Trigonometría

Notas de Clase

preparada por Mariano Morales Ramírez
https://marianomorales.blog

Recomendaciones

- Recuerda, ver a otros resolver problemas no te convierte en una persona capaz de resolver problemas.
- Saca un lápiz, papel e inténtalos. Prepárate para llegar a resultados equivocados, pero no te frustres. Cuando un tema se nos complica y lo abordamos críticamente, intentándolo hasta resolverlo, es cuando más aprendizaje nos llevamos.
- La clave está en saber pedir ayuda a tiempo. En el momento que identifiques dificultades, abórdalas ya sea conmigo o con quien más te sientas cómodo para pedir apoyo. Querer cubrir todo el día antes de un examen deja poco para el aprendizaje y mucho para la memoria o mecanización. Practica diariamente, aunque sea 15 minutos, y tendrás éxito en todo tu curso de matemáticas por la prepa y más allá de ella.
- No estudies leyendo, saca el lápiz e inténtalos hasta que puedas resolverlos sin apoyarte de los recursos. Si tienes dudas, por favor contáctame. Utiliza WeBWorK a tu beneficio. Es una herramienta poderosísima si la utilizas bien.

Medida de Ángulos

Un ángulo *AOB* está formado por dos rayos R_1 y R_2 con un vértice común *O* (Figura 1). Con frecuencia interpretamos un ángulo como una rotación del rayo R_1 sobre R_2. En este caso, R_1 recibe el nombre de **lado inicial** y R_2 es el **lado terminal** del ángulo *AOB*.

Si la rotación es en el **sentido contrario** al giro de las manecillas de un reloj, el ángulo es considerado como **positivo** y, si es en el **sentido a favor de las manecillas del reloj,** el ángulo es considerado como **negativo .**

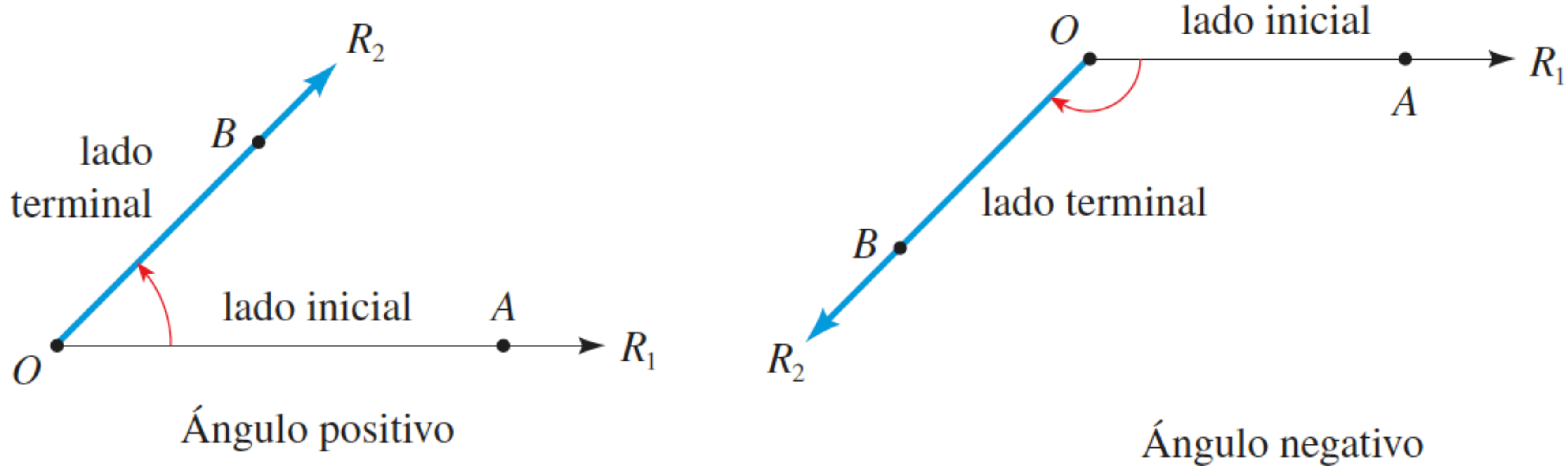
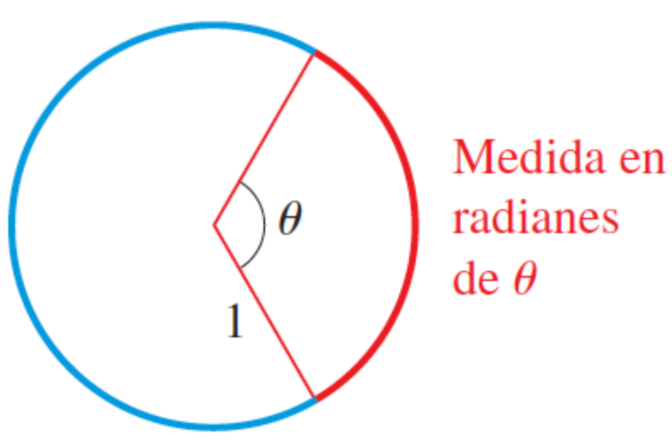
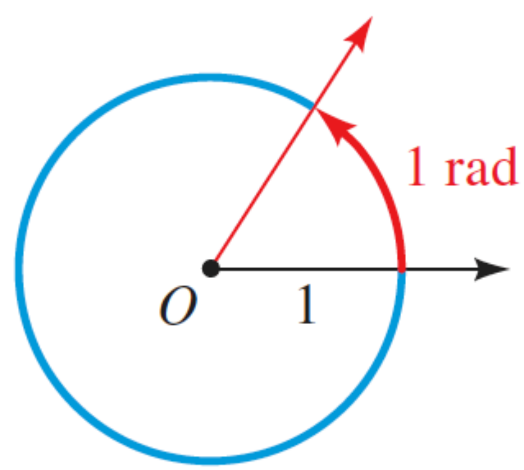


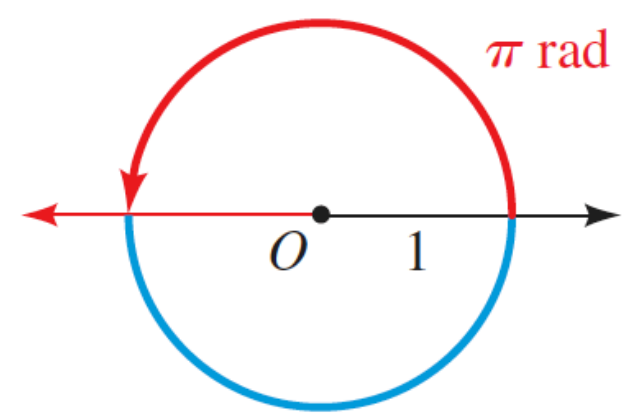
FIGURA 1

Radianes

Si un círculo de **radio 1** se traza con el vértice de un ángulo en su centro, entonces la medida de este ángulo en radianes (abreviado *rad*) es la longitud del arco que subtiende el ángulo**.** En otras palabras, **un radián es la medida del radio de un círculo extendido sobre su circunferencia.**







¿Cómo convierto de uno a otro?

RELACIÓN ENTRE GRADOS Y RADIANES

$$180° = \pi \text{ rad} \qquad 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \qquad 1° = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

1. Para convertir grados a radianes, multiplique por $\dfrac{\pi}{180}$.

2. Para convertir radianes a grados, multiplique por $\dfrac{180}{\pi}$.

Ejemplos

(**a**) Expresa 60º en radianes.

(**b**) Expresa $\dfrac{\pi}{6}$ en grados.

SOLUCIÓN La relación entre grados y radianes da

(a) $60° = 60\left(\dfrac{\pi}{180}\right) \text{ rad} = \dfrac{\pi}{3} \text{ rad}$ **(b)** $\dfrac{\pi}{6} \text{ rad} = \left(\dfrac{\pi}{6}\right)\left(\dfrac{180}{\pi}\right) = 30°$

Tarea 1

1. Leer páginas **435 - 437** (6.1 Medida de Ángulos) del libro que les preví.

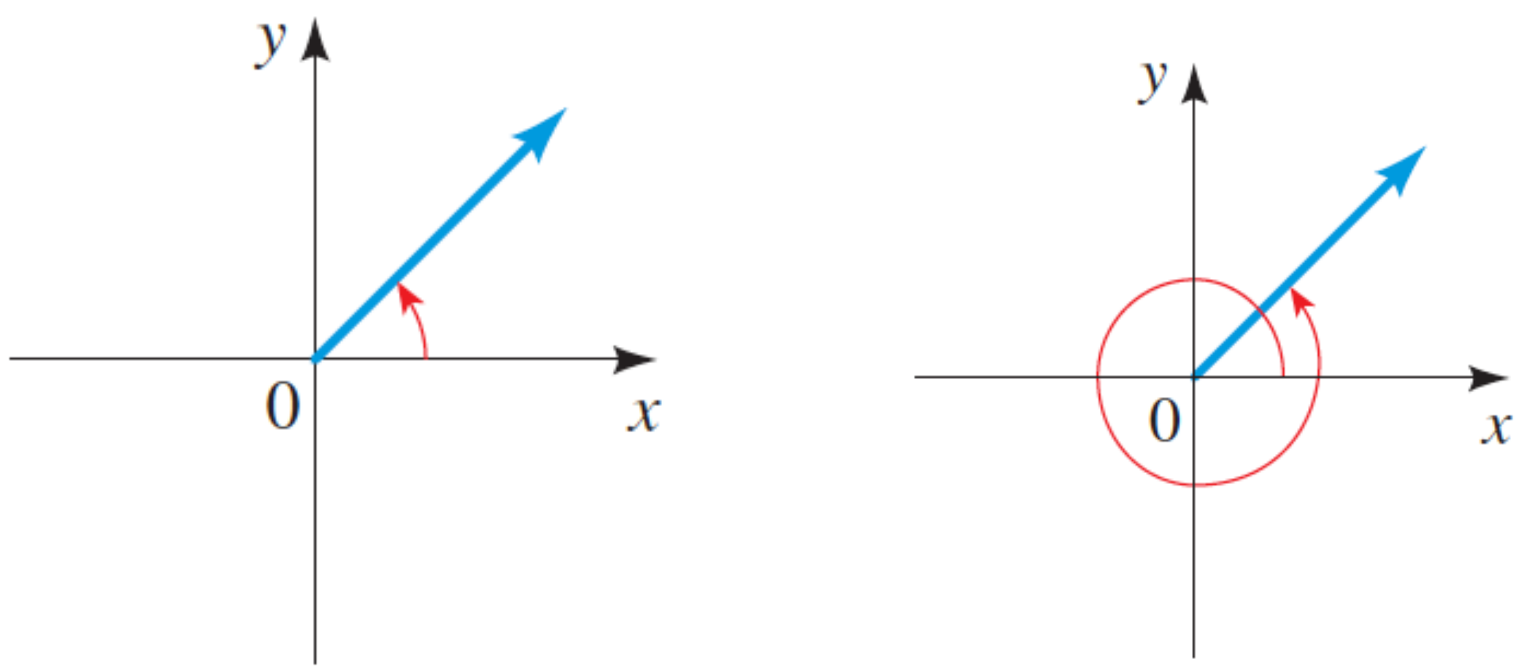
2. Resolver problemas **#1 - 26** y **#39 - 44** de la página **440**. (Muchos de estos, o la mayoría, ya los hicimos el lunes en el salón).

