



**Technische
Universität
Braunschweig**

Umdruck zur Vorlesung

Turbulente Strömungen

**Dr.-Ing. P. Scholz
Prof. Dr.-Ing. R. Radespiel**

Ausgabe: Wintersemester 2014/2015

Institut für Strömungsmechanik
Technische Universität Braunschweig
Hermann-Blenk-Str. 37
D-38108 Braunschweig

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
1.1	Eigenschaften der Turbulenz	1
1.2	Hierarchie der Bewegungsgleichungen	5
1.2.1	Kinetische Gastheorie	6
1.2.2	Gültigkeitsbereich der Navier-Stokes-Gleichungen	8
2	Turbulenzentstehung	9
2.1	Überblick	9
2.2	Erstes Stadium (laminar-instabil)	10
2.2.1	Primäre Stabilitätstheorie	12
2.2.2	Sekundäre Stabilitätstheorie	17
2.3	Zweites Stadium (instabil-turbulent)	17
2.4	Transitionsbeeinflussende Faktoren	19
2.4.1	Reynoldszahl	19
2.4.2	Turbulenzgrad	19
2.4.3	Druckgradient und Ablösung	21
2.4.4	Instationarität der Hauptströmung	23
2.4.5	Oberflächenrauigkeit	23
2.4.6	Stromlinienkrümmung	23
2.4.7	Dreidimensionalität der Hauptströmung	25
2.4.8	Weitere Faktoren	25
2.5	Transitionsvorhersage	26
2.5.1	Methodenübersicht	26
2.5.2	e^N -Methode für zweidimensionale Grenzschichten	28
2.5.3	e^N -Methode für dreidimensionale Grenzschichten	30
3	Grundlagen der ausgebildeten Turbulenz	33
3.1	Mittelwerte	33
3.1.1	Ergodizität	35
3.1.2	Rechenregeln für Mittelwerte	35
3.2	Die Kontinuitätsgleichung	36
3.3	Die Bewegungsgleichungen von Reynolds	37
3.3.1	Physikalische Deutung der Reynolds-Spannungen	40

3.4	Die Grenzschichtgleichungen	41
3.5	Energiegleichung der turbulenten Bewegung	44
4	Numerische Simulation turbulenter Strömungen	51
4.1	Methodenübersicht	51
4.2	Direkte Numerische Simulation (DNS)	52
4.3	Grobstruktursimulation (LES)	52
4.4	RANS-Simulation	54
4.4.1	Wirbelviskositätsmodelle	54
4.4.2	Reynoldsspannungsmodelle	62
4.5	Detached-Eddy-Simulation	63
5	Statistische Theorie der Turbulenz	65
5.1	Einführung	65
5.2	Korrelationen	69
5.2.1	Grundlagen der Korrelation	69
5.2.2	Doppelkorrelationen	70
5.2.3	Bestimmung von Transportgeschwindigkeiten	73
5.3	Die Taylor-Hypothese	79
5.4	Die charakteristischen Längen der Turbulenzstruktur	81
5.4.1	Der Makro-Maßstab	81
5.4.2	Die Mikro-Strukturlängen („micro scale“)	83
5.4.3	Die turbulente Reynolds-Zahl	86
5.5	Spektralanalyse von Strömungen	88
5.5.1	Grundlagen	88
5.5.2	Schnelle Fourier-Transformation (FFT)	91
5.5.3	Zusammenhang von Spektraldichte und Korrelation	92
5.5.4	Bestimmung charakteristischer Längen aus Spektralfunktionen	96
5.5.5	Ergänzende Bemerkungen	98
5.6	Weitere statistische Funktionen	100
5.6.1	Verteilungsfunktion (Wahrscheinlichkeitsintegral)	100
5.6.2	Häufigkeitsdichte	101
5.6.3	Statistische Momente	103
5.6.4	Ergänzende Bemerkungen	107
5.7	Die Anisotropie-Invarianzkarte	111
6	Dynamik isotroper Turbulenz	117
6.1	Einleitung	117
6.2	Eigenschaften isotroper Turbulenz	119
6.2.1	Korrelationstensor 1. Ordnung $\overline{p'(A) u'_j(B)}$	119
6.2.2	Korrelationstensor 2. Ordnung $(Q_{i,j})_{AB}$	119
6.2.3	Tripel-Korrelationstensoren 3. Ordnung $S_{ik,j}$	122
6.2.4	Korrelationsbeziehung isotroper Turbulenz	123

