PARCIAL 1

① la distancia Media entre dos señales periódicas $x_1(t) \in \mathbb{R}\ \mathbb{C}$ y $x_2(t) \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$, se puede expresar a partir de la potencia media de la diferencia entre ellas:

$$d^2(x_1, x_2) = \overline{P}_{x_1 - x_2} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_T |x_1(t) - x_2(t)|^2 dt.$$

Si $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos señales definidas como:

$x_1(t) = Ae^{-jnw_0t}$

$x_2(t) = Be^{jmw_0t}$

como $w_0 = \frac{2\pi}{T}$; $T, A, B \in \mathbb{R}^+$ y $n, m \in \mathbb{Z}$.

Determine la distancia entre las dos señales.

Solución

- Expando $|x_1(t) - x_2(t)|^2$ sabemos que $|a-b|^2 = (a-b)(a-b)^*$

$$\Rightarrow |x_1 - x_2|^2 = (x_1 - x_2)(x_1 - x_2)^*$$

$$= |x_1 - x_2|^2 = x_1 x_1^* - x_1 x_2^* - x_2 x_1^* - x_2 x_2^*$$

sabemos que $aa^* = |a|^2$

$$\Rightarrow |x_1 - x_2|^2 = |x_1|^2 - |x_2|^2 - x_1 x_2^* - x_2 x_1^*$$

- Ahora remplazo los valores de $x_1(t)$, $x_2(t)$. y simplifico $x_1 x_2^* - x_2 x_1^*$.

$$\Rightarrow x_1 x_2^* = Ae^{-jnw_0t} \cdot Be^{-jmw_0t}$$

$$x_1 x_2^* = ABe^{-j(n+m)w_0t}.$$

• Ahora para: $x_2 x_1^*$

$\Rightarrow x_2 x_1^* = Be^{jnwot} \cdot Ae^{jmwot} = ABe^{j(n+m)wot}$

$\Rightarrow$ Factorizo: $-x_1 x_2^* - x_2 x_1^*$

$\Rightarrow -ABe^{-j(n+m)wot} - ABe^{j(n+m)wot}$

$= -AB\left(e^{-j(n+m)wot} + e^{j(n+m)wot}\right)$

$\Rightarrow$ conocemos que $\cos\phi = \dfrac{e^{j\phi} + e^{-j\phi}}{2}$

$\Rightarrow -2AB\cos((n+m)wot)$ $\boxed{n+m = k}$

• Ahora simplifico para $|x_1|^2$ y $|x_2|^2$

$\Rightarrow |x_1|^2 = \left|A \cdot e^{-jnwot}\right| \Rightarrow wo = \dfrac{2\pi}{T}$

$e^{-jnwot} = \cos(nwot) - j\,\mathrm{sen}(nwot)$

$e^{-jnwot} = \cos\left(\cancel{n\frac{2\pi}{T}t}\right) - j\,\mathrm{sen}\left(\cancel{n\frac{2\pi}{T}t}\right)$ $\to 1$, $\to 0$

$= e^{-jnwot} = 1$

por lo tanto $|x_1|^2 = |A \cdot 1|^2 = |x_1|^2 = A^2$

para $|x_2|^2 = \left|B \cdot \cancel{e^{jmwot}}^{\,1}\right|^2 \Rightarrow |x_2|^2 = B^2$

• Ahora resuelvo la integral.

$$d^2(x_1; x_2) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_T A^2 + B^2 - 2AB\cos(kwot)\,dt$$

$$\Rightarrow d^2(x_1,x_2) = A^2+B^2 - \frac{2AB}{T}\int_0^T \cos(k\omega_0 t)\,dt.$$

cuando $\boxed{k=0}$ y $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

$$\Rightarrow \cos(0)\left(\frac{2\pi}{T}\right)(t) = \cos(0) = 1.$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T 1\,dt = \frac{1}{\cancel{T}}\cdot\cancel{T} = \boxed{1}$$

$$\Rightarrow d^2(x_1,x_2) = A^2+B^2 - 2AB(1) = (A-B)^2$$

cuando $\boxed{k\neq 0}$ y $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

$$\Rightarrow \frac{1}{T}\int_0^T \cos(k\omega_0 t)\,dt = \frac{1}{T}\left[\frac{\operatorname{sen}(k\omega_0 t)}{k\omega_0}\right|_0^T$$

$$= \frac{1}{T}\left(\cancel{\operatorname{sen}(0)(\omega_0)T}^{\,0}\right) = \boxed{0}$$

$$\Rightarrow d^2(x_1,x_2) = A^2+B^2 - \cancel{2AB(0)}^{\,0} = A^2+B^2$$

$$\Rightarrow d^2(x_1,x_2) = \begin{cases} A^2+B^2, & n+m=0 \\ (A-B)^2, & n+m\neq 0 \end{cases}$$

