Guía de ejercicios recomendados para Interrogación I

1.

Suponga que el proceso de llegada de micros a un paradero corresponde a un Proceso de Poisson a tasa λ. El proceso de llegada de pasajeros es un Proceso de Poisson a tasa β (ambos procesos son independientes). Asuma que cada pasajero que llega al paradero se sube a la primera micro que pasa y que éstas tienen suficiente capacidad para llevar a todos los pasajeros presentes. Obtenga la distribución de probabilidades del número de pasajeros que viajan en una micro cualquiera.

Solución:

Debido a la propiedad de *incrementos independientes* que poseen los procesos de Poisson, que dice que la cantidad $N(t+s) - N(t)$ es independiente de $N(u)$;con $u \leq t \ \forall t, s$, es posible analizar la distribución de probabilidades del número de pasajeros de cualquier micro. En particular se analizará lo que ocurre con la llegada de la 1^o micro.

En la figura se muestra un diagrama de tiempos que ayuda a comprender el problema:

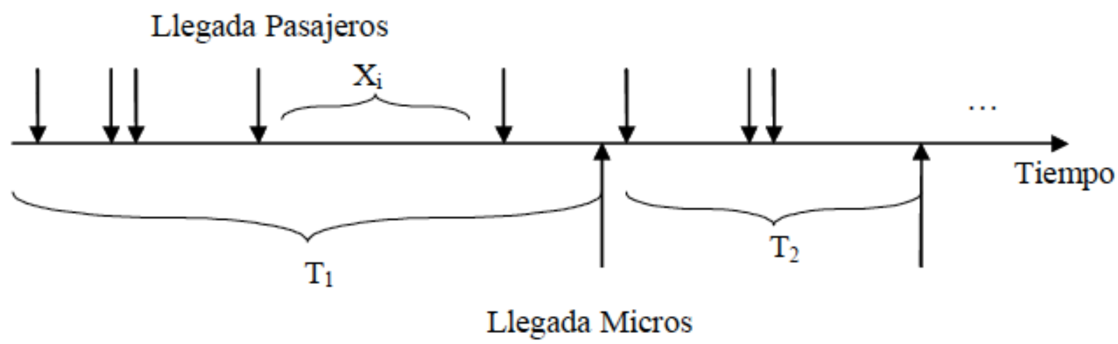

Figura 1.1:

Se observa como llegan los pasajeros de manera aleatoria hasta que llega una micro, luego comienza todo el proceso de nuevo hasta la llegada de una nueva micro.

Sea:

- $M(t)$: proceso de llegada de micros al paradero $\sim Poisson(\lambda t)$
- $N(t)$: proceso de llegada de pasajeros al paradero $\sim Poisson(\beta t)$
- N: Número de personas que se subirán en la próxima micro

Luego,

$$\begin{aligned}
\Pr\{N=n\} &= \int_{x} \Pr\{N=n \,/\, T_1=x\}\cdot\Pr\{T_1=x\} \\
&= \int_{x=0}^{\infty} \Pr\{N(x)=n\}\cdot\Pr\{T_1=x\} \\
&= \int_{x=0}^{\infty} \frac{(\beta x)^n e^{-\beta x}}{n!}\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx
\end{aligned}$$

Otra manera de resolver el problema es observar los tiempos entre eventos de los procesos de llegada al paradero. A partir del momento en que llega el primer pasajero ($t=X_1$) el tiempo hasta la parada de la primera micro sigue siendo exponencial a tasa λ. Luego, subirá una segunda persona a la micro si X_2 es menor que esa variable exponencial a tasa λ.

En general:

$\{N=n\} \iff$ n exponenciales a tasa β son menores a n exponenciales a tasa λ y una exponencial a tasa β es mayor a una exponencial a tasa λ.

$$\Rightarrow \Pr\{N=n\} = [\Pr\{\exp(\beta)<\exp(\lambda)\}]^n\cdot\Pr\{\exp(\beta)>\exp(\lambda)\}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
\Pr\{\exp(\beta)<\exp(\lambda)\} &= \int_{x=0}^{\infty} \Pr\{\exp(\beta)<\exp(\lambda) \,/\, \exp(\beta)=x\}\cdot\Pr\{\exp(\beta)=x\} \\
&= \int_{x=0}^{\infty} \Pr\{\exp(\lambda)>x\}\cdot\beta e^{-\beta x}dx \\
&= \int_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda x}\cdot\beta e^{-\beta x}dx \\
&= \frac{\beta}{\beta+\lambda}
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\Pr\{N=n\} = \left(\frac{\beta}{\lambda+\beta}\right)^n \frac{\lambda}{\lambda+\beta}$$

2.

Un peatón desea cruzar una calle con tráfico en un solo sentido. El flujo de vehículos por la calle se comporta como un proceso de Poisson a tasa λ. Suponga que el peatón necesita de T unidades de tiempo para cruzar la calle, y que él puede estimar exactamente los tiempos entre pasadas sucesivas de automóviles. Sea Z el tiempo que debe esperar el peatón hasta que pueda empezar a cruzar.

