Ряды. Лекция 20-ого ноября 2020 года

Теорема (об интегрировании предельной функции равномерно сходящейся функциональной последовательности)

Пусть $\{f_n(x)\}_1^\infty$ функциональная последовательность равномерно сходящаяся на отрезке $[a, b]$ к предельной функции $f(x)$, то есть

$$f_n(x) \xrightarrow{[a,b]} f(x) \quad (*)$$

причём для любого $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \in C[a, b]$

Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx$, то есть

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Док-во) Отметим, что $f(x) \in C[a, b]$ (что следует из теоремы о непрерывности предельной функции $f(x)$, к которой равномерно на отрезке $[a, b]$ сходится функциональная последовательность непрерывных на $[a, b]$ функций $f_n(x)$).

Тогда Так как $f_n(x)$ и $f(x)$ непрерывны на $[a, b]$, то они интегрируемы на отрезке $[a, b]$. Из $\circledast$ тогда следует, что для $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n > N_0$ и $\forall x \in [a, b]$

$$\Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Но тогда для $\forall n > N_0 \Longrightarrow$

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| = \left|\int_a^b [f_n(x) - f(x)]dx\right| \leq$$

$$\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \leq \frac{\varepsilon(b-a)}{2(b-a)} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

А это означает, что числовая последовательность $\left\{\int_a^b f_n(x)dx\right\}$ сходится к числу $\int_a^b f(x)dx$. Следовательно, теорема доказана #

<u>Теорема</u> (об интегрировании суммы равномерно сходящегося ряда)

Пусть функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно на отрезке $[a, b]$ сходится к сумме $S(x)$ (то есть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{[a,b]} S(x)$) причём для каждого $n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) \in C[a, b]$

Тогда $\int_a^b S(x)dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx$

<u>Док-во</u>,

#

<u>Следствие</u>

$$\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\,dx$$

<u>Замечание.</u> Теоремы справедливы при более слабых условиях, а именно если $f_n(x)$ $(u_n(x))$ интегрируемы на $[a,b]$.

<u>Замечание.</u> Требование равномерной сходимости в последних двух теоремах, будучи существенным, <u>не является необходимым</u>: если его отбросить, что утверждение этих теорем могут быть справедливыми, а могут быть и несправедливыми.

<u>Пример</u> $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}\overset{[0,1]}{\rightrightarrows}f(x)\equiv 0$

а $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\dfrac{nx\,dx}{1+n^2x^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n}\ln(1+n^2x^2)\Big|_0^1=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(1+n^2)}{2n}=0=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 0\,dx$

<u>Пример</u> $f_n(x)=n^2xe^{-n^2x^2}$, $x\in[0,1]$

$f_n(x)\overset{[0,1]}{\not\rightrightarrows}f(x)\equiv 0$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 n^2x\cdot e^{-n^2x^2}dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{e^{-n^2x^2}}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(1-e^{-n}) = \frac{1}{2} \neq$$

$\neq 0 = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 0dx$. Следовательно, равенство не выполняется #.

__Теорема__ __(о дифференцируемости предельной функции функциональной последовательности)__

Пусть функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_1^\infty$ сходится к предельной функции $f(x)$ в каждой точке отрезка $[a,b]$, то есть

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad x\in[a,b] \qquad (*)$$

причём для каждого $n\in N$ существует $f_n'(x)\in C[a,b]$ и последовательность $\{f_n'(x)\}_1^\infty$ равномерно на $[a,b]$ сходится к функции $\varphi(x)$, то есть

$$f_n'(x) \xrightarrow{[a,b]} \varphi(x) \qquad (**)$$

Тогда в любой точке $x \in [a,b]$ функция $f(x)$ дифференцируема, причём

$$f'(x) \equiv \varphi(x) \text{ на } [a,b]$$

Док-во) Из предыдущих теорем следует, что $\varphi(x) \in C[a,b]$. Возьмём произвольное $x \in [a,b]$. Тогда

$$f_n'(t) \xrightarrow{[a,x]} \varphi(t)$$

Для последовательности $\{f_n'(t)\}_1^\infty$ выполняются все условия теоремы об интегрировании предельной функции равномерно сходящейся функциональной последовательности. и поэтому

$$\int_a^x \varphi(t)\,dt = \lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n'(t)\,dt = \lim_{n\to\infty}(f_n(x) - f_n(a)) =$$

$= f(x) - f(a)$, что есть

$$f(x) = f(a) + \int_a^x \varphi(t)\,dt, \quad x \in [a,b]$$

Так как $\varphi(x) \in C[a,b]$, то дифференцируя последнее равенство, получим

$f'(x) = \varphi(x)$ для каждого $x \in [a,b]$ #

Следствие
$$\frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{d f_n(x)}{dx}\right), x\in[a,b]$$
то есть можно менять местами дифференцирование и предельный переход.

Теорема (о дифференцировании суммы функционального ряда)

Пусть функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится к сумме $S(x)$ в каждой точке $x\in[a,b]$, то есть $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)=S(x)$, причём для любого $n\in N$, $u_n(x)\in C^{(1)}[a,b]$ и формально продифференцированный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ равномерно на $[a,b]$ сходится к сумме $\varphi(x)$, то есть
$$\sum_{n=1}^{n} u_n'(x)\xrightarrow{[a,b]}\varphi(x)$$
Тогда для любого $x\in[a,b]$ функция $S(x)\in C^{(1)}[a,b]$ и $S'(x)\equiv\varphi(x)$ для любого $x\in[a,b]$

Док-во: Следует из предыдущей теоремы #.