---

(2) Encuentre la señal en tiempo discreto al utilizar un conversor Analogo digital con frecuencia de muestreo de 5kHz y 4 bits de capasidad de represen-tación aplicado a la señal continua.

$$x(t) = 3\cos(1000\pi t) + 5\operatorname{sen}(3000\pi t) + 10\cos(11000\pi t).$$

• Solución : $\Rightarrow F_s = 5000 Hz$ $t = nT_s$ $T_s = \frac{1}{F_s}$

$x(t) = 3\cos(\underset{f_1}{1000}\pi t) + 5\,\text{sen}(\underset{f_2}{3000}\pi t) + 10\cos(\underset{f_3}{11000}\pi t)$.

$\Rightarrow$ Encuentro las frecuencias

$\Rightarrow A\cos(2\pi f t)$ o $A\,\text{sen}(2\pi f t)$.

entonces para, encontrar las frecuencias igualamos.

• $f_1 \Rightarrow 2\pi f t = 1000\pi t$

$$f = \frac{1000\pi t}{2\pi t} = \boxed{f_1 = 500 Hz}$$

• $f_2 = 2\pi f t = 3000\pi t$

$$f = \frac{3000\pi t}{2\pi t} = \boxed{f_2 = 1500 Hz}$$

• $F_3 = 2\pi f t = 11000\pi t$

$$f = \frac{11000\pi t}{2\pi t} \Rightarrow \boxed{f_3 = 5500 Hz}$$

$f_{max} = 5500 Hz$ compruebo con NYSQUIST.

$\Rightarrow F_s \geq 2F_r = 5000 \geq 2(5500)$

$5000 \geq 11000$ $\Rightarrow$ NO SE CUMPLE.

$\Rightarrow x[n] = 3\cos\left(\frac{1000\pi n}{5000}\right) + 5\,\text{sen}\left(\frac{3000\pi n}{5000}\right) +$

$10\cos\left(\frac{11000\pi n}{5000}\right)$

$= x[n] = 3\cos\left(\frac{\pi n}{5}\right) + 5\,\text{sen}\left(\frac{3\pi n}{5}\right) + 10\cos\left(\frac{11\pi n}{5}\right)$

$\Rightarrow x[n] = 3\cos(0{,}2\pi n) + 5\,\text{sen}(0{,}6\pi n) + 10\cos(2{,}2\pi n)$

• $70\cos(2{,}2\pi n)$ presenta aliasing

$\Rightarrow 70\cos(2{,}2\pi n - 2\pi n) = 70\cos(0{,}2\pi n)$

$\Rightarrow x[n] = 13\cos(0{,}2\pi n) + 5\,\text{sen}(0{,}6\pi n)$

por lo tanto la señal con 5000 Hz presenta aliasing y al modificar esto se tambien se suma una señal a otra ocacionando una alteracion en su amplitud, por lo tanto ahora reemplazo Fs para evitar todo esto.

$\Rightarrow Fs \geq 12000$ para que $10\cos(11000\pi n)$ no presente aliasing al tener fmax.

$\Rightarrow Fs = 12000,\ Ts = \dfrac{1}{12000}$

$$\Rightarrow x[n] = 3\cos\left[\frac{1000\pi n}{12000}\right] + 5\,\text{sen}\left[\frac{3000\pi n}{12000}\right] +$$

$$70\cos\left[\frac{11000\pi n}{12000}\right]$$

$$\Rightarrow x[n] = 3\cos\left(\frac{\pi n}{12}\right) + 5\,\text{sen}\left(\frac{\pi n}{4}\right) + 70\cos\left(\frac{11\pi n}{12}\right)$$

En este caso todas las frecuencias cumplen el teorema de NYSQUIST.

