ДИУ-лекция 6. Тригонометрические ряды Фурье

П. 1 Ряды Фурье и многочлены Фурье.

Функциональный ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \quad (1)$$

называется тригонометрическим рядом Фурье.

Если числовые ряды $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ и $\sum_{k=1}^{\infty}|b_k|$ сходятся, то ряд Фурье сходится равномерно ($\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|+|b_k|$ - мажорирующий ряд) на всей оси к непрерывной, $2\pi-$периодической функции $f(x)$.

В линейном (бесконечномерном!) пространстве функций $f(x)$, определенных на отрезке $[-\pi;\pi]$, для которых существует $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$ (это пространство обозначают $L_2([-\pi;\pi])$, можно определить скалярное произведение его элементов:

$$\langle f,g\rangle=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx,$$

удовлетворяющее всем необходимым аксиомам. В частности, все непрерывные на отрезке $[-\pi;\pi]$ функции принадлежат $L_2([-\pi;\pi])$. Две функции $f(x)$ и $g(x)$ назовем ортогональными, если $\langle f,g\rangle=0$. Легко проверить, что каждая пара из системы функций

$$1, \sin kx, \cos mx,\ k,m\in Z \qquad (*)$$

попарно ортогональные. Действительно,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cdot\sin mxdx=0,\ k,m\in Z \quad \text{(а)}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cdot\cos mxdx=0,\ k,m\in Z \quad \text{(б)}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\sin kxdx=0,\ k\in Z,\ \int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\cos mxdx=0,\ m\in Z \quad \text{(в)}$$

Докажем, например, (б):

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cdot\cos mxdx=\frac{1}{2}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\sin(k+m)xdx+\int_{-\pi}^{\pi}\sin(k-m)xdx\right)=0$$

В пространстве $L_2([-\pi;\pi])$ есть норма $\|f\|$, согласованная со скалярным произведением:

$$\|f\|=\sqrt{\langle f,f\rangle},$$

для которой выполняются свойства:

1) $\|f+g\| \le \|f\|+\|g\|$ - неравенство «треугольника»

2) $\|f\cdot g\| \le \|f\|\cdot\|g\|$

Нормы элементов системы (*) равны $\|1\|=,\sqrt{2\pi}$ $\|\sin kx\| = \|\cos mx\| = \sqrt{\pi}$

Проверим, например, для синусов:

$$\|\sin kx\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2kx)\,dx = \pi - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2kxdx = \pi \to \|\sin kx\| = \sqrt{\pi}$$

Поэтому систему функций

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}};\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx;\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos mx,\ \ k,m\in Z \qquad (**)$$

называют ортонормированной (ОНС)

Теорема 1. Если ряд (1) равномерно сходится на R и имеет сумму $f(x)$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx\text{, (2)}$$

То коэффициенты $a_k, b_k,\ k=0,1,2,\ldots$ вычисляются по формулам:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx,\ \ k=0,1,2,\ldots,\qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx,\ \ k=1,2,\ldots \qquad (3)$$

Док. Умножим правую и левую часть равенства (2) на $\cos nx$ и проинтегрируем полученный равномерно сходящийся ряд на отрезке $[-\pi;\pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos nxdx + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nxdx + b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos nxdx$$

При $n=0$ имеем $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\cdot 2\pi = \pi a_0 \to a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$

При $n=k\ne 0$ с учетом ортогональности функций из (*) имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx = a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kxdx = \pi a_k \to a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx,\quad k=1,2,\ldots$$

Умножая равенство на $\sin nx$ и, интегрируя члены равномерно сходящегося ряда, придем к формуле (3) для определения коэффициентов b_k .

Опр. Если $f(x)$ $2\pi-$ периодическая функция на R и $f(x)\in L_2([-\pi;\pi])$, то ей можно сопоставить ряд (1), коэффициенты a_k, b_k которого вычислены по формулам (3). Такой ряд называется рядом Фурье функции $f(x)$, а числа a_k, b_k - коэффициентами Фурье данной функции.

Теорема 1 устанавливает, что в случае равномерной сходимости ряд (1) является рядом Фурье своей суммы.

Пример 1. Функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k^2}$ является рядом Фурье своей суммы.