(a) Obtenga una expresión para $E(Z)$.
Indicación: defina N como el número de autos que deben pasar hasta que el peatón comienza a cruzar la calle; escriba Z como:

$$Z = \sum_{i=1}^{N} (T_i \,/\, T_i < T)$$

(b) Suponga que $\lambda = 2\, autos/min.$ y que $T = 30\, segundos$. Calcule $E(Z)$.

(c) Suponga ahora que la persona que va a cruzar la calle es una persona mayor, que requiere de 60 segundos para cruzar la calle. Calcule por cuantas veces se multiplica $E(Z)$ respecto al caso anterior.

Solución:

(a) N corresponde a un variable aleatoria que mide el número de fracasos antes de un primer éxito. El éxito en este caso es que $T_i \geq T$. Debido que los tiempos entre pasadas de autos son exponenciales se tiene entonces que la probabilidad de éxito es:

$$p = \Pr\{T_i \geq T\} = e^{-\lambda T}$$

Luego:

$$\begin{aligned} E\{N\} &= \sum_{n=0}^{\infty} n(1-p)^n p = \frac{1-p}{p} \\ &= e^{\lambda T} - 1 \end{aligned}$$

Utilizando la indicación propuesta y condicionando en el valor de N se tiene que:

$$\begin{aligned} E\{Z\} &= \sum_{n=0}^{\infty} E\{Z \,/\, N = n\} \cdot \Pr\{N = n\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n} E\{T_i \,/\, T_i < T\} \right] \cdot \Pr\{N = n\} \end{aligned}$$

como $E\{T_i \,/\, T_i < T\}$ es independiente de i se tiene que:

$$\begin{aligned} E\{Z\} &= \sum_{n=0}^{\infty} E\{T_i \,/\, T_i < T\} \cdot n \cdot \Pr\{N = n\} \\ &= E\{T_i \,/\, T_i < T\} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \Pr\{N = n\} \\ &= E\{T_i \,/\, T_i < T\} \cdot E\{N\} \end{aligned}$$

Para calcular $E\{T_i \,/\, T_i < T\}$ se necesita:

$$\begin{aligned}
\Pr\{T_i = x \,/\, T_i < T\} &= \frac{\Pr\{T_i = x \,,\, T_i < T\}}{\Pr\{T_i < T\}} \\
&= \frac{\Pr\{T_i = x\}}{\Pr\{T_i < T\}} \\
&= \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda T}}
\end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}
E\{T_i \,/\, T_i < T\} &= \int\limits_{x=0}^{T} x \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda T}} dx \\
&= \frac{1}{\lambda} - \frac{T e^{-\lambda T}}{1 - e^{-\lambda T}}
\end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}
E\{Z\} &= \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{T e^{-\lambda T}}{1 - e^{-\lambda T}}\right) \cdot \left(e^{\lambda T} - 1\right) \\
&= \frac{1}{\lambda}\left(e^{\lambda T} - 1\right) - T
\end{aligned}$$

(b) Si $\lambda = 2/\min$ $\quad T = 30\,\text{sec} : E(Z) = 0.36\,\text{min}$

(c) Si $\lambda = 2/\min$ $\quad T = 60\,\text{sec} : E(Z) = 2.18\,\text{min}$

Luego se debe multiplicar por $2.18/0.63 = 6.11$ veces cuando el sujeto tarda 60 sec. en vez de sólo 30 sec. en cruzar la calle.

3.

Suponga que el sistema de transporte colectivo desde plaza Italia al campus San Joaquín consta de dos líneas de buses: *buses expresos y buses ordinarios*. Los buses expresos llegan al paradero de acuerdo a Poisson a tasa λ_e y los buses ordinarios de acuerdo a Poisson a tasa λ_o. Ambos procesos son independientes. El tiempo de viaje de los buses expresos es t_e y el de los ordinarios es t_o y el costo del pasaje es c_e y c_o respectivamente. El costo de cada unidad de tiempo del pasajero es c. Obtenga una expresión para el costo esperado total para las siguientes políticas:

(a) utilizar solo buses ordinarios

(b) utilizar solo buses expresos

(c) tomar el primer bus que pase

Solución:

Sea CT= Costo Total

(a) Si se utilizan sólo buses ordinarios el valor esperado del costo total va a ser:

$$E\{CT\} = c \cdot \frac{1}{\lambda_o} + c \cdot t_o + c_o$$

donde $\frac{1}{\lambda_o}$ representa el tiempo esperado hasta que pase el primer bus ordinario, t_o es el tiempo de viaje y c_o es el costo del pasaje.