(3) sea $x''(t)$ la segunda derivada de la señal $x(t)$, donde $t \in [t_i, t_f]$ Demuestre que los coeficientes de la serie exponencial de Fourier se puede calcular según:

$$c_n = \frac{1}{(t_i - t_f)n^2\omega_0^2}\int_{t_i}^{t_f} x''(t)\,e^{-jn\omega_0 t}\,dt; \quad n \in \mathbb{Z}$$

Demostración:

propiedad de derivación para la serie exponencial.

$$x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n e^{jn\omega_0 t} \quad , \quad C_n = \frac{1}{T}\int_{t_i}^{t_f} x(t) e^{-jn\omega_0 t}\, dt.$$

al derivar $x'(t) = \sum_n (jn\omega_0) C_n e^{jn\omega_0 t}$

$$= C_n(x') = jn\omega_0 C_n(x).$$

Derivo otra vez.

$$x''(t) = \sum_n (jn\omega_0)^2 C_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$\Rightarrow C_n(x'') = (jn\omega_0)^2 C_n(x) = \cancel{j^2}^{\to -1} n^2\omega_0^2 C_n(x)$$

$$C_n(x'') = -n^2\omega_0^2 C_n(x).$$

despejo $C_n(x)$. *

$$\boxed{C_n(x) = \frac{1}{-n^2\omega_0^2} \cdot C_n(x'')}$$

por definición $C_n(x'') = \frac{1}{T}\int_{t_i}^{t_f} x''(t) e^{-jn\omega_0 t}\, dt.$

ahora sustituyo en *

$\Rightarrow$

$$C_n(x) = -\frac{1}{n^2\omega_0^2}\left(\frac{1}{T}\int_{t_i}^{t_f} x''(t) e^{-jn\omega_0 t}\, dt\right)$$

$$C_n(x) = -\frac{1}{Tn^2\omega_0^2}\int_{t_i}^{t_f} x''(t) e^{-jn\omega_0 t}\, dt.$$

$$\boxed{= C_n(x) = -\frac{1}{(t_i - t_f)n^2\omega_0^2}\int_{t_i}^{t_f} x''(t) e^{-jn\omega_0 t}\, dt.}$$

como se pueden calcular los coeficientes an y bn desde x''(t) en la serie trigonométrica de fourier?

$$x(t) = \sum_{n=0}^{N} a_n \cos(n w_0 t) + b_n \operatorname{Sen}(n w_0 t)$$

$$x'(t) = \sum_{n=0}^{N} -a_n(n w_0) \operatorname{Sen}(n w_0 t) - b_n(n w_0) \cos(n w_0 t)$$

$$x''(t) = \sum_{n=0}^{N} - \underbrace{a_n(n^2 w_0^2)}_{\tilde{a_n}} \cdot \cos(n w_0 t) - \underbrace{b_n(n^2 w_0^2)}_{\tilde{b_n}} \operatorname{sen}(n w_0 t)$$

$$= \left\{ \sum_{n=0}^{N} \tilde{a_n} \cos(n w_0 t) + \sum_{n=0}^{N} \tilde{b_n} \operatorname{sen}(n w_0 t) \right.$$

$$\tilde{a_n} = \frac{2}{T} \int x(t) \cos(n w_0 t)\, dt =$$

$$-a_n(n^2 w_0^2) = \frac{2}{T} \int x(t) \cos(n w_0 t)\, dt$$

$$\boxed{a_n = -\frac{2}{T n^2 w_0^2} \cdot \int x(t) \cos(n w_0 t)\, dt}$$ $\boxed{T = t_i - t_f}$

Para $n > 0$

- $\tilde{b_n} = -\frac{2}{T n^2 w_0^2} \cdot \int x(t) \operatorname{sen}(n w_0 t)\, dt$