Лемма (Римана об осцилляции)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$. Тогда

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx=\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x dx=0$$

Док. Докажем лемму для $\cos\lambda x$ (для $\sin\lambda x$ - по аналогии). Сделаем замену $t=x-\frac{\pi}{\lambda}$. Тогда для функции

$$\tilde f(x)=\begin{cases} f(x), x\in[a;b] \\ 0, x\notin[a;b]\end{cases}\to\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde f(x)\cos\lambda x dx=-\int_{-\infty}^{\infty}\tilde f(t+\frac{\pi}{\lambda})\cos\lambda t dt\to$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\tilde f(x)\cos\lambda x dx=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\tilde f(t+\frac{\pi}{\lambda})-\tilde f(t)\right]\cos\lambda t dt\to$$

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\tilde f(x)\cos\lambda x dx\right|\le\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\tilde f(t+\frac{\pi}{\lambda})-\tilde f(t)\right|dt\xrightarrow{\lambda\to\infty}0$$

Утверждение леммы распространяется на абсолютно интегрируемые функции $f(x)$, для которых существует интеграл $\int_a^b|f(x)|dx$ и бесконечные a и b.

Следствие. Коэффициенты ряда Фурье абсолютно интегрируемой функции $f(x)$ на $[-\pi;\pi]$ являются бесконечно малыми последовательностями:

$$\lim_{k\to\infty}a_k=\lim_{k\to\infty}b_k=0$$

Частичная сумма $S_n(x)$ ряда (1) называется тригонометрическим многочленом или многочленом Фурье. Следующие понятия помогут представить $S_n(x)$ в более удобном виде.

Ядром Дирихле называют функцию $D_n(x)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx$. Ядру можно придать иной вид, вычисляя сумму косинусов. Для $x\ne 2\pi m$ разделим и умножим выражение на $\sin\frac{x}{2}$:

$$D_n(x)=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\sin\frac{x}{2}+\sum_{k=1}^{n}2\sin\frac{x}{2}\cos kx\right)=$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\sin\frac{x}{2}+\sin\left(-\frac{x}{2}\right)+\sin\frac{3x}{2}+\sin\left(-\frac{3x}{2}\right)+\sin\frac{5x}{2}+\ldots+\sin\left(\frac{1}{2}-n\right)x+\sin\left(\frac{1}{2}+n\right)x\right)=$$

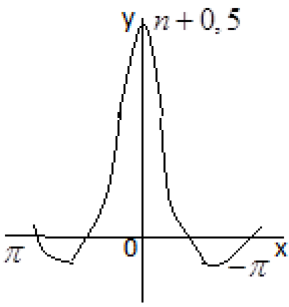
$$=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

Значение $D_n(x)\big|_{x=2\pi m}=n+\frac{1}{2}$ совпадает с пределом при $x\to 2\pi m$ выражения $\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$.

Ядро Дирихле является четной, $2\pi-$периодической функцией, принимающей при $x=0$ максимальное значение $D_n(0)=n+\frac{1}{2}$ и имеющей на отрезке $[-\pi;\pi]$ интеграл не зависящий от n:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_n(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}D_n(x)dx=1$$

График ядра на отрезке $[-\pi;\pi]$ изображен на рис.



Преобразуем многочлен Фурье $S_n(x,f)$, коэффициенты которого вычислены по формулам (3):

$$S_n(x,f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\cos kt\cos kx+\sin kt\sin kx\right]dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right]dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_n(t-x)f(t)dt=$$

$$\left|u=t-x\right|=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x}D_n(u)f(u+x)du=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_n(u)f(x+u)du$$

Последний интеграл называют интегралом Дирихле, которому можно придать еще один вид:

$$S_n(x,f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}D_n(u)f(x+u)du+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}D_n(u)f(x+u)du=\left|\text{замена } v=-u\right|=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}D_n(\mathrm{v})f(x-v)dv+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}D_n(u)f(x+u)du=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}D_n(t)\big(f(x+t)+f(x-t)\big)dt$$

Лемма о локализации

Выберем любое $\delta\in(0;\pi)$ и разобьем последний интеграл на два: на отрезке $[0;\delta]$ и $[\delta;\pi]$. Подставим в них выражение для ядра Дирихле:

$$S_n(x,f)=\underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2\sin(t/2)}\sin(n+0,5)tdt}_{J_1(n)}+\underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2\sin(t/2)}\sin(n+0,5)tdt}_{J_2(n)}$$

Во втором интеграле знаменатель отделен от нуля:

$$\sin(t/2)\geq\sin(\delta/2),\forall t\in[\delta;\pi],$$

Поэтому, в предположении кусочно-непрерывности функций f и $\dfrac{f(x+t)+f(x-t)}{2\sin(t/2)}$, по лемме об осцилляции $J_2(n)=o(1)$, т.е.

$$S_n(x,f)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2\sin(t/2)}\sin(n+0,5)tdt+o(1)\text{ при } n\to\infty$$

П.2 Поточечная сходимость ряда Фурье.

