Ф-03-Лекция -11. Ряды с положительными членами.

П.1 Понятие числового ряда. Основные понятия.

Рассматривается числовая последовательность $\{a_n\}$ вещественных (или комплексных) чисел. Сумма первых k ее членов называется $k-$ой частичной суммой: $S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ числового ряда.

ОПР. Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) называется сходящимся, если существует конечный предел последовательности $\{S_k\}$ частичных сумм, т.е. $S = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n$ - сумма числового ряда.

Член a_n последовательности $\{a_n\}$ называют общим членом числового ряда. Если предела последовательности $\{S_k\}$ не существует или он бесконечный, то соответствующий числовой ряд называют расходящимся.

ПРИМЕР 1. Исследовать на сходимость числовой ряд с общим членом $a_n = q^n$ (ряд геометрической прогрессии).

РЕШЕНИЕ. Воспользуемся формулой суммы k членов геометрической прогрессии: $S_k = \dfrac{a_1(1-q^k)}{1-q}$. Если $|q|<1$, существует предел $S = \lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty} \dfrac{a_1(1-q^k)}{1-q} = \dfrac{a_1}{1-q}$.

При $q=1$ $a_n = 1$ для любого n, $S_k = k$ и соответствующий ряд расходится.

При $q=-1$ последовательность $S_k = \dfrac{1}{2}\left((-1)^k - 1\right)$ ограничена, но не имеет предела, и ряд также расходится. Расходимость ряда при $|q|>1$ следует из неограниченности последовательности $S_k = \dfrac{q(1-q^k)}{1-q}$ и, как следствие, отсутствие у нее предела.

Применяя к $\{S_k\}$ критерий Коши для последовательности, получим

КРИТЕРИЙ КОШИ для числового ряда.

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится в том и только в том случае, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N_\varepsilon : \forall m > N_\varepsilon u\ \forall n > m \Rightarrow |a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n| < \varepsilon .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Последовательность $\{S_k\}$ сходится в том и только в том случае, если к ней применим критерий Коши:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N_\varepsilon : \forall m > N_\varepsilon u\ \forall n > m \Rightarrow |S_n - S_m| = |a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n| < \varepsilon .$$

Замечание. Из критерия следует, возможность предельного перехода в неравенстве:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N_\varepsilon : \forall m > N_\varepsilon \Rightarrow |a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{m+k}\right| < \varepsilon$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{m+k}$ называют остатком ряда (1). Он содержит все члены ряда (1) с номерами $n > m$.

Для сходящегося ряда (1) сумма остатка равна $S - S_m$ и она стремится к нулю с ростом m.

Арифметические свойства сходящихся рядов.

1. Если два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (2) сходятся, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ также сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

2. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ также сходится для любого λ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

3. Сходимость и расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и любого его остатка $\sum_{k=1}^{\infty} a_{m+k}$ одновременная.

4. Для любой подпоследовательности номеров $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, $n_{k+1} > n_k$ рассмотрим ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ (3), где $b_k = a_{n_k+1} + a_{n_k+2} + \ldots + a_{n_{k+1}}$. Тогда из сходимости ряда (1) следует сходимость (3) и они имеют одинаковые суммы.

Заметим, что между частичными суммами рядов (1) и (3) справедливо соотношение:

$$S_m^3 = \sum_{k=1}^{m} b_k = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \ldots + a_{n_2}) + \ldots + (a_{n_{m-1}+1} + a_{n_{m-1}+2} + \ldots + a_{n_m}) = S_{n_m}^1$$

т.е. S_m^3 является подпоследовательностью S_n^1 и сходимость S_n^1 означает существование такого же предела для любой подпоследовательности.

ТЕОРЕМА1. (НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ сходимости ряда)

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По критерию Коши $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon \Rightarrow |S_n - S_{n-1}| = |a_n| < \varepsilon$.