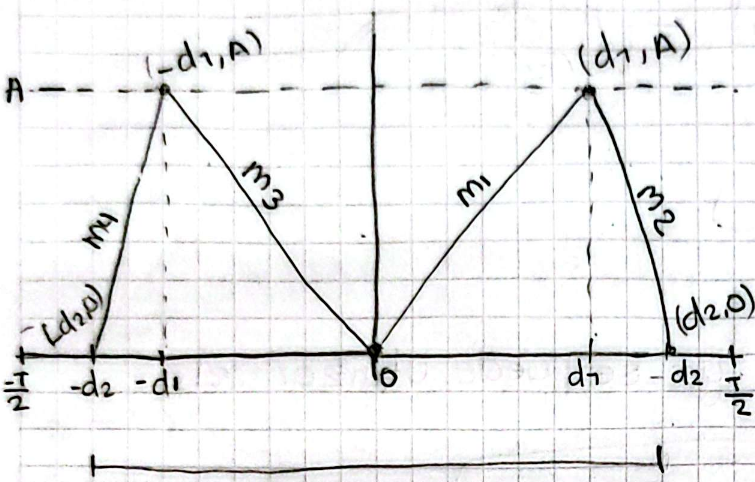
$$-b_n(n^2 w_0^2) = \frac{2}{T} \int x(t) \operatorname{sen}(n w_0 t)\, dt$$

$$\boxed{b_n = -\frac{2}{T n^2 w_0^2} \int x(t) \operatorname{sen}(n w_0 t)\, dt}$$ $\boxed{T = t_i - t_f}$

Para $n > 0$

④ Encuentre el espectro de fourier su parte Real e imaginaria, magnitud, fase y su error relativo para:

$n \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5\}$ a partir de $x''(t)$ en la figura.



la señal es cero en: $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$, $\left[d_2, \frac{T}{2}\right]$ por lo tanto la integral allí $= 0$

① calculo las pendientes $\dfrac{Y_{max} - Y_{min}}{X_{max} - X_{min}}$

sube

$m_1 = \dfrac{A-0}{d_1-0} \Rightarrow \boxed{m_1 = \dfrac{A}{d_1}}$

$m_2 = \dfrac{0-A}{d_2-d_1} = \boxed{\dfrac{-A}{d_2-d_1}}$

baja.

baja

$m_3 = \dfrac{A-0}{-d_1-0} = \boxed{m_3 = \dfrac{-A}{d_1}}$

$m_4 = \dfrac{0-A}{(-d_1)-(-d_2)} = \boxed{\dfrac{A}{d_2-d_1}}$ sube.

como la señal es simétrica entonces solo tomo los valores de m_1, m_2

• la señal es par $\Rightarrow x(t) = x(-t)$

• ahora reemplazo m_2 en la ecuación punto pendiente porque la recta pasa por (d_1, A) y $(d_2, 0)$

utilizo el punto $(d_2, 0)$.

$$\Rightarrow x(t) = 0 + m(t - d_2) = \boxed{x(t) = \frac{-A}{d_2-d_1}(d_2 - t)}$$

$$A\left[1 - \frac{(t-d_1)}{d_2-d_1}\right]$$

$$x(t) = \begin{cases} \dfrac{A}{d_1}t, \\ A\left(1-\dfrac{(t-d_1)}{d_2-d_1}\right) = A\,\dfrac{d_2-t}{d_2-d_1}. \end{cases}$$

$$1-\left(\frac{t-d_1}{d_2-d_1}\right) \qquad 1 = \frac{d_2-d_1}{d_2-d_1}$$

$$\frac{d_2-d_1}{d_2-d_1} - \frac{t-d_1}{d_2-d_1} = \frac{d_2 - \cancel{d_1} - t + \cancel{d_1}}{d_2-d_1}$$

$$= \frac{d_2-t}{d_2-d_1}$$

$$x(t) = \begin{cases} \frac{A}{d_1} t & 0 \le t < d_1 \\ A\left(\frac{d_2 - t}{d_2 - d_1}\right) & d_1 \le t < d_2 \\ 0 & d_2 \le t < T/2 \end{cases}$$

$$C_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot e^{-jw_0 n t} \, dt$$

$x(t)$ es Par Por que es simetrica respecto al eje vertical

$$e^{-jw_0nt} = \cos(n w_0 t) - j \operatorname{sen}(n w_0 t)$$

$x(t) \cdot \cos() \rightarrow$ sera Par

$x(t) \cdot \operatorname{sen}() \rightarrow$ Im Par $\rightarrow$ Tenemos que al integrar $[-T/2, T/2] \rightarrow 0$