6.3	Die Dynamik des Energiespektrums	125
6.3.1	Ansatz	125
6.3.2	Das Spektrum bei kleinen Re_T	126
6.3.3	Das Spektrum bei großen Re_T	129
6.4	Die Kolmogoroff'schen Hypothesen	130
6.4.1	Die Lokalisotropie-Hypothese	130
6.4.2	Das Kolmogoroffsche 5/3-Gesetz	131
6.5	Das Energiespektrum isotroper Turbulenz	132
7	Scherströmungen	135
7.1	Typen von Scherströmungen	135
7.2	Struktur der Scherströmungen	139
7.2.1	Grenzflächenstruktur / Intermittenz	140
7.2.2	Lokalisotropie	144
7.2.3	Kohärente Strukturen	145
7.3	Ähnlichkeitslösungen	146
7.3.1	Der ebene Freistrahle in ruhender Umgebung	147
7.3.2	Der ebene Freistrahle in gleichförmig mitbewegter Umgebung	149
7.3.3	Andere Ähnlichkeitslösungen	151
7.3.4	Ausbildung der Ähnlichkeit	153
7.4	Gleichgewicht der Turbulenzstruktur	155
7.4.1	Gleichgewichtsbedingungen	155
7.4.2	Turbulenzstruktur im Gleichgewichtszustand	157
7.5	Die ebene turbulente Wandgrenzschicht	161
7.5.1	Aufbau und Phänomenologie	161
7.5.2	Profile der Strömungsgrößen	165
7.5.3	Turbulenzstruktur	169
7.6	Andere turbulente Strömungsformen	173
7.6.1	Der turbulente Freistrahle (rund)	175
7.6.2	Die ebene Nachlaufströmung	181
7.6.3	Die freie Scherschicht	183
8	Beeinflussung von Strömungen	189
8.1	Einleitung	189
8.2	Klassifikation	190
8.3	Verzögern der Transition	191
8.3.1	Laminare Grenzschichten mit Absaugung	192
8.3.2	Viskositätsgradienten	194
8.3.3	Aktive Dämpfung von Tollmien-Schlichting-Wellen	195
8.4	Modifikation der Turbulenzstruktur	196
8.4.1	Turbulente Grenzschichten mit Additiven	197
8.4.2	Riblets	199
8.4.3	Generische Methoden	202

Kapitel 1

Einführung

1.1 Eigenschaften der Turbulenz

In der Natur und Technik sind die Strömungen im Allgemeinen turbulent und die laminaren Strömungen spielen nur eine untergeordnete Rolle. Betrachtet man z.B. eine Wasserströmung durch ein Rohr mit einem Durchmesser von $d = 2$ cm, so ergibt sich die kritische Reynoldszahl von $Re = 2300$ bereits bei einer Strömungsgeschwindigkeit von $u = 11.5$ cm/s. Jede Wasserströmung durch dieses Rohr mit einer größeren Strömungsgeschwindigkeit ist turbulent. In vielen Fachbereichen sind turbulente Strömungsvorgänge von großer Bedeutung für die Forschung, Entwicklung und Produktion. Die folgende Aufzählung kann deshalb nur beispielhaft sein.

- Astronomie (Sternbildung, Spiralnebel etc.)
- Meteorologie (Wetter, Wolken etc.)
- Umwelttechnik (Schadstoffausbreitung in der Atmosphäre etc.)
- Verfahrenstechnik (Wärme- und Stoffdiffusion, Mischung etc.)
- Verkehrstechnik (Umströmung von Flugzeugen, Kraftfahrzeugen, Schiffen)
- Strömungsmaschinenbau (Pumpen, Turbinen etc.)