3. Deben incluir pregunta y respuesta, y enmarcar en un cuadro la respuesta final. Todas las respuestas que no tengan procedimientos no tendrán crédito. Hagan uso correcto de la cuadrícula, y trabajen en lápiz exclusivamente.

La presentación de sus trabajos es importante

Ángulos Coterminales

Dos ángulos en posición normal son **coterminales** si sus lados coinciden. Los siguientes ángulos son ejemplos de ángulos coterminales.



Ejemplos

(**a**) Encuentre ángulos que sean coterminales con el ángulo 30º en posición normal.

(**b**) Encuentre ángulos que sean coterminales con el ángulo $\dfrac{\pi}{3}$ en posición normal.

SOLUCIÓN

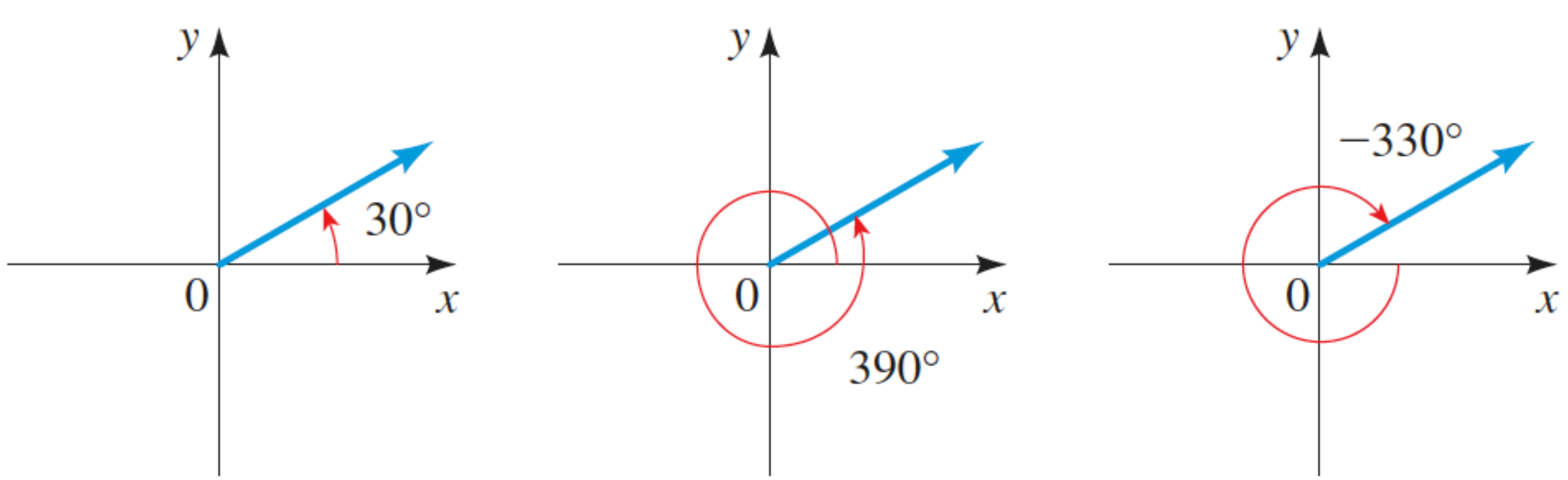
(a) Para hallar ángulos positivos que sean coterminales con θ, sumamos cualquier múltiplo de 360°. Así,

$$30° + 360° = 390° \qquad \text{y} \qquad 30° + 720° = 750°$$

son coterminales con $\theta = 30°$. Para hallar ángulos negativos que son coterminales con θ, restamos cualquier múltiplo de 360°. Así

$$30° - 360° = -330° \qquad \text{y} \qquad 30° - 720° = -690°$$

son coterminales con θ. (Vea Figura 6.)



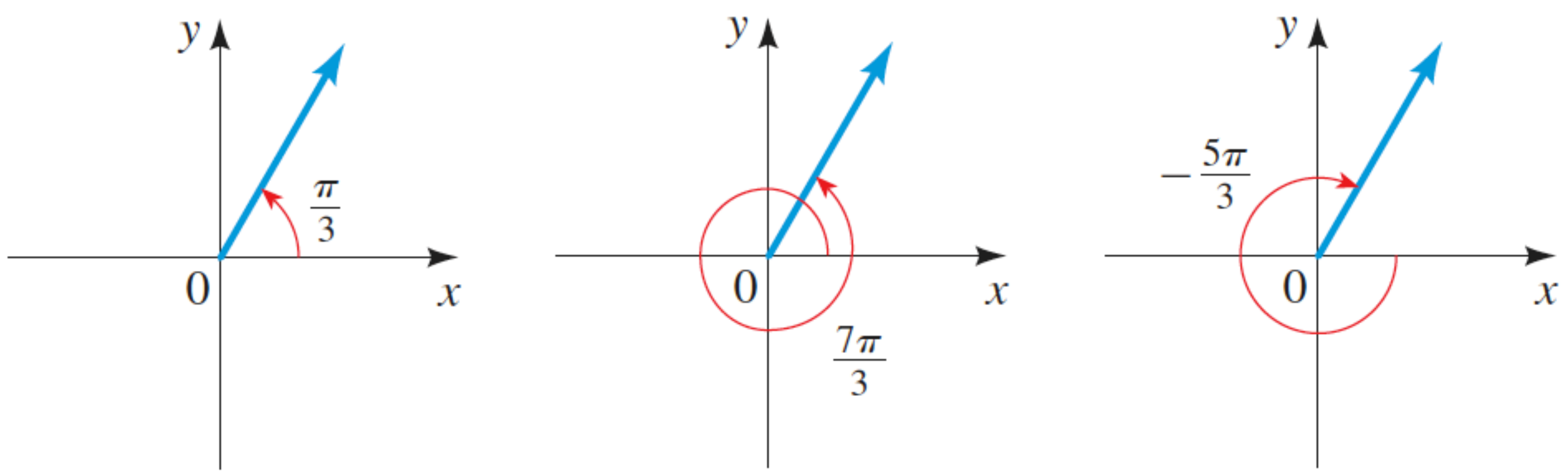
(b) Para hallar ángulos positivos que sean coterminales con θ, sumamos cualquier múltiplo de 2π. Así,

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3} \qquad \text{y} \qquad \frac{\pi}{3} + 4\pi = \frac{13\pi}{3}$$

son coterminales con $\theta = \pi/3$. Para hallar ángulos negativos que sean coterminales con θ, restamos cualquier múltiplo de 2π. Así

$$\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5\pi}{3} \qquad \text{y} \qquad \frac{\pi}{3} - 4\pi = -\frac{11\pi}{3}$$

son coterminales con θ. (Vea Figura 7.)



Ejemplo

Encuentra un ángulo entre 0º y 360º que sea **coterminal** con el ángulo 1290º en posición normal.

SOLUCIÓN De 1290° podemos restar 360° tantas veces como se desee, y el ángulo restante será coterminal con 1290°. Así, $1290° - 360 = 930°$ es coterminal con 1290° y por lo tanto el ángulo $1290° - 2(360°) = 570°$.

Para hallar el ángulo que buscamos entre 0° y 360°, restamos 360° de 1290° tantas veces como sea necesario. Una forma eficiente de hacer esto es determinar cuántas veces cabe 360° en 1290°, es decir, divida 1290 entre 360, y el residuo será el ángulo que buscamos.

Vemos que 360 cabe tres veces en 1290, con un residuo de 210. Así, 210° es el ángulo deseado (vea Figura 8).

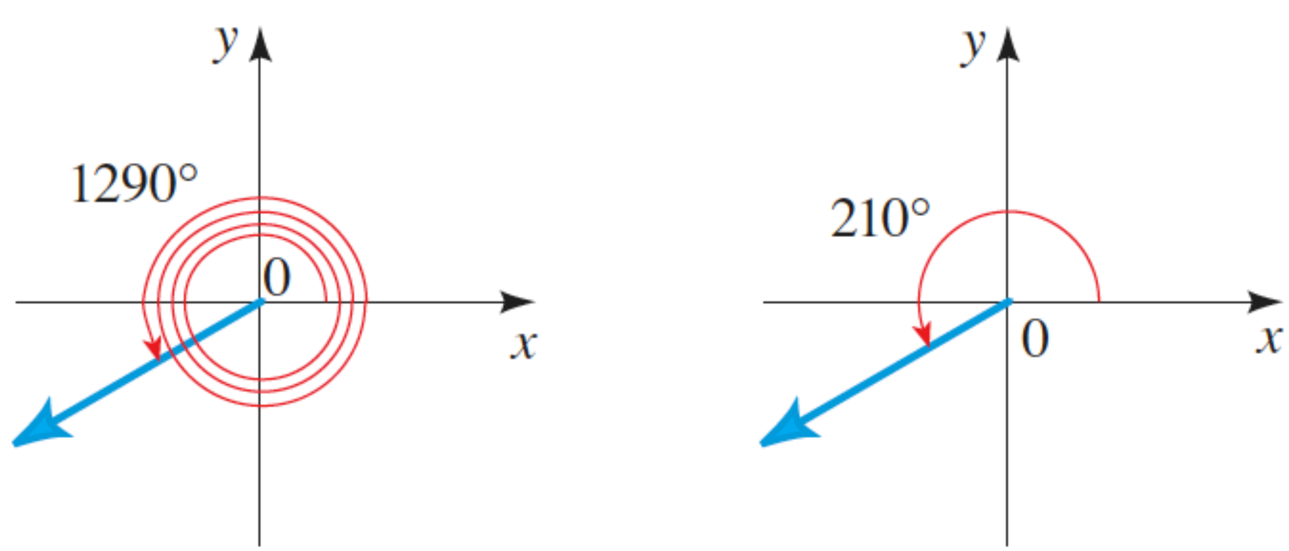
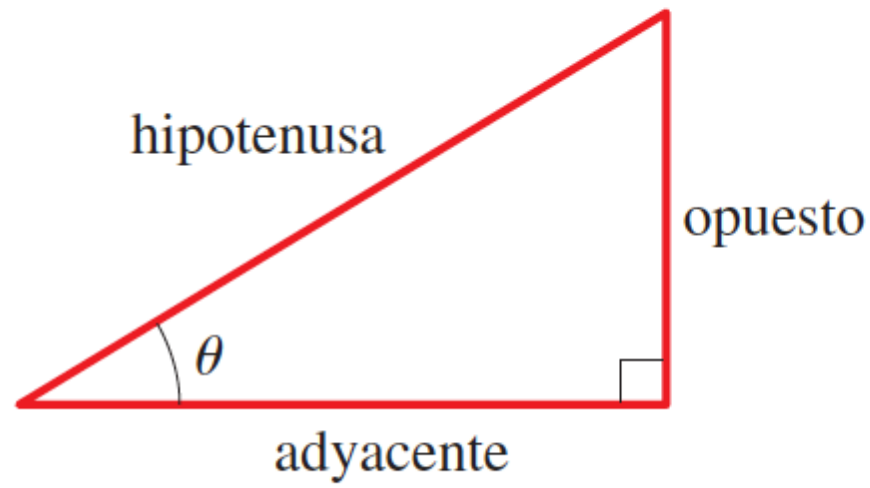