Существуют расходящиеся ряды, для которых $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

ПРИМЕР 2. (гармонический ряд). Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.

РЕШЕНИЕ. Действительно, $S_{2^n} - S_{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}+2^{n-1}} > 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}$ для любого n, и критерий Коши для последовательности $\{S_k\}$ не выполняется, т.е. ряд расходится.

П2. Ряды с положительными членами.

Если $a_n > 0$ для любого n, то ряд (1) называют рядом с положительными членами.

ТЕОРЕМА 2. Для сходимости числового ряда с положительными членами необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм $\{S_k\}$ была ограниченной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) сходится, то последовательность $\{S_k\}$ имеет предел и является ограниченной. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами, то $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} > S_n$ для любого n, т.е. последовательность $\{S_k\}$ монотонно возрастает. Если $\{S_k\}$ ограничена, то она, как известно, имеет предел и ряд (1) сходится.

Применение этого простого (необходимого и достаточного!) условия сходимости рядов с положительными членами затруднено тем, что нахождение частичных сумм S_k не всегда возможно.

ТЕОРЕМА 3. (Признак СРАВНЕНИЯ 1 для рядов с положительными членами)

Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (2) с положительными членами удовлетворяют условию: $a_n \le b_n$ для всех $n > N$, то из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1) и из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По свойству 3 можно полагать, что неравенство $a_n \le b_n$ выполняется для любого *n*. Если S'_k и S''_k частичные суммы рядов (1) и (2), то $S'_k \le S''_k$ и из ограниченности частичных сумм ряда (2) следует ограниченность частичных сумм ряда (1) и на основании теоремы2 сходимость ряда (1). Если ряд (1) расходится, то S'_k неограниченны и S''_k неограниченны. Тогда на основании теоремы 2 ряд (2) расходится.

ТЕОРЕМА 4. (Признак СРАВНЕНИЯ 2 для рядов с положительными членами)

Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (2) с положительными членами удовлетворяют условию: $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lambda$, то при $\lambda > 0$ сходимость и расходимость рядов (1) и (2) одновременная.

Если $\lambda = 0$, то из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1), а из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lambda > 0$. По определению предела, для $\varepsilon = \lambda / 2\ \exists N : \forall n > N \to a_n < \frac{3\lambda}{2} b_n$ и $b_n < \frac{2}{\lambda} a_n$. Тогда на основании теоремы 3 из сходимости (1) следует сходимость (2) и наоборот. Из расходимости (1) следует расходимость (2) и наоборот. Пусть $\lambda = 0$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N \Rightarrow a_n < \varepsilon \cdot b_n$. Из последнего неравенства утверждения теоремы 4 следуют из теоремы 3.

Теорема 5 (Интегральный признак сходимости)

Если $y = f(x)$ монотонно убывающая на $D = [1;\infty)$ функция, $f(x) \ge 0$ и интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx < \infty$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с общим членом $a_n = f(n)$ сходится. Если интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ расходится, то ряд расходится.

ДОКАЗАТЕЬСТВО. Из монотонности: $f(n+1) \le f(x) \le f(n)$ для всех $x \in [n; n+1]$. Тогда $f(n+1) \le \int_n^{n+1} f(x)dx \le f(n)$. Если интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx < \infty$, то

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N, \forall m > n \Rightarrow \int_{n-1}^{m} f(x)dx < \varepsilon \Rightarrow f(n) + f(n+1) + \ldots + f(m) \le \int_{n-1}^{m} f(x)dx < \varepsilon$$

и для ряда (1) выполняется критерий Коши и ряд сходится. Если интеграл расходится, то последовательность $I_k = \int_1^{k+1} f(x)dx$ неограниченная и частичные суммы

$$S_k = f(1) + f(2) + \ldots + f(k) \ge \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \ldots + \int_k^{k+1} f(x)dx = \int_1^{k+1} f(x)dx$$ также неограниченны. Последнее свидетельствует о расходимости ряда (1).