Aber auch vom rein theoretischen Standpunkt hat die Turbulenz eine große Anziehungskraft, da es sich um ein stark nichtlineares Phänomen mit sehr vielen Freiheitsgraden handelt. Wir wollen uns zunächst einigen grundsätzlichen Fragen zuwenden:

1. Was ist Turbulenz?

Diese Frage lässt sich leider bis heute nicht eindeutig beantworten obwohl sich viele namhafte Wissenschaftler wie z.B. Reynolds, Prandtl, Heisenberg, Kolmogorow, Landau und von Neumann mit ihr beschäftigt haben. Horace Lamb soll einmal gesagt haben: *Wenn ich in den Himmel kommen sollte, erhoffe ich Aufklärung über zwei Dinge:*

Quantenelektrodynamik und Turbulenz. Was den ersten Wunsch betrifft, bin ich ziemlich zuversichtlich. Auf Richard Feynman geht der Satz zurück: Turbulence is the last great unsolved problem of classical physics. Das Problem der Turbulenz ist eng verbunden mit den folgenden Eigenschaften, die alle turbulenten Strömungen auszeichnen:

- Instationarität
- Dreidimensionalität
- Diffusion (starke Vermischung)
- Dissipation (Energiefluss von den großen zu den kleinen Strukturen)
- Nicht skalierbar (Grobstruktur \neq Feinstruktur)

Zunächst bezeichnen wir einen Strömungszustand als turbulent, wenn der *mittleren* Hauptbewegung des Fluids unregelmäßige Störbewegungen überlagert sind, für die kein Relativsystem existiert, von dem aus die Strömung stationär erscheint. Die zeitabhängige Bewegung ist ferner dreidimensional, da durch den Mechanismus der Wirbelstreckung und Wirbelkipfung Geschwindigkeitsfluktuationen über alle Wellenlängen und Raumrichtungen verteilt werden. Dabei ist eine obere Grenze der Wellenlänge durch die äußeren Randbedingungen der Strömung und eine untere durch die Zähigkeit gegeben.

2. Wie entsteht Turbulenz?

Diese Frage hat zwei Aspekte (Stabilitätsfrage):

- Entstehung von Turbulenz aus einer anfänglich laminaren Strömung. Beachte: Formal muss für beliebige Reynoldszahlen unter stationären Randbedingungen eine exakte stationäre Lösung der Navier-Stokes'schen Gleichungen existieren. In der Natur werden aber nur die stationären Lösungen verwirklicht, die gegenüber kleinen Störungen stabil sind (kleine Störungen müssen mit der Zeit abklingen). Diese Stabilitätseigenschaft ist ein Kriterium dafür, ob ein System dazu neigt, seinen derzeitigen Zustand beizubehalten oder zu verändern.
- Entstehung bzw. Aufrechterhaltung der Turbulenz (Produktion) in einer bereits turbulenten Strömung. Warum bleibt eine turbulente Strömung turbulent?

3. Wie wirkt sich die Turbulenz aus?

Lange vor dem eigentlichen Studium des Turbulenzphänomens war eine der wesentlichen Eigenschaften turbulenter Strömungen dem Rohrhydrauliker bekannt: Der erhöhte Druckverlust in turbulent durchströmten Rohren aufgrund der *scheinbaren Zähigkeit*, ein durch turbulente Diffusion hervorgerufener Effekt. Diese verstärkte

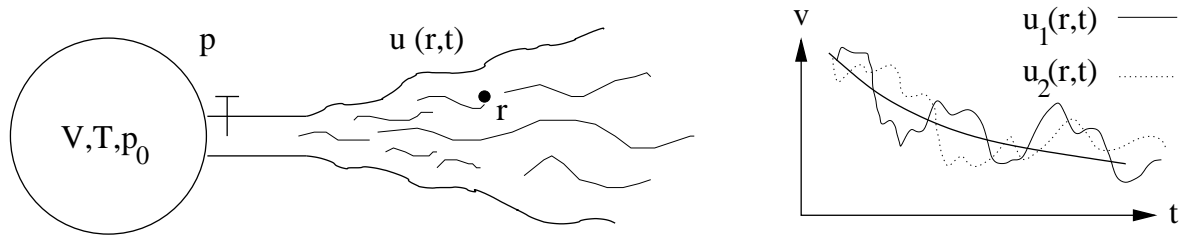


Abbildung 1.1: Geschwindigkeits-Zeit-Verlauf an der Stelle r , Δt Sekunden nach öffnen des Schiebers

Diffusion ist wohl die hervorragendste Eigenschaft turbulenter Strömungen. Sie liegt im Allgemeinen um ein Mehrfaches über den molekularen Werten. Diffundiert werden vektorielle und skalare Größen (Impuls, Energie, Wärme, Stoffe).

