Лекция 8. Поверхностные интегралы.

П.1 Поверхностный интеграл первого рода.

ОПР. Окрестностью $U_\theta(S)$ поверхности S называют множество точек в пространстве, являющихся внутренними хотя бы для одного шара радиуса θ с центром в точке поверхности S .Рассматривается скалярная функция $F(x,y,z)$ непрерывная в окрестности $U_\theta(S)$ кусочно-гладкой поверхности S, заданной параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), (u,v) \in D_{uv} \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

Пусть D_ξ - ступенчатая область, соответствующая разбиению ξ области D_{uv} на прямоугольники $\Pi_\sigma, \sigma \in \xi$, пересекающиеся только в граничных точках. Через S_σ обозначим образ прямоугольника Π_σ при отображении $\bar{r} = \bar{r}(u,v)$. По предположению S_σ имеет площадь, которую обозначим dS_σ. Пусть $M_\sigma, \sigma \in \xi$ набор произвольных точек $M_\sigma \in S_\sigma$.

ОПР. Интегральной суммой функции $F(x,y,z)$ по поверхности S, соответствующей разбиению D_ξ называют величину

$$S_F(\bar{r},\xi) = \sum_\sigma F(M_\sigma) dS_\sigma .$$

ОПР. Поверхностным интегралом первого рода функции $F(x,y,z)$ по поверхности S называют величину (если она существует)

$$\iint_S F(x,y,z)ds = \lim_{d_\xi \to 0} S_F(\bar{r},\xi) \quad (5)$$

Теорема 2 (необходимое условие существования интеграла)

Если интеграл по поверхности существует, то функция $F(x,y,z)$ ограниченная на поверхности S.

СВОЙСТВА ПОВЕРХНОСТНОГО ИНТЕГРАЛА первого рода.

1. линейность: $\iint_S (\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2) ds = \lambda_1 \iint_S F_1 ds + \lambda_2 \iint_S F_2 ds$

2. аддитивность по множеству: если $S = S_1 \cup S_2$ и S_1, S_2 - два куска имеющих площадь и пересекающихся только по граничным точкам, то $\iint_{S_1 \cup S_2} Fds = \iint_{S_1} Fds + \iint_{S_2} Fds$.

3. оценка интеграла: если $m = \min_{P \in S} F(P)$ и $M = \max_{P \in S} F(P)$, то справедлива оценка

$$m \cdot S(D,\bar{r}) \le \iint_S Fds \le M \cdot S(D,\bar{r}).$$

4. теорема о среднем для поверхностного интеграла: в предположении непрерывности функции $F(x,y,z)$ существует точка $\tilde{M} \in S$, для которой $\iint_S Fds = F(\tilde{M}) \cdot S(D,\bar{r})$.

ТЕОРЕМА 2. Если функция $F(x,y,z)$ непрерывная в окрестности $U_\theta(S)$ кусочно-гладкой поверхности S, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \ (u,v) \in \bar{D} \\ z = z(u,v) \end{cases}$$, то поверхностный интеграл первого рода существует и вычисляется по формуле:

$$\iint_S F(x,y,z)ds = \iint_D F(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\left|\overline{r_u'}(u,v)\times\overline{r_v'}(u,v)\right|dudv \qquad (6)$$

ДОК. Поверхностный интеграл в (6) с учетом аддитивности и теоремы о среднем можно представить в виде:

$$\iint_S F(x,y,z)ds = \sum_\sigma \iint_{S_\sigma} Fds = \sum_\sigma F(\tilde{M}_\sigma)dS_\sigma = \sum_\sigma F(\tilde{M}_\sigma)\iint_{\Pi_\sigma}\left|\overline{r_u'}\times\overline{r_v'}\right|dudv =$$

$= \sum_\sigma F(\tilde{M}_\sigma)\left|\overline{r_u'}(\tilde{u}_\sigma,\tilde{v}_\sigma)\times\overline{r_v'}(\tilde{u}_\sigma,\tilde{v}_\sigma)\right|\Delta u_\sigma \Delta v_\sigma$, где точка $\tilde{M}_\sigma \in dS_\sigma$ имеет координаты

$\bar{r}(u_\sigma',v_\sigma'),\ u_\sigma',\tilde{u}_\sigma \in [u_\sigma;u_\sigma+\Delta u_\sigma],\ \tilde{v}_\sigma,v_\sigma' \in [v_\sigma;v_\sigma+\Delta v_\sigma]$

В силу непрерывности F и гладкости поверхности S имеем:

$$\sum_\sigma F(\tilde{M}_\sigma)\left|\overline{r_u'}(\tilde{u}_\sigma,\tilde{v}_\sigma)\times\overline{r_v'}(\tilde{u}_\sigma,\tilde{v}_\sigma)\right|\Delta u_\sigma \Delta v_\sigma = \sum_\sigma F(M_\sigma)\left|\overline{r_u'}(u_\sigma,v_\sigma)\times\overline{r_v'}(u_\sigma,v_\sigma)\right|\Delta u_\sigma \Delta v_\sigma + o(1)$$

В правой части равенства находится интегральная сумма для интеграла (6) и существование ее предела обеспечивается условиями теоремы.