(b) Para el caso de sólo tomar buses expresos , el resultado es algo similar:

$$E\{CT\} = c \cdot \frac{1}{\lambda_e} + c \cdot t_e + c_e$$

(c) Para este caso se tiene lo siguiente, sean:

$$\begin{array}{rcl} T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, ... & : & \text{Tiempo entre llegadas de buses ordinarios} \\ X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, ... & : & \text{Tiempo entre llegadas de buses expresos} \end{array}$$

Entonces, se necesita condicionar en el bus que llega primero para poder calcular el costo esperado. Utilizando el Teorema de Probabilidades Totales:

$$E\{CT\} = E\{CT \ / \ T_1 < X_1\} \cdot \Pr\{T_1 < X_1\} + E\{CT \ / \ T_1 \geq X_1\} \cdot \Pr\{T_1 \geq X_1\}$$

Ahora:

$$\begin{aligned} E\{CT \ / \ T_1 < X_1\} &= c \cdot E\{T_1 / \ T_1 < X_1\} + c \cdot t_o + c_o \\ E\{CT \ / \ T_1 \geq X_1\} &= c \cdot E\{X_1 / \ T_1 \geq X_1\} + c \cdot t_e + c_e \end{aligned}$$

Calculando:

$$\begin{aligned}
E\{T_1/\,T_1 < X_1\} &= \int_x x\cdot\Pr\{T_1 = x \,/\, T_1 < X_1\} \\
&= \int_x \frac{x\cdot\Pr\{T_1 < X_1 \,/\, T_1 = x\}\cdot\Pr\{T_1 = x\}}{\Pr\{T_1 < X_1\}} \\
&= \int_x \frac{x\cdot\Pr\{X_1 > x\}\cdot\Pr\{T_1 = x\}}{\Pr\{T_1 < X_1\}} \\
&= \int_x \frac{x\cdot e^{-\lambda_e x}\cdot\lambda_o e^{-\lambda_o x}\cdot dx}{\frac{\lambda_o}{\lambda_o+\lambda_e}} \\
&= \frac{1}{\lambda_o+\lambda_e}
\end{aligned}$$

Del mismo modo se llega a exactamente lo mismo para el otro valor esperado:

$$\begin{aligned}
E\{T_1/\,T_1 \geq X_1\} &= \int_x x\cdot\Pr\{X_1 = x \,/\, T_1 \geq X_1\} \\
&= \frac{1}{\lambda_o+\lambda_e}
\end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}
E\{CT \,/\, T_1 < X_1\} &= c\cdot\frac{1}{\lambda_o+\lambda_e} + c\cdot t_o + c_o \\
E\{CT \,/\, T_1 \geq X_1\} &= c\cdot\frac{1}{\lambda_o+\lambda_e} + c\cdot t_e + c_e
\end{aligned}$$

Por lo tanto, de acuerdo a la ecuación :

$$\begin{aligned}
E\{CT\} &= E\{CT \,/\, T_1 < X_1\}\cdot\Pr\{T_1 < X_1\} + E\{CT \,/\, T_1 \geq X_1\}\cdot\Pr\{T_1 \geq X_1\} \\
&= \left[c\cdot\frac{1}{\lambda_o+\lambda_e} + c\cdot t_o + c_o\right]\cdot\frac{\lambda_o}{\lambda_o+\lambda_e} + \left[c\cdot\frac{1}{\lambda_o+\lambda_e} + c\cdot t_e + c_e\right]\cdot\frac{\lambda_e}{\lambda_o+\lambda_e}
\end{aligned}$$

Juntando términos se llega a:

$$E\{CT\} = \underbrace{c\cdot\frac{1}{\lambda_o+\lambda_e}}_{(i)} + \underbrace{\frac{\lambda_o}{\lambda_o+\lambda_e}\cdot(ct_o + c_o)}_{(ii)} + \underbrace{\frac{\lambda_e}{\lambda_o+\lambda_e}\cdot(ct_e + c_e)}_{(iii)}$$

Este resultado se puede interpretar de acuerdo a las siguientes partes:

i. representa el costo promedio de espera en el paradero hasta que pase el primer bus, que se calcula como c por el tiempo de espera.
ii. representa el costo si es que se toma el bus ordinario por su respectiva probabilidad.
iii. representa el costo y la respectiva probabilidad de tomar el bus expreso.

4.

A una Biblioteca llegan alumnos a estudiar de acuerdo a un Proceso de Poisson a tasa λ. Cada alumno permanece en la biblioteca un tiempo aleatorio con distribución exponencial a tasa μ. Suponga que los tiempos de permanencia de los sucesivos alumnos son independientes entre sí, e independientes del proceso de llegada.

(a) Sea $X(t)$ el número de alumnos presentes en la Biblioteca en el instante t. Obtenga la distribución de probabilidades de $X(t)$. ¿Qué ocurre con esa distribución cuando t tiende a infinito? Cuál es el valor esperado del número de alumnos presentes en la Biblioteca en ese caso; puede dar una interpretación intuitiva de ese valor?

(b) Si se sabe que entre 0 y t llegaron 10 alumnos a la Biblioteca; cuál es el valor esperado del número de alumnos presentes en la biblioteca en el instante t?

(c) Considere dos instantes de tiempo t_1 y t_2 tales que $t_1 < t_2$. Suponga que se sabe que $X(t_1) = n$. Obtenga una expresión para $E\left[X(t_2)\ /\ X(t_1) = n\right]$.

Indicación: observe que $X(t_2)$ se compone de 2 términos: los alumnos que estaban presentes en la Biblioteca en el instante t_1 y que seguirán estando presentes en t_2, y los que llegan entre t_1 y t_2 y están presentes en la biblioteca en el instante t_2.