4. Wie wird die Turbulenz beschrieben?

Wir betrachten zunächst das in Abb. 1.1 dargestellte Gedankenexperiment. In einem Kessel endlichen Volumens befindet sich ein komprimiertes Gas, das nach Öffnen eines Schiebers über ein Rohrstück aus dem Kessel entweicht, bis der Kesseldruck p_0 gleich dem Umgebungsdruck p ist. An der Stelle r werde während des Ausströmvorganges die in Abb. 1.1 dargestellte Geschwindigkeit $u_1(r,t)$ gemessen. Während eine laminare Strömung bei jeder weiteren Realisierung des Experimentes (d.h. eine Wiederholung des Versuches unter exakt gleichen Bedingungen) wieder den gleichen Geschwindigkeitsverlauf ergeben würde, wird bei einer turbulenten Strömung auf Grund von Instabilitäten und unkontrollierbaren Änderungen in den Anfangs- und Randbedingungen jede Realisierung zu einem anderen Resultat führen $u_2(r,t)$. Diese Tatsache impliziert, dass es sich bei der Turbulenz um einen *stochastischen Prozess* handelt, dessen Verlauf durch statistische Größen (mittlere Strömungsgeschwindigkeit, mittlere Schwankungsintensität, Wahrscheinlichkeitsverteilungen, charakteristische Längen, Korrelationen, Spektren, etc.) beschrieben werden muss. Die Frage nach der *exakten* Strömungsgeschwindigkeit u zur Zeit t wird damit sinnlos und muss ersetzt werden durch die Frage nach der Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Strömungsgeschwindigkeit zur Zeit t einen Wert zwischen u und $u + \Delta u$ annimmt.

Neben dem stochastischen Charakter der Turbulenz ist ein weiteres Merkmal vorhanden, das in turbulenten Strömungen beobachtet werden kann. Die Energie der Turbulenz ist hauptsächlich in den größeren Wirbeln gebunden, wobei diese fortwährend aus der Hauptströmung entnommen wird. Durch die sogenannte *Energiekaskade* wird die Energie an immer kleinere Wirbel übertragen. Bei diesem Vorgang zerfallen die großen Wirbel in immer kleinere Strukturen. In den kleinsten Wirbeln, deren Dimensionen sich um Größenordnungen von den Abmessungen der größten Wirbel unterscheiden, wird die turbulente Energie durch Reibung in Wärme dissipiert.

In diesem Zusammenhang sei das einzig bekannte Beispiel von Poesie in der Strömungslehre — der vielzitierte Vers von *L.F. Richardson* — nicht verschwiegen:

*Big whirls have little whirls,
That feed on their velocity;
Little whirls have lesser whirls,
And so on to viscosity.*

Eine Einteilung turbulenter Strömungen nach charakteristischen Merkmalen führt zu folgender Klassifizierung:

Isotrope Turbulenz:

Alle statistischen Eigenschaften (Mittelwerte der Schwankungskomponenten) sind überall im Strömungsfeld gleich und richtungsunabhängig (*Translations- und Rotationsinvarianz*):

$$\overline{u'^2} = \overline{v'^2} = \overline{w'^2} = \text{konst.} \quad (1.1)$$

Für Schubspannungen gilt:

$$\overline{u'v'} = \overline{v'w'} = \overline{w'u'} = 0 \quad (1.2)$$

Isotrope Turbulenz ist im Experiment nur annähernd in einem begrenzten Bereich stromab eines Siebes realisierbar. Sie ist die einfachste und idealisierteste turbulente Strömungsform aber dennoch von praktischer Bedeutung, da auch in komplexeren Strömungen die kleinskaligen Turbulenzelemente isotrope Eigenschaften zeigen.