Точку $x_0\in(-\pi;\pi)$ назовем регулярной для функции $f(x)$, если

1. $\exists\lim\limits_{h\to+0}f(x_0+h)=f(x_0+0),\ \exists\lim\limits_{h\to+0}f(x_0-h)=f(x_0-0)$ (4)

2. $\exists\lim\limits_{h\to+0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0+0)}{h}=f'_+(x_0),\ \exists\lim\limits_{h\to+0}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0-0)}{-h}=f'_-(x_0)$ (5)

3. $f(x_0)=\dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$

Для $2\pi-$периодических функций $f(x)$ из класса $QC^1[-\pi;\pi]$, для которых

А. $f(x)-$кусочно-непрерывна на $[-\pi;\pi]$;

Б. $f'(x)-$кусочно-непрерывна на $[-\pi;\pi]$;

В. $f(x)=\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2},\forall x\in[-\pi;\pi]$

любая точка $x_0\in R$ является регулярной.

Если функция $f(x)$ в точках разрыва не удовлетворяет условию В., то ее заменяют на функцию

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x)-\text{в точках непрерывности;}\\ \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}-\text{в точках разрыва}\end{cases}$$

Теорема 2. Ряд Фурье (2) -(3) $2\pi-$периодической функции $f(x)\in QC^1[-\pi;\pi]$ сходится в любой точке x числовой оси и его сумма равна $f(x)$.

Док. Пусть x_0 – произвольная точка интервала $(-\pi;\pi)$:

$$S_n(x_0,f)-f(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}D_n(t)\big(f(x_0+t)+f(x_0-t)\big)dt-f(x_0)\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}D_n(t)dt=$$

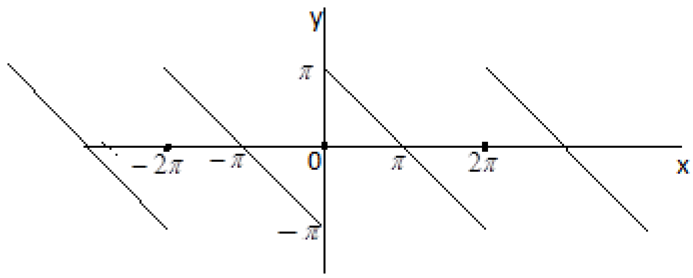
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2f(x_0)}{\sin\frac{t}{2}}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)tdt=$$

$$=\underbrace{\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\left(\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}+\frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{t}\right)\cdot\frac{t}{2\sin(t/2)}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)tdt}_{J_n(\delta)}+o(1)$$

Функции $\varphi_1(t)=\dfrac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}$, $\varphi_2(t)=\dfrac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{t}$ и $\dfrac{t}{2\sin(t/2)}$ по условию, имеют пределы при $t\to+0$, поэтому ограничены. Функция $\left|\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t\right|\le 1$, поэтому

$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta:\left|J_n(\delta)\right|\le M\delta\le\dfrac{\varepsilon}{2},\forall n$. Осталось выбрать $N_\varepsilon>0:\forall n>N\to\left|o(1)\right|\le\dfrac{\varepsilon}{2}$. Объединяя последние два неравенства, получим $\left|S_n(x_0,f)-f(x_0)\right|\le\left|J_n(\delta)\right|+\left|o(1)\right|\le\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

Пример 2. Функция $f(x)=\begin{cases}(\pi-x)/2,\ x\in(0;2\pi)\\ 0,\ x=0\end{cases}$ продолжена на всю числовую ось как $2\pi-$периодическая функция $\tilde{f}(x)$. Найти ее ряд Фурье.



Функция $\tilde{f}(x)$ нечетная, поэтому все коэффициенты $a_n=0$.

Вычисление коэффициентов $b_n=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}(\pi-x)\sin nxdx=\dfrac{1}{2\pi}\left((x-\pi)\dfrac{\cos nx}{n}\Big|_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}\dfrac{\cos nx}{n}dx\right)=\dfrac{1}{n}$

Функция $\tilde{f}(x)$ удовлетворяет условиям теоремы о поточечной сходимости, поэтому

$$\tilde{f}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n},\quad \forall x\in R$$

П.3 Равномерная сходимость рядов Фурье.