Entonces

$$e^{-jw_0nt} = \cos(n w_0 t) - 0$$

La Parte imaginaria es 0

$$C_n = \frac{2}{T} 2\int_{0}^{T/2} x(t) \cos(n w_0 t) \, dt \in \mathbb{R}$$

$$C_n = \frac{2}{T}\Bigg[\underbrace{\int_0^{d_1} \frac{A}{d_1} t \cos(n w_0 t) \, dt}_{a} + \underbrace{\int_{d_1}^{d_2} A \frac{d_2 - t}{d_2 - d_1} \cos(n w_0 t)}_{b} + \underbrace{\int_{d_2}^{T/2} 0 \cdot \cos(w_0 n t) \, dt}_{c = 0}\Bigg]$$

0

$$ⓐ = \int_0^{d_1} \frac{A}{d_1}\, t \cos(w_{on} t)\, dt$$

$$= \frac{A}{d_1} \int_0^{d_1} t \cos(w_{on} t)\, dt$$

$u = t$

$du = \cos(w_{on} t)$

$du = dt$

$v = \frac{\sin(w_{on} t)}{w_{on}}$

$$= \frac{A}{d_1}\left\{\left[\frac{\sin(w_{on} t)}{w_{on}}\, t\right]_0^{d_1} - \int_0^{d_1} \frac{\sin(w_{on} t)}{w_{on}}\, du\right.$$

$$= \frac{A}{d_1}\left\{\left[\frac{\sin(w_{on}(d_1))d_1 - \sin(w_{on}(0))_0 0}{w_{on}}\right] - \left[-\left\{\frac{\cos(w_{on}(d_1)}{} + \frac{\cos(w_{on}(0))}{(w_{on})^2}\right\}\right]\right.$$

$$= \frac{A}{d_1}\left\{\left[\frac{d_1 \sin(w_{on}(d_1)) - 0}{w_{on}}\right] + \left[\frac{-\cos(w_{on}(d_1)) + 1}{w_{on}^2}\right]\right\}$$

$$= \frac{A}{d_1}\left\{\left[\frac{d_1 \sin(w_{on}(d_1))}{w_{on}}\right] - \left[\frac{1 - \cos(w_{on}(d_1))}{w_{on}^2}\right]\right]$$

$$ⓐ = \frac{A}{d_1}\left[\frac{d_1 \sin(w_{on}(d_1)}{w_{on}} + \frac{\cos(w_{on}(d_1) - 1}{w_{on}^2}\right]$$

ⓑ $= \int_{d_1}^{d_2} A\left(\frac{d_2-t}{d_2-d_1}\right)\cos(w_{on}t)\,dt$

$= \frac{A}{d_2-d_1}\int_{d_1}^{d_2}(d_2-t)\cos(w_{on}t)\,dt$

$= \frac{A}{d_2-d_1}\left[\underbrace{\int_{d_1}^{d_2} d_2\cos(w_{on}t)\,dt}_{I_1} - \underbrace{\int_{d_1}^{d_2} t\cos(w_{on}t)\,dt}_{I_2}\right]$

$I_1 = d_2\int_{d_1}^{d_2}\cos(w_{on}t)\,dt$

$I_1 = d_2\left(\frac{\text{Sen}(w_{on}t}{w_{on}}\Big|_{d_1}^{d_2}\right) = d_2\left(\frac{\text{Sen}(w_{on}d_2)-\text{Sen}(w_{on}d_1)}{w_{on}}\right)$

$I_1 = d_2\left(\frac{\text{Sen}(w_{on}(d_2))-\text{Sen}(w_{on}(d_1))}{w_{on}}\right)$

$I_2 = \int_{d_1}^{d_2} t\cos(w_{on}t)\,dt$

$I_2 =$ $u = t \qquad dv = \cos(w_{on}t)\,dt$

$du = dt \qquad v = \frac{\text{Sen}(w_{on}t)}{w_{on}t}$

$\left[t\,\frac{\text{Sen}(w_{on}t)}{w_{on}}\right]_{d_1}^{d_2} - \int_{d_1}^{d_2}\frac{\text{sen}(w_{on}t)}{w_{on}}\,dt$