Homogene Turbulenz:

Alle statistischen Eigenschaften (Mittelwerte der Schwankungskomponenten) sind überall im Strömungsfeld gleich (*Translationsinvarianz*).

$$\overline{u'^2} = \text{konst.}, \overline{v'^2} = \text{konst.}, \overline{w'^2} = \text{konst.} \quad (1.3)$$

Homogene Turbulenz ist experimentell recht gut realisierbar. Sie ist wichtig, da viele turbulente Strömungen oft wenigstens eine oder zwei ausgezeichnete Richtungen haben, in denen die Turbulenz als homogen betrachtet werden kann.

Scherturbulenz:

Das ist der Normalfall einer in der Praxis auftretenden turbulenten Strömung, in der keine der oben genannten Vereinfachungen angesetzt werden kann. Typische Beispiele sind der Freistrahle, der Nachlauf, die Grenzschicht, etc. Die physikalische Durchdringung und theoretische Behandlung von Scherturbulenz ist äußerst schwierig. Diese Strömungen sind daher noch weitgehend unverstanden.

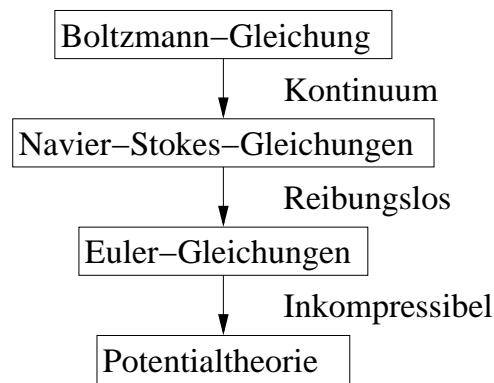


Abbildung 1.2: Hierarchie der Bewegungsgleichungen

Die Erforschung der turbulenten Vorgänge ist aufgrund ihrer hohen Komplexität trotz jahrzehntelanger Bemühungen noch weit von einer echten Durchdringung des Problems entfernt. Praktisches Ziel dieser Forschung ist letztlich, Zusammenhänge zwischen den Schwankungseigenschaften und den mittleren bzw. integralen Strömungseigenschaften aufzufinden, um somit eine Theorie im Sinne einer zuverlässigen Berechnungsgrundlage zu erhalten. Für diese Zusammenhänge werden bis heute Hypothesen benutzt, die zwar physikalisch-anschaulich oder dimensionsanalytisch plausibel gemacht werden können, die aber nicht streng aus den physikalischen Grundprinzipien hergeleitet werden können. Sie enthalten meist auch empirische Elemente, z.B. mehr oder weniger „universelle“ Konstanten, die aus experimentellen Daten zu bestimmen sind. Das Experiment ist schon deshalb unverzichtbar in der Turbulenzforschung.

1.2 Hierarchie der Bewegungsgleichungen

Die vollständigste Beschreibung von Bewegungsvorgängen in Gasen wird durch die kinetische Gastheorie gegeben, die nachfolgend in Kap.1.2.1 noch kurz erläutert werden wird und deren Zusammenhänge schließlich die sog. Boltzmann-Gleichung ergeben. Wie in Abb.1.2 dargestellt lassen sich durch zunehmende Vereinfachungen weitere Gleichungen herleiten. Zunächst werden mit der Annahme eines Kontinuums die Boltzmann-Gleichungen in die Navier-Stokes-Gleichungen überführt. Dass, bzw. ob dies zulässig ist wird in Kap.1.2.2 diskutiert. Nimmt man ferner reibungslose Strömung an, so entstehen die Euler-Gleichungen und durch eine weitere Reduktion auf inkompressible Strömungen erhält man die lineare Potenzialgleichung. Dies ist die erste Gleichung in dieser Hierarchie, die analytisch lösbar ist.

Mit den Vereinfachungen nimmt die Komplexität der Gleichungen ab, gleichzeitig wird aber auch der Gültigkeitsbereich eingeschränkt.