Опр. Функцию $f(x),\ x\in[a;b]$ назовем кусочно- непрерывно дифференцируемой, если

1. она непрерывна на $[a;b]$;

2) существует конечное разбиение отрезка $[a;b]$ точками $a=a_1<a_2<\ldots<a_{m-1}<a_m=b$, для которого $f'(x)$ непрерывна на любом интервале $(a_i;a_{i+1})$, а в точках $x=a_i$ имеет разрыв первого рода: $\exists \lim\limits_{x\to a_i-0} f'(x),\ \lim\limits_{x\to a_i+0} f'(x),\ \lim\limits_{x\to a_i-0} f'(x)\neq \lim\limits_{x\to a_i+0} f'(x)$

Опр. $2\pi-$периодическая функция называется кусочно-непрерывно дифференцируемой, если она кусочно непрерывно дифференцируемая на отрезке $[0;2\pi]$.

Теорема 3. (о равномерной сходимости ряда Фурье)

Пусть $f(x)$ $2\pi-$периодическая, непрерывная функция, производная $f'(x)$ которой – кусочно-непрерывна на отрезке $[0;2\pi]$. Тогда ее ряд Фурье сходится равномерно на R, причем справедлива оценка

$$\sup_{x\in R}\left|S_n(x,f)-f(x)\right|\leq C\cdot\frac{\ln n}{n}$$

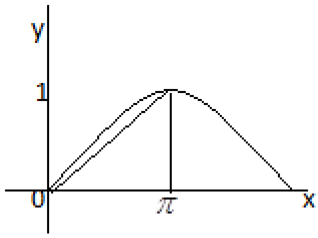
для всех $n\geq 2$ с константой $C>0$, не зависящей от n.

Док. Воспользуемся представлением остатка $S_n(x,f)-f(x)$ ряда Фурье, используемым при доказательстве теоремы 2:

$$S_n(x,f)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}g(x,t)\sin(n+0,5)tdt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}g(x,t)\sin(n+0,5)tdt+\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}g(x,t)\sin(n+0,5)tdt$$

где $g(x,t)=\dfrac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{2\sin(t/2)},\quad \forall\delta\in(0;\pi)$.

Из условий теоремы следует, что $\exists M=\max\limits_{x\in R}|f(x)|, M'=\max\limits_{x\in R}|f'(x)|$. По теореме о среднем для производных: $|f(x+t)-f(x)|\leq M't$ и $|f(x)-f(x-t)|\leq M't$. Для функции $\sin(t/2)$ на отрезке $[0;\pi]$ справедлива оценка: $\sin(t/2)\geq\dfrac{t}{\pi}\to\dfrac{1}{\sin(t/2)}\leq\dfrac{\pi}{t}$



Оценка для функции $g(x,t)$ на отрезке $t \in [0;\pi]$ при фиксированном x:

$$\left|g(x,t)\right| \le \frac{2M't\pi}{2t} = M'\pi \quad (\wedge)$$

Оценка для производной $g'(x,t)$ по t:

$$\left|g'(x,t)\right| = \left|\frac{f'(x+t) - f'(x-t)}{2\sin(t/2)}\right| + \left|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)\right| \cdot \frac{\cos(t/2)}{4\sin^2(t/2)} \le$$

$$\le \frac{2M'\pi}{2t} + \frac{2M'\pi^2 t}{4t^2} = \frac{M'\pi}{2t}(2+\pi) \le \frac{M'\pi^2}{t} \quad (\wedge\wedge)$$

Оценим интеграл $I_1 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\delta g(x,t)\sin(n+0,5)t\,dt$ с помощью (^): $\left|I_1\right| \le M' \cdot \delta$.

