Лекция по теме «Площадь поверхности»

П.1 Поверхности в пространстве. Площадь поверхности.

ОПР. Гладкая поверхность в пространстве задается параметрическими уравнениями

в векторной форме, где - замкнутая измеримая область на плоскости переменных (*u,v*) или в координатной форме  (1)

с заданными функциями имеющие непрерывные частные производные первого порядка в.Черезобозначим образ области при отображении. Уравнение поверхности может быть задано явно, например,

 (2)

Она называется гладкой, если функция имеет непрерывные частные производные в области. Уравнение поверхности (2) можно записать в параметрической форме (1):



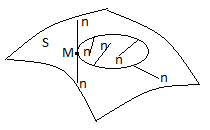
Поверхность не имеет особых точек, если. Здесь - координаты векторного произведения:

 (3)

Векторназывается нормалью к поверхности в точкена поверхности. Ее длина и направляющие косинусы вычисляются по формулам:



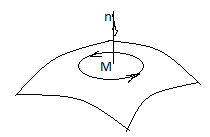
Гладкая поверхностьназывается односторонней, если на ней существует точкаи непрерывный замкнутый путь, проходящий через точку, такой, что при движении вдоль этого пути из точки в точку непрерывная нормаль меняет свое направление на противоположное.



Например, «лист Мебиуса» классический пример односторонней поверхности.

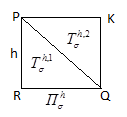
Поверхность называется двухсторонней, если обход нормали по любому замкнутому контуру не меняет ее направления. В дальнейшем, если не оговорено обратное, будем полагать, что поверхность имеет две стороны. Сторона поверхности, одна из двух, определяется выбором знака в выражении направляющих косинусов нормали. Эти знаки одни и те же для всех точек поверхности. Иногда для нормалей поверхностей, ограничивающих тела в пространстве, употребляются слова «внешняя нормаль», «внутренняя нормаль» в зависимости от того указывает ли нормаль направление внутрь тела или наоборот. Для поверхности заданной уравнением (2) внешняя нормаль составляет острый угол с осью.

Говорят, что направление обхода замкнутого контура на выбранной стороне поверхности согласовано с выбором нормали положительно, если движение по контуру воспринимается из конца нормали как вращение против часовой стрелки. В противоположном случае говорят об отрицательном направлении обхода контура.



Площадь поверхности.

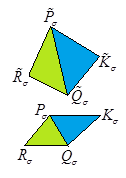
Рассмотрим разбиение области на квадраты со стороной, затем каждый квадрат разобьем на два треугольника:



Координаты вершин треугольниковиравны:

,. Каждому из этой пары треугольников соответствует треугольники в пространстве с вершинами на поверхности

и соответственно.



Поверхность, являющаяся объединением по треугольников и, назовем триангулирующей поверхностью, соответствующей разбиению. Поверхность назовем регулярной, если между треугольникамииможно установить биективное отображение (ортогональная проекция на плоскость), при этом существует число, для которого площадь. Условие регулярности равносильно тому, что углымежду плоскостями треугольникови плоскостьюудовлетворяют неравенству, т.е. нормаль к поверхности не перпендикулярна оси. Поверхность, задаваемая уравнением (2), регулярная.

Сумму площадей треугольников, составляющих триангулирующую поверхность обозначим. Для регулярной поверхности все слагаемыебесконечно малые величины при.

Опр. Площадью поверхности, заданной уравнением (1) над измеримой областью, называют число (если оно существует)



Теорема 1 (формула для вычисления площади поверхности)

Если гладкая, без особых точек, регулярная поверхность задана уравнениями (1) с измеримой областью, то площадь поверхности существует и вычисляется по формуле:

 (4)

Здесь функции определяются формулами (3).

Вычисление площади треугольника:



С учетом гладкости поверхности, а. Тогда

Аналогичная формула справедлива для парного треугольника:



Тогда



В правой части равенства содержится интегральная сумма для (4) и ее предел по условию существует. Предел выражения слева тогда также существует и равен площади поверхности.

Формуле (4) может быть предана иная форма:

,

где.

Тогда

 (4)\*

Если поверхность задается явно уравнением (2) и измеримый компакт, то поверхность регулярная и

Тогда

 (4)\*\*

Пример 1. Вычислить площадь шарового сегмента сферы радиуса *R* и высотой.

: , .

РЕШЕНИЕ. Перепишем уравнение поверхности в параметрической форме, используя сферические координаты, 

,

,

, .

Тогда.

Упражнение. Площадь поверхности вращения.

Предположим, что криволинейная трапеция вращается вокруг оси. Требуется найти формулу для вычисления площади боковой поверхности тела вращения. Уравнение поверхности вращения



В качествевыбираем.

Применим формулу (4)\*\*:



Тогда площадь поверхности вращения



Пример 2. Найти площадь поверхности прямого кругового конуса с высотой и образующей.

Решение.

