P\frac{\partial x}{\partial v}$ – гладкие (т.к. $x(u,v)$ – дважды гладкая функция, то её частная производная – гладкая функция). Тогда применима формула Грина:

$$\oint\limits_{\gamma_0^+} P\left(x\left(u,v\right), y\left(u,v\right), z\left(u,v\right)\right) \left(\frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv\right) = \iint\limits_{G_0} \left(\frac{\partial}{\partial u}\left(P\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(P\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right) du\,dv$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(P\frac{\partial x}{\partial v}\right) = \frac{\partial P}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + P\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v} + P\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(P\frac{\partial x}{\partial u}\right) = \frac{\partial P}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + P\frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial u} + P\frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u}$$

Т.к. x – дважды гладкая функция, то её смешанные производные непрерывны, а значит равны.

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(P\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(P\frac{\partial x}{\partial u}\right) = \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} =$$

$$= \frac{\partial P}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right) - \frac{\partial P}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right) = \frac{\partial P}{\partial z}\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} - \frac{\partial P}{\partial y}\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\partial P}{\partial z}\frac{D(z,x)}{D(u,v)} - \frac{\partial P}{\partial y}\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$$

Возвращаясь к интегралу, получаем:

$$\iint\limits_{G_0} \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(P \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(P \frac{\partial x}{\partial u} \right) \right) du\, dv = \iint\limits_{G_0} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \frac{D(z,x)}{D(u,v)} - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right) du\, dv =$$

По формуле замены переменных получаем, что интеграл равен выражению, к которому мы привели поверхностный интеграл:

$$= \iint\limits_{S^+} \left(\frac{\partial P}{\partial z}\, dz\, dx - \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy \right)$$

Аналогично доказываются равенства для полей $\{0; Q; 0\}$ и $\{0; 0; R\}$. Остаётся сложить соответсвующие равенства и получить формулу Стокса. $\square$