Descomposición de Benders

Profesor: Jorge Vera (jvera@ing.puc.cl)
Ayudante: Moisés Saavedra (mmsaavedra1@ing.puc.cl)

A modo de complementar lo visto en clases a continuación se expone la logica detrás del algoritmo de descomposición de Benders en dos etapas. Este método de optimización restringida corresponde a la "inyección" de cortes de factibilidad en cada iteración de resolución, lo anterior se aplica para acotar el dominio de la solución óptima y no inucrrir en problemas de optimización no acotados o infactibles.

Supongamos que tenemos un problema de optimización de la siguiente forma, en la que se poseen dos variables $x \in R^n$ e $y \in R^s$, ambas poseen costos $c \in R^n$ y $q \in R^s$ respectivamente. Además, poseen sus propias restricciones individuales y una restricción que ocupa a ambas como en el siguiente modelo:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \mathrm{c^T x + q^T y} \\
\text{s.a} \quad & \\
& Ax \geq b \\
& By \geq e \\
& Tx + Wy \geq h \\
& x \geq 0, \quad y \geq 0
\end{aligned}
$$

En este problema se puede notar que existen restricciones para cada varibales x e y, pero una concentra a ambas, es decir, este problema no se puede divivr en dos, donde uno solo depende de x y el otro solo depende de la variable y. Ante esta problemática se propuso la resolución del problema en general, pero visto como dos partes. Donde la restricción que liga a ambas variables se deja un variable como función de la otra de esta forma:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \mathrm{c^T x + q^T y} \\
\text{s.a} \quad & \\
& Ax \geq b \\
& By \geq e \\
& Wy \geq h - Tx \\
& x \geq 0, \quad y \geq 0
\end{aligned}
$$

Para resolver los anterior se formuló el **problema maestro** equivalente a la primera etapa y su correspondiente **problema satélite** que se traduce a la segunda etapa del modelo. La primera etapa queda definida con la variable x y en esta solo se colocan todas las restricciones en las que **solamente** aparece dicha variable, es decir, el **problema maestro o primera etapa** asociado es de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathrm{c}^{\mathrm{T}}\mathrm{x} + \theta \\ \text{s.a} \quad & \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \\ & \theta \geq 0 \end{aligned}$$

Luego, el **problema satélite o segunda etapa** queda definido por todas las restricciones individuales de la variables y, y todas las restricciones en las que aparezca la o las variables definidas en el problema maestro, lo anterior puede ser traducido a que la o las variables del **problema de segunda etapa** son dependientes del resultado del **problema maestro**, es por esto que arriba en rojo se puso a la izquierda todo lo asociado a y y a la derecha los términos con x. El **problema satélite** queda modelo como sigue:

$$\begin{aligned} \theta = \min \quad & \mathrm{q}^{\mathrm{T}}\mathrm{y} \\ \text{s.a} \quad & \\ & By \geq e \\ & Wy \geq h - Tx \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

Lo que se aplicó para la resolución del problema es un estudio del **problema dual del satélite**. Si lo deseamos modelar, dicho problema queda como:

$$\begin{aligned} \max \quad & (\mathrm{h} - \mathrm{Tx})^{\mathrm{T}}\pi \\ \text{s.a} \quad & \\ & W^{T}\pi \geq q \\ & \pi \geq 0 \end{aligned}$$

Dentro del estudio de un problema dual existen 3 posibles casos:

1. Si el problema dual es óptimo finito, entonces por dualidad fuerte el problema primal es finito también y estos valores coinciden.

2. Si el problema dual es infactible, entonces el problema primal es infactible o no acotado.

3. Si el problema dual es no acotado, entonces el problema primal es infactible.

El **caso 1** es cláramente el que se busca y el más sencillo, ya que simplemente los valores calzan y no es de interés para hacer un estudio. El **caso 2** es una patología en si misma y si llega a ocurrir es porque la modelación está mal hecha, para efectos de problemas determinísticos o probabilísticos suponemos que este caso no ocurre (ya que el modelo debe estar bien definido). Finalmente, el **caso 3** es el nos interesa estudiar, y este menciona que el problema primal (**segunda etapa** para nuestro caso) no posee una solución factible, y como el **problema satélite** no posee solución, entonces el **problema maestro** tampoco.

Ahora analicemos el **caso 3**. Recordemos un poco las condiciones de no acotamiento, y esto ocurre cuando la función objetivo "explota" y existen infinitas soluciones que cumplen las restricciones asociadas al no acotamiento. Para esto existe una solución π^* que vista de forma sencilla para recordar este análisis, corresponde a la solución homogénea de las restrcciones y el no acotamiento de la función objetivo para este caso de maximización es positivo, y por tanto cumple lo siguiente en el dual expuesto en el orden descrito anteriormente:

$$W^T\pi^* \leq 0$$

$$(h - Tx)^T\pi^* \geq 0$$

Lo que nos importa es que **no ocurra** lo anterior, entonces la siguiente expresión garantiza que no existirá infactibilidad en caso de existir:

$$(h - Tx)^T\pi^* \leq 0$$

Un vez realizado esto, dicha restricción se adhiere al **problema maestro**, y vuelve a calcular una solución asociada para volver a repetir el loop, a veces el **problema satélite** resulta óptimo finito y en este caso no se debe inyectar un restricción de factbilidad en el dual.

Por lo tanto, sea π^k los valores del **problema satélite dual** asociado a la k-ésima iteración del problema, el **problema maestro** para la iteración k+1 se vería como:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \mathrm{c^T x} + \theta \\
\text{s.a} \quad & \\
& Ax \geq b \\
& (h - Tx)^T\pi^s \leq 0, \ s = 1, ...k \\
& (h - Tx)^T\pi^s \leq \theta, \ s = 1, ...k \\
& x \geq 0
\end{aligned}$$

Cuando ambos problemas son lineales y continuos en cada modelo descrito basta resolver con un solver como gurobi mediante el algoritmo de SIMPLEX, que gurobi detecta solo, el desfío personal es armar la rutina que actuliza cada modelo, pero no hay que olvidar que gurobi hace todos los cálculos asociados. Cabe destacar que esta técnica es muy usada en la optimización bajo incertidumbre, donde los parámetros ligados a y son de naturaleza estocástica, para efectos de esta altura del curso se considera todo determinístico.

Dentro de la carpeta existe un script llamado ***BENDERS.py*** en el pueden correr una rutina de benders para el siguiente ejemplo de modelo de optimización:

Una compañía de transporte tiene n depósitos entre los que envía una determinada carga. La demanda para el transporte entre el depósito i y el depósito $j \neq i$ se conoce y es denotada por d_{ij}. La capacidad actual de los vehículos actualmente disponibles en el depósito i se denota s_i. La compañía considera reposicionar su flota para suplir la demanda. Le cuesta c_{ij} mover una unidad de capacidad de la unicación i a la ubicación j. Después del reposicionamiento. La demanda es atendida, hasta el límite determinado por la capacidad del transporte disponible en cada ubicación. El beneficio de transporte de una unidad de carga de i a j es de q_{ij}. Si la demanda total en la ubicación supera la capacidad disponible en la ubicación i, esta se pierde.

Sean las variables:

- x_ij: cantidad transferida desde el depósito i al depósito j.
- y_ij: cantidad a transportar desde el depósito i para abastecer al depósito j.

El modelo de optimización asociado queda:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{i}\sum_{j\neq i}(q_{ij}y_{ij} - c_{ij}x_{ij}) & \\
\text{s.t} \quad & \sum_{j\neq i} x_{ij} \leq s_i & \forall i \in I \\
& \sum_{j\neq i} y_{ij} \leq s_i + \sum_{l\neq i} x_{li} - \sum_{n\neq i} x_{in} & \forall i \in I \\
& y_{ij} \leq d_{ij} & \forall i \in I, \forall j \in I, \{i \neq j\} \\
& y_{ij} \geq 0 & \forall (i,j) \in IxI \\
& x_{ij} \geq 0 & \forall (i,j) \in IxI
\end{aligned}
$$

Queda como ejercicio propuesto modelar el problema de dos etapas y su formulación para un problema maestro y satélite, junto con la forma que tendrán los cortes de factibilidad.