Если поверхность S задается явно (2), то поверхностный интеграл вычисляется по формуле:

$$\iint_S F(x,y,z)ds = \iint_D F(x,y,f(x,y))\sqrt{1+\left(f_x'(x,y)\right)^2+\left(f_y'(x,y)\right)^2}\,dxdy \qquad (6)^*$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\iint_S (x^2+y^2)ds$, где S - граница тела $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1$.

РЕШЕНИЕ. Коническая поверхность

$S_1 : z = \sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y)\in D = \{x^2+y^2 \le 1\}$, $\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2} = \sqrt{2}$,

$$\iint_{S_1}(x^2+y^2)ds = \sqrt{2}\iint_D (x^2+y^2)dxdy = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 r^3dr = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

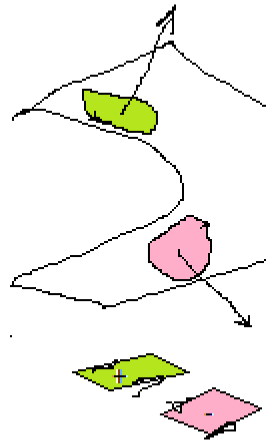
Поверхность круга

$S_2 : z = 1,\ (x,y)\in D,\ \sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2} = 1,\ \iint_D (x^2+y^2)dxdy = \frac{\pi}{2}$

Тогда $\iint_S (x^2+y^2)ds = \frac{\pi}{2}(1+\sqrt{2})$.

П.3 Поверхностные интегралы второго рода.

Рассмотрим непрерывную функцию $R(x,y,z)$ заданную в окрестности гладкой, двусторонней, ориентированной внешней нормалью поверхности S с уравнением $z = f(x,y)$. Разбиение $D_\xi = \bigcup_\sigma \Pi_\sigma$ области D_{xy} порождает разбиение поверхности на части S_σ, проекция которых на плоскость xoy совпадает с Π_σ. Части поверхности S_σ ориентированы так, что направление обхода их границы согласовано с внешней нормалью поверхности, т.е. обход по границе S_σ происходит в положительном направлении (против часовой стрелки). Площадь Π_σ при этом также ориентирована: она берется со знаком $\oplus$, если обход Π_σ, соответствующий обходу S_σ, происходит по отношению нормали плоскости xoy в положительном направлении. В противном случае, площадь приобретает знак минус (правило ориентации $S_\downarrow$).



С учетом правила ориентации строится интегральная сумма $S_\xi(R,S_\downarrow)=\sum_\sigma R(M_\sigma)\cdot s(\Pi_{\downarrow\sigma})$.

Ее предел при $d_\xi\to 0$, если он существует, обозначается через $\int_S Rdxdy$ и называется поверхностным интегралом в направлении оси oz, соответствующим выбранной ориентации поверхности $S_\downarrow$. Аналогично строятся поверхностные интегралы в направлении других осей $\int_S Q(x,y,z)dxdz,\ \int_S P(x,y,z)dydz$ и их сумма $\int_S Pdydz+Qdxdz+Rdxdy$. Последний называют поверхностным интегралом второго рода без указания направления проекции.

Вычисление интеграла $\int_S P(x,y,z)dxdy$ для поверхности $z=f(x,y),(x,y)\in D_{xy}$, ориентированной внешней нормалью, происходит сведением его к двойному интегралу по формуле

$$\int_S R(x,y,z)dxdy=\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy \quad (7)$$

и $\int_S R(x,y,z)dxdy=-\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy$, если поверхность ориентирована внутренней нормалью.

Пример 3 Вычислить интеграл $\int_S x^2y^2zdxdy$, где $S-$ нижняя часть сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, ориентированная внешней нормалью.

Решение.

По формуле (7) и $z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, получим

$$-\iint_{D_{xy}} x^2y^2\sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy=-\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\sin^2\varphi d\varphi\int_0^R r^5\sqrt{R^2-r^2}dr=-\frac{\pi}{4}\cdot\int_0^R r^5\sqrt{R^2-r^2}dr$$

Замена переменной $t=\sqrt{R^2-r^2}\in[R;0]\to tdt=-rdr$ приведет к интегралу

$$-\frac{\pi}{4}\cdot\int_0^R t^2(R^2-t^2)^2dt=-\frac{\pi}{4}\cdot\left(\frac{R^7}{7}-\frac{2R^7}{5}+\frac{R^7}{3}\right)=-\frac{2\pi R^7}{105}$$

Поверхностный интеграл $\int_S R(x,y,z)dxdy$ второго рода можно свести к поверхностному интегралу первого рода по формуле:

$$\int_{S_{\downarrow}} R(x,y,z)dxdy = \int_{S} R(x,y,z)\cos\gamma ds \text{ , где } \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}} \quad (8)$$

(для поверхности ориентированной внешней нормалью, $\cos\gamma > 0$)

Действительно, для разбиения $D_{\xi} = \bigcup\limits_{\sigma\in\xi} \Pi_{\sigma}$ и соответствующего разбиения поверхности $S = \bigcup\limits_{\sigma} S_{\sigma}$ имеем $S_{\sigma} = \iint\limits_{\Pi_{\sigma}} \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy = \dfrac{\mu(\Pi_{\sigma})}{\cos\tilde{\gamma}}$, где $\cos\tilde{\gamma}$ направляющий косинус нормали к поверхности в некоторой промежуточной точке $\tilde{M}_{\sigma} \in S_{\sigma}$ (теорема о среднем для интеграла)

Интегральная сумма для интеграла второго рода:

$$S_{\xi}(R,S_{\downarrow}) = \sum_{\sigma} R(M_{\sigma})\mu(\Pi_{\sigma}) = \sum_{\sigma} R(M_{\sigma})\cos\tilde{\gamma}\cdot S_{\sigma} = S_{\xi}(R\cos\gamma, S) + o(1)$$

представляется в виде интегральной суммы для интеграла первого рода для функции $R\cos\gamma$ плюс (по непрерывности) бесконечно малая при $d_{\xi} \to 0$. Предельный переход завершает доказательство формулы (8).

Для интеграла $\int\limits_{S} Pdyddz + Qdxdz + Rdxdy$ формула (8) примет вид:

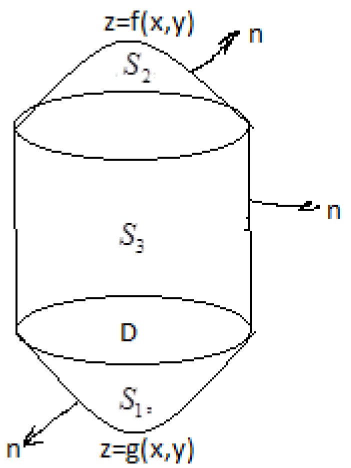
$$\int_{S_{\downarrow}} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \int_{S} (Pcos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds \qquad (8)^*$$

Для поверхности, заданной параметрическим уравнением (1), поверхностный интеграл сводится к двумерному интегралу по области D_{uv} :

$$\int_{S_{\downarrow}} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint_{D_{uv}} (P\cdot A + Q\cdot B + R\cdot C)dudv \qquad (7)^*$$

где $A, B, C -$ определяются формулами (3), а $P = P(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ и т.д.

Вычисление объема стандартной области $V_D^{f,g}$ через поверхностный интеграл.



Мы хотим установить формулу вычисления объема области $V_D^{f,g} = \left\{(x;y,z) \in \mathrm{R}^3 : (x,y) \in D, g(x,y) \le z \le f(x,y)\right\}$ с использованием интеграла по поверхности:

$$\mu V_D^{f,g} = \int_{S} zdxdy \, , \qquad (9)$$

где $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ поверхность ограничивающая область, ориентированная внешней нормалью.

Объем стандартной области $V_D^{f,g}$ вычисляется через двойной интеграл

$\mu V_D^{f,g} = \iint\limits_D (f(x,y) - g(x,y))dxdy = \int\limits_{S_2} zdxdy + \int\limits_{S_1} zdxdy$. С другой стороны $\int\limits_{S_3} zdxdy = 0$,

поскольку $S_3 -$ цилиндрическая поверхность с направляющей ∂D и образующей, параллельной оси oz, проектируется в ∂D, имеющей меру ноль.

Приведем еще одну формулу, связывающую объем области, ограниченной поверхностью S, ориентированной внешней нормалью, вычисляемый через поверхностный интеграл первого рода:

$$V = \frac{1}{3}\int\limits_S \left(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma\right)ds \qquad (10)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если поверхность S задается явно уравнением $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$ и

выбрана верхняя ее сторона $\overline{e_n} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\left(f_x'\right)^2+\left(f_y'\right)^2}}\left\{-f_x';-f_y';1\right\}$, то

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint\limits_D \Big(R(x,y,f(x,y)) - f_x' \cdot P(x,y,f(x,y)) - f_y' \cdot Q(x,y,f(x,y))\Big)dxdy.$$

Интеграл по нижней стороне поверхности отличается знаком.

ПРИМЕР 3. Вычислить интеграл $\iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy$, где S - внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

РЕШЕНИЕ. Внешняя нормаль $\overline{e_n}(M) = \dfrac{1}{a}\{x,y,z\}$, функция $\overline{F}(x,y,z) = \{x.y.z\}$,

скалярное произведение $P(x,y.z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma = a$. Тогда

$\iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy = a\iint\limits_S ds = 4\pi a^3$.

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ.

1. Поверхность в пространстве, способы ее задания. Площадь поверхности и способ ее вычисления.
2. Поверхность вращения и вычисление ее площади.
3. Поверхностный интеграл первого рода, его свойства. Формула вычисления интеграла.
4. Ориентированная поверхность. Поверхностный интеграл второго рода. Формула вычисления интеграла.