$\frac{d_2\,\text{Sen}(w_{on}(d_2)-d_1\,\text{Sen}(w_{on}(d_1)}{w_{on}} -$

$\left(-\frac{\cos(w_{on}(d_2)-(-\cos(w_{on}(d_1))}{w_{on}^2}\right)$

$$I_2 = \frac{d_2 Sen(won(d_2)) - d_1 Sen(won(d_1))}{won} + \frac{Cos(won(d_2)) - Cos(won(d_1))}{won^2}$$

$$I_1 - I_2 = d_2\left(\frac{Sen(won(d_2)) - Sen(won(d_1))}{won}\right) -$$

$$\left(\frac{d_2 Sen(won(d_2)) - d_1 Sen(won(d_1))}{won} + \frac{Cos(won(d_2)) - Cos(won(d_1))}{won^2}\right)$$

$$= \frac{-d_2 Sen(won(d_1))}{won} + \frac{d_1 Sen(won(d_1))}{won} - \left(\frac{Cos(won(d_2)) - Cos(won(d_1))}{won^2}\right)$$

$$= \frac{-(d_2 - d_1) Sen(won(d_1))}{won} + \frac{Cos(won(d_1)) - Cos(won(d_2))}{won^2}$$

$$= \frac{A}{d_2 - d_1}\left(-\left((d_2 - d_1)\frac{Sen(won(d_1))}{won}\right) + \frac{Cos(won(d_1)) - Cos(won(d_2))}{won^2}\right)$$

$$b = A\left(-\frac{Sen(won(d_1))}{won} + \frac{Cos(won(d_1)) - Cos(won(d_2))}{(d_2 - d_1) won^2}\right)$$

Ahora Puedo Sumar $a + b$

$$C_n = \frac{2}{T}(a + b)$$

$$C_n = \frac{2}{T}\left[\frac{A}{d_1}\left\{\frac{d_1 (Sen(won(d_1)))}{won} + \frac{Cos(won(d_1)) - 1}{won^2}\right\} + A\left\{-\frac{Sen(won(d_1))}{won} + \frac{Cos(won(d_1)) - Cos(won(d_2))}{(d_2 - d_1) won^2}\right\}\right]$$

Cancelo $\frac{Cos(won(d_1))}{won^2}$

$$C_n = \frac{AT}{2\pi^2 n^2}\left[\left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2 - d_1}\right) \cos(n\omega_0 d_1) - \frac{\cos(n\omega_0(d_2))}{d_2 - d_1} - {}^1/_{d_1}\right] \quad n \neq 0$$

Sacamos la derivada de $x''(t)$

$$x(t) = \begin{cases} \frac{A}{d_1} t & 0 \leq t < d_1 \\ A\,\frac{d_2 - t}{d_2 - d_1}, & d_1 \leq t < d_2 \\ 0, & d_2 \leq t < T/2 \end{cases}$$

derivamos en cada tramo

la derivada de $mt + b$ es m

En $0 < t < d_1$

$$x(t) = \frac{A}{d_1} t \Rightarrow x'(t) = \frac{A}{d_1}$$

En $d_1 < t < d_2$

$$x(t) = A\,\frac{d_2 - t}{d_2 - d_1} \to x'(t) = -\frac{A}{d_2 - d_1}$$

En $d_2 < t < T/2$

$x(t) = 0 \qquad x'(t) = 0$

$$x'(t) = \begin{cases} \frac{A}{d_1}, & 0 < t < d_1 \\ -\frac{A}{d_2-d_1} & d_1 < t < d_2 \\ 0 & d_2 < t < T/2 \end{cases}$$

Sabiendo que $x'(t)$ hace par $x'(t) = -x'(-t)$

tenemos que $x'(t)$ es a trozos constante

$x''t$ sería una suma de deltas en los puntos donde cambia la pendiente

Como x es par $\to x'$ es impar se replica con signo opuesto en $-T/2 < t < 0$ es periódica con periodo T

③ Saltos $x'(t)$ (Magnitudes)

Se calculan los siguientes saltos pues nos ayudan a codificar toda la segunda derivada