Оценим интеграл $I_2 = \frac{1}{\pi}\int\limits_\delta^\pi g(x,t)\sin(n+0,5)t\,dt$, предварительно проинтегрировав его по частям:

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\int\limits_\delta^\pi g(x,t)\sin(n+0,5)t\,dt = -\frac{1}{\pi} g(x,t) \cdot \left.\frac{\cos(n+0,5)t}{n+0,5}\right|_{t=\delta}^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int\limits_\delta^\pi g'(x,t)\frac{\cos(n+0,5)t}{n+0,5}dt$$

$$\left|I_2\right| \le \frac{2M}{(n+0,5)} + \frac{1}{\pi(n+0,5)}\int\limits_\delta^\pi \left|g'(x,t)\right|dt \le \frac{2M}{(n+0,5)} + \frac{M'\pi}{(n+0,5)}\int\limits_\delta^\pi \frac{dt}{t} = \frac{2M}{(n+0,5)} + \frac{M'\pi\ln(\pi/\delta)}{(n+0,5)}$$

Полагая $\delta = \delta_n = \frac{1}{n}$, получим $\left|I_2\right| \le \frac{1}{n+0,5}(c_1 + c_2\ln n)$ для некоторых $c_1 > 0, c_2 > 0$. Объединяя оценки для I_1 и I_2, получим

$$\left|S_n(x,f) - f(x)\right| \le \frac{M}{n} + \frac{1}{n+0,5}(c_1 + c_2\ln n) \le \frac{1}{n}(M + c_1 + c_2\ln n) \le C\frac{\ln n}{n}$$

с независимой от $n \ge 2$ константой $C > 0$. Последнее неравенство устанавливает равномерную сходимость ряда Фурье, а также скорость приближения его частичных сумм к функции $f(x)$.

Теорема 3 может быть обобщена (без доказательства)

Теорема 4

Пусть $2\pi -$ периодическая функция $f(x)$ имеет $(m-1)$ непрерывных производных, а $f^{(m)}(x)$ - кусочно- непрерывная функция. Тогда ряд Фурье сходится равномерно к функции $f(x)$, причем

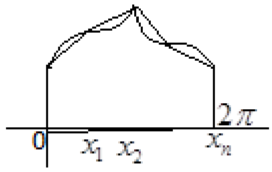
$$\sup_{x\in R}\left|S_n(x,f) - f(x)\right| = O\left(\frac{\ln n}{n^m}\right) = o\left(\frac{1}{n^{m-\varepsilon}}\right), n\to\infty, \forall\varepsilon > 0$$

Можно ли приблизить любую непрерывную, $2\pi-$периодическую функцию на R тригонометрическим многочленом как угодно точно? Положительный ответ на этот вопрос дает Теорема 5.

Для любой непрерывной, $2\pi-$периодической на R функции $f(x)$ и любого числа $\varepsilon>0$ существует тригонометрический многочлен $T_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k\cos kx+b_k\sin kx$, для которого

$$\sup_{x\in R}\left|f(x)-T_n(x)\right|\le\varepsilon$$

Док. Разобьем отрезок $[0;2\pi]$ точками $x_i=\frac{2\pi}{n}\cdot i,\ i=0,1,2,...n-1,n$ и рассмотрим кусочно-линейную функцию $\tilde f(x)$, построенную по узлам $(x_i;\ f(x_i)),\ i=0,1,2,...,n$.



Поскольку функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[0;2\pi]$, является равномерно непрерывной на этом отрезке и $\forall\varepsilon>0\ \exists n$, для которого $\sup_{x\in R}\left|f(x)-\tilde f(x)\right|\le\frac{\varepsilon}{2}$. Функция $\tilde f(x)$ непрерывная и кусочно- непрерывно дифференцируемая, удовлетворяет условию теоремы 3, поэтому для $2\pi-$периодически продолженной на всю числовую ось функции $\hat f(x)$ найдется n и тригонометрический многочлен $T_n(x)$ Фурье, для которого $\sup_{x\in R}\left|\hat f(x)-T_n(x)\right|\le\frac{\varepsilon}{2}$. Тогда объединяя оба неравенства, получим

$$\sup_{x\in R}\left|f(x)-T_n(x)\right|=\sup_{x\in R}\left|f(x)-\tilde f(x)+\tilde f(x)-T_n(x)\right|\le\sup_{x\in R}\left|f(x)-\tilde f(x)\right|+\sup_{x\in R}\left|\hat f(x)-T_n(x)\right|\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

П.4 Тригонометрические ряды Фурье на отрезке $[-l;l]$ (растяжение отрезка)

Функцию $f(t)\in QC[-l;l]$ линейной заменой $x=\frac{\pi t}{l}$ можно привести к функции $g(x)=f\left(\frac{xl}{\pi}\right)\in QC[-\pi;\pi]$, которую разложим в ряд Фурье

$$g(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right),$$

где $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\cos nxdx,\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\sin nxdx,\ n=0,1,2,...$