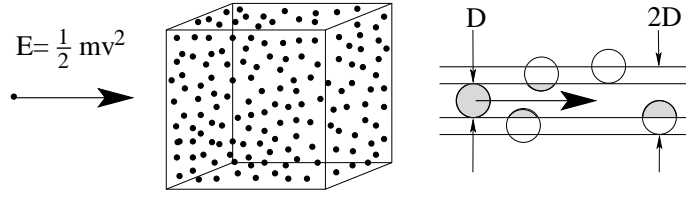


Abbildung 1.3: Ermittlung der freien Weglänge in einem Fluidvolumen

1.2.1 Kinetische Gastheorie

Die kinetische Gastheorie ist oft Vorbild für die Betrachtung komplexer Systeme und geht vom tatsächlichen Bau der Materie aus. Sie liefert eine mikroskopische Beschreibung der makroskopischen Größen $\rho, T, \underline{u}, p$ und η . Grundgedanke ist die Eigenschaften von idealen Gasen aus den mechanischen Bewegungsvorgängen einzelner Teilchen (Atome oder Moleküle) abzuleiten, indem man ihnen folgende Eigenschaften zugeordnet: die Teilchen seien kugelförmig mit der Masse m und dem Radius R , sie verhalten sich vollkommen elastisch und üben keine Kräfte aufeinander aus, solange sie sich nicht berühren. Beim Zusammenstoß, der den Gesetzen des elastischen Stoßes gehorcht, tauschen sie Energie und Impuls aus. Ansonsten bewegen sie sich voneinander unabhängig ohne eine Richtung im Raum zu bevorzugen (Brownsche Molekularbewegung; äußere Kräfte werden vernachlässigt).

Die Dichte stellt in der kinetischen Gastheorie die Menge an Teilchen in einem gewissen Volumen dar. Da das Volumen fest steht, sich die Teilchen jedoch fortwährend bewegen, würde prinzipiell die Dichte laufend variieren. Dies tritt aufgrund der Menge an Teilchen nicht auf: Beispielsweise befinden sich bei Raumtemperatur etwa $N/V = 2,7 \times 10^{25} \text{ m}^{-3} = 2,7 \times 10^{16} \text{ mm}^{-3} = 2,7 \times 10^7 \text{ } \mu\text{m}^{-3}$ Luft-Teilchen in einem Volumen, die Dichteänderung durch die molekulare Bewegung der Teilchen über die Volumengrenzen ist also nicht bemerkbar.

Eine wichtige Größe stellt die *Stoßzahl*, bzw. die *mittlere freie Weglänge* dar. Hierzu wird gemäß Abb. 1.3 ein Volumenelement mit ruhenden Teilchen betrachtet, in das ein Teilchen mit der kinetischen Energie $E = \frac{1}{2}mv$ geschossen wird. Das bewegte Teilchen wird mit den ruhenden Teilchen wechselwirken, wenn der Mittelpunkt des Stoßpartners vom Mittelpunkt des beweglichen Teilchens um weniger als $D = 2R$ entfernt ist. Das in der Zeit Δt von dem Teilchen überstrichene Zylindervolumen, in dem sich potentielle Stoßpartner befinden könnten, ist folglich $\pi D^2 v \Delta t$. Wenn nun N/V -Teilchen pro Einheitsvolumen vorhanden sind, so entfallen auf das Zylindervolumen $Z = (N/V)\pi D^2 v \Delta t$ Stoßpartner (Z wird als *Stoßzahl* bezeichnet). Ist nun $(N/V)\pi D^2 v \Delta t = 1$ so ist $v \Delta t$ identisch mit der mittleren freien Weglänge l und es gilt:

$$l = \frac{1}{(N/V)\pi D^2} \quad (1.4)$$

Beispielhaft für Luft bei Raumtemperatur mit $N/V = 2,7 \times 10^{16} \text{ mm}^{-3}$ und $D = 2,9 \times 10^{-10} \text{ m}$ beträgt die freie Weglänge $l \approx 0,1 \mu\text{m}$ und die Stoßzahl $Z = 4,5 \times 10^9 \text{ s}^{-1}$. Es ist zu beachten, dass l im Allgemeinen viel größer ist als der mittlere Abstand der Moleküle. Wenn sich die Stoßpartner bewegen, werden die Stöße häufiger und l wird um den Faktor $1/\sqrt{2}$ kleiner.