$\Delta = m_2 - m_1$

en $t = -d_2 \to \frac{A}{d_2-d_1} \to \Delta = \frac{A}{d_2-d_1}$

en $t = -d_1 \quad \frac{A}{d_2-d_1} \to -\frac{A}{d_1} \quad \Delta = -\left(\frac{A}{d_1} + \frac{A}{d_2-d_1}\right)$

en $t = 0 \quad -\frac{A}{d_1} \to \frac{A}{d_1} \to \Delta = \frac{2A}{d_1}$

en $t = d_1 \quad \frac{A}{d_1} \to -\frac{A}{d_2-d_1} \to \Delta = -\left(\frac{A}{d_1} + \frac{A}{d_2-d_1}\right)$

En $t = d_2 \; -\frac{A}{d_2-d_1} \to 0 \to \Delta = \frac{A}{d_2-d_1}$

En ($\pm T/2$ no hay salto porque $x'(t)$ vale 0 ambos lados.)

Segunda derivada $x''(t)$

$$\delta_T(t-a) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t-a-kT)$$

$$x''(t) = \frac{2A}{d_1}\delta_T(t) - \left(\frac{A}{d_1}+\frac{A}{d_2-d_1}\right)\left[\delta_T(t-d_1)+\delta_T(t+d_1)\right]$$

$$+\frac{A}{d_2-d_1}\left[\delta_T(t+d_2)+\delta_T(t+d_2)\right]$$

$x''(t)$ (los pesos son simetricos $\pm d_1, \pm d_2$)

La suma de pesos en un periodo es cero

$$\int_0^T x''(t)\,dt = 0$$

$$C_n = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} x(t)\cos(w_0 n t)\,dt$$

Usando $\int \delta(t-a) f(t)\,dt = f(a)$

$$= \frac{2A}{d_1}\cos 0 - \left(\frac{A}{d_1}+\frac{A}{d_2-d_1}\right)\left[\cos(nw_0(d_1)) + \cos(nw_0(d_1))\right] +$$

$$\frac{A}{d_2-d_1}\left[\cos(nw_0 d_2) + \cos(-nw_0 d_1)\right]$$

$$C_n = 2A\left[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{d_1} - \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2 - d_1}\right)\cos(n w_0 d_1) + \frac{1}{d_2 - d_1}\cos(n w_0 d_2)\right]$$

Para C_0, usamos $x(t)$

$$0 \leq t < T/2$$

$$C_0 = \underbrace{\frac{2}{T}\int_0^{d_1} \frac{A}{d_1}\cos(w_0 n t)\,dt}_{I_1} + \underbrace{\frac{2}{T}\int_{d_1}^{d_2} A\,\frac{d_2 - t}{d_2 - d_1}\cos(w_0 n t)\,dt}_{I_2} + \underbrace{\frac{2}{T}\int_{d_2}^{T/2} 0 \cdot \cos(w_0 n t)\,dt}_{0}$$

$$I_1 = \frac{2}{T}\int_0^{d_1} \frac{A}{d_1}\cos(w_0 \overset{0}{\cancel{n}} t)\,dt = \frac{2}{T}\int_0^{d_1} \frac{A}{d_1}\,dt = \frac{A}{d_1}\,\frac{d_1^2}{2} = \frac{A d_1}{2}$$

$$I_2 = \frac{2}{T}\int_{d_1}^{d_2} A\,\frac{d_2 - t}{d_2 - d_1}\cos(w_0 \overset{0}{\cancel{n}} t)\,dt$$

$$= \frac{2}{T}\int_{d_1}^{d_2} A\,\frac{d_2 - t}{d_2 - d_1} = \frac{A}{d_2 - d_1}\left[\frac{(d_2 - d_1)^2}{2}\right]$$

$$= \frac{A}{2}(d_2 - d_1)$$

$$I_3 = 0$$

$$C_0 = \frac{2}{T}\left[\frac{A d_1}{2} + \frac{A}{2}(d_2 - d_1)\right] = \frac{\cancel{2}}{T}\,\frac{A d_2}{\cancel{2}} = \frac{A d_2}{T}$$

$$C_0 = \frac{A d_2}{T}$$

Como $x(t) \Rightarrow$ real Por lo cumple

$$C_{-n} = C_n$$

de C_n sustituimos $n=1$

$$C_1 = C_{-1} = \frac{AT}{2\pi^2}\left[\left(\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2-d_1}\right)\cos(w_0 d_1) - \frac{\cos(w_0 d_2)}{d_2-d_1} - \frac{1}{d_1}\right]$$

