Материалы к лекции «Ряды Фурье 2»

Словарик.

1. Линейное пространство бесконечно мерное, если в нем есть бесконечное число линейно независимых элементов.

2. Линейное пространство называется евклидовым, если в нем определено скалярное произведение.

Например, пространство– кусочно- непрерывных функций на отрезкес условием в точках разрыва – бесконечно мерное (система многочленовлинейно независимая) и евклидовое со скалярным произведением



3. Линейное пространство называется нормированным, если каждый его элемент имеет норму, со свойствами:

А)

Б) 

В)

Норму в пространствеможно ввести так

4. Линейное нормированное пространство называется метрическим, если определено расстояние между его элементами.

5. Последовательность элементовнормированного пространства сходится по норме к элементуэтого пространства, если.

Сходимость по норме в пространствепоследовательности его элементов



называется среднеквадратической.

6. Последовательность элементовевклидового пространства называется ортогональной, если.

7. Последовательность элементовевклидового пространства называется ортонормированной, если (символ Кронекера)

Если последовательность элементовортогональная, то последовательностьортонормированная.

Тригонометрическая системаортогональная, а система функций ортонормированная.

Система многочленов степенивида (многочлены Лежандра) также образуют ортогональную систему в пространстве.

8. С каждой ортогональной системой функцийи элементомбесконечно мерного евклидового пространстваможно связать ряд

 (\*)

с коэффициентами (\*\*). Такой ряд называют рядом Фурье элементапо ортогональной системе. Коэффициенты (\*\*) формально получаются скалярным произведением правой и левой частей (\*) на.

Сходится ли ряд Фурье (\*) с коэффициентами (\*\*) по норме пространствак элементу, т.е.  Ответ на этот вопрос зависит от свойств ортогональной системыи будет дан позже.

Теорема 1. Экстремальное свойство коэффициентов ряда Фурье (\*\*).

Для каждого и любой линейной комбинацииортогональной системы первых элементов отклонениепринимает наименьшее возможное значение при.

Док.



Следствия.

1. Если системаортонормированная,, то

 (равенство Бесселя)

2. Если системаортонормированная,, то и

 (неравенство Бесселя)

3. Если ряд Фурье сходится по норме пространства к, то

 (равенство Парсеваля)

4. Еслиикоэффициенты ряда Фурье функциипо ортогональной системе функций, то неравенство Парсеваля имеет вид:

 (\*\*\*) (неравенство Бесселя для тригонометрических рядов Фурье)

Док. Коэффициенты Фурье по ортонормированной системе функцийсвязаны соотношениями:.

Тогда неравенство Бесселяпримет вид (\*\*\*).

Необходимое условие разложимости в ряд Фурье:



Замкнутые и полные ортонормированные системы

Ортонормированная системаназывается замкнутой, если



В частности, из теоремы 1 для замкнутых систем



Теорема 2. (необх. и дост. условие замкнутости ортонормированной системы)

Ортонормированная системазамкнута тогда и только тогда, когдасправедливо равенство Парсеваля:

Необходимость. Пусть система замкнута.



Предельный переход приприводит к неравенству. Левая часть неравенства не зависит от, поэтому оно может быть справедливо только при.

Достаточность.

Пусть справедливо равенство Парсеваля. Тогда



и ортонормированная системазамкнутая.

Следствие. Если ортонормированная система замкнутая, тоего ряд Фурьесходится по норме пространстваи имеет сумму, равную.

Док.



Ортогональная система(или ортонормированная система) называется полной, если не существует, для которого

Теорема 3. Всякая замкнутая ортогональная системаполная.

Если система не полная, то



Теорема 4

Если система полная, то два элементане могут иметь одинаковые ряды Фурье по этой системе.

Док. Если имеют одинаковые коэффициенты Фурье по системе, то элемент ортогонален каждому

Последнее противоречит полноте системы.

Существуют бесконечно мерные нормированные пространства и полные ортогональные системы в них, не являющиеся замкнутыми. Нормированное бесконечно мерное пространство называется Гильбертовым, если

1) оно полно, т.е. каждая фундаментальная последовательность его элементов сходится;

2) оно сепарабельное, т.е. в нем существует счетное, всюду плотное (по норме) множество его элементов.

В Гильбертовых пространствах всякая полная система ортогональных функций – замкнутая. Тогда ряды Фурье любого элемента сходятся по норме пространства и имеют сумму, равную.