2.8 (i) $\mathcal{L}\{x(t-t_0)\} = e^{-st_0} X(s)$

$\Rightarrow X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^\infty x(t)\, e^{-st}\, dt$

$\Rightarrow$ defino la señal desplazada $\Rightarrow y(t) = x(t-t_0)$

$\Rightarrow$ Queremos encontrar : $\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{x(t-t_0)\}$

aplicando la definición unilateral $\Rightarrow \mathcal{L}\{x(t-t_0)\} = \int_0^\infty x(t-t_0)\, e^{-st}\, dt$

• Cambio de variable $\Rightarrow u = t - t_0$, $dt = du$

$t = u + t_0$

• para los límites $\Rightarrow t = 0 \rightarrow u = 0 - t_0 \Rightarrow u = -t_0$

$t \to \infty \rightarrow u = \infty$

$$\Rightarrow \int_{-t_0}^{\infty} x(u)\, e^{-s(u+t_0)}\, du = \int_{-t_0}^{\infty} x(u) \cdot e^{-su}\, e^{-st_0}\, du$$

$$= e^{-st_0} \int_{-t_0}^{\infty} x(u)\, e^{-su}\, du$$

$\Rightarrow x(t)$ es causal $x(t) = 0$ para $t < 0$

$$= e^{-st_0} \int_0^{\infty} x(u)\, e^{-su}\, du \Rightarrow e^{-st_0} X(s)$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L}\{x(t)(t-t_0)\} = e^{-st_0} X(s)}$$

(ii) $\mathcal{L}\{x(at)\} = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right)$

donde

$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ y $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

• Uso la definicion unilateral

$\Rightarrow$ la definición $\Rightarrow X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st}\, dt$

para la señal escalada en el tiempo

$\Rightarrow \mathcal{L}\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(at)\, e^{-st}\, dt$

cambio de variable $\Rightarrow u = at$, $t = \frac{u}{a}$, $dt = \frac{du}{a}$

para los limites cuando $a > 0$: • cuando $t \to -\infty$

los limites siguen siendo $\Rightarrow at = -\infty$

los mismos. • cuando $u \to \infty$

$u = \infty$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(at)\, e^{-st}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)\, e^{-s\left(\frac{u}{a}\right)} \frac{du}{a}$$

$$= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(u)\, e^{-\frac{s}{a}u}\, dt$$

$$\frac{1}{a} \cdot X\left(\frac{s}{a}\right) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(u)\, e^{-\frac{s}{a}u}\, dt$$

• Ahora para $a < 0$, los limites cambian

$\Rightarrow$ cuando $t = -\infty \Rightarrow u = \infty$

$t = \infty \Rightarrow u = -\infty$

$$\Rightarrow \int_{\infty}^{-\infty} x(u)\, e^{-s\left(\frac{u}{a}\right)} \frac{du}{a}$$

$$= \frac{1}{a} \int_{\infty}^{-\infty} x(u)\, e^{-\frac{s}{a}u}\, du$$

$$-\frac{1}{a} \cdot X\left(\frac{s}{a}\right) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(u)\, e^{-\frac{s}{a}u}\, dt$$

$\Rightarrow$ para cualquier $a \neq 0$, se usa el valor absoluto

$$= \mathcal{L}\{x(at)\} = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right)$$

---

iii $\mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = sX(s)$

- utilizando la transformada bilateral

$\Rightarrow$ Definición: $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} \cdot e^{-st}\, dt$$

integro por partes: $\cdot\ u = e^{-st}$, $\frac{du}{dt} = -se^{-st}$

$\cdot\ dv = \frac{dx(t)}{dt}\, dt$, $v = x(t)$

$$\Rightarrow \left[e^{-st} x(t)\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\left(-se^{-st}\right) dt$$

$$= \left[e^{-st} x(t)\right]_{-\infty}^{\infty} + s \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$$

• La transformada bilateral de laplace existe solamente para los valores de s que pertenecen a la región de convergencia (ROC)

por definición $\lim_{t \to \pm\infty} x(t) e^{-st} = 0$, $s \in ROC$

$$\Rightarrow \left[e^{-st} x(t)\right]_{-\infty}^{\infty} = \lim_{t \to \infty} e^{-st} x(t) - \lim_{t \to -\infty} e^{-st} x(t) = 0$$

⇒ continuando con la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = s \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = s X(s)$$

(iv) $\mathcal{L}\{x(t) * y(t)\} = X(s)\, Y(s)$

Definición de convolución y transformada bilateral.

$$\to \mathcal{L}\{x(t) * y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x*y)(t)\, e^{-st}\, dt$$

sustituyo en la definición de convolución.

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{x*y\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau\right] e^{-st} dt$$

por la ROC se intercambia el orden de integración.

$$* \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} y(t-\tau)\, e^{-st} dt\right] d\tau$$

• cambio de variable : • $u = t - \tau$, • $t = u + \tau$, • $dt = du$

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(u)\, e^{-s(u+T)}\, du = e^{-sT} \int_{-\infty}^{\infty} y(u)\, e^{-su}\, du$$

$$= e^{-sT}\, Y(s)$$

- sustituyo en $* \int_{-\infty}^{\infty} x(T)\, e^{-sT}\, Y(s) \Rightarrow X(s)\, Y(s)$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(T)\, e^{-sT} = X(s)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{x(t) * y(t)\} = X(s)\, Y(s)$$