ПРИМЕР 3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^p}$ в зависимости от параметра *p*.

РЕШЕНИЕ. Если $p \le 0$, то ряд расходится по невыполнению необходимого признака.

Пусть $p > 0$. Тогда функция $f(x) = \frac{1}{x^p}$ монотонно убывает на $[1;\infty)$ и интеграл

$\int_1^{\infty} f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{1}{x^p}dx = \lim_{n\to\infty}\frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_{x=1}^{x=n} = \frac{1}{1-p}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^{p-1}}-1\right)$. Если $p>1$, то интеграл сходится и по интегральному признаку сходится ряд. Если $0<p<1$, то интеграл расходится и по интегральному признаку расходится ряд. При $p=1$ (гармонический ряд) расходимость ряда была доказана в примере 2.

ТЕОРЕМА 6. (Признак ДАЛАМБЕРА для рядов с положительными членами).

1. Если общий член $a_n>0$ ряда (1) удовлетворяет условию: существует константа $\lambda: 0<\lambda<1$, для которой $a_{n+1}\le\lambda\cdot a_n \quad \forall n\ge n_0$, то ряд (1) сходится;

2. Если выполняется противоположное неравенство $a_{n+1}\ge a_n,\ \forall n\ge n_0$, то ряд (1) расходится;

3. Если существует предел $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lambda<1$, то ряд (1) сходится. Если $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lambda>1$, то ряд (1) расходится. Существуют сходящиеся и расходящиеся ряды (1), для которых $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1.Перемножим неравенства $a_{k+1}\le\lambda a_k,\ \forall k=n_0,n_0+1,...,n-1$. Тогда

$a_{n_0+1}\cdot a_{n_0+2}\cdot...\cdot a_{n-1}\cdot a_n \le \lambda^{n-n_0}a_{n_0}\cdot a_{n_0+1}\cdot...\cdot a_{n-1} \to a_n\le a_{n_0}\cdot\lambda^{n-n_0}$.

Ряд с общим членом $b_n=a_{n_0}\cdot\lambda^{n-n_0}$ при $0<\lambda<1$ является сходящимся (ряд геометрической прогрессии), поэтому по признаку сравнения 1 ряд (1) сходится.

2. Ряд (1) расходится по невыполнению необходимого признака сходимости.

3. Если $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lambda<1$, то для $\varepsilon=\frac{1-\lambda}{2}$ существует

$n_0:\forall n\ge n_0 \to \frac{a_{n+1}}{a_n}\le\lambda+\frac{1-\lambda}{2}\to a_{n+1}\le\mu a_n,\ \mu=\frac{1+\lambda}{2}<1$ и для ряда (1) выполнено условие пункта 1 теоремы и ряд сходится.

Если $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lambda>1$, то для $\varepsilon=\frac{\lambda-1}{2}$ существует

$n_0:\forall n\ge n_0 \to \frac{a_{n+1}}{a_n}\ge\lambda-\frac{\lambda-1}{2}=\frac{\lambda+1}{2}\to a_{n+1}\ge\mu a_n,\ \mu=\frac{\lambda+1}{2}>1$ и ряд (1) расходится по невыполнению необходимого признака.

Для всех обобщенных гармонических рядов с общим членом $a_n=\frac{1}{n^p}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^p}{(n+1)^p}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p=1,\ \forall p$, но среди них есть расходящиеся (пример 2) и сходящиеся (пример 3, $p>1$).

ТЕОРЕМА 7. (РАДИКАЛЬНЫЙ признак КОШИ)

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ряд с положительными членами, для которого

1. общий член $a_n>0$ удовлетворяет условию: существует n_0, для которого $\sqrt[n]{a_n}\le\lambda<1,\ \forall n\ge n_0$.

Тогда ряд (1) сходится.

2. Если общий член a_n ряда(1) удовлетворяет условию: существует возрастающая подпоследовательность номеров $\{n_k\}$, для которой $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geq 1$, то ряд (1) расходится.

3. Если $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n} = \lambda < 1$, то ряд (1) сходится. Если $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n} = \lambda > 1$, то ряд (1) расходится. При $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n} = 1$ существуют ряды сходящиеся и расходящиеся.

Доказательство.

1. Из условия теоремы следует, что $a_n \leq \lambda^n, \ \forall n \geq n_0$ и сходимость ряда (1) следует из признака сравнения 1, поскольку ряд геометрической прогрессии (пример 1) при $\lambda < 1$ сходящийся.

2. При выполнении условия теоремы $a_{n_k} \geq \lambda^{n_k}$ и при $\lambda > 1$ не выполняется необходимый признак сходимости, т.е. ряд (1) расходится.

3. Если $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n} = \lambda < 1$, то для $\varepsilon = \frac{1-\lambda}{2}$ $\exists n_0 : \forall n \geq n_0 \to a_n \leq (\lambda + \frac{1-\lambda}{2})^n = \left(\frac{\lambda+1}{2}\right)^n$ и ряд (1) мажорируется рядом сходящейся геометрической прогрессии.

Если $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n} = \lambda > 1$, то существует подпоследовательность номеров $\{n_k\}$, для которой

$a_{n_k} \geq (\lambda - \varepsilon)^{n_k} = \left(\frac{3\lambda - 1}{2}\right)^{n_k} = \mu^{n_k}, \mu > 1, \forall k$, то ряд (1) расходится по невыполнению необходимого признака.

Для обобщенно гармонических рядов $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{p\ln n}{n}} = 1$ при любых $p > 0$ и среди них существуют сходящиеся и расходящиеся ряды.

Пример 4 Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log_a^p n}$ (4) при $a > 1$ и различных значениях параметра p.

Применим интегральный признак Коши:

$f(x) = \frac{1}{x\log_a^p x}$ монотонно убывает на $[2;\infty)$ и интеграл для $p \neq 1$

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\log_a^p x} = \ln^p a \cdot \int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln^p x} = |u = \ln x| = \ln^p a \cdot \int_{\ln 2}^{\infty}\frac{du}{u^p} = \ln^p a \cdot \frac{u^{1-p}}{1-p}\bigg|_{u=\ln a}^{\infty}$$

сходится при $p > 1$ и расходится при $p < 1$. По интегральному признаку Коши это означает расходимость ряда (4) при $p < 1$ и его сходимость при $p > 1$.

При $p = 1$ интеграл $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\log_a x} = \ln a \cdot \int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln x} = |u = \ln x| = \ln a \cdot \int_{\ln 2}^{\infty}\frac{du}{u} = \ln a \cdot \ln(\ln x)_{u=\ln a}^{\infty} = \infty$

расходится и поэтому ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log_a n}$ расходится

Следующий признак помогает разобраться с ситуацией $\lambda = 1$.

ЛЕММА. Ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (2) с положительными членами удовлетворяют условию

$\exists n_0 : \forall n \geq n_0 \to \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ (5), то

1. из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1);
2. из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перемножим неравенства (5) для $n = n_0, n_0+1, ..., n-1$. Тогда $\frac{a_{n_0+1} \cdot a_{n_0+2} \cdot ... \cdot a_n}{a_{n_0} \cdot a_{n_0+1} \cdot ... a_{n-1}} \le \frac{b_{n_0+1} \cdot b_{n_0+2} \cdot ... \cdot b_n}{b_{n_0} \cdot b_{n_0+1} \cdot ... \mathrm{b}_{n-1}}$. После сокращения приходим к неравенству $\frac{a_n}{a_{n_0}} \le \frac{b_n}{b_{n_0}} \to a_n \le \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_n, \forall n \ge n_0$. Тогда утверждения леммы следуют из признака сравнения 1.