FIGURA 8

Funciones Trigonométricas



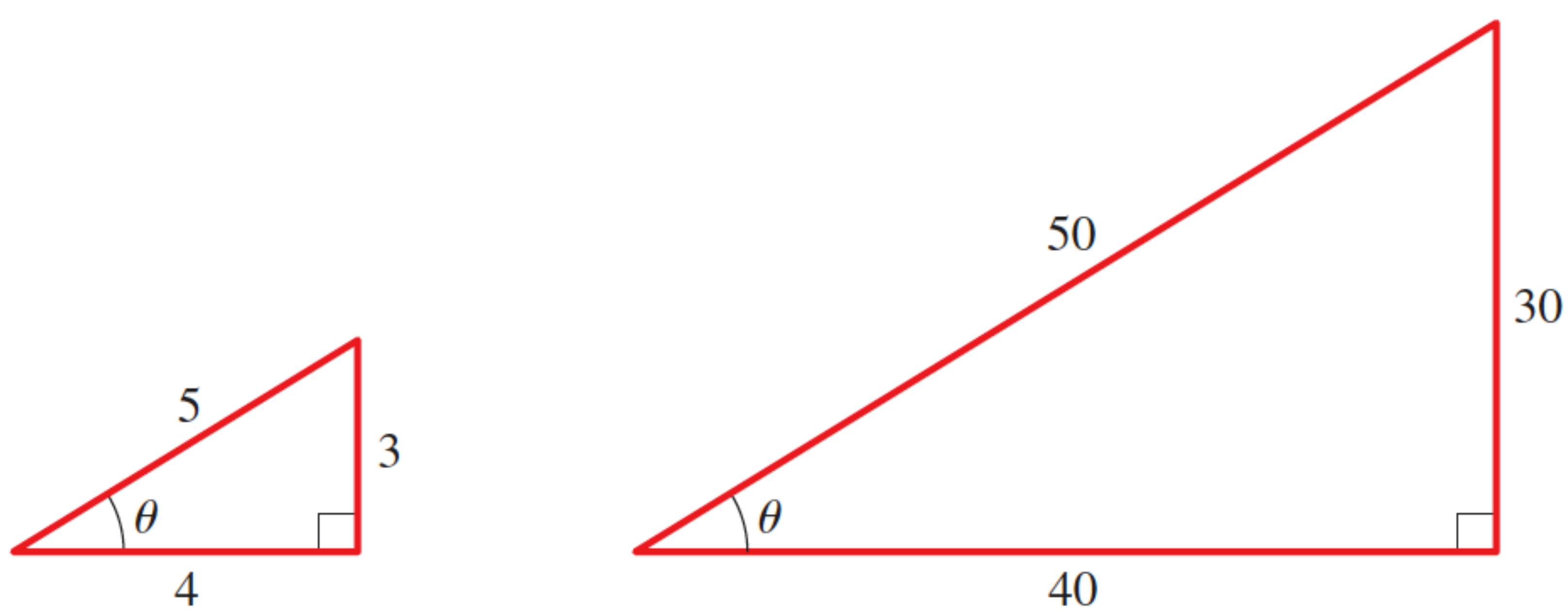
LAS RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \cos\theta = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} \qquad \tan\theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}$$

$$\csc\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{opuesto}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{adyacente}} \qquad \cot\theta = \frac{\text{adyacente}}{\text{opuesto}}$$

Relaciones

Las relaciones trigonométricas dependen sólo del ángulo θ .
Por tanto, podemos decir que **los ángulos describen la forma de los triángulos.**



$\operatorname{sen} \theta = \frac{3}{5}$

$\operatorname{sen} \theta = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$

Ejemplo

Encuentre las seis relaciones trigonométricas del ángulo θ de la Figura 3.

SOLUCIÓN

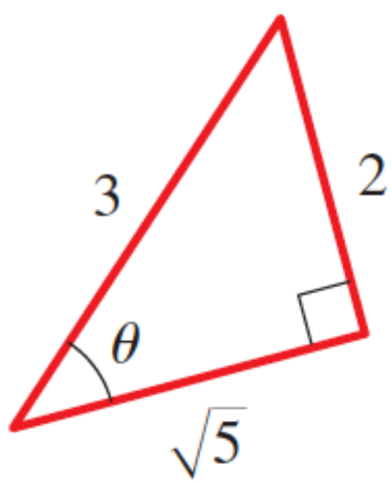


FIGURA 3

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{3} \qquad \cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3} \qquad \tan\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\csc\theta = \frac{3}{2} \qquad \sec\theta = \frac{3}{\sqrt{5}} \qquad \cot\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Ejemplo

Si $\cos \alpha = \frac{3}{4}$, trace un triángulo rectángulo con ángulo agudo α y encuentre las otras cinco relaciones trigonométricas de α.

SOLUCIÓN Como $\cos \alpha$ está definido como la relación entre el lado adyacente y la hipotenusa, trazamos un triángulo con hipotenusa de longitud 4 y un lado de longitud 3 adyacente a α. Si el lado opuesto es x, entonces por el Teorema de Pitágoras, $3^2 + x^2 = 4^2$ o sea $x^2 = 7$, de modo que $x = \sqrt{7}$. A continuación usamos el triángulo de la Figura 4 para hallar las relaciones.

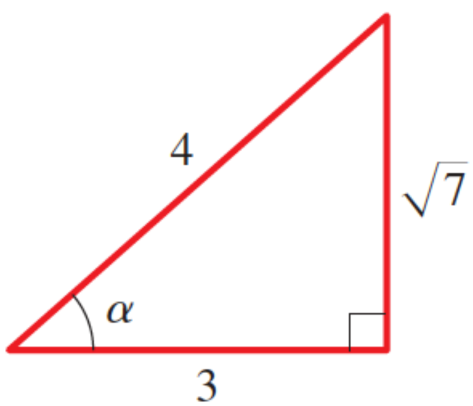


FIGURA 4

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4} \qquad \cos \alpha = \frac{3}{4} \qquad \tan \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\csc \alpha = \frac{4}{\sqrt{7}} \qquad \sec \alpha = \frac{4}{3} \qquad \cot \alpha = \frac{3}{\sqrt{7}}$$

Tarea 2

1. Leer página **#443 a 447** (sección 6.2 - Trigonometría de Triángulos Rectángulos).

2. Escoger **uno de los 5 ejemplos** que aparecen explicados en el libro para **grabarlo y explicarlo con sus propias palabras** y sin el uso del libro. Para esto tendrán que entender el problema, de otro modo será evidente que no dominan el tema.

3. Contestar problemas #**1-12** (página 448).

Lo más recomendable es leer primero, repasar los ejemplos y las notas de clase, y realizar los 12 problemas. Una vez que hayan terminado los 12 problemas,. les será más fácil elegir el problema que deberán explicar.

El libro de texto lo pueden hallar en publicaciones anteriores aquí mismo en Classroom, o pueden descargarlo en cufm.online (en Home).

Identidades Básicas

$$\csc t = \frac{1}{\operatorname{sen} t} \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{1}{\tan t}$$

Debemos verificar que estas relaciones, efectivamente se derivan de las definiciones de las relaciones trigonométricas (seno, coseno, tangente, etc)

Seguimos la convención de que cuando escribimos sen t , queremos decir el **seno del ángulo cuya medida en radianes es *t*.**

Por ejemplo, *sen* 1 significa el seno del ángulo cuya medida en radianes es 1. Cuando se use calculadora para hallar un valor aproximado para este número, es necesario poner la calculadora en el modo 'radianes' (*rad*); encontraremos que

$$\text{sen } 1 \approx 0.841471$$

Si se desea hallar el seno del ángulo cuya medida es 1º , la calculadora se pone en el modo 'grados' (*deg*); encontraremos que

$$\text{sen } 1^{\circ} \approx 0.0174524$$

Aplicaciones

Un triángulo tiene seis partes: **tres ángulos y tres lados**.
Resolver un triángulo **significa determinar todas sus partes a partir de la información conocida** acerca del triángulo, es decir, determinar las longitudes de los tres lados y las medidas de los tres ángulos.

Ejemplo
Resuelva el triángulo ABC que se muestra en la Figura 7.

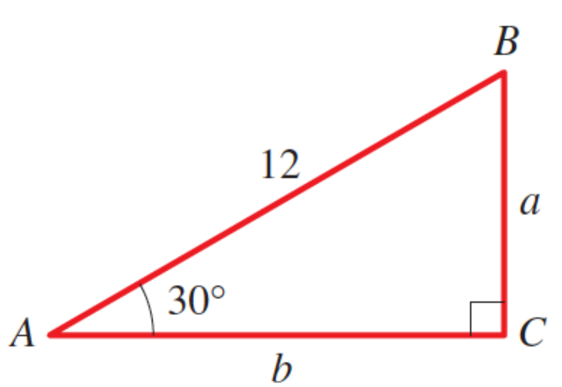


FIGURA 7

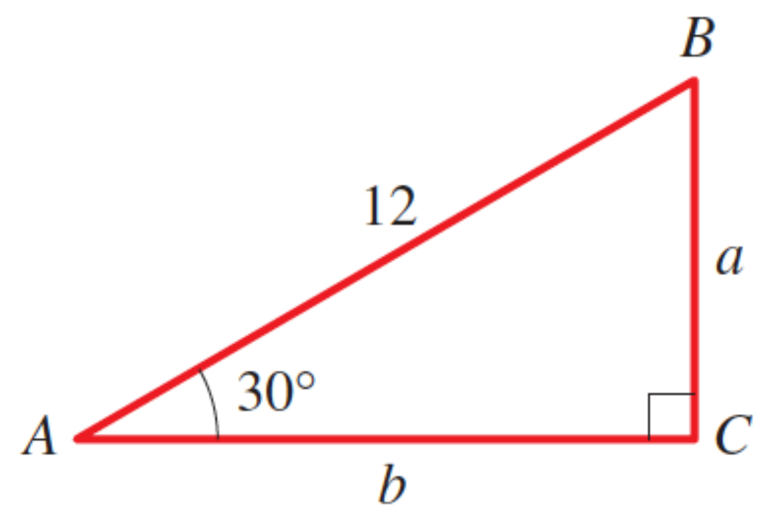


FIGURA 7

SOLUCIÓN Es evidente que $\angle B = 60°$. Para hallar a, buscamos una ecuación que relacione a con las longitudes y ángulos que ya conocemos. En este caso, tenemos sen 30° $= a/12$, de modo que

$$a = 12 \text{ sen } 30° = 12\left(\tfrac{1}{2}\right) = 6$$

Análogamente, $\cos 30° = b/12$, entonces

$$b = 12 \cos 30° = 12\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6\sqrt{3}$$

Ejemplo

Un árbol proyecta una sombra de 532 pies de largo. Encuentre la altura (h) del árbol si el ángulo de elevación del Sol es 25.7º.

SOLUCIÓN Sea h la altura del árbol. De la Figura 10 vemos que

$$\frac{h}{532} = \tan 25.7^\circ \qquad \text{Definición de tangente}$$

$$h = 532 \tan 25.7^\circ \qquad \text{Multiplique por 532}$$

$$\approx 532(0.48127) \approx 256 \qquad \text{Use calculadora}$$

Por lo tanto, la altura del árbol es aproximadamente 256 pies.

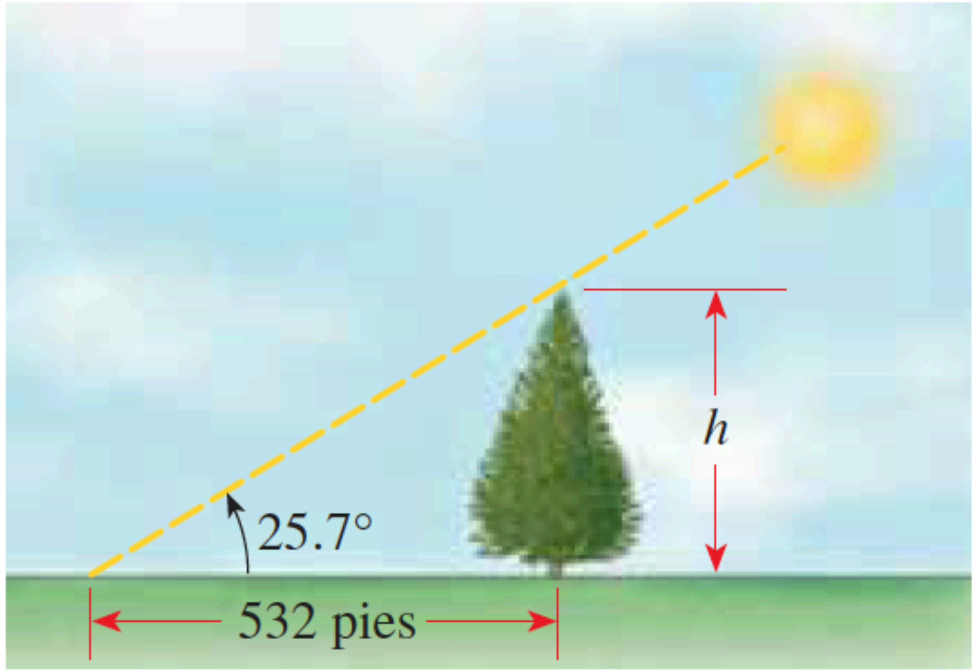


FIGURA 10

Tarea 3

- Leer páginas 443 - 447.
- Resolver problemas #13 - 18 y #31 - 42.
- Utiliza regla y colores para trazar los triángulos. Ubica dentro de un rectángulo tu respuesta final. Incluye unidades donde sea necesario.

Fecha de entrega: miércoles, marzo 13.

EJEMPLO 5 | Un problema de triángulos rectángulos

Desde un punto en el suelo a 500 pies de la base de un edificio, un observador encuentra que el ángulo de elevación a lo alto del edificio es 24° y que el ángulo de elevación a lo alto de una astabandera que está en el edificio es de 27°. Encuentre la altura del edificio y la longitud de la astabandera.

SOLUCIÓN La Figura 11 ilustra la situación. La altura del edificio se encuentra en la misma forma en que hallamos la altura del árbol en el Ejemplo 4.

$$\frac{h}{500} = \tan 24° \qquad \text{Definición de tangente}$$

$$h = 500 \tan 24° \qquad \text{Multiplique por 500}$$

$$\approx 500(0.4452) \approx 223 \qquad \text{Use calculadora}$$

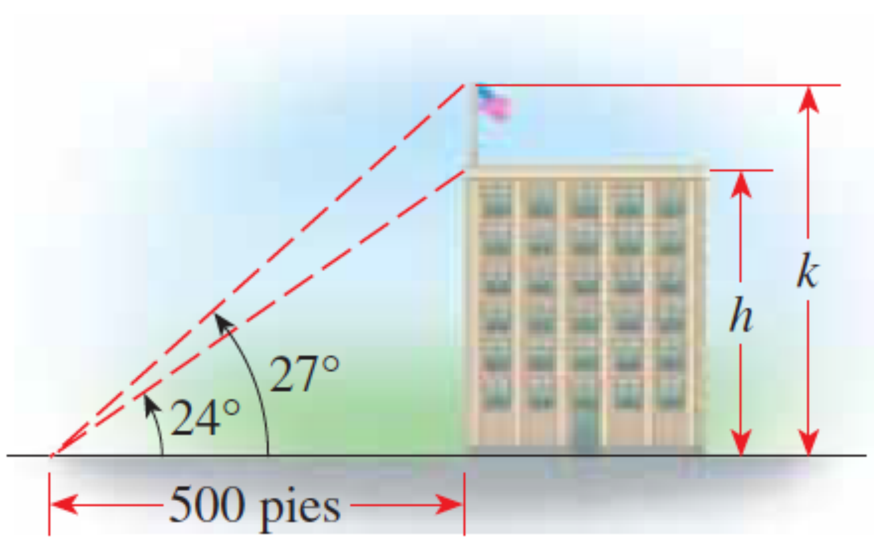


FIGURA 11

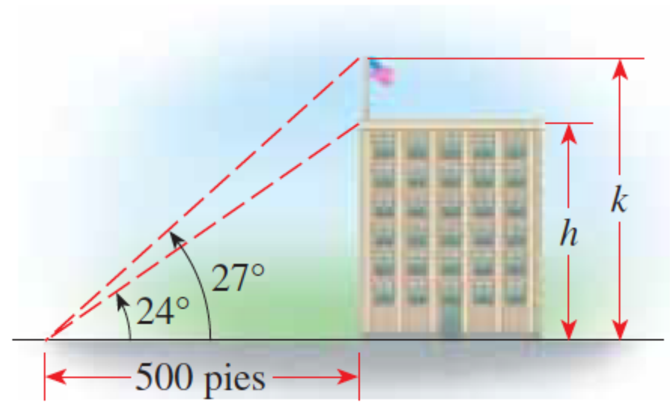


FIGURA 11

La altura del edificio es aproximadamente 223 pies.

Para hallar la altura de la astabandera, encontremos primero la altura desde el suelo a lo alto del asta:

$$\frac{k}{500} = \tan 27^\circ$$

$$k = 500 \tan 27^\circ$$

$$\approx 500(0.5095)$$

$$\approx 255$$

Para hallar la longitud de la astabandera, restamos h de k. Por lo tanto, la longitud del asta es aproximadamente $255 - 223 = 32$ pies.

Triángulos Especiales

Ciertos triángulos rectángulos tienen relaciones que se pueden calcular fácilmente a partir del **Teorema de Pitágoras**. Los incluyo aquí pues se utilizan con frecuencia.

El primer triángulo se obtiene al trazar una diagonal en un cuadro de lado 1 (ver Figura 5). Por el Teorema de Pitágoras esta diagonal tiene longitud $\sqrt{2}$. Los triángulos resultantes tienen ángulos de 45º , 45º y 90º 1 o $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{2}$.

