Теорема 1. Матрица Грама любой системы векторов $\{x_1, \dots, x_l\}$, $x_i \in \mathbb{R}^d$, $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$, соответствующая гауссову RBF-ядру, является невырожденной.

Доказательство. Пусть $K(x, z) = \exp(-\frac{1}{2\sigma^2}||x - z||^2) = \langle \phi(x), \phi(z) \rangle$. Матрица Грама системы векторов невырождена тогда, и только тогда, когда эта система линейно независима. Предположим, что система $\{\phi(x_1), \dots, \phi(x_l)\}$ линейно зависима. Тогда $\exists a_j, j \in \overline{1, l}$, одновременно не равные 0 и такие, что $\sum\limits_{j=1}^{l} a_j \phi(x_j) = 0$. Вычислим скалярное произведение с $\phi(x)$ для произвольного $x \in \mathbb{R}^d$:

$$\sum_{j=1}^{l} a_j \langle \phi(x), \phi(x_j) \rangle = \sum_{j=1}^{l} a_j \exp(-\frac{1}{2\sigma^2} \langle x_j, x_j \rangle) \exp(-\frac{1}{2\sigma^2} \langle x, x \rangle) \exp(\frac{1}{\sigma^2} \langle x, x_j \rangle) = 0.$$

Поделим равенство на $\exp(-\frac{1}{2\sigma^2} \langle x, x \rangle) \neq 0$ и обозначим $a_j \exp(-\frac{1}{2\sigma^2} \langle x_j, x_j \rangle)$ за b_j:

$$\sum_{j=1}^{l} b_j \exp(\frac{1}{\sigma^2} \langle x, x_j \rangle) = 0.$$

В силу произвольности выбора x подставим вместо него $\sigma^2(i-1)x$, $i = \overline{1, l}$. Получим систему уравнений $\sum\limits_{j=1}^{l} \exp(\langle (i-1)x, x_j \rangle) b_j = 0$, $i = \overline{1, l}$, относительно вектора $b = (b_1, \dots, b_l)$. Это система с матрицей Вандермонда, определитель которой равен $\prod\limits_{1 \leq i < j \leq l} (\exp(\langle x, x_i \rangle) - \exp(\langle x, x_j \rangle))$. Он отличен от 0, так как $x_i \neq x_j$ при $i \neq$, по условию. Поэтому система имеет единственное решение $b = \theta_l$, что является противоречием. Таким образом, система $\{\phi(x_1), \dots, \phi(x_l)\}$ линейно независима, и соответствующая ей матрица Грама невырождена. $\square$