Рассмотрим несколько достаточных признаков сходимости и расходимости, связанных с этой леммой.
ТЕОРЕМА 8. (Признак сходимости РААБЕ)
Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) с положительными членами и

1. существует число $p > 1$, для которого $n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \ge p, \forall n \ge n_0$. Тогда ряд (1) сходится.

2. найдется n_0. для которого $n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \le 1, \forall n \ge n_0$. Тогда ряд (1) расходится.

3. существует $\lim_{n\to\infty} \left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \right) = p$. Тогда при $p > 1$ ряд (1) сходится, при $p < 1$ - расходится.
Доказательство.

1. Возьмем любое $q \in (1; p)$. Рассмотрим замечательный предел $\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^q - 1}{1/n} = q$.
Для $\varepsilon = p - q$ существует

$$n_0 : \forall n > n_0 \to q - \varepsilon < \frac{(1+1/n)^q - 1}{1/n} < q + \varepsilon \to (1+1/n)^q < (q + (p-q)) \cdot \frac{1}{n} = \frac{p}{n}.$$

Из условия теоремы

$$\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \ge \frac{p}{n} > (1+1/n)^q - 1, \to \frac{a_n}{a_{n+1}} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^q = \frac{(n+1)^q}{n^q} \to \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1/(n+1)^q}{1/n^q}, \forall n \ge n_0$$

Обозначая через $b_n = \frac{1}{n^q}$, приходим к условию леммы $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{b_{n+1}}{b_n}$ при $q > 1$. Тогда из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2. Из условия следует $\frac{a_n}{a_{n+1}} \le 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n} \to \frac{a_{n+1}}{a_n} \ge \frac{b_{n+1}}{b_n}$, где $b_n = \frac{1}{n}$. Тогда из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

3. Условие теоремы перепишем в виде $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = p + o(1) \Rightarrow$

$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Если $b_n = \frac{1}{n^q}$, то $\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{(n+1)^q}{n^q} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^q = 1 + \frac{q}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Пусть $p > 1$ и выберем число $q : 1 < q < p$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится и

$\exists n_0 : \forall n > n_0 \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} > \frac{b_n}{b_{n+1}} \rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{b_{n+1}}{b_n}$, что по лемме означает сходимость ряда (1).

Пусть $p < 1$. Выберем число $q : p < q < 1$. Тогда ряд (2) расходится и

$\frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{b_n}{b_{n+1}} \rightarrow \frac{b_{n+1}}{b_n} < \frac{a_{n+1}}{a_n}$ для $n > n_0$. Тогда по лемме ряд (1) расходится.

В завершении приведем формулировку достаточного признака сходимости рядов с положительными членами, объединяющий признаки Даламбера и Раабе.

Теорема 9 (признак Гаусса)

Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ найдутся числа $n_0, \lambda, \mu, \alpha > 0, C > 0$, для которых

$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\alpha}}$ с ограниченной последовательностью $\theta_n : |\theta_n| \le C, \forall n \ge n_0$, то

1. При $\lambda > 1$ ряд сходится.
2. При $\lambda < 1$ ряд расходится.
3. При $\lambda = 1, \mu > 1$ ряд сходится
4. При $\lambda = 1, \mu \le 1$ ряд расходится

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ.

1. Понятие сходимости числового ряда. Критерий Коши для сходимости числового ряда. Необходимое условие сходимости.
2. Числовые ряды с положительными членами. Необходимое и достаточное условие сходимости ряда с положительными членами.
3. Числовые ряды с положительными членами. Признак сравнения 1 рядов с положительными членами.
4. Числовые ряды с положительными членами. Признак сравнения 2 рядов с положительными членами.
5. Числовые ряды с положительными членами. Признак Даламбера.
6. Числовые ряды с положительными членами. Интегральный признак Коши.
7. Числовые ряды с положительными членами. Радикальный признак Коши.
8. Числовые ряды с положительными членами. Признак Раабе.