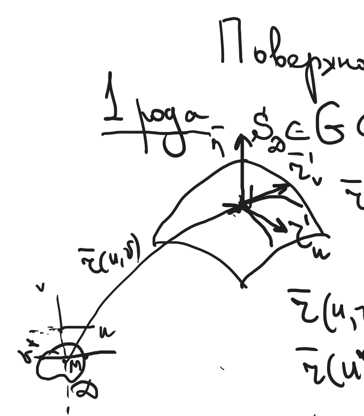
Поверхностные интегралы

<u>1 рода</u> $S_{\mathcal{D}} \subset G \subset R^3$



$$\bar{r} = \bar{r}(u,v) = \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}, \ (u,v) \in \mathcal{D}, \ \bar{r}(u,v) \in C^1(\mathcal{D}) -$$

– парам. уравнение гладкой поверхности

$\bar{r}(u, v^*)$ – кривая на поверхности $S_{\mathcal{D}}$

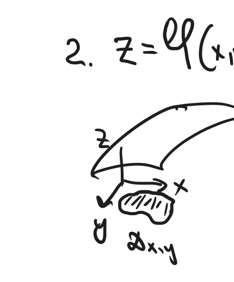
$\bar{r}(u^*, v)$ – кривая на поверхности,

$\bar{r}'_u, \bar{r}'_v$ – касательные вектора к кривым

$$\vec{n} = \bar{r}'_u \times \bar{r}'_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}}_{A} i - \underbrace{\begin{vmatrix} x'_u & z'_u \\ x'_v & z'_v \end{vmatrix}}_{B} j + \underbrace{\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}}_{C} k$$

$$\bar{n}_e = \left\{ \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \right\} = \{\underbrace{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma}_{\text{направляющие косинусы нормали}}\}$$

2. $z = \varphi(x,y)$, $(x,y) \in \mathcal{D}_{xy}$ (явное уравнение поверхности.



$$\bar{n} = \operatorname{grad}(z - \varphi(x,y)) = \{-\varphi'_x, -\varphi'_y; 1\}$$

$$\bar{n}_e = \left\{ -\frac{\varphi'_x}{\sqrt{\varphi'^2_x + \varphi'^2_y + 1}}; -\frac{\varphi'_y}{\sqrt{\varphi'^2_x+\varphi'^2_y+1}}; +\frac{1}{\sqrt{\varphi'^2_x+\varphi'^2_y+1}} \right\} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$$

$ds = \sqrt{A^2+B^2+C^2}\, du\,dv$ (парам. форма) $\qquad S_{\mathcal{D}} = \iint_{\mathcal{D}} ds = \iint_{\mathcal{D}_{uv}} \sqrt{A^2+B^2+C^2}\, du\,dv$

$ds = \sqrt{1+\varphi'^2_x+\varphi'^2_y}\, dx\,dy$ (явное задание) $\qquad S_{\mathcal{D}} = \iint_{\mathcal{D}} ds = \iint_{\mathcal{D}_{xy}} \sqrt{1+\varphi'^2_x+\varphi'^2_y}\, dx\,dy$

– площадь поверхности

Конструкция интеграла по поверхности $S_{\mathcal{D}}$ 1 рода

ξ – Π_σ, $\sigma \in \xi$, $D\xi$ – сумма площадей фигуры (вписанные)

$M\xi$ – набор точек $M_\sigma \in \Pi_\sigma$, $\forall \sigma \in \xi$

$\mathcal{D}_{uv}$ $\quad f(x,y,z) \in C(G)$, $G \supset S_{\mathcal{D}}$ $\qquad \bar{r}(\Pi_\sigma) = S_\sigma$

$\varphi(u,v) = f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \in C(\mathcal{D}_{uv})$ $\qquad \mu(S_\sigma) = \Delta S_\sigma$ – площадь куска S_σ.

Интегральная сумма

$$\sum_{\sigma \in \xi} f(M_\sigma) \cdot \Delta S_\sigma = S_{f, S_{\mathcal{D}}}(\xi, M\xi)$$

$\square$ $\iint_{S_{\mathcal{D}}} f\,ds = \lim_{d\xi \to 0} S_{f, S_{\mathcal{D}}}(\xi, M\xi)$ – поверхностный интеграл 1 рода функции $f(x,y,z)$ по поверхности $S_{\mathcal{D}}$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta_\varepsilon : \forall \xi, d\xi < \delta, \forall M\xi \Rightarrow \left| S_{f,S_{\mathcal{D}}}(\xi, M\xi) - \iint_{S_{\mathcal{D}}} f\,ds \right| < \varepsilon$$