Weitere Bausteine der kinetischen Gastheorie, auf die hier nicht weiter eingegangen wird, sind der Impulsaustausch zwischen den Teilchen (analog zu den mechanischen Gesetzen des geraden und schiefen Stoßes), der makroskopische Druck (analog zu einer einfachen Impulsbilanz der Moleküle an einer festen Wand) und die Geschwindigkeitsverteilung der Elementarteilchen. Letztere führt auf die sog. Maxwell-Boltzmann-Verteilungen, aus denen folgt, dass für ein Gas die wahrscheinlichste Geschwindigkeit¹ abhängig von der Temperatur T und der Molekülmasse m ist:

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \quad (1.5)$$

Hierin ist k die sog. Boltzmannkonstante, eine stoffunabhängige Naturkonstante $k = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$.

Fasst man die einzelnen Bausteine der kinetischen Gastheorie in einer Statistik zusammen, so erhält man die Boltzmann-Gleichungen. Diese setzt lokale und konvektive Veränderungen einer statistischen Verteilungsfunktion mit einem Kollisionsintegral gleich, welches Teilcheninteraktionen beschreibt. Auch auf Basis der Boltzmann-Gleichung können Strömungslöser entwickelt werden, die üblicherweise als *Lattice-Boltzmann-Verfahren* bezeichnet werden. Kernproblem dieser Verfahren ist die Formulierung eines korrekten Kollisionstermes. Lattice-Boltzmann-Verfahren arbeiten (ähnlich zu den Verfahren zur Lösung der Navier-Stokes-Gleichung) auf Netzknoten, in denen die Statistik erhoben wird. Sie haben nur einen geringen Speicherplatzbedarf pro Netzknoten und sind daher massiv parallelisierbar, verlangen im Gegenzug jedoch äußerst feine Gitter. Da die Gitter meist erheblich feiner sind als charakteristische Strukturen der Körperoberflächen sind keine körperangepassten Gitter vonnöten, in der Regel werden äquidistante, strukturierte Netze verwendet. Lattice-Boltzmann-Verfahren werden oft dort eingesetzt, wo sehr komplexe Geometrien auftauchen. Naturgemäß lassen sich Mehrphasenströmungen und Strömungen mit Wechselwirkungen verschiedener Materialien besser formulieren. Allerdings ist auch mit diesen Methoden keine exakte Beschreibung turbulenter Phänomene möglich - meist greift man hier auf Turbulenzmodelle der sog. Grobstruktursimulation zurück, siehe hierzu Kap. 4.3.

¹Hier sei bemerkt, dass die wahrscheinlichste Geschwindigkeit nicht gleichzusetzen ist mit dem makroskopischen Geschwindigkeitsvektor \underline{u} . Die Maxwell-Boltzmann-Verteilungen geben die Bewegungen auf molekularer Ebene an

1.2.2 Gültigkeitsbereich der Navier-Stokes-Gleichungen

Eine wesentliche Vereinfachung der Boltzmann-Gleichungen ist die Annahme eines Kontinuums und die daraus resultierenden Navier-Stokes-Gleichungen. Bei der Abschätzung des Gültigkeitsbereiches dieser Annahme ist die Knudsenzahl Kn hilfreich, die als Verhältnis der mittleren freien Weglänge l und einer charakteristischen makroskopischen Länge L definiert ist:

$$Kn = \frac{l}{L} \quad (1.6)$$

Wenn die mittlere freie Weglänge l klein gegenüber den betrachteten makroskopischen Abmessungen der Strömung L ist, so sind molekulare Bewegungen (insb. Stöße) sehr häufig und werden daher nicht als Einzelphänomene wahrgenommen, sondern als integrale Werte Dichte, Druck, etc. Es lassen sich folgende Bereiche der Knudsen-Zahl einteilen:

- $10 < Kn \rightarrow$ Gebiet der freien Molekülbewegung (ohne Teilchenkollisionen)
- $0,1 < Kn < 10 \rightarrow$ Übergangsgebiet
- $0,01 < Kn < 0,1 \rightarrow$ Gleitströmung
- $Kn < 0,01 \rightarrow$ Kontinuum

Nun entsteht die Frage, in welchem Bereich das Phänomen der Turbulenz eingeordnet werden kann. Dazu sollen die Abmessungen der kleinsten turbulenten Wirbel mit der mittleren freien Weglänge verglichen werden. Stellvertretend für die Dimension der kleinsten turbulenten Wirbel kann das Kolmogoroff-Längenmaß benutzt werden - eine Größe, die bei der Behandlung der Dynamik der Turbulenz in Kap.6.4 eingeführt werden wird.