Возвращаясь к переменной t при условии $g(x)=f(t)$:

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nt}{l}+b_n\sin\frac{\pi nt}{l}\right),$$

где

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos nx dx=\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi nt}{l}\cdot\frac{\pi}{l}dt=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi nt}{l}dt$$

Аналогично,

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{\pi nt}{l}dt$$

Пример. Разложить функцию $f(t)=t$ на отрезке $[-1;1]$ в ряд Фурье

Функция нечетная, поэтому $a_n=0, n=1,2,\ldots$. Коэффициенты

$$b_n=\int_{-1}^{1} t\sin\pi nt dt=-\frac{t\cos\pi nt}{\pi n}\Big|_{t=-1}^{t=1}+\frac{1}{\pi n}\int_{-1}^{1}\cos\pi nt dt=\frac{1}{\pi n}\left((-1)^{n+1}-(-1)^n\right)+\frac{1}{\pi^2 n^2}\sin\pi nt\Big|_{t=-1}^{t=1}=\frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{\pi n}$$

Тогда

$$t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin\pi nt$$

Разложение функций $f(t)\in QC[0;l]$ по синусам и косинусам

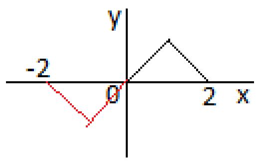
Рассмотрим четную функцию $\tilde{f}(t)=\begin{cases} f(t), t\in[0;l] \\ f(-t), t\in[-l;0]\end{cases}$. Тогда ее разложение в ряд Фурье на отрезке $[-l;l]$ будет содержать только косинусы:

$$\tilde{f}(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nt}{l},\text{ где } a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\tilde{f}(t)\cos\frac{\pi nt}{l}dt=\frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(t)\cos\frac{\pi nt}{l}dt \quad (4)$$

Рассмотрим нечетную функцию $\hat{f}(t)=\begin{cases} f(t), t\in(0;l] \\ -f(-t), t\in[-l;0)\end{cases}$, $\hat{f}(0)=0$. Тогда ее разложение в ряд Фурье на отрезке $[-l;l]$ будет содержать только синусы:

$$\hat{f}(t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{\pi nt}{l}, b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\hat{f}(t)\sin\frac{\pi nt}{l}dt=\frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(t)\sin\frac{\pi nt}{l}dt \quad (5)$$

Пример. Разложить функцию $f(x)=1-|x-1|, x\in[0;2]$ по синусам



$l=2$, продолжаем функцию нечетным образом (рис) .Вычисляем коэффициенты Фурье по формулам (5)

$$b_n = \int_0^2 (1-|x-1|)\sin\frac{\pi nx}{2}\,dx = \int_0^1 x\sin\frac{\pi nx}{2}\,dx + \int_1^2 (2-x)\sin\frac{\pi nx}{2}$$

Вычислим первообразную функции $x\sin\frac{\pi nx}{2}$:

$$F(x) = \frac{2}{\pi n}\int x d\left(-\cos\frac{\pi nx}{2}\right) = \frac{2}{\pi n}\left(-x\cos\frac{\pi nx}{2} + \int\cos\frac{\pi nx}{2}\,dx\right) = \frac{2}{\pi n}\left(-x\cos\frac{\pi nx}{2} + \frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}\right)$$

Тогда $F(0)=0,\ F(1) = -\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{2} + \frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n}{2},\ F(2) = \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi n}$ и

$$b_n = 2F(1) - F(2) + 2\int_1^2 \sin\frac{\pi nx}{2}\,dx = \frac{8}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n}{2} = \begin{cases} 0, n = 2k \\ \dfrac{8(-1)^k}{\pi^2(2k+1)}, n = 2k+1 \end{cases}$$

Окончательно,

$$f(x) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\sin\dfrac{\pi(2k+1)x}{2}}{n^2}$$

П. Ряд Фурье функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$

Продолжим функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[a;b]$, на числовую ось как периодическую функцию $\tilde{f}(x)$ с периодом $T = b - a$ так, что $\tilde{f}(x) = f(x), \forall x \in (a;b)$

Разложим функцию $\tilde{f}(x)$ на отрезке $[-l;l]$, где $l = \frac{b-a}{2}$ в ряд Фурье:

$$\tilde{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nx}{l} + b_n\sin\frac{\pi nx}{l}\right),$$

Где

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\tilde{f}(x)\cos\frac{\pi nx}{l}\,dx = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{2\pi nx}{b-a}\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\tilde{f}(x)\sin\frac{\pi nx}{l}\,dx = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\frac{2\pi nx}{b-a}\,dx$$

Здесь используется свойство периодических функций: интеграл от периодической функции по отрезку длины периода не зависит от начала отрезка.