T. (необходимое условие $\exists \iint_{S_{\mathcal{D}}} f\,ds$)

Если $\exists \iint_{S_{\mathcal{D}}} f\,ds$, то $f(x,y,z)$ – ограничена на $S_{\mathcal{D}}$

$\Updownarrow$

$\exists K > 0 : |\varphi(u,v)| = |f(\bar{r}(u,v))| \le K$, $\forall (u,v) \in \mathcal{D}_{uv}$

T. (о достаточных условиях интегрируемости)

1) $f(x,y,z) \in C(G)$, $G \supset S_{\mathcal{D}}$
2) $\bar{r}(u,v) \in C^1(\mathcal{D}_{uv})$
3) $\mathcal{D}_{uv}$ – связный, измеримый компакт

$\Big\}$ Тогда $\exists \iint_{S_{\mathcal{D}}} f\,ds$

Свойства пов. интеграла $1^{\underline{\text{ого}}}$ рода (f, g – интегрируемы на $S_{\mathcal{D}}$)

1) линейность
2) интегрируемость неравенств: $\quad f(x,y,z) \le g(x,y,z)\ \forall (x,y,z) \in S_{\mathcal{D}}$

Тогда $\iint_{S_{\mathcal{D}}} f\,ds \le \iint_{S_{\mathcal{D}}} g\,ds$

3. оценка интеграла. $\quad m = \min_{(u,v) \in \mathcal{D}_{uv}} |\varphi(u,v)| = \min |f(\bar{r}(u,v))|$

$\qquad M = \max_{(u,v) \in \mathcal{D}_{uv}} |f(\bar{r}(u,v))|$

Тогда

$$m\mu(S_{\mathcal{D}}) \le \left| \iint_{S_{\mathcal{D}}} f\,ds \right| \le M\mu(S_{\mathcal{D}})$$

4. Теорема о среднем для интеграла

1) $f, g \in C(G)$, $G \supset S_{\mathcal{D}}$
2) $g(x,y,z) \ge 0$, $(x,y,z) \in S_{\mathcal{D}}$
3) $\mathcal{D}_{uv}$ – измерим., связн. компакт.

$\Big\}$ Тогда $\exists N \in S_{\mathcal{D}}$:

$$\iint_{S_{\mathcal{D}}} f \cdot g\,ds = f(N) \cdot \iint_{S_{\mathcal{D}}} g\,ds$$

$m = \min_{D} f(\bar{r}(u,v))$

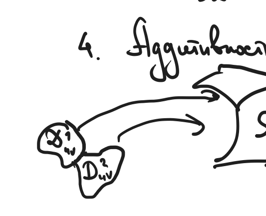
$M = \max_{D} f(\bar{r}(u,v))$

$$m \iint_{S_{\mathcal{D}}} g\,ds \le \iint_{S_{\mathcal{D}}} fg\,ds \le M \iint_{S_{\mathcal{D}}} g\,ds$$

$$\frac{1}{\iint_{S_{\mathcal{D}}} g\,ds} \cdot \iint_{S_{\mathcal{D}}} fg\,ds \in [m, M] = E_f$$

$\Rightarrow \exists N : f(N)$

4. Аддитивность интеграла по множеству.



$S_{\mathcal{D}} = S^1_{\mathcal{D}} \cup S^2_{\mathcal{D}}$ и функция $f(x,y,z)$ интегрируема по $S^1_{\mathcal{D}}$ и $S^2_{\mathcal{D}}$

Тогда $\iint_{S_{\mathcal{D}}} f\,ds = \iint_{S^1_{\mathcal{D}}} f\,ds + \iint_{S^2_{\mathcal{D}}} f\,ds$

Способ вычисления

$$\iint_{S_{\mathcal{D}}} f\,ds = \iint_{\mathcal{D}_{uv}} f(\bar{r}(u,v)) \sqrt{A^2+B^2+C^2}\, du\,dv \qquad (1)$$

$S: z = \varphi(x,y)$

$$\iint_{S_{\mathcal{D}_{xy}}} f\,ds = \iint_{\mathcal{D}_{xy}} f(x, y, z(x,y)) \cdot \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\, dx\,dy \qquad (2)$$

$\triangleright$ $\underbrace{\sum(\bar{r}, \xi, M\xi)}_{\text{инт. сумм}} = \sum_\sigma f(M_\sigma) \Delta S_\sigma = \sum_\sigma f(\bar{r}(u_\sigma, v_\sigma)) \cdot \underbrace{\iint_{\Pi_\sigma} \sqrt{A^2+B^2+C^2}\, du\,dv}_{\text{Т. о средн. } \exists \bar{u}_\sigma, \bar{v}_\sigma} =$

$$= \sum_\sigma f(\bar{r}(u_\sigma; v_\sigma)) \cdot \sqrt{A^2(\bar{u}_\sigma, \bar{v}_\sigma) + B^2(\bar{u}_\sigma, \bar{v}_\sigma) + C^2(\bar{u}_\sigma, \bar{v}_\sigma)}\, \mu(\Pi_\sigma) =$$

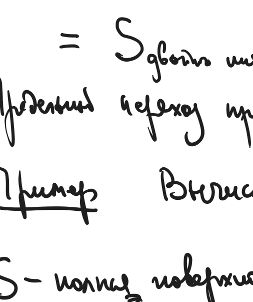
$$= \underbrace{\sum f(\bar{r}(\bar{u}_\sigma, \bar{v}_\sigma)) \sqrt{A^2+B^2+C^2}\, \mu(\Pi_\sigma)}_{S_{\text{двойного интеграла (1)}}} + \underbrace{\sum \left[f(\bar{r}(u_\sigma, v_\sigma)) - f(\bar{r}(\bar{u}_\sigma, \bar{v}_\sigma)) \right] \sqrt{A^2+B^2+C^2}\, \mu(\Pi_\sigma)}_{\Phi\xi \xrightarrow[d\xi \to 0]{} 0}$$

$= S_{\text{двойного интеграла (1)}} + o(1)$

Предельный переход при $d\xi \to 0$ приводит к (1)

<u>Пример</u> Вычислить $\iint_S z^2\,ds$

S – полная поверхность конуса $\quad \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2$



$S = S_{бок} + S_{осн}$ $\qquad D_{xy}$

$z = \sqrt{x^2+y^2}$

$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\qquad f(\bar{r}) = z^2\big|_{z=\sqrt{x^2+y^2}} = x^2+y^2$

$$1 + z'^2_x + z'^2_y = 1 + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2$$

$S_{бок}$: $\iint_{S_{бок}} z^2\,ds = \iint_{O_{R=2}} (x^2+y^2)\sqrt{2}\,dx\,dy = \sqrt{2} \iint_{O_{R=2}} (x^2+y^2)\,dx\,dy =$

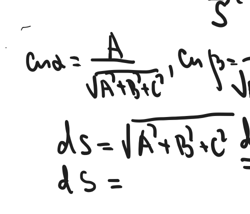
$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r^3\,dr = \sqrt{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{r^4}{4}\Big|_{r=0}^{r=2} = 8\sqrt{2}\pi$$

$S_{осн}$: $\underline{z=2}$ $\quad f(x,y,z=2) = z^2\big|_{z=2} = 4$ $\qquad z'_x = 0 \ \ z'_y = 0$, $\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} = 1$

$$\iint_{S_{осн}} z^2\,ds = \iint_{\mathcal{D}_{xy}} 4\,dx\,dy = 4 \cdot \pi \cdot 4 = 16\pi$$

$$\iint_{S_{полн}} z^2\,ds = 8\sqrt{2}\pi + 16\pi = 8\pi(\sqrt{2} + 2)$$

Поверхностный интеграл $2^{\underline{\text{ого}}}$ рода



$r = \bar{r}(u,v)$

Поверхность ориентируем выбранной нормалью

$\vec{S}_{\mathcal{D}}$ $\qquad \bar{F} = \{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\}$ – поле $(x,y,z) \in G$, $S_{\mathcal{D}} \in G$

$\square$ Поверхностным интегралом $2^{\underline{\text{ого}}}$ рода $\iint_{\vec{S}} (\bar{F}, \bar{n}_e)\,ds =$

$$= \iint_{\vec{S}} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,ds = \iint_{D_{uv}} (PA + QB + RC)\,du\,dv \ \textcircled{=}$$

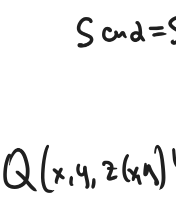
$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $\cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$; $\cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

$ds = \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\underline{\underline{du\,dv}} = \sqrt{A^2+B^2+C^2} \cdot \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\, dy\,dz$

$ds =$

$A\,du\,dv = dy\,dz = ds\cos\alpha$
$B\,du\,dv = dz\,dx = ds\cos\beta$
$C\,du\,dv = dx\,dy = ds\cos\gamma$

$$\textcircled{=} \iint_{\vec{S}} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy$$



$S\cos\alpha = S_{пр}$

$z = \varphi(x,y)$, $(x,y) \in \mathcal{D}_{xy}$

$$\iint_{\vec{S}} (F, \bar{n}_e)\,ds = \iint_{\mathcal{D}_{xy}} \left(R(x,y,z(x,y)) - P(x,y,z(x,y))\varphi'_x - Q(x,y,z(x,y))\varphi'_y \right) dx\,dy \quad (4)$$