Ф-03-Лекция 12. Знакопеременные ряды.

П.1 Абсолютная и условная сходимости.

ОПР. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (2), составленный из модулей членов ряда (1).

Теорема 1. Абсолютно сходящийся ряд сходится.

ДОК. Если ряд (2) сходится, то по критерию Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N_\varepsilon : \forall n > N, \forall m > n \Rightarrow |a_n| + |a_{n+1}| + \ldots + |a_m| < \varepsilon .$$

Поскольку

$|a_n + a_{n+1} + \ldots + a_m| \le |a_n| + |a_{n+1}| + \ldots + |a_m| < \varepsilon$, для ряда(1) выполняется критерий Коши и ряд сходится.

Любой из достаточных признаков сходимости рядов с положительными членами может быть использован как достаточный признак абсолютной сходимости знакопеременного ряда. Например,

ПРИЗНАК ДАЛАМБЕРА абсолютной сходимости знакопеременного ряда.

Если для общего члена a_n знакопеременного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) выполняется одно из условий:

1. $\exists n_0, \exists \lambda : 0 < \lambda < 1 : \forall n \ge n_0 \to \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \le \lambda$;

2. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lambda < 1$, то ряд (1) абсолютно сходится.

ОПР. Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) называется условно сходящимся, если (1) сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (2), составленный из модулей его членов, расходится.

Пример 1. При каких x сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\dfrac{x}{n}\right)^n$?

Применим признак Даламбера для установления абсолютной сходимости:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)!\cdot |x|^{n+1} \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot |x|^n \cdot n!} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \cdot |x| \xrightarrow{n\to\infty} \frac{|x|}{e} < 1 \to x \in (-e; e)$$

При $|x| < e$ ряд сходится абсолютно. При $|x| > e$ ряд расходится по невыполнению необходимого признака. При $|x| = e$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

. Из условия монотонного возрастания последовательности $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < e$ следует, что $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$ и общий член к нулю не стремится.

Чтобы понять разницу между абсолютной и условной сходимостями числовых рядов докажем теорему, утверждающую, что члены абсолютно сходящегося ряда можно менять местами без потери сходимости и изменения суммы ряда. Условно сходящиеся ряды при изменении порядка слагаемых могут изменять свою сумму.

Теорема 2. (Дирихле)

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) сходится абсолютно и $m_1, m_2, ..., m_n, ...$ любая перестановка множества натуральных чисел. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (3) с общим членом $b_n = a_{m_n}$ также сходится абсолютно и имеет ту же сумму.

ДОК. Для каждой частичной суммы $\sigma_n = |b_1| + |b_2| + ... + |b_n|$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$, найдется частичная сумма $\omega_{m(n)} = |a_1| + |a_2| + ... + |a_{m(n)}|$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, (2) , включающая все слагаемые суммы σ_n . В свою очередь, найдется частичная сумма $\sigma_{N(n)}$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$, содержащая все слагаемые суммы $\omega_{m(n)}$. Тогда $\sigma_n \le \omega_{m(n)} \le \sigma_{N(n)}$. Из абсолютной сходимости ряда (1) следует, что частичные суммы $\omega_{m(n)}$ имеют предел, а поэтому ограничены. Тогда в силу неравенства ограничены частичные суммы σ_n и ряд (3) сходится абсолютно. Пусть S_n^1, S_n^2 и S_n^3 частичные суммы рядов (1), (2) и (3) соответственно и S –сумма ряда (1).

Тогда из абсолютной сходимости ряда (1) следует, что

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N : \forall m \ge N, n > m \Rightarrow \left|S_N^1 - S\right| < \frac{\varepsilon}{2}, S_n^2 - S_m^2 < \frac{\varepsilon}{2}, \left|S_n^3 - S_m^3\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Существует число $p = p_N$ такое, что для любого $m \ge p$ частичная сумма S_m^3 содержит первые N членов ряда (1) и поэтому $S_m^3 - S_N^1$ содержит сумму членов ряда (3) с номерами большими N, что по выбору числа N означает $\left|S_N^1 - S_m^3\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.Тогда

$$\left|S - S_m^3\right| \le \left|S - S_N^1\right| + \left|S_N^1 - S_m^3\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

т.е. суммы рядов (1) и (3) совпадают.

Для условно сходящегося ряда справедлива

Теорема 3. (Риман) (без доказательства)

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) сходится условно, то для любого числа $\sigma \in (-\infty, \infty)$ существует перестановка членов ряда (1), при которой он сходится и имеет сумму σ .

П.2. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Оценка остатка ряда.

Опр. Пусть $a_n > 0$ числовая последовательность. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ (4) называется знакочередующимся.

Теорема 4. (признак Лейбница)

Если последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n > 0$ монотонно убывающая и $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд (4) сходится.

Док.

$S_{2k+1} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - ... - (a_{2k} - a_{2k+1}) \le a_1$, поскольку каждая из скобок неотрицательная. Тогда все частичные суммы ряда (4) с нечетными номерами ограничены. Ограниченными являются также и частичные суммы с четными номерами, поскольку $S_{2k} = S_{2k+1} - a_{2k+1} \le S_{2k+1} \le a_1$. Кроме того, последовательность S_{2k} монотонно возрастающая:

$S_{2k} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + ... + (a_{2k-1} - a_{2k}) \ge S_{2k-2}, \quad \forall k \in N$

На основании теоремы Вейерштрасса последовательность S_{2k} имеет предел S. Тогда тот же предел имеют и частичные суммы с нечетными номерами, поскольку $S_{2k+1} = S_{2k} + a_{2k+1}$.

Для знакочередующихся рядов остаток ряда $\sum_{k=m}^{\infty} (-1)^k a_{k+1}$ также является знакочередующимся рядом с суммой R_m, поэтому $|R_m| \le |a_{m+1}|$. Последнее неравенство называется оценкой остатка знакочередующегося ряда: отбрасывание из ряда всех слагаемых с номерами большими m приводят к ошибке вычисления суммы ряда меньшей модуля первого отброшенного члена.

Пример 2. При каких x сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$?

При $x > 0$ последовательность $\frac{1}{n^x}$ монотонно стремится к нулю и ряд сходится по признаку Лейбница. При $x > 1$ сходимость абсолютная.

Замечание. Требование монотонности в признаке Лейбница существенно.

Действительно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right)$ знакочередующийся, поскольку для четных $n: \frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}} < 0$, а для нечетных $n: \frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} > 0$, но расходящийся, поскольку нет монотонности.

П.3. Преобразования АБЕЛЯ

Рассмотрим преобразование конечной суммы $\sum_{k=1}^{m} a_k b_k$, которое связывают с именем Абеля.

Для любых чисел $\{a_k\}$ и $\{b_k\}, k = 1, 2, ..m$ справедливо представление:

$$\sum_{k=1}^{m} a_k b_k = a_m B_m - \sum_{k=1}^{m-1} a'_k B_k ,$$

где $a'_k = a_{k+1} - a_k$, $B_k = b_1 + b_2 + ... + b_k$

ДОК. (индукцией по числу m)

При m=2 формула справедлива: $a_1 b_1 + a_2 b_2 = a_2 (b_1 + b_2) - (a_2 - a_1) b_1$

Предположим, что формула верна для m и докажем ее справедливость m+1:

$$\sum_{k=1}^{m+1} a_k b_k = a_{m+1} b_{m+1} + \sum_{k=1}^{m} a_k b_k = a_{m+1} b_{m+1} + a_m B_m - \sum_{k=1}^{m-1} a'_k B_k = a_{m+1} b_{m+1} + a_m B_m -$$

$$- \sum_{k=1}^{m} a'_k B_k + (a_{m+1} - a_m) B_m = a_{m+1} B_{m+1} - \sum_{k=1}^{m} a'_k B_k .$$

Теорема 5. (Признак АБЕЛЯ).

Пусть 1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится 2) последовательность $\{b_n\}$ монотонна и ограничена. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ (5) сходится.

ДОК. Воспользуемся преобразованием Абеля для оценки отрезка ряда (5):

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k b_k \right| = \left| b_m (a_n + a_{n+1} + ... + a_m) - \sum_{k=n}^{m-1} (b_{k+1} - b_k)(a_n + a_{n+1} + ... + a_k) \right| \qquad (@)$$

Для любого $\varepsilon > 0$ $\exists N : \forall n > N, m > n \Rightarrow |a_n + a_{n+1} + ... + a_m| < \frac{\varepsilon}{2B}$ и $|b_m - b_n| \le B.$

Здесь константа $B>0$ ограничивает значения модулей членов последовательности $\{b_n\}$: $|b_n| \le B$ для всех n. Пусть последовательность $\{b_n\}$ монотонно растет: $b_{k+1}-b_k>0$ (в противном случае $-(b_{k+1}-b_k)>0$). Тогда второе слагаемое оценивается

$$\left|\sum_{k=n}^{m-1}(b_{k+1}-b_k)(a_n+a_{n+1}+\ldots+a_k)\right| \le \sum_{k=n}^{m-1}(b_{k+1}-b_k)|a_n+a_{n+1}+\ldots+a_k| \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2B}\sum_{k=n}^{m-1}(b_{k+1}-b_k)=\frac{\varepsilon}{2B}(b_m-b_n)\le\frac{\varepsilon}{2}.$$

Первое слагаемое оценивается:

$$|b_m(a_n+a_{n+1}+\ldots+a_m)| \le |b_m|\cdot|a_n+a_{n+1}+\ldots+a_m| \le B\cdot\frac{\varepsilon}{2B}=\frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда $\left|\sum_{k=n}^{m}a_kb_k\right| \le \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ для всех $n>N, m>n$ и для ряда(5) выполняется критерий Коши, что завершает доказательство теоремы.

Пример 3. Исследовать ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt[n]{n}}{\ln n}$ на сходимость.

Применим признак Абеля:

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$ сходится по признаку Лейбница, последовательность $b_n=\sqrt[n]{n}=e^{\frac{\ln n}{n}}\downarrow$ монотонная и ограниченная. Ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt[n]{n}}{\ln n}$ сходится. Абсолютной сходимости нет, поскольку $\frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}>\frac{1}{\ln n}$, а ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ расходится.

Теорема 6. (Признак Дирихле)

Пусть

1) частичные суммы $S_m=\sum_{n=1}^{m}a_n$ ограничены;

2) последовательность $\{b_n\}$ монотонно стремится к нулю.

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ сходится.

ДОК. Воспользуемся преобразованием Абеля (@).

Тогда

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N:\forall n>N, m>n \Rightarrow |b_n|\le\frac{\varepsilon}{2A}, |b_m-b_n|\le\frac{\varepsilon}{2A},$$

где A – константа, ограничивающая значения отрезков ряда $|a_n+a_{n+1}+\ldots+a_k|\le A, \forall n,k$.

Первое слагаемое в (@) оценивается:

$$|b_m(a_n+a_{n+1}+\ldots+a_m)| \le |b_m|\cdot|a_n+a_{n+1}+\ldots+a_m| \le \frac{\varepsilon}{2A}\cdot A=\frac{\varepsilon}{2}.$$

Второе слагаемое, с учетом знакопостоянства $b_{k+1}-b_k>0$ для всех k, (монотонность $\{b_n\}$), (или $-(b_{k+1}-b_k)>0$) оценивается:

$$\left|\sum_{k=n}^{m-1}(b_{k+1}-b_k)(a_n+a_{n+1}+\ldots+a_k)\right| \le \sum_{k=n}^{m-1}(b_{k+1}-b_k)|a_n+a_{n+1}+\ldots+a_k| \le$$

$$\leq A\sum_{k=n}^{m-1}\left(b_{k+1}-b_k\right)=A(b_m-b_n)\leq\frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда $\left|\sum_{k=n}^{m}a_k b_k\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ для всех $n>N, m>n$ и для ряда выполняется критерий Коши, что завершает доказательство теоремы.

Пример 4. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ на сходимость.

$a_n=\sin n, b_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\downarrow 0$. Докажем ограниченность частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{m}\sin n$:

$$\sin 1+\sin 2+\ldots+\sin m=\frac{\sin\frac{1}{2}\cdot\sin 1+\sin\frac{1}{2}\cdot\sin 2+\ldots+\sin\frac{1}{2}\cdot\sin m}{\sin\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{\cos\frac{1}{2}-\cos\frac{3}{2}+\cos\frac{3}{2}-\cos\frac{5}{2}+\ldots+\cos\frac{2m-1}{2}-\cos\frac{2m+1}{2}}{2\sin\frac{1}{2}}=\frac{\cos\frac{1}{2}-\cos\frac{2m+1}{2}}{2\sin\frac{1}{2}}$$

Тогда справедлива оценка $\left|\sin 1+\sin 2+\ldots+\sin m\right|\leq\frac{1}{\sin\frac{1}{2}}$ для всех m .Тогда по признаку Дирихле ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ сходится. Докажем, что сходимость ряда условная.

Действительно, $\frac{|\sin n|}{\sqrt{n}}\geq\frac{\sin^2 n}{\sqrt{n}}=\frac{1-\cos 2n}{2\sqrt{n}}\rightarrow\sum_{n=1}^{m}\frac{|\sin n|}{\sqrt{n}}\geq\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{m}\frac{\cos 2n}{\sqrt{n}}$

Сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{\sqrt{n}}$ доказывается аналогично, обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится, поэтому частичные суммы $\sum_{n=1}^{m}\frac{|\sin n|}{\sqrt{n}}$ неограниченные и абсолютной сходимости ряда нет

П.4. Общая схема исследования числового ряда.

1. Проверяют выполнение необходимого признака сходимости. Если он не выполнен, исследование закончено - ряд расходится.
2. Выясняют, является ли данный ряд знакоопределенным? (все члены положительные или отрицательные). Если да, то подбирают подходящий достаточный признак (сравнения с известным рядом, Даламбера, радикальный или интегральный Коши, Раабе и др.).
3. Если ряд знаконеопределен, то рассматривают ряд из модулей его членов и подбирают подходящий достаточный признак абсолютной сходимости. Если ряд из модулей сходится, то исследование заканчивается – ряд сходится абсолютно.
4. Если ряд из модулей расходится, то ряд исследуется на условную сходимость. Если он знакочередующийся, то применяют признак Лейбница, если произвольный, то признак Абеля или Дирихле.

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ.

1. Понятие абсолютной и условной сходимости. Теорема о сходимости абсолютно сходящегося ряда. Пример достаточного признака абсолютной сходимости.
2. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.
3. Знаконеопределенные ряды. Преобразование Абеля. Признак Абеля сходимости ряда.
4. Признак Дирихле сходимости числового ряда. Примеры.