Para obtener el segundo triángulo, empezamos con un triángulo equilátero *ABC* de lado 2 y trazamos la bisectriz perpendicular *DB* de la base, como en la Figura 6. Por el Teorema de Pitágoras, la longitud de *DB* es 13 . Como *DB* corta al ángulo *ABC,* obtenemos los triángulos con ángulos de 30º , 60º y 90º 1 o $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{2}$

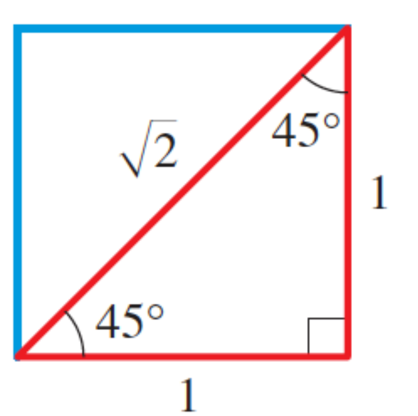


FIGURA 5

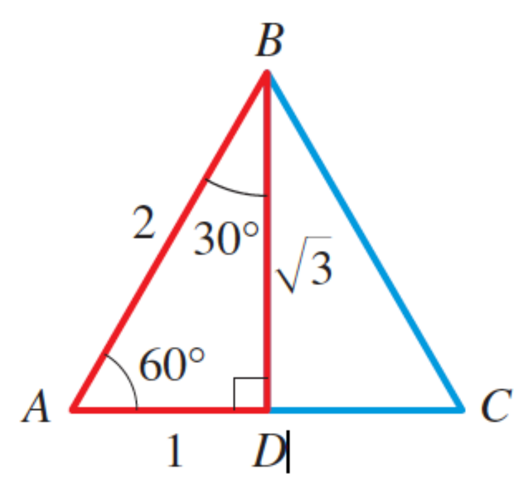


FIGURA 6

TABLA 1

Valores de las relaciones trigonométricas para ángulos

θ en grados	θ en radianes	sen θ	cos θ	tan θ	csc θ	sec θ	cot θ
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Relación entre el círculo unitario y las razones trigonométricas

Sea POQ un triángulo rectángulo con ángulo agudo θ como se ve en la Figura 1(a). Ponga θ en posición normal como se muestra en la Figura 1(b).

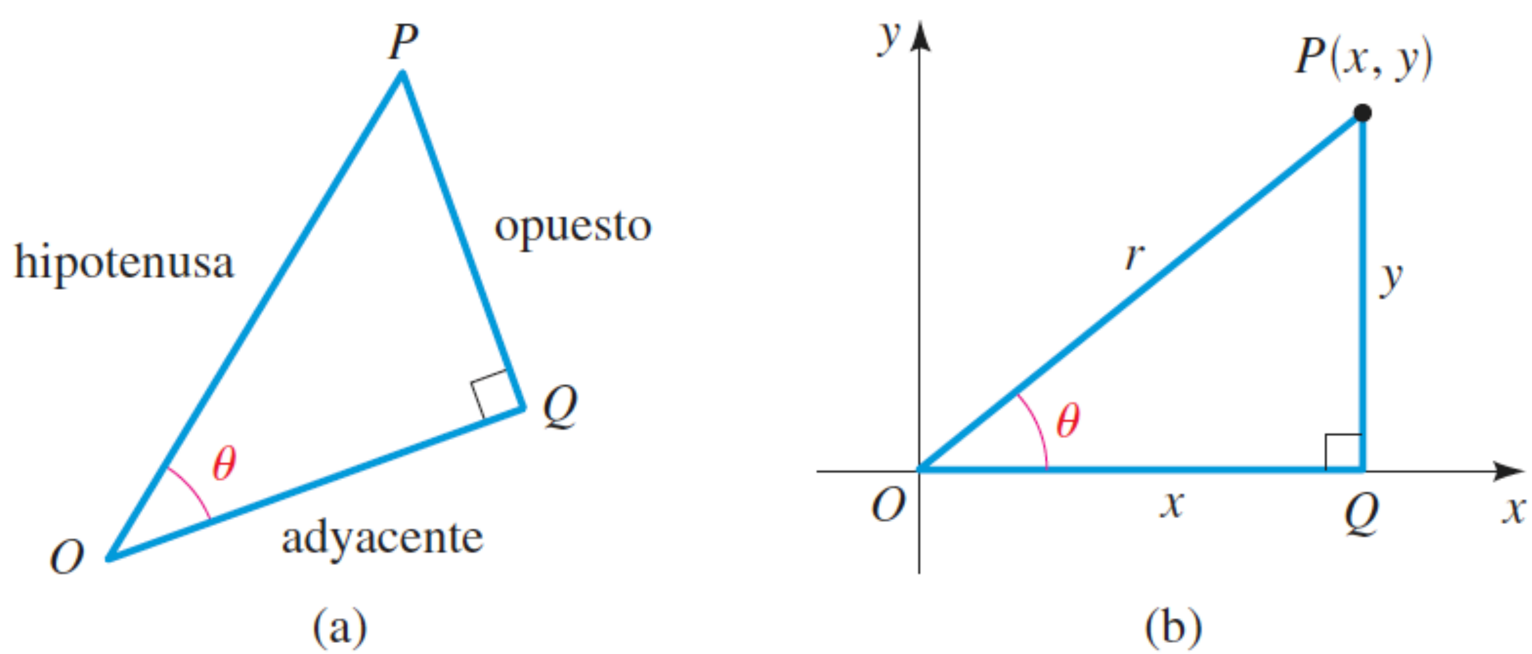


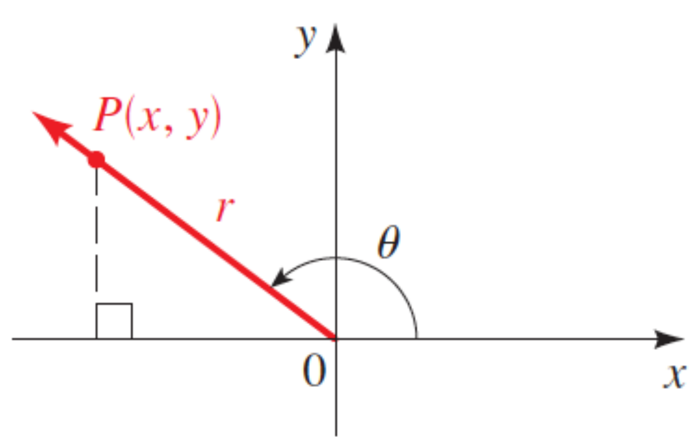
FIGURA 1

Entonces $P = P(x, y)$ es un punto en el lado terminal de θ. En el triángulo POQ, el lado opuesto tiene longitud y y el lado adyacente tiene longitud x. Usando el Teorema de Pitágoras, vemos que la hipotenusa tiene longitud $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Por lo tanto,

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{y}{r} \qquad \cos \theta = \frac{x}{r} \qquad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

Las otras relaciones trigonométricas se pueden hallar en la misma forma.

Estas observaciones nos permiten extender las relaciones trigonométricas a cualquier ángulo. Definimos las funciones trigonométricas de ángulos como sigue (vea Figura 2).



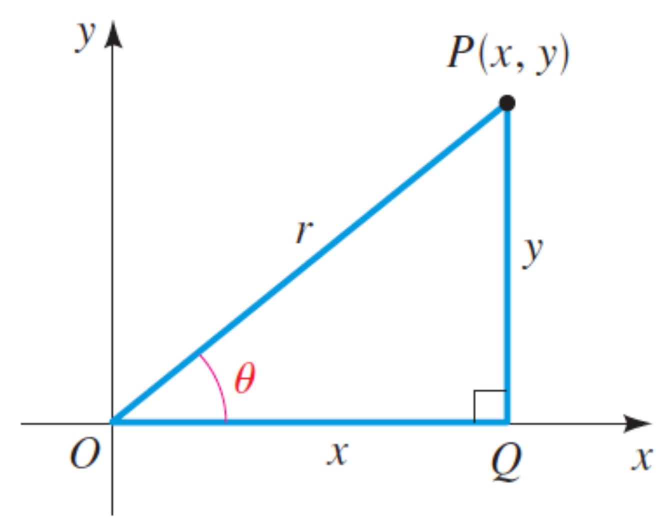
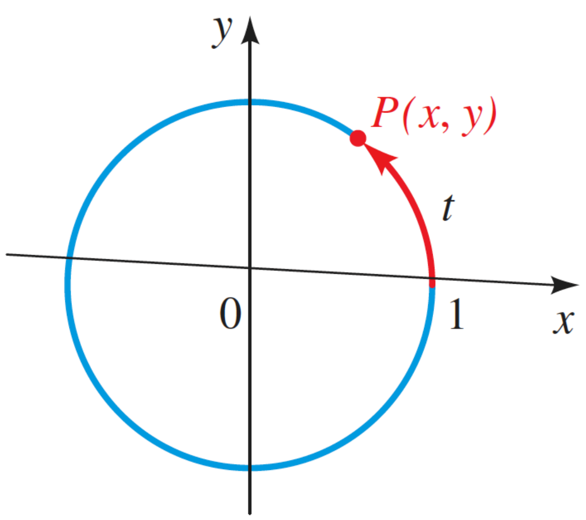
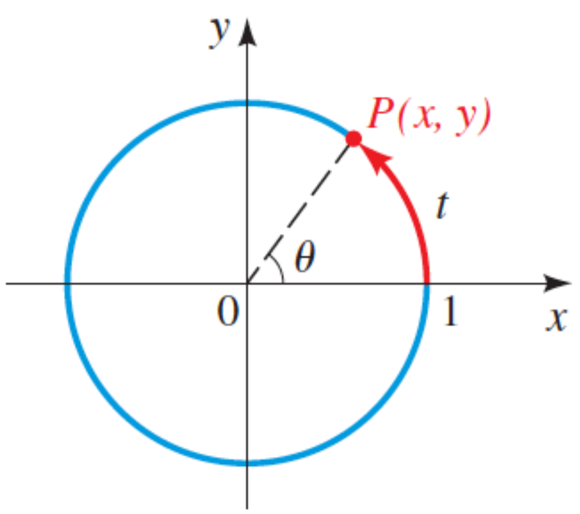


FIGURA 2

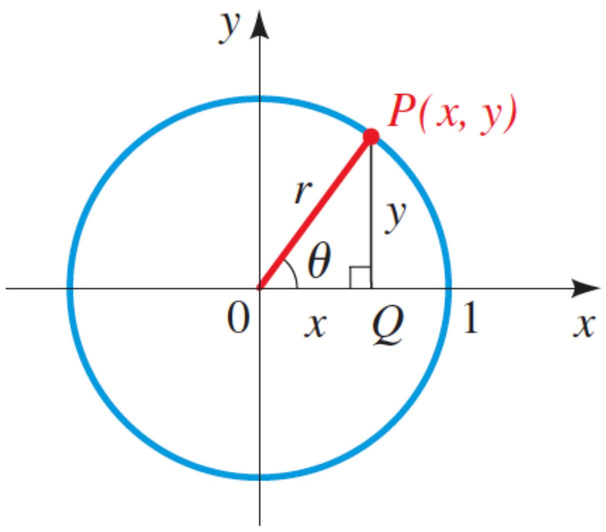
Puntos Terminales



$P(x, y)$ es el punto terminal determinado por t.



La medida del ángulo θ en radianes es t.



El triángulo OPQ es un triángulo recto

DEFINICIÓN DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Sea θ un ángulo en posición normal y sea $P(x, y)$ un punto en el lado terminal. Si $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la distancia del origen al punto $P(x, y)$, entonces

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y} \quad (y \neq 0) \qquad \sec\theta = \frac{r}{x} \quad (x \neq 0) \qquad \cot\theta = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$

EJEMPLO 1 | Hallar funciones trigonométricas de ángulos

Encuentre **(a)** cos 135° y **(b)** tan 390°.

SOLUCIÓN

(a) De la Figura 4 vemos que $\cos 135^\circ = -x/r$. Pero $\cos 45^\circ = x/r$, y como $\cos 45^\circ = \sqrt{2}/2$ tenemos

$$\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(b) Los ángulos 390° y 30° son coterminales. De la Figura 5 es evidente que $\tan 390^\circ = \tan 30^\circ$ y, como $\tan 30^\circ = \sqrt{3}/3$, tenemos

$$\tan 390^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

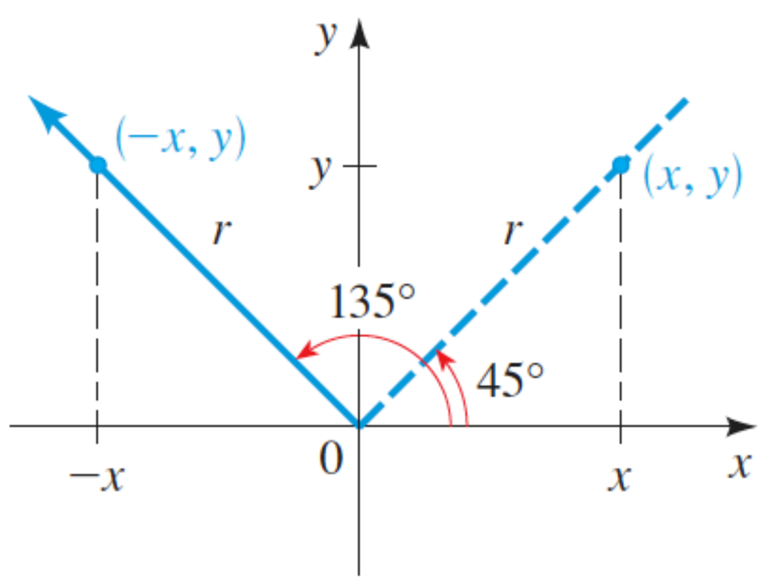


FIGURA 4

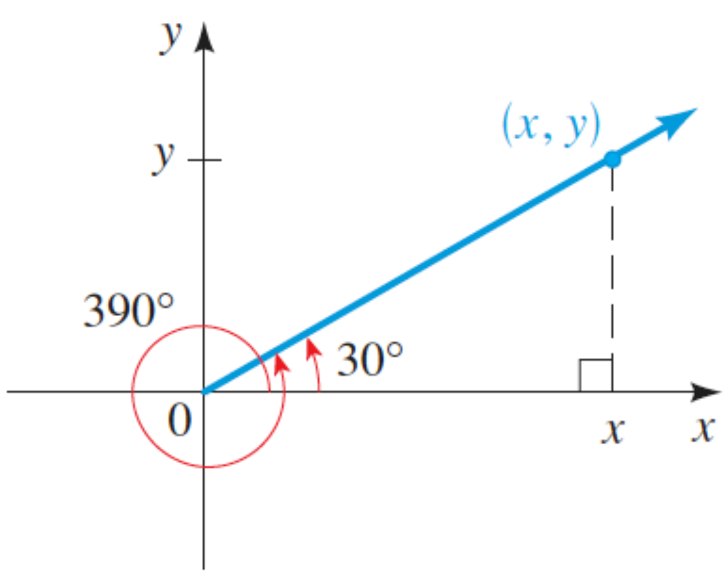


FIGURA 5

EJEMPLO 2 | Hallar ángulos de referencia

Encuentre el ángulo de referencia para **(a)** $\theta = \dfrac{5\pi}{3}$ y **(b)** $\theta = 870°$.

SOLUCIÓN

(a) El ángulo de referencia es el ángulo agudo formado por el lado terminal del ángulo $5\pi/3$ y el eje x (vea Figura 7). Como el lado terminal de este ángulo está en el cuarto cuadrante, el ángulo de referencia es

$$\bar{\theta} = 2\pi - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

(b) Los ángulos 870° y 150° son coterminales $[\text{porque } 870 - 2(360) = 150]$. Entonces, el lado terminal de este ángulo está en el segundo cuadrante (vea Figura 8). Por lo tanto, el ángulo de referencia es

$$\bar{\theta} = 180° - 150° = 30°$$

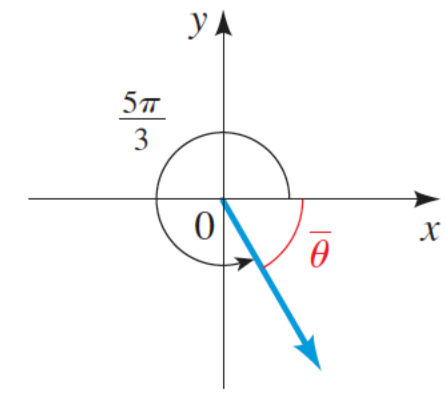


FIGURA 7

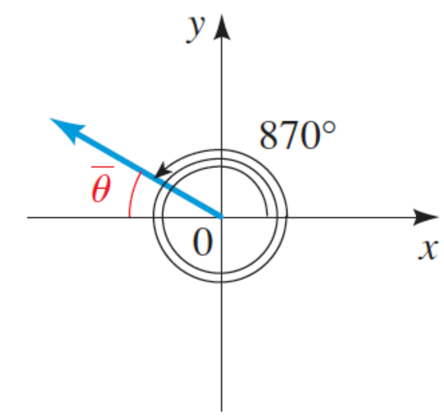


FIGURA 8

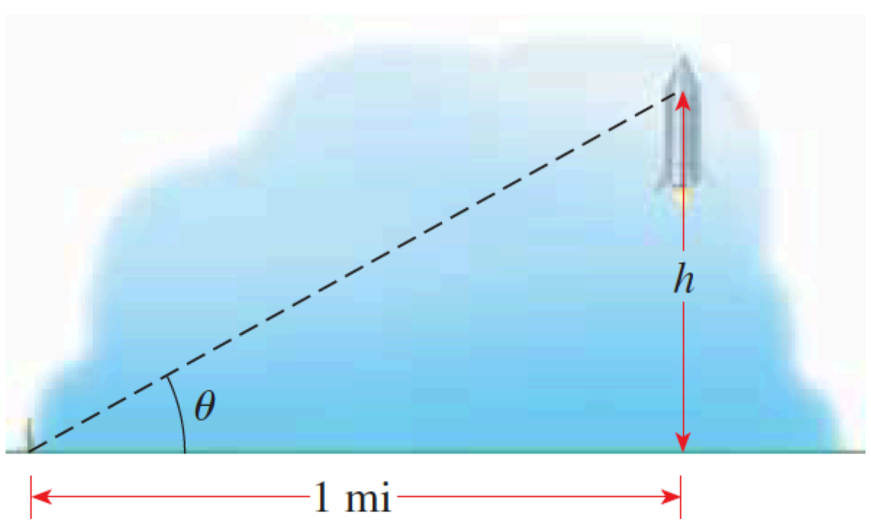
Evalúate intentando...

Altura de un cohete Un cohete disparado en línea recta hacia arriba es rastreado por un observador que está en el suelo a una milla de distancia.

(a) Demuestre que cuando el ángulo de elevación es θ, la altura del cohete en pies es $h = 5280 \tan \theta$.

(b) Complete la tabla para hallar la altura del cohete a los ángulos de elevación dados.

θ	20°	60°	80°	85°
h				



Áreas

ÁREA DE UN TRIÁNGULO

El área $\mathscr{A}$ de un triángulo con lados de longitudes a y b y con ángulo θ incluido es

$$\mathscr{A} = \tfrac{1}{2}ab \operatorname{sen} \theta$$

Ejemplo

EJEMPLO 8 | Hallar el área de un triángulo

Encuentre el área del triángulo *ABC* que se ve en la Figura 17.

SOLUCIÓN El triángulo tiene lados de longitud 10 cm y 3 cm, con ángulo incluido de 120°. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \tfrac{1}{2}ab \operatorname{sen}\theta \\ &= \tfrac{1}{2}(10)(3) \operatorname{sen} 120^\circ \\ &= 15 \operatorname{sen} 60^\circ && \text{Ángulo de referencia} \\ &= 15\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 13 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

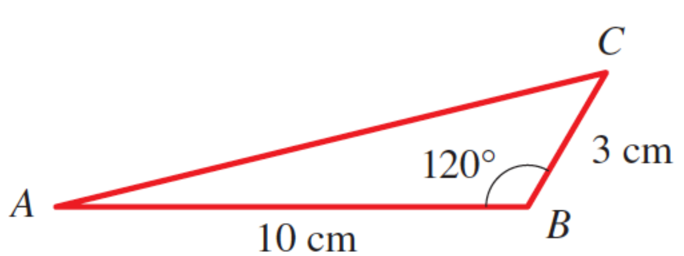


FIGURA 17

Identidades Trigonométricas

IDENTIDADES FUNDAMENTALES

Identidades recíprocas

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

Identidades de Pitágoras

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta \qquad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

Ejemplos

EJEMPLO 1 | Evaluación de funciones trigonométricas inversas

Encuentre el valor exacto.

(a) $\operatorname{sen}^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **(b)** $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ **(c)** $\tan^{-1} 1$

SOLUCIÓN

(a) El ángulo en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ cuyo seno es $\sqrt{3}/2$ es $\pi/3$. Por lo tanto, $\operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{3}/2) = \pi/3$.

(b) El ángulo en el intervalo $[0, \pi]$ cuyo coseno es $-\frac{1}{2}$ es $2\pi/3$. Por lo tanto, $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\pi/3$.

(c) El ángulo en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ cuya tangente es 1 es $\pi/4$. Por lo tanto, $\tan^{-1} 1 = \pi/4$.

EJEMPLO 2 | Evaluación de funciones trigonométricas inversas

Encuentre valores para la expresión dada.

(a) $\operatorname{sen}^{-1}(0.71)$ **(b)** $\tan^{-1}(2)$ **(c)** $\cos^{-1}(2)$

SOLUCIÓN Usamos calculadora para aproximar estos valores.