Cumplen Para señal Par

$$C_1 = \frac{AT}{2\pi^2}\left[\left(\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2-d_1}\right)\cos(w_0 d_1) - \frac{\cos(w_0 d_2)}{d_2-d_1} - \frac{1}{d_1}\right]$$

Para $C_{\pm 1}$ Da el mismo valor

$$C_2 = \frac{AT}{8\pi^2}\left[\left(\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2-d_1}\right)\cos(2w_0 d_1) - \frac{\cos(2w_0 d_2)}{d_2-d_1} - \frac{1}{d_1}\right]$$

$C_{\pm 2}$ es da el mismo Por Paridad

$$C_3 = \frac{AT}{18\pi^2}\left[\left(\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2-d_1}\right)\cos(3w_0 d_1) - \frac{\cos(3w_0 d_2)}{d_2-d_1} - \frac{1}{d_1}\right]$$

$C_{\pm 3}$ es ~~i~~ da el mismo Por Paridad

$$C_4 = \frac{AT}{32\pi^2}\left[\left(\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2-d_1}\right)\cos(4w_0 d_1) - \frac{\cos(4w_0 d_2)}{d_2-d_1} - \frac{1}{d_1}\right]$$

$$C_s = \frac{\Delta T}{5\sigma\pi^2}\left[\left(\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2-d_1}\right)\cos(5\omega_0 d_1) - \frac{\cos(5\omega_0 d_2)}{d_2-d_1} - \frac{1}{d_1}\right]$$

Como es par $C_{\pm s}$ es el mismo

• potencia media P_x para calcular el error.

sabemos que $P_x = \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)^2| dt = A^2$

$\Rightarrow Er[\%] = 1 - \left(\frac{1}{P_x} \sum_{n=N}^{N} |C_n|^2\right)$

- como la señal es par $\Rightarrow x^2(t)$, también es par.

por lo tanto:

$$2\left(\int_0^{d_1} x^2(t)dt + \int_{d_1}^{d_2} x^2(t)dt\right)$$

$\Rightarrow x(t) = \frac{A}{d_1} t \Rightarrow x^2(t) = \left(\frac{A}{d_1} t\right)^2 = \frac{A^2}{d_1^2} t^2$

$$= \int_0^{d_1} x^2(t)\,dt = \frac{A^2}{d_1^2} \int_0^{d_1} t^2 dt = \frac{A^2}{d_1^2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{d_1}$$

$$= \frac{A^2}{d_1^2} \cdot \frac{d_1^3}{3} = \boxed{\frac{A^2 d_1}{3}}$$

• resuelvo la otra integral

$x^2(t) = \left(\frac{A}{d_1-d_2}\right)^2 \cdot (d_2-t)^2$

$= \frac{A^2}{(d_1-d_2)^2} (d_2-t)^2$

$$\int_{d_1}^{d_2} \left(\frac{A^2}{(d_1-d_2)^2}\right)(d_2-t)^2\,dt$$

$$\frac{A^2}{(d_1-d_2)^2} \int_{d_1}^{d_2} (d_2-t)^2\,dt$$

$= u = d_2 - t$, $du = -dt$ cuando $t = d_1, u = d_2 - d_1$

" $t = d_2, u = 0$.

$$\int_{u=(d_2-d_1)}^{0} u^2(-du) = \int_0^{d_2-d_1} u^2 du = \left[\frac{u^3}{3}\right]_0^{d_2-d_1} = \boxed{\frac{(d_2-d_1)^3}{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{A^2}{(d_1-d_2)^2} \cdot \frac{(d_2-d_1)^3}{3} = \boxed{\frac{A^2(d_2-d_1)}{3}}$$

ahora sumo el semiperiodo.

$$= \frac{A^2 d_1}{3} + \frac{A^2(d_2-d_1)}{3} = \boxed{\frac{A^2 d_2}{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{2 \cdot A^2 d_2}{3T} = Px$$

Con el valor de px ya se puede utilizar el error relativo.

$$\boxed{Er[\%] = 1 - \frac{|C_0|^2 + 2\sum_{n=1}^{N} |C_n|^2}{Px}}$$