Пример. Разложить функцию $f(x) = x^2$ на отрезке $[1;2]$ в ряд Фурье, сумма которого является периодической функцией с $T = 1$.

Решение. $l = \frac{1}{2}$

$$a_0 = 2\int_1^2 x^2 dx = \frac{14}{3}$$

$$a_n = 2\int_1^2 x^2 \cos(2\pi nx)dx = \frac{1}{\pi n}\left(x^2 \sin(2\pi nx)\Big|_{x=1}^{x=2} - 2\int_1^2 x\sin(2\pi nx)dx \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi^2 n^2}\int_1^2 xd\left(\cos(2\pi nx)\right) = \frac{1}{\pi^2 n^2}\left(x\cos(2\pi nx)\Big|_{x=1}^{x=2} - \int_1^2 \cos(2\pi nx)dx \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi^2 n^2}\left(1 - \frac{1}{2\pi n}\sin(2\pi nx)\Big|_{x=1}^{x=2} \right) = \frac{1}{\pi^2 n^2}$$

$$b_n = 2\int_1^2 x^2 \sin(2\pi nx)dx = -\frac{1}{\pi n}\int_1^2 x^2 d\left(\cos(2\pi nx)\right) = -\frac{1}{\pi n}\left(x^2 \cos(2\pi nx)\Big|_{x=1}^{x=2} - 2\int_1^2 x\cos(2\pi nx)dx \right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\left(3 - \frac{1}{\pi n}\left(x\sin(2\pi nx)\Big|_{x=1}^{x=2} - \int_1^2 \sin(2\pi nx)dx \right)\right) = -\frac{1}{\pi n}\left(3 - \frac{2}{2\pi^2 n^2}\cos(2\pi nx)\Big|_{x=1}^{x=2} \right) = -\frac{3}{\pi n}$$

Окончательно,

$$f(x) = \frac{7}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi^2 n^2}\cos(2\pi nx) - \frac{3}{\pi n}\sin(2\pi nx) \right)$$

П. Комплексная форма тригонометрических рядов Фурье

В форме (2) для ряда Фурье $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ применим формулы Эйлера

$$\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}, \sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$$

$$\frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} a_k\left(e^{ikx} + e^{-ikx}\right) - ib_k\left(e^{ikx} - e^{-ikx}\right) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k - ib_k\right)e^{ikx} + \left(a_k + ib_k\right)e^{-ikx}$$

Обозначим $c_0 = \frac{a_0}{2}, c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}$, тогда ряд примет вид:

$$c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ikx} + c_{-k}e^{-ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \qquad (6)$$

где $c_k = \frac{a_k - ib_k}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(\cos kx - i\sin kx\right)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx$

Аналогично, $c_{-k} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}dx$ и после объединения, получим комплексную форму ряда Фурье

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \text{ , где } c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt$$

Пример. Написать комплексную форму ряда Фурье функции $f(x) = \cos\alpha x, \alpha \in Z, x \in \left(-\pi;\pi\right)$

Решение.

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\alpha t\cdot e^{-ikt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\alpha t}+e^{-i\alpha t}}{2}e^{-ikt}dt = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{i(\alpha-k)t}+e^{-i(\alpha+k)t}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{i(\alpha-k)}e^{i(\alpha-k)t}\Big|_{t=-\pi}^{t=\pi} + \frac{1}{i(\alpha+k)}e^{i(\alpha+k)t}\Big|_{t=-\pi}^{t=\pi}\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\alpha-k}\sin(\alpha-k)\pi - \frac{1}{\alpha+k}\sin(\alpha+k)\pi\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{(-1)^k\sin\alpha\pi}{\alpha-k} - \frac{(-1)^k\sin\alpha\pi}{a+k}\right) = \frac{k(-1)^k\sin\alpha\pi}{\pi(\alpha^2-k^2)}$$

Тогда

$$\cos\alpha x = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k k}{(\alpha^2-k^2)}e^{ikx}$$