(a) Usando las teclas $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{SIN}}$ o $\boxed{\text{SIN}^{-1}}$ o $\boxed{\text{ARC}}$ $\boxed{\text{SIN}}$ de la calculadora (puesta en el modo de radianes), obtenemos

$$\operatorname{sen}^{-1}(0.71) \approx 0.78950$$

Ejemplo

EJEMPLO 3 | Hallar un ángulo en un triángulo rectángulo

Encuentre el ángulo θ en el triángulo que se ve en la Figura 2.

SOLUCIÓN Como θ es el ángulo opuesto al lado de longitud 10 y la hipotenusa tiene longitud 50, tenemos

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{10}{50} = \frac{1}{5} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op }\theta}{\text{hip}}$$

FIGURA 2

Ahora podemos usar $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)$ para hallar θ:

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1}\tfrac{1}{5} \qquad \text{Definición de } \operatorname{sen}^{-1}x$$

$$\theta \approx 11.5^\circ \qquad \text{Calculadora (en modo de grados)}$$

EJEMPLO 5 | El ángulo de un rayo de luz

Un faro está situado en una isla que se encuentra a 2 millas frente a una orilla recta (vea Figura 4). Exprese el ángulo formado por el rayo de luz y la orilla en términos de la distancia d de la figura.

SOLUCIÓN De la figura vemos que

$$\tan\theta = \frac{2}{d} \qquad \tan\theta = \frac{\text{op a } \theta}{\text{ady}}$$

Tomando la tangente inversa de ambos lados, obtenemos

$$\tan^{-1}(\tan\theta) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{d}\right) \qquad \text{Tome } \tan^{-1} \text{ de ambos lados}$$

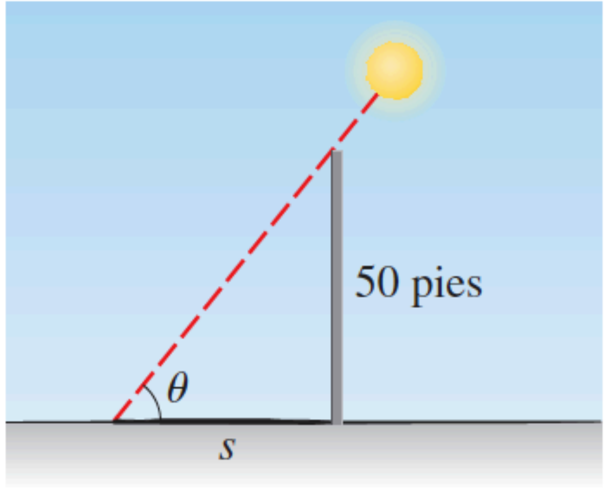
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{d}\right) \qquad \text{Propiedad de funciones inversas: } \tan^{-1}(\tan\theta) = \theta$$

Evalúate intentando…

Altura de un poste Un poste de 50 pies proyecta una sombra como se ve en la figura.

(a) Exprese el ángulo de elevación θ del Sol como función de la longitud s de la sombra.

(b) Encuentre el ángulo θ de elevación del Sol cuando la sombra sea de 20 pies de largo.



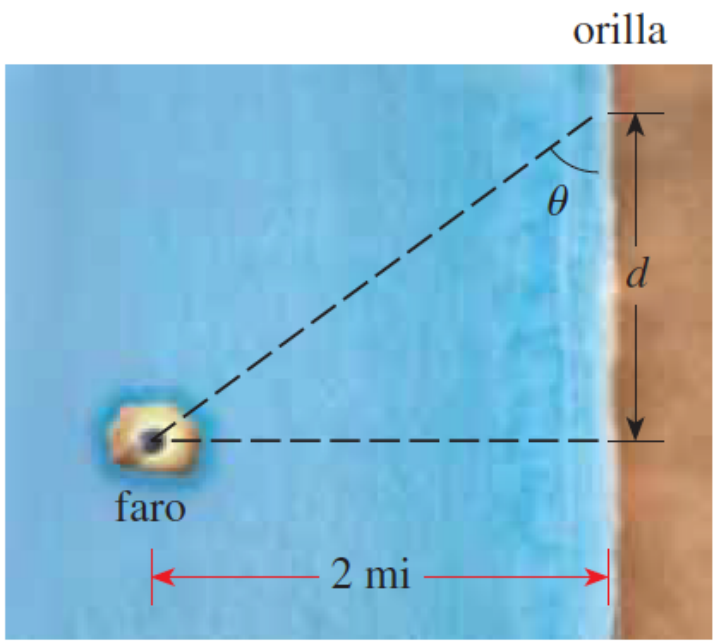
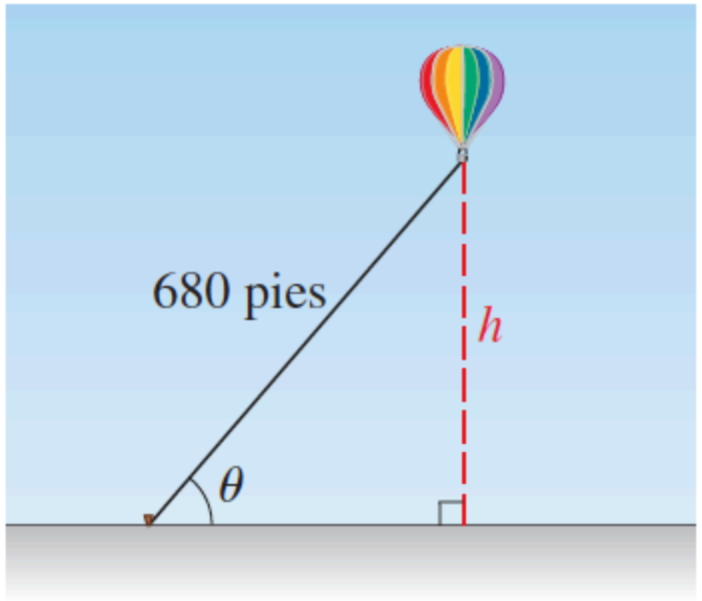


FIGURA 4

Ejemplo

- Encuentre el ángulo si el globo está a 500 pies de altura.



Ley de Senos

En general, un triángulo está determinado por tres de sus seis partes (ángulos y lados) mientras al menos una de estas tres partes sea un lado. Por lo tanto, las posibilidades ilustradas en la Figura 2 son como sigue.

Caso 1 Un lado y dos ángulos (ALA o LAA)

Caso 2 Dos lados y el ángulo opuesto a uno de esos lados (LLA)

Caso 3 Dos lados y el ángulo entre ellos (LAL)

Caso 4 Tres lados (LLL)

La **Ley de Senos** dice que en cualquier triángulo las longitudes de los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos correspondientes.

LA LEY DE SENOS

En el triángulo ABC tenemos

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$

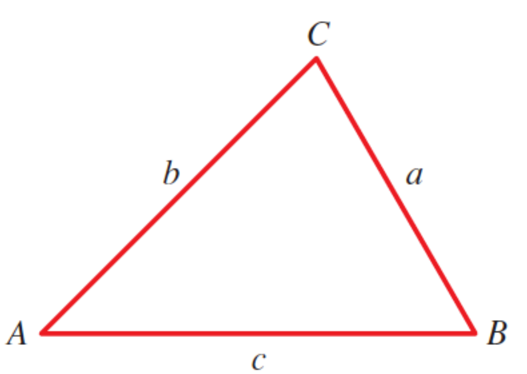


FIGURA 1

EJEMPLO 1 | Rastreo de un satélite (ALA)

Un satélite que gira en órbita alrededor de la Tierra pasa directamente sobre estaciones de observación en Phoenix y Los Ángeles, que están a 340 millas entre sí. En un instante cuando el satélite está entre estas dos estaciones, se observa simultáneamente que su ángulo de elevación es 60° en Phoenix y 75° en Los Ángeles. ¿A qué distancia está el satélite de Los Ángeles?

SOLUCIÓN Necesitamos hallar la distancia b en la Figura 4. Como la suma de los ángulos en cualquier triángulo es 180°, vemos que $\angle C = 180° - (75° + 60°) = 45°$ (vea Figura 4), de modo que tenemos

$$\frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c} \qquad \text{Ley de Senos}$$

$$\frac{\operatorname{sen} 60°}{b} = \frac{\operatorname{sen} 45°}{340} \qquad \text{Sustituya}$$

$$b = \frac{340 \operatorname{sen} 60°}{\operatorname{sen} 45°} \approx 416 \qquad \text{Despeje } b$$

La distancia del satélite a Los Ángeles es aproximadamente 416 millas.

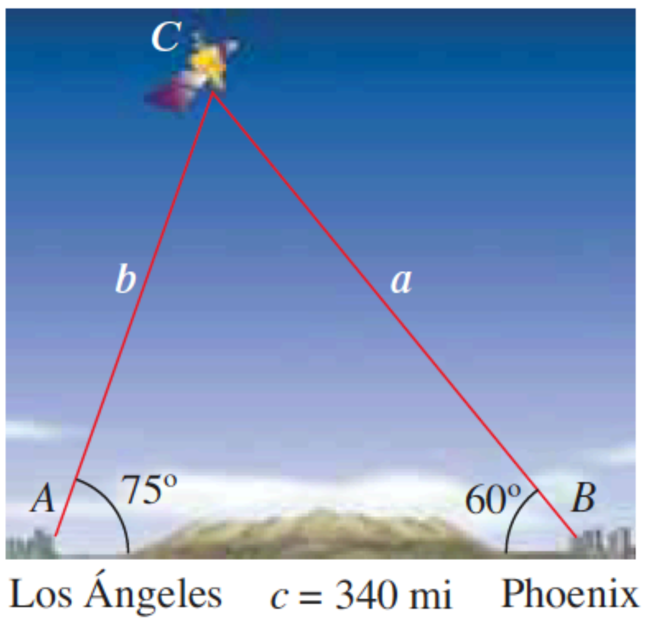


FIGURA 4

Ejemplo

EJEMPLO 2 | Solución de un triángulo (LAA)

Resuelva el triángulo de la Figura 5.

SOLUCIÓN Primero, $\angle B = 180° - (20° + 25°) = 135°$. Como se conoce e
para hallar el lado a usamos la relación

$$\frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } C}{c} \qquad \text{Ley de Senos}$$

$$a = \frac{c \text{ sen } A}{\text{sen } C} = \frac{80.4 \text{ sen } 20°}{\text{sen } 25°} \approx 65.1 \qquad \text{Despeje } a$$

Análogamente, para hallar b, usamos

$$\frac{\text{sen } B}{b} = \frac{\text{sen } C}{c} \qquad \text{Ley de Senos}$$

$$b = \frac{c \text{ sen } B}{\text{sen } C} = \frac{80.4 \text{ sen } 135°}{\text{sen } 25°} \approx 134.5 \qquad \text{Despeje } b$$

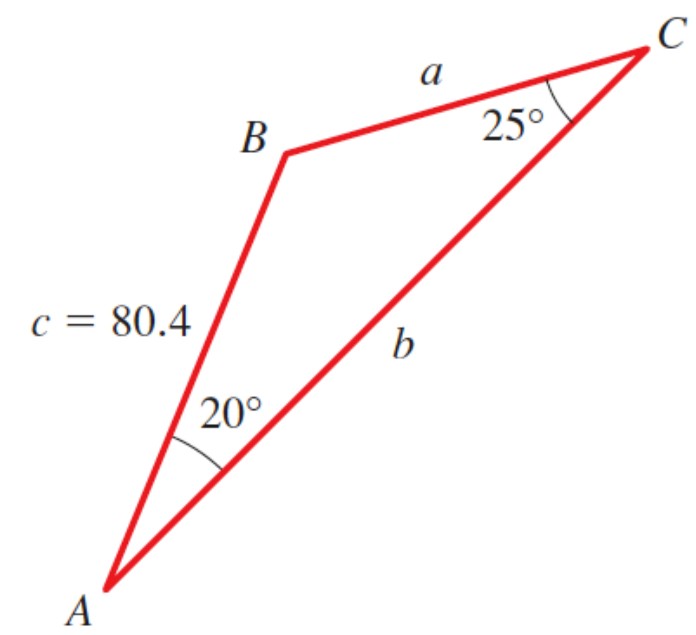


FIGURA 5

Ley de Cosenos

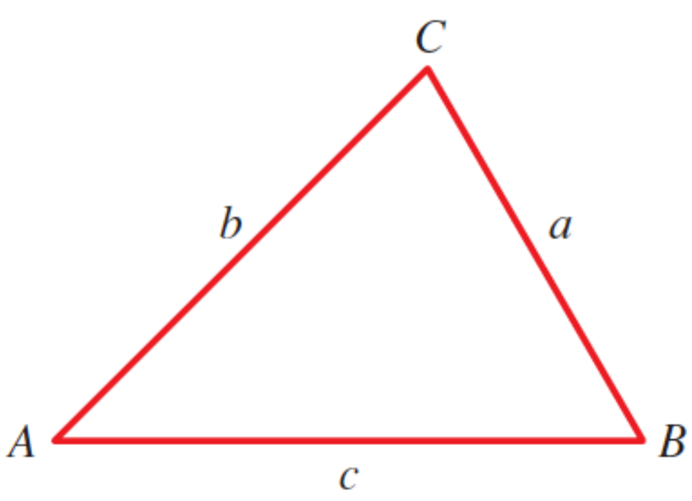


FIGURA 1

La Ley de Senos no se puede usar directamente para resolver triángulos si conocemos dos lados y el ángulo entre ellos, o si conocemos los tres lados (Casos 3 y 4 de la sección precedente). En estos dos casos aplica la **Ley de Cosenos**.

LA LEY DE COSENOS

En cualquier triángulo ABC (vea Figura 1), tenemos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Ejemplos

EJEMPLO 1 | Longitud de un túnel

Un túnel se ha de construir por una montaña. Para estimar la longitud del túnel, un topógrafo hace las mediciones que se ven en la Figura 3. Use la información del topógrafo para aproximar la longitud del túnel.

SOLUCIÓN Para aproximar la longitud c del túnel, usamos la Ley de Cosenos:

$$
\begin{aligned}
c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C && \text{Ley de Cosenos} \\
&= 388^2 + 212^2 - 2(388)(212)\cos 82.4° && \text{Sustituya} \\
&\approx 173730.2367 && \text{Use calculadora} \\
c &\approx \sqrt{173730.2367} \approx 416.8 && \text{Tome raíces cuadradas}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el túnel será de aproximadamente 417 pies de largo.

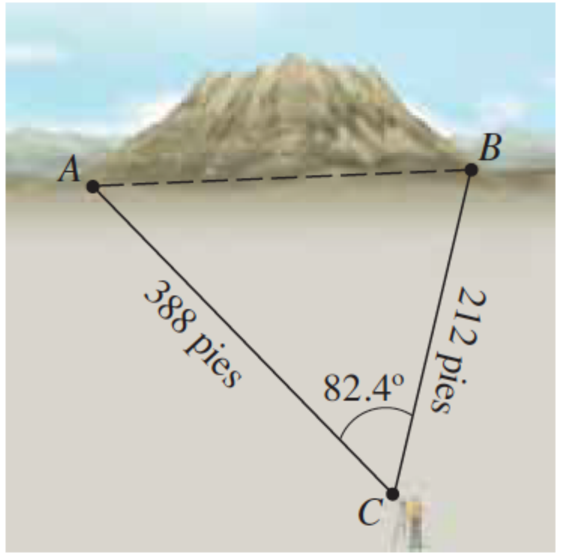


FIGURA 3

Inténtalo

COS^{-1}

o

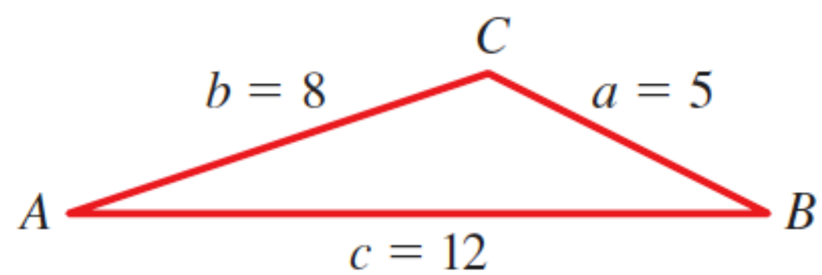
INV COS

o

ARC COS

EJEMPLO 2 | LLL, la Ley de Cosenos

Los lados de un triángulo son $a = 5$, $b = 8$ y $c = 12$ (vea Figura 4). Encuentre los ángulos del triángulo.



continuación

SOLUCIÓN Primero hallamos $\angle A$. De la Ley de Cosenos, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$. Despejando $\cos A$, obtenemos

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{8^2 + 12^2 - 5^2}{2(8)(12)} = \frac{183}{192} = 0.953125$$

Usando una calculadora, encontramos que $\angle A = \cos^{-1}(0.953125) \approx 18°$. En la misma forma obtenemos

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{5^2 + 12^2 - 8^2}{2(5)(12)} = 0.875$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{5^2 + 8^2 - 12^2}{2(5)(8)} = -0.6875$$

Usando una calculadora, encontramos que

$$\angle B = \cos^{-1}(0.875) \approx 29° \qquad \text{y} \qquad \angle C = \cos^{-1}(-0.6875) \approx 133°$$

Desde luego, una vez calculados dos ángulos, el tercero se puede hallar más fácilmente del hecho de que la suma de los ángulos de un triángulo es 180°. No obstante, es buena idea calcular los tres ángulos usando la Ley de Cosenos y sumar los tres ángulos como prueba en los cálculos.

EJEMPLO 3 | LAL, la Ley de Cosenos

Resuelva el triángulo ABC, donde $\angle A = 46.5°$, $b = 10.5$ y $c = 18.0$.

SOLUCIÓN Podemos hallar a usando la Ley de Cosenos.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$= (10.5)^2 + (18.0)^2 - 2(10.5)(18.0)(\cos 46.5°) \approx 174.05$$

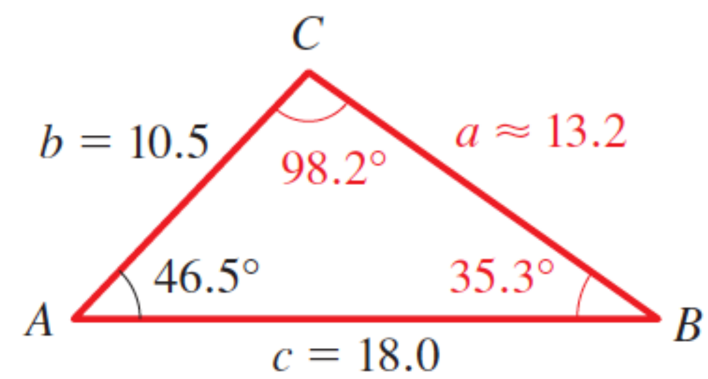


FIGURA 5

Entonces, $a \approx \sqrt{174.05} \approx 13.2$. También usamos la Ley de Cosenos para hallar $\angle B$ y $\angle C$, como en el Ejemplo 2.

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{13.2^2 + 18.0^2 - 10.5^2}{2(13.2)(18.0)} \approx 0.816477$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{13.2^2 + 10.5^2 - 18.0^2}{2(13.2)(10.5)} \approx -0.142532$$

Usando calculadora, encontramos que

$$\angle B = \cos^{-1}(0.816477) \approx 35.3° \qquad \text{y} \qquad \angle C = \cos^{-1}(-0.142532) \approx 98.2°$$

Para resumir: $\angle B \approx 35.3°$, $\angle C \approx 98.2°$ y $a \approx 13.2$. (Vea Figura 5.)

Fórmula de Herón

Una aplicación interesante de la Ley de Cosenos involucra una fórmula para hallar el área de un triángulo a partir de las longitudes de sus tres lados (vea Figura 8).

FÓRMULA DE HERÓN

El área $\mathscr{A}$ de un triángulo ABC está dada por

$$\mathscr{A} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

donde $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ es el **semiperímetro** del triángulo; esto es, s es la mitad del perímetro.

Ejemplo

EJEMPLO 5 | Área de un lote

Un negociante desea comprar un lote triangular en una zona de gran movimiento en el centro de una ciudad (vea Figura 9). Los frentes del lote en las tres calles adyacentes miden 125, 280 y 315 pies. Encuentre el área del lote.

SOLUCIÓN El semiperímetro del lote es

$$s = \frac{125 + 280 + 315}{2} = 360$$

Por la Fórmula de Herón el área es

$$\mathscr{A} = \sqrt{360(360 - 125)(360 - 280)(360 - 315)} \approx 17{,}451.6$$

Entonces, el área es aproximadamente 17, 452 pies^2.

FIGURA 9