Следствие При условиях доказанной теоремы справедливо равенство:

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{du_n(x)}{dx},$$

то есть можно менять местами операции суммирования по n от 1 до ∞ и операции дифференцирования.

§ Степенные ряды.

Опр. Функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0) + \dots \quad (*)$$

называется степенным рядом.

Если сделать замену $x - x_0 = t$, то этот ряд примет вид $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$.

Поэтому в дальнейшем (если не оговорено противное) будем рассматривать ряды $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, полученный из $(*)$ при $x_0 = 0$.

Любой степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится при $x = 0$. и притом абсолютно.

Пример $\sum_{n=0}^{\infty} n^n \cdot x^n$, $x \neq 0$.

По радикальному признаку Коши

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n \cdot |x|^n} = \lim_{n\to\infty} n \cdot |x| = +\infty$$

В этом случае ряд расходится при любом $x \neq 0$.

Пример. $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$ В этом случае при $x \neq 0$ по признаку Даламбера

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|U_{n+1}(x)|}{|U_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\,|x|^{n+1}}{n!\,|x|^n} = \lim_{n\to\infty} (n+1)|x| = +\infty$$

и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$ расходится при любом $x \neq 0$ #

Теорема (1-ая теорема Абеля)

Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится при $x = x_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится для каждого x: $|x| < |x_0|$

Док-во. По условию ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ сходится. Следовательно, по необходимому признаку $\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$.

Так как сходящаяся последовательность ограничена, то существует число $M > 0$ такое что для любого $n \in N$ выполняется $|a_n x_0^n| \leq M$.

Так как для общего члена ряда $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ имеет место оценка

$$|a_n x^n| = |a_n \cdot x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

Так как ряд $\sum_{n=0}^{\infty} M\cdot\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ сходится (так как ($q=\left|\frac{x}{x_0}\right|<1$), то по признаку сравнения для числовых рядов ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится абсолютно #

§ Область сходимости степенного ряда

Множество сходимости X степенного ряда всегда не пусто. Как показывают примеры бывают ряды у которых $X=\{0\}$. Такие ряды называются всюду расходящимися. (Например, $\left(\sum_{n=0}^{\infty} n^n\cdot x^n, \sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n\right)$. Если множество сходимости X не ограничено сверху, то по 1-ой теореме Абеля ряд сходится для любого $x\in(-\infty,+\infty)$. причём абсолютно. Такие ряды называются всюду сходящимися.

Пусть теперь множество $X=\{|x|\}$ ограничено сверху. Обозначим $R=\sup\{|x|\}$ $(0<R<+\infty)$

Из определения $\sup\{|x|\}$ и 1-ой теоремы Абеля следует, что для любого $|x|>R$ ряд расходится, а при $x\in(-R;R)$ ряд абсолютно сходится. В граничных точках $x=\pm R$ может быть, что угодно.

Опр) R называется радиусом сходимости степенного ряда, а $(-R,+R)$ — интервалом сходимости степенного ряда.

Теорема (Коши–Адамара) Радиус сходимости R степенного ряда находится по формуле

$$R=\frac{1}{\rho}, \text{ где } \rho=\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$$

(Если $\rho=0$, то $R=+\infty$, а если $\rho=+\infty$, то $R=0$.)

Док-во) Обозначим $\rho_n=\sqrt[n]{|a_n|}$ (1)

$$\rho=\varlimsup\sqrt[n]{|a_n|}$$

1) Пусть $\rho=0$. Так как верхний предел $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\rho_n$ — это крайняя правая предельная точка, то (так как $\rho_n\geqslant 0$) из этого следует что других предельных точек нет и

$$\lim_{n\to\infty}\rho_n=0$$

Но тогда для любого $x\in(-\infty,+\infty)$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \rho_n = 0 < 1$$

Следовательно, по радикальному признаку Коши ряд сходится абсолютно при любом $x \in (-\infty, +\infty)$. Следовательно,

$$R = +\infty.$$

2) Пусть $\rho = +\infty$. Возьмем произвольное $x \neq 0$. Так как верхний предел $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \rho_n$ есть самый правый частичный предел, то существует последовательность $\{n_k\}_1^\infty$: $1 \le n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$, такая что $\lim\limits_{k\to\infty} \rho_{n_k} = \infty$. Это означает что существует k_0, такое что для $\forall k > k_0 \Longrightarrow$

$\rho_{n_k} > \frac{1}{|x|}$. Отсюда имеем $\rho_{n_k} = \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \frac{1}{|x|}$,

то есть $|a_{n_k} x^{n_k}| > 1$. Это означает, что $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} x^{n_k} \neq 0$. Следовательно, для $\forall x \neq 0$ ряд расходится. Поэтому $R = 0$.

3) Пусть $0 < \rho < +\infty$

Применим радикальный признак Коши к ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$. Используя 1 находим

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \overline{\lim_{n\to\infty}} \rho_n = \rho \cdot |x|.$$

Согласно радикальному признаку Коши следует, что если $\rho \cdot |x| < 1$, то ряд сходится, то есть при $|x| < \frac{1}{\rho}$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится абсолютно, а если $\rho |x| > 1$, то есть $|x| > \frac{1}{\rho}$, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ расходится. Поэтому в этом случае $R = \frac{1}{\rho}$.

Теорема доказана #