Als ein charakteristisches Beispiel sei das Kolmogoroff-Längenmaß in der Grenzschicht eines umströmten Automobils gegeben (aus *Wilcox (2006)*): $L \approx 10 \mu m$. Mit der bereits abgeschätzten mittleren freien Weglänge von $l = 0,1 \mu m$ ergibt sich eine Knudsenzahl von $Kn \approx 0,01$. Selbst die kleinsten turbulenten Strukturen weisen demnach eine sehr kleine Knudsenzahl auf. Daher kann die Turbulenz generell als ein *kontinuumsmechanisches* Problem aufgefasst und mit Hilfe der Navier-Stokes-Gleichungen beschrieben werden.

Kapitel 2

Turbulenzentstehung

2.1 Überblick

Im Jahre 1883 veröffentlichte *Osborne Reynolds* eine Arbeit, in der über die Beobachtung eines neuen Strömungsphänomens berichtet wurde. Er fand heraus, dass die Strömung in einem Rohr, die er durch einen Farbfaden sichtbar gemacht hatte, nach Überschreiten einer bestimmten Strömungsgeschwindigkeit Instabilitätserscheinungen aufwies, die am Zerflattern des Farbfadens erkennbar waren. Es zeigte sich jedoch, dass nicht die Größe der Strömungsgeschwindigkeit c allein, sondern ein dimensionsloser Parameter $(cL\rho)/\mu$ das Stabilitätsverhalten bestimmte. Dieser Ähnlichkeitsparameter wird heute *Reynoldszahl* Re genannt; er stellt das Verhältnis zwischen den Trägheits- und den Zähigkeitskräften dar:

$$Re = \frac{cL\rho}{\mu} = \frac{cL}{\nu} \quad (2.1)$$

$c \dots$ charakteristische Geschwindigkeit (z.B. Volumenstrom / Fläche)

$L \dots$ charakteristische Länge (z.B. Rohrdurchmesser)

Unterhalb einer bestimmten kritischen Reynoldszahl ist die betrachtete Rohrströmung laminar und oberhalb zeigt sie ein instabiles Verhalten. Diese Instabilität führt im Allgemeinen zum turbulenten Zerfall.

Der oben beschriebene laminar-turbulente Grenzschichtumschlag gehört in die Kategorie der natürlichen Transition. Darüber hinaus existieren weitere Arten des Grenzschichtumschlags:

- Natürliche Transition
- Bypass Transition
- Ablösungsinduzierte Transition
- Querströmungsinduzierte Transition

- Kompressibilitätsbedingte Transition (bei Hyperschall-Strömungen)

Beim Übergang vom laminaren zum turbulenten Strömungszustand kann man für den Fall einer ebenen Platte bei kleinen Störungen der Zuströmung (natürliche Transition) folgende Ereigniskette aufstellen, vgl. Abb. 2.1:

- 1. Stabilität:** In diesem Stadium werden alle Störungen gedämpft und die Grenzschicht bleibt laminar.
- 2. Instabilität:** Nach dem Überschreiten der Indifferenz-Reynoldszahl Re_{ind} werden zunächst zweidimensionale Störungen angefacht, wobei sich sogenannte Tollmien-Schlichting-Wellen ausbilden. Im weiteren Verlauf werden zusätzlich dreidimensionale Störungen angefacht, und es kommt zur Ausbildung von Längswirbel (λ -Strukturen). Weder die Tollmien-Schlichting-Wellen, noch die λ -Strukturen haben zunächst einen Einfluss auf die integralen Grenzschichtparameter, wie z.B. die Grenzschichtdicke δ oder die Wandschubspannung τ_w .
- 3. Einsetzