Ряды Фурье

$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots \quad T=2\pi, \ x\in[-\pi,\pi] \qquad (*)$

– тригонометрическая система функций

$$\underbrace{\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+\ldots+a_n\cos nx+b_n\sin nx}_{\text{тригоном. многочлен } = S_n(x)}+\ldots=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx \ \text{– трин. ряд.} \qquad (**)$$

Свойство трин. системы ф. $(*)$

1.) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cdot\sin mx\,dx=0,\ n\neq m, \quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,dx=\pi$

2) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,dx=0,\ \forall n,m$

3) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx=\begin{cases}0, & n\neq m\\ \pi, & n=m\end{cases}$

Д-2. $\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\sin(n+m)x+\sin(n-m)x]\,dx=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{n+m}\cos(n+m)x\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n-m}\cos(n-m)x\Big|_{-\pi}^{\pi}\right]=$

$(n\neq m)$ $=\frac{1}{2}[0]$

$m=n$ $\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos nx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2nx\,dx=-\frac{1}{4n}\cos 2nx\Big|_{-\pi}^{\pi}=0$

Пусть $(**)$ сходится равномерно на $[-\pi,\pi]$ и имеет сумму $f(x)$

$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$ (умн. на $\cos mx$ и интегрируем почленно)

$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx\,dx=\frac{a_0}{2}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,dx}_{0}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx}_{0,\ n\neq m}+\sum b_n\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,dx}_{0}=$

$=a_m\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mx\,dx=a_m\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cancel{\cos 2mx})\,dx=a_m\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\pi=\pi a_m$

$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx\,dx \quad (1) \quad ; \quad a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx$

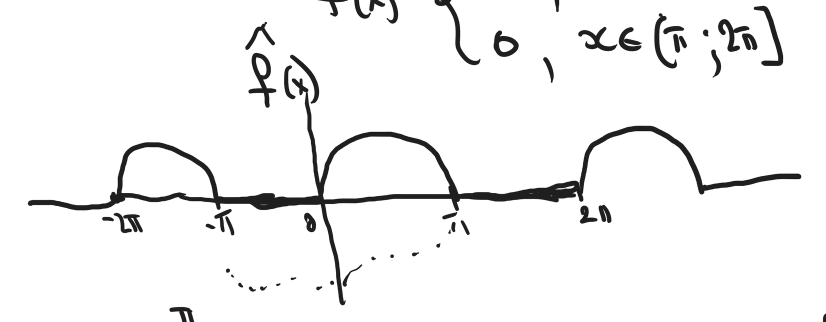
$b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin mx\,dx \quad (2)$

$f(x): \exists\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\,dx$ – абс. интегрируемая функция

$\exists\ a_m, b_m: \quad \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)\cos mx|\,dx\le\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\,dx$

Пример. Найти ряд Фурье функции $f(x)$ на $[0,2\pi]$

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\in[0,\pi]\\ 0, & x\in(\pi;2\pi]\end{cases}$$



$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\hat f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\frac{1}{\pi}(-\cos x)\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{\pi}(1+1)=\frac{2}{\pi}$

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\hat f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\frac{1}{2}\int_0^{\pi}[\sin(n+1)x+\sin(1-n)x]\,dx$

$n=1 \quad a_1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin 2x\,dx=0$

$n\neq 1 \quad a_n=\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{n+1}\cos(n+1)x\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n-1}\cos(n-1)x\Big|_0^{\pi}\right]=\frac{1}{2\pi}\Big[(-1)^n\frac{1}{n+1}+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n-1}+$

$+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}\Big]=\frac{1}{2\pi}\left[(-1)^n\frac{-2}{n^2-1}+\frac{-2}{n^2-1}\right]=\frac{-1}{\pi(n^2-1)}[1+(-1)^n]=\frac{1+(-1)^n}{\pi(1-n^2)}$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\hat f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\sin nx\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[\cos(n-1)x-\cos(n+1)x]\,dx$

<u>$n=1$</u> $\quad b_1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(1-\cancel{\cos 2x})\,dx=\frac{1}{2}$

$n\geq 2 \quad b_n=0$

$$\hat f(x)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{1-n^2}\cdot\cos nx$$

□ $f(x)$ на $[-\pi;\pi]$ кусочно-непрерывная, если она непрерывна во всех точках отрезка $[-\pi;\pi]$ за исключением конечного числа точек отрезка, в которых она имеет разрыв 1-го рода (скачок)

$-\pi \quad x_1 \quad x_2 \quad x_p \quad \pi$ $\qquad x_1, x_2, x_p, x_m$ – точки разрыва $\in[-\pi,\pi]$

$\exists\lim_{x\to x_p-0}f(x)=f(x_p-0), \ \exists\lim_{x\to x_p+0}f(x)=f(x_p+0), \ f(x_p-0)\neq f(x_p+0)$

□ Кусочно-непрерывная функция $y=f(x)$, $x\in[-\pi,\pi]$ называется кусочно-гладкой, если $\exists f'(x)$ во всех точках $[-\pi,\pi]$ за исключением конечного числа его точек, где производная терпит разрыв 1-го рода

$\exists\lim_{x\to x_q-0}f'(x)=f'(x_q-0)$ и $\exists\lim_{x\to x_q+0}f'(x)=f'(x_q+0)$, $f'(x_q-0)\neq f'(x_q+0)$

Теорема (о поточечной сходимости ряда Фурье) Дирихле.

1) $f(x), x\in[-\pi,\pi]$ – кусочно-гладкая разложена в ряд Фурье $(**)$ с коэф., определёнными формулами (1) и (2)

2) $\hat f(x)$ – сумма ряда Фурье.

Тогда 1) $\forall x\in(-\pi,\pi)\Rightarrow\hat f(x)=f(x)$ (здесь x – точка непрерывности $f(x)$)

2) $\hat f(x_p)=\frac{1}{2}(f(x_p-0)+f(x_p+0))$

3) $\hat f(-\pi)=\hat f(\pi)=\frac{1}{2}(f(-\pi+0)+f(\pi-0))$

<u>Теорема</u> (о равномерной сходимости ряда Фурье)

$f(x), x\in[-\pi,\pi]$ $\quad$ 1) $f(x)$ непрерывна на $[-\pi,\pi]$

2) $f(x)$ – кусочно-гладкая на $[-\pi]$

3) $f(-\pi)=f(\pi)$

Тогда А) $\hat f(x)=f(x)$, на $[-\pi,\pi]$

Б) $\hat f(x)$ непрерывна на всей оси

С) $\hat f(x)$ – 2π-периодическая функция на всей оси

Ряды Фурье на $[-\ell;\ell]$

$\frac{1}{2}; \sin\frac{\pi nx}{\ell}, \cos\frac{\pi nx}{\ell}, n=1,2\ldots$ – ортогональная система на $[-\ell;\ell]$

$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{\ell}+b_n\sin\frac{\pi nx}{\ell}$ – ряд Фурье функции $f(x), x\in[-\ell,\ell]$

$a_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\frac{\pi nx}{\ell}\,dx \quad n=0,1,\ldots \quad (1)'$

$b_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\sin\frac{\pi nx}{\ell}\,dx \quad n=1,2,\ldots \quad (2)'$