Solución:

(a) Sea N(t) el proceso de llegada de estudiantes a la biblioteca. Para calcular la distribución de X(t) es necesario condicionar en N(t). Esto es:

$$\Pr\{X(t) = n\} = \sum_{m=n}^{\infty} \Pr\{X(t) = n\ /\ N(t) = m\} \cdot \Pr\{N(t) = m\}$$

Si se consideran estas m llegadas en forma desordenada, cada una de ellas llega en un instante que distribuye uniforme entre 0 y t; por lo que $X(t)\ /\ N(t) = m$ es una variable que distribuye Binomial de parámetros (m, p), donde p es la probabilidad de que un estudiante que haya ingresado antes de t todavía esté dentro de la biblioteca.

Para que todavía el estudiante esté dentro de la biblioteca el tiempo de permanencia debe ser mayor a t, así la probabilidad p es:

$$\begin{aligned}
p &= \Pr\{U + \exp(\mu) > t\} \\
&= \int_{x=0}^{t} \Pr\{U + \exp(\mu) > t\ /\ U = x\} \cdot \Pr\{U = x\} \\
&= \int_{x=0}^{t} \Pr\{\exp(\mu) > t - x\} \cdot \frac{dx}{t} \\
&= \int_{x=0}^{t} e^{-\mu(t-x)} \cdot \frac{dx}{t} \\
&= \frac{1}{\mu t}(1 - e^{-\mu t})
\end{aligned}$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
\Pr\{X(t)=n\} &= \sum_{m=n}^{\infty}\binom{m}{n}p^n(1-p)^{m-n}\cdot\frac{(\lambda t)^m\,e^{-\lambda t}}{m!} \\
&= \sum_{m=n}^{\infty}\frac{m!}{n!(m-n)!}p^n(1-p)^{m-n}\cdot\frac{(\lambda t)^m\,e^{-\lambda t}}{m!} \\
&= \frac{p^n e^{-\lambda t}}{n!}\sum_{m=n}^{\infty}\frac{1}{(m-n)!}(1-p)^{m-n}\cdot(\lambda t)^m \\
&= \frac{p^n e^{-\lambda t}\,(\lambda t)^n}{n!}\underbrace{\sum_{m=n}^{\infty}\frac{[(1-p)\lambda t]^{m-n}}{(m-n)!}}_{e^{(1-p)\lambda t}} \\
&= \frac{(\lambda p t)^n\,e^{-\lambda p t}}{n!}
\end{aligned}
$$

Luego:

$$X(t) \sim Poisson(\lambda p t) \qquad con\ p=\frac{1}{\mu t}(1-e^{-\mu t})$$

Cuando $t \to \infty$ se tiene que $\lambda p t = \frac{\lambda}{\mu}\cdot(1-e^{-\mu t})$ que tiende a $\frac{\lambda}{\mu}$.
$p \to 1/\mu t$ por lo que X(t) ya no depende de t y distribuye Poisson(λ/μ) cuyo valor esperado es justamente el parámetro λ/μ.

(b)

$$E\{X(t)/N(t)=m\} = m\cdot p$$

Luego:

$$
\begin{aligned}
E\{X(t)/N(t)=10\} &= 10\cdot p \\
&= \frac{10}{\mu t}(1-e^{-\mu t})
\end{aligned}
$$

(c) Dado que en t_1 hay n personas en la biblioteca, el número de personas en t_2 va a depender de ese número de personas que todavía están en la biblioteca y de las personas que lleguen después de t_1 y que todavía no se hayan ido en el instante t_2. Sea:

- Y la variable aleatoria que representa a las personas que estaban en t_1 y todavía están en t_2.
- Z la v.a. que representa a las personas que llegaron después de t_1 y que todavía están en la biblioteca en t_2.

Y distribuye Binomial (n,α) donde α es la probabilidad de permanecer en la biblioteca. Entonces:

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \Pr\{Tiempo\ Permanencia > t_2 - t_1\} \\
&= e^{-\mu(t_2-t_1)}
\end{aligned}
$$

En la v.a. Z no influye las personas que hayan llegado en t_1 por lo que esta variable distribuye igual que X(t) en la parte a) sólo que partiendo desde $t = t_1$ en vez de $t = 0$. Así:

$$
\begin{aligned}
Y &\sim Binomial(n, \alpha) \\
Z &\sim Poisson(\frac{\lambda}{\mu}(1 - e^{-\mu(t_2 - t_1)})
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
\Pr\{Y + Z = m\} &= \sum_{k=0}^{n} \Pr\{Y + Z = m \;/\; Y = k\} \cdot \Pr\{Y = k\} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \Pr\{Z = m - k\;\} \cdot \Pr\{Y = k\}
\end{aligned}
$$

5.

A un paradero de taxis colectivos llegan pasajeros de acuerdo a un Proceso de Poisson a tasa λ. Suponga que existen suficientes taxis de modo que siempre que llega un pasajero al paradero hay un taxi disponible. La capacidad de cada taxi es de M personas, y éste inicia su recorrrido cuando ha completado su capacidad.

Sea $N(t)$ el proceso que cuenta el número de taxis que han salido del paradero en $[0, t]$. Se desea analizar los tiempos entre eventos de este proceso. ¿Son estas variables aleatorias independientes entre sí? ¿Tienen la misma distribución de probabilidades; es ésta exponencial? ¿Es $N(t)$ un Proceso de Poisson? ¿Cuál es el tiempo promedio que deben esperar los pasajeros, desde que llegan al paradero, hasta que sale el taxi en que viajarán? (defina como W_i el tiempo de espera del pasajero número i, $i = 1, 2, ...M$. Obtenga: $E\left[\sum_{i=1}^{M} W_i/M\right]$)

Solución:

Sean:

$$\begin{aligned} T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, ... &: \quad \text{Tiempo entre llegadas de personas al paradero} \\ X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, ... &: \quad \text{Tiempo entre salidas de los taxis} \end{aligned}$$

Como un taxi debe esperar hasta completar su capacidad, la relación entre estas variables es:

$$X_1 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + ... + T_M$$

como los T_i son exponenciales a tasa λ, los X_i son de distribución $Gamma(M, \lambda)$. Estas variables son independientes e idénticamente distribuidas pero no son exponenciales, por lo que este proceso no puede ser un proceso de Poisson.

Definiendo a W_i como el tiempo de espera del pasajero número i, se tiene que:

$$\begin{aligned} W_1 &= T_2 + T_3 + T_4 + ... + T_M \\ W_2 &= T_3 + T_4 + T_5 + ... + T_M \\ W_3 &= T_4 + T_5 + T_6 + ... + T_M \\ &\;\;... \\ W_{M-1} &= T_M \\ W_M &= 0 \end{aligned}$$

Se pide calcular:

$$\sum_{i=1}^{M} W_i/M = \frac{1}{M}\left[T_2 + 2T_3 + 3T_4 + ... + (M-1)T_M\right]$$

Como $E[T_i] = 1/\lambda$,

$$\begin{aligned} E\left\{\sum_{i=1}^{M} W_i/M\right\} &= \frac{1}{M}\left[1/\lambda + 2/\lambda + 3/\lambda + ... + (M-1)/\lambda\right] \\ &= \frac{1}{M\lambda}\left[1 + 2 + 3 + ...M - 1\right] \\ &= \frac{1}{M\lambda} \cdot \frac{(M-1)M}{2} \end{aligned}$$

Luego,

$$E\left\{\sum_{i=1}^{M} W_i/M\right\} = \frac{(M-1)}{2\lambda}$$

6.

Considere un Proceso de Poisson a tasa λ. Sea Z(t) el tiempo desde el último evento antes de t hasta el instante t; si N(t)=0 defina Z(t)=t. Considere la cantidad Z(t) / N(t)=n; para n$\geq$ 0. ¿es ésta aleatoria o determinística? Justifique su respuesta. Si es aleatoria obtenga su función distribución. Obtenga la distribución de Z(t)

Solución:

La cantidad Z(t) / N(t)=n es aleatoria ya que aunque sepamos la cantidad de eventos que ocurrieron entre 0 y t, no se sabe los instantes en que ocurrieron. Ahora:

$$\begin{aligned} \Pr\{Z(t) > x \ / \ N(t) = n\} &= \frac{\Pr\{Z(t) > x \ , \ N(t) = n\}}{\Pr\{N(t) = n\}} \\ &= \frac{\Pr\{N(t-x) = n \ , \ N(t) - N(t-x) = 0\}}{\Pr\{N(t) = n\}} \end{aligned}$$

Por incrementos independientes, se tiene que:

$$\begin{aligned} &= \frac{\Pr\{N(t-x) = n\} \cdot \Pr\{N(x) = 0\}}{\Pr\{N(t) = n\}} \\ &= \frac{\frac{e^{-\lambda(t-x)}[\lambda(t-x)]^n}{n!} \cdot e^{-\lambda x}}{\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}} \\ &= \left(\frac{t-x}{t}\right)^n = \left(1 - \frac{x}{t}\right)^n \end{aligned}$$

Por otra parte la distribución de Z(t), se puede calcular como:

$$\begin{aligned} \Pr\{Z(t) > x\} &= \Pr\{N(t) - N(t-x) = 0\} \\ &= \Pr\{N(x) = 0\} \\ &= e^{-\lambda x} \end{aligned}$$

Luego,

$$\Pr\{Z(t) \leq x\} = 1 - e^{-\lambda x} \qquad para\, x < t$$

Volviendo a la definición de Z(t), se tiene que:

$$\Pr\{Z(t) \leq t\} = 1$$

Ahora, para $x = t$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \Pr\{Z(t) = t\} &= \Pr\{N(t) = 0\} \\ &= e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

Finalmente, la distribución de Z(t) es:

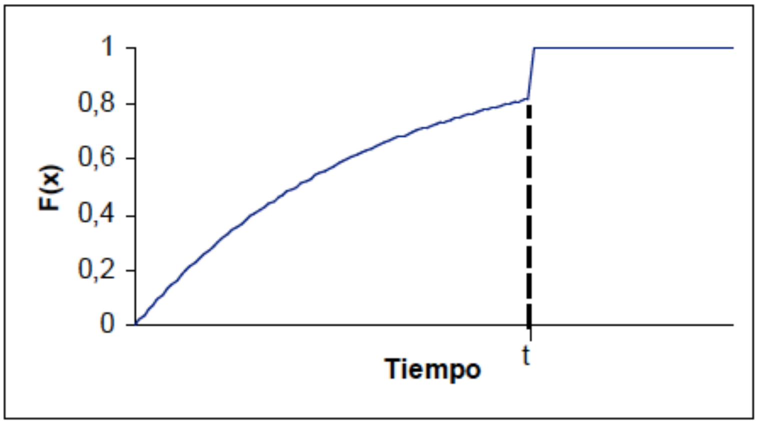

Figura 1.2:

7.

En el instante $t = 0$ un archivo de una base de datos es cargado con **b** registros. Nuevos registros serán agregados en instantes posteriores de acuerdo a un Proceso de Poisson a tasa **r.** La vida de cada registro del archivo tiene una distribución exponencial con parámetro **L** (esta vida mide el tiempo desde que se graba el registro hasta la última vez que será leído para alguna aplicación; después de ese tiempo, el registro pierde relevancia para las aplicaciones para las que fue concebido). De este modo, en cada instante de tiempo t, el archivo mantiene dos tipos de registros: registros muertos y registros vivos. Sean $M(t)$ y $N(t)$ la cantidad de cada uno de ellos en el instante t. El número total de registros en el instante t es entonces: $X(t) = M(t)+N(t)$. La proporción $f(t) = E[X(t)]/E[N(t)]$ representa el tiempo medio de búsqueda por cada registro vivo, y es una medida del grado de deterioro del archivo debido a la existencia de registros muertos (al acceder a un registro vivo, el computador debe recorrer también una cierta proporción de registros muertos). Encuentre la función $f(t)$.

Solución:

Sea $Z(t)$ el proceso de llegada de registros $\sim Poisson(rt)$.

Se escribirá el proceso $N(t)$ como una suma de procesos independientes:

$$N(t) = N_1(t) + N_2(t)$$

en que $N_1(t)$ es el número de registros vivos de entre los b registros iniciales y $N_2(t)$ es número de registros vivos de entre los nuevos que han llegado. El tiempo de vida de los registros distribuye exponencial a tasa L.

El valor esperado de $N_1(t)$ se calcula como b por la proporción de registros que logran vivir más que t, es decir:

$$E\{N_1(t)\} = b \cdot \Pr\{Vida > t\} = be^{-Lt}$$

Por otro lado, para calcular el valor esperado de $N_2(t)$ se necesita saber el tiempo en que estos registros llegaron. Para esto se condicionará en $Z(t)$; usando la técnica de desordenar los instantes de llegada de estos registros, se obtiene:

$$E\{N_2(t)\ /\ Z(t) = n\} = n \cdot p$$

donde p es la probabilidad de que un registro cualquiera esté vivo en t. Esta probabilidad se calcula como:

$$p = \Pr\{U + \exp(L) > t\}$$

donde U es el tiempo de llegada de un registro cualquiera (distribuye uniforme $[0,t]$). Luego condicionando en U, se tiene que:

$$\begin{aligned}
p &= \int_{x=0}^{t} \Pr\{U + \exp(L) > t\ /\ U = x\} \cdot \Pr\{U = x\} \\
&= \int_{x=0}^{t} \Pr\{\exp(L) > t - x\} \cdot \Pr\{U = x\} \\
&= \int_{x=0}^{t} e^{-L(t-x)} \cdot \frac{1}{t} dx = \frac{1}{Lt}(1 - e^{-Lt})
\end{aligned}$$

obteniendo así:

$$\begin{aligned}
E\{N_2(t)\ /\ Z(t) = n\} &= n \cdot p \\
&= \frac{n}{Lt}(1 - e^{-Lt})
\end{aligned}$$

Ahora:

$$\begin{aligned} E\left\{N_2(t)\right\} &= \sum_{n=0}^{\infty} E\left\{N_2(t) \;/\; Z(t)=n\right\} \cdot \Pr\left\{Z(t)=n\right\} \\ &= \frac{1}{Lt}(1-e^{-Lt}) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \Pr\left\{Z(t)=n\right\} \\ &= \frac{1}{Lt}(1-e^{-Lt}) \cdot rt = \frac{r}{L}(1-e^{-Lt}) \end{aligned}$$

Con lo que se obtiene:

$$\begin{aligned} E\left\{N(t)\right\} &= E\left\{N_1(t)\right\} + E\left\{N_2(t)\right\} \\ &= be^{-Lt} + \frac{r}{L}(1-e^{-Lt}) \end{aligned}$$

Por otra parte, el número de registros totales, es decir, $X(t) = M(t) + N(t)$ tiene como valor esperado los registros iniciales más el valor esperado de los registros que han llegado de acuerdo al proceso $Z(t)$:

$$E\left\{X(t)\right\} = b + rt$$

Finalmente se tiene que:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{E\left\{X(t)\right\}}{E\left\{N(t)\right\}} \\ &= \frac{b+rt}{be^{-Lt} + \frac{r}{L}(1-e^{-Lt})} \end{aligned}$$

8.

La llegada de buses al Museo de Arte del Parque Forestal se comporta como un Proceso de Poisson a tasa **a**. Cada bus trae **i** pasajeros con probabilidad **b(i)**; i=1,2,...M. El tiempo que pasa un pasajero en el museo es aleatorio y tiene distribución **G**. Sea $X(t)$ el número de pasajeros presentes en el museo en el instante t. Obtenga $E\{X(t)\}$.

Solución:

Sea $N(t)$ = Procesi de llegada de buses al Museo. Entonces:

$$E\{X(t)\} = \sum_n E\{X(t)\ /\ N(t) = n\} \cdot \Pr\{N(t) = n\}$$

Si se desordenan los instantes de llegada de estos n buses, cada uno llega en un instante distribuido $U(0,t)$.

Consideremos ahora uno cualquiera de estos buses y un pasajero cualquiera de un bus. La probabilidad que un pasajero esté presente en el Museo en el instante t es:

$$p = \Pr\{U + Y > t\}\ ;\ en\ que\ Y\ distribye\ G$$

Luego:

$$\begin{aligned} p &= \int_{x=0}^{t} \Pr\{U + Y > t\ /\ U = x\} \cdot \Pr\{U = x\} \\ &= \frac{1}{t}\int_{x=0}^{t} G(t-x)\,dx \end{aligned}$$

Por lo tanto, el nçumero esperado de pasajeros de un bus que estarçan presentes en el instante t, dado que llegaron i pasajeros en ese bus es: $p \cdot i$

Luego,

$$E\{pasajeros\ en\ el\ museo,\ en\ el\ ins\tan te\ t,\ de\ ese\ bus\} = \sum_{i=1}^{M} p \cdot i \cdot b(i)$$

Así se obtiene:

$$\begin{aligned} E\{X(t)\ /\ N(t) = n\} &= n \cdot p \cdot \sum_{i=1}^{M} i \cdot b(i) \\ E\{X(t)\} &= \sum_n \left[n \cdot p \cdot \sum_{i=1}^{M} i \cdot b(i) \cdot \Pr(N(t) = n) \right] \\ &= p \cdot \sum_{i=1}^{M} i \cdot b(i) \cdot \sum_n n \cdot \Pr\{N(t) = n\} \\ &= p \cdot \sum_{i=1}^{M} i \cdot b(i) \cdot at \end{aligned}$$

9.

Al hospital clínico de la Universidad Católica llegan pacientes a solicitar atención de acuerdo a un Proceso de Poisson a tasa λ. Se sabe que una proporción α de estos pacientes sólo enfrentan males menores, por lo que son atendidos en la posta del hospital y luego son despachados a sus hogares. El resto de los pacientes sufre enfermedades mayores y deben ser hospitalizados. El tiempo que permanece hospitalizado un paciente es una v.a. Asuma que los tiempos de hospitalización de los distintos pacientes son v.a. i.i.d. con distribución exponencial a tasa μ y que el hospital tiene capacidad ilimitada.

(a) Sea M(t) el número de pacientes hospitalizados en el instante t. Obtenga la densidad de probabilidades de M(t).

(b) Si se sabe que en el intervalo (0,t) llegaron n pacientes al hospital (de cualquier tipo), ¿cuál es la probabilidad que ninguno de ellos tenga una enfermedad mayor?

(c) Si se sabe que entre 0 y t llegaron m pacientes leves, ¿cuál es la probabilidad que en ese intervalo hayan llegado n pacientes con enfermedades menores?

Solución:

(a) En primer lugar se observa que el proceso de llegada de pacientes graves es Poisson $(\lambda(1-\alpha)t)$, debido a que corresponde a un proceso de descomposición. Llamemos N(t) a este proceso.

También se observa que para conocer el número de personas hospitalizadas en el instante t se requiere conocoer el instante de llegada de las personas al hospital. Podemos condicionar en el número de llegadas y desordenar los instantes de llegada. Así:

$$\Pr\{M(t)=n\} = \sum_{m=n}^{\infty} \Pr\{M(t)=n \,/\, N(t)=m\} \cdot \Pr\{N(t)=m\}$$

Es sabido que $M(t) \,/\, N(t)=m$ distribuye binomial de parámetros (m,p) donde p es la probabilidad de que la persona esté en el hospital en el instante t. Así,

$$\begin{aligned} p &= \Pr\{T>t\} \\ &= \Pr\{U+\exp(\mu)>t\} \\ &= \int_{y=0}^{t} \Pr\{\exp(\mu)>t-y\} \cdot \frac{dy}{t} \\ &= \frac{1-e^{-\mu t}}{\mu t} \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\Pr\{M(t)=n\} &= \sum_{m=n}^{\infty}\binom{m}{n}p^n(1-p)^{m-n}\cdot\frac{(\lambda(1-\alpha)t)^m\,e^{-\lambda(1-\alpha)t}}{m!}\\
&= \sum_{m=n}^{\infty}\frac{m!}{n!(m-n)!}p^n(1-p)^{m-n}\cdot\frac{(\lambda(1-\alpha)t)^m\,e^{-\lambda(1-\alpha)t}}{m!}\\
&= \frac{p^n e^{-\lambda(1-\alpha)t}}{n!}\sum_{m=n}^{\infty}\frac{1}{(m-n)!}(1-p)^{m-n}\cdot(\lambda(1-\alpha)t)^m\\
&= \frac{p^n e^{-\lambda t}\,(\lambda(1-\alpha)t)^n}{n!}\underbrace{\sum_{m=n}^{\infty}\frac{[(1-p)\lambda(1-\alpha)t]^{m-n}}{(m-n)!}}_{e^{(1-p)(1-\alpha)\lambda t}}\\
&= \frac{(\lambda(1-\alpha)pt)^n\,e^{-\lambda(1-\alpha)pt}}{n!}
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$M(t)\sim Poisson(\lambda(1-\alpha)pt)\qquad con\ p=\frac{1}{\mu t}(1-e^{-\mu t})$$

(b) Sea $N_1(t)$ llegada de pacientes leves y $N_2(t)$ la llegada de pacientes graves. Se pide:

$$\Pr\{N_2(t)=0\ /\ N(t)=n\}$$

Esto es equivalente a decir que sólo hayan llegado pacientes con enfermedades menores, por lo que:

$$\Pr\{N_2(t)=0\ /\ N(t)=n\}=\alpha^n$$

(c) Se pide $\Pr\{N_2(t)=n\ /\ N_1(t)=m\}$.
La descomposición de un proceso de Poisson, como en este caso, da como origen a 2 procesos de Poisson independientes entre sí. Luego:

$$\begin{aligned}
\Pr\{N_2(t)=n\ /\ N_1(t)=m\} &= \Pr\{N_2(t)=n\}\\
&= \frac{(\lambda(1-\alpha)t)^n\,e^{-\lambda(1-\alpha)t}}{n!}
\end{aligned}$$

10.

Considere un Proceso de Poisson No Homogéneo en que la tasa es igual a 2t para $t \leq 4$, y es igual a 8 para $t > 4$.

(a) Obtenga la función distribución de T_1

(b) Obtenga una expresión para la función distribución de T_2 / $T_1 = 5$

(c) Suponga que el tiempo se mide en horas y que se sabe que en las primeras 4 horas se produjeron 8 eventos; calcule la probabilidad que 4 de ellos se hayan producido durante la primera hora.

Solución:

(a) Se pide calcular $\Pr\{T_1 \leq x\}$ Así,

$$\Pr\{T_1 > x\} = \Pr\{N(x) = 0\}$$

En los procesos no homogéneos, se tiene que:

$$\Pr\{N(t_1) - N(t_2) = n\} = \frac{[m(t_1, t_2)]^n \cdot e^{-m(t_1,t_2)}}{n!}$$

donde $m(t_1, t_2) = \int\limits_{t=t_1}^{t_2} \lambda(t)dt.$

En este caso se necesita $m(0, x)$ por lo que:

para $x \leq 4$,

$$\begin{aligned} m(0,x) &= \int\limits_{t=0}^{x} 2tdt \\ &= x^2 \\ \Rightarrow \Pr\{N(x) = 0\} &= e^{-x^2} \\ \Rightarrow \Pr\{T_1 \leq x\} &= 1 - e^{-x^2} \end{aligned}$$

para $x > 4$,

$$\begin{aligned} m(0,x) &= \int\limits_{t=0}^{4} 2tdt + \int\limits_{t=4}^{x} 8dt \\ &= 8x - 16 \\ \Rightarrow \Pr\{N(x) = 0\} &= e^{-(8x-16)} \\ \Rightarrow \Pr\{T_1 \leq x\} &= 1 - e^{-(8x-16)} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\Pr\{T_1 \leq x\} = \begin{cases} 1 - e^{-x^2} & \text{para } x \leq 4 \\ 1 - e^{-(8x-16)} & \text{para } x > 4 \end{cases}$$

(b)

$$\Pr\{T_2 > x \,/\, T_1 = 5\} = \Pr\{N(5+x) - N(5) = 0\}$$

Por lo que se necesita $m(5, 5+x)$.

$$\begin{aligned} m(5, 5+x) &= \int_{t=5}^{5+x} 8dt \\ &= 8x \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \Pr\{N(5+x) - N(5) = 0\} &= e^{-8x} \\ \Rightarrow \Pr\{T_2 \leq x \,/\, T_1 = 5\} &= 1 - e^{-8x} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \Pr\{N(1) = 4 \,/\, N(4) = 8\} &= \frac{\Pr\{N(1) = 4, N(4) = 8\}}{\Pr\{N(4) = 8\}} \\ &= \frac{\Pr\{N(1) = 4, N(4) - N(1) = 4\}}{\Pr\{N(4) = 8\}} \end{aligned}$$

Por incrementos independientes, se tiene que:

$$\Pr\{N(1) = 4 \,/\, N(4) = 8\} = \frac{\Pr\{N(1) = 4\} \cdot \Pr\{N(4) - N(1) = 4\}}{\Pr\{N(4) = 8\}}$$

Luego, basta calcular estas probabilidades. Así,

$$\begin{aligned} \Pr\{N(1) = 4\} &= \frac{e^{-1}}{4!} \\ \Pr\{N(4) - N(1) = 4\} &= \frac{e^{-15}(15)^4}{4!} \\ \Pr\{N(4) = 8\} &= \frac{e^{-16}(16)^8}{8!} \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\Pr\{N(1) = 4 \,/\, N(4) = 8\} = \frac{(15)^4 \cdot 8!}{(16)^8 \cdot 4!4!}$$