2.5 sea $x(t) = e^{-at^2}$ con $a>0$

Sistema A: $y_A(t) = x^2(t)$

Sistema LTI B: $h_B(t) = Be^{-bt^2}$ con $b>0$

usaremos la convolución de Gaussianas centradas cumple:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-aT^2} e^{-b(t-T)^2} dT = \sqrt{\frac{\pi}{a+b}} \cdot e^{-\frac{ab}{a+b} \cdot t^2}$$

$\Rightarrow$ (A) $x \to h_B \to y_A \to y$: Primero pasa por B:

$$\Rightarrow (x * h_B) = B\int e^{-aT} e^{-b(t-T)^2} dT$$

$$= B\sqrt{\frac{\pi}{a+b}} \cdot e^{-\frac{ab}{a+b} \cdot t^2}$$

luego pasa por A (cuadrado):

$$y(t) = [(x * h_B)(t)]^2 = \boxed{\left(B\sqrt{\frac{\pi}{a+b}}\right)^2 e^{-\frac{2ab}{a+b} \cdot t^2}}$$

(B) $x \to y_A \to h_B \to y$.

primero por A: $y_A(t) = x^2(t) = e^{-2at^2}$.

luego por B:

$$y(t) = (y_A * h_B)(t) = B\int e^{-2a\tau^2} e^{-b(t-\tau)^2} d\tau$$

$$\boxed{= B\sqrt{\frac{\pi}{2a+b}}\, e^{-\frac{2ab}{2a+b}\cdot t^2}}$$