Ayudantía 4

Cadenas de Markov en tiempo discreto

Moisés Saavedra Cáceres
mmsaavedra1@ing.puc.cl

Problema 1

Una tienda vende un único producto, del cual mantiene inventarios en bodega. Al comenzar cada semana el gerente observa el inventario disponible en bodega, I. Si I $\leq$ s entonces el gerente pide (S - I) unidades al proveedor (0 < s < S), de manera de quedar con S unidades en bodega. El pedido es recibido de inmediato. si I > s el gerente no hace un pedido esa semana.

Las demandas en cada semana son variables aleatorias iid. En una semana cualquiera la demanda es de k unidades con probabilidad α_k (k $\geq$ 0). La demanda insatisfecha se pierde.

a. Muestre que el nivel de inventarios al comienzo de cada semana (antes de hacer el pedido) se puede modelar como una cadena de Markov. Indique claramente cuáles son los estados que ha definido y calcule las probabiliades de transición. Dibuje el grafo representante para el caso s = 2, S = 4, ¿Tiene sentido hacer dicho dibujo?

b. Suponga que la llegada de clientes a la tienda queda bien descrita por un proceso de Poisson de tasa λ [cleintes/semana], y que cada cleinte compra una unidad. Indique cuánto valen los valores $\{\alpha_k\}_{k\leq 0}$ en este caso. Agrupe los estados en clases de equivalencia, clasifíquelos de acuerdo a si son transicientes o recurrentes y calcule se periocidad.

c. Suponga ahora que la demanda es **determinística** e igual a 1 unidad en cada semana (i.e. $\alpha_k = 1$, $\alpha_k = 0$, $\forall k \neq 1$). Dibuje el grafo representante para este caso (notar que la bodega puede comenzar con menos de s unidades). Agrupe los estados en clases de equivalencia, clasifíquelos y calcule su periocidad.

d. Suponga ahora que la demanda en cada semana es mayor que S con seguridad (es decir, $\alpha_k = 0$, $\forall k \leq$ S). Dibuje el grafo representante para este caso. Agrupe los estados en clases de equivalencia , clasifíquelos y calcule su periocidad.

Problema 2

El colectivero de su barrio le pide que lo asesore en el desarrollo de un nuevo proyecto de su microempresa de transporte de pasajeros, con el fin de definir la tarifa a cobrar. Nuestro amigo cuenta con 2 vehículos con los que pretende implementar un servicio de arriendo de autos.

A las 8 de la mañana de cada día el conocerá la demanda por arriendos, la cual sigue la siguiente ley de probabilidades:

$$Pr[D = 0] = 0.4,\ Pr[D = 1] = 0.2 \text{ y } Pr[D \leq 2] = 0.4$$

Un auto esa arrendado por todo el día, es decir, con cada vehículo se puede atender a lo más un cliente diario.

Los clientes abusan de la buena voluntadad del colectivero, por lo que se estima con probabilidad $p = 0.7$ maltrarán el automóvil durante su uso, por lo que el colectivero deberá llevarlo a mantención el dá siguiente, y no podrá arrendarlo. La mantención demora exactamente un día, independiente del número de autos a reparar y tiene un costo de \$10.000 por vehículo.

Con el fin de ayudar al colectivero, responda:

a. Justifique por qué es posible modelar como una cadena de Markov en tiempo discreto el **número de vehículos disponibles al comienzo de un día cualquiera**.

b. Modele la situación como una cadena de Markov en tiempo discreto. Dibújela con los respectivos estados, encuentre la matriz de transición y clasifique los estados en clases.

c. Justifique la existencia de probabilidades estacionarias y calcúlelas.

   A partir de las probabilidades estacionarias calculadas en la parte anterior, responda:

d. ¿Cuál es el número esperado de arriendos diarios que realizaría esta empresa en estado estacionario?, ¿Cuál es el costo diario promedio por concepto de mantención? y ¿Cuál es el mínimo precio que el colectivero debe cobrar por cada arriendo?

Problema 3

Una unidad productiva de una empresa minera tiene un número muy grande (igual a T) de mini retro excavadoras para la extracción del mineral. Estas máquinas se utilizan durante el día y al caer la tarde se guardan para ser utilizadas en la mañana siguiente.

Sin embargo, exite una probabilidad q que una máquina en operación falle durante un día, independiente de cuantos días consecutivos lleve operando. En estos casos la mini retro excavadora será enviada al taller de reapración al final del día en el que falla, donde su mantenimiento siempre se realiza al día siguiente. De esta manera, una máquina que falla un día t estará lista para su utilización un la mañana del día $t+2$ independiente lo que pase con las demás.

a. Justifique por qué es posible modelar como una cadena de Markov en tiempo discreto el **número de mini retro excavadoras buenas al inicio de cada día**. ¿Cuál es la probabilidad que un día fallen i máquinas si esa mañana habían j buenas? (Llame a esta probabilidad: $s(i,j)$)

b. Modele la situación descrita como una cadena de Markov en tiempo discreto. Encuentre expresiones generales para las probabilidades de transición en función de $s(i,j)$, clasifique los estados en clases y caracterícelas. Argumente la existencia de una ley de probabilidades estacionarias.

c. Suponga que la cadena anterior admite probabilidades estacionarias y que usted conoce el vector Π. Además se sabe que si la mina al final de un día cualqueira cuenta con menos de L máquinas buenas y es inspeccionada por la gerencia de producción debe pagar una multa de C [$]. Según información histórica en un día cualquiera existe una probabilidad r de que se produzca una revisión. Sin embargo, si al momento de producirse la inspección cuenta con la totalidad de estas máquinas en buen estado la unidad recibirá un incentivo económico F [$]. Entregue una expresión para los beneficios diarios en el largo plazo por concepto de multas y estímulos por revisión del organismo de seguridad.

Para introducirse en los conceptos básicos de cálculos de cadenas de Markov en tiempo discreto se les aconseja revisar el Problema 1 de I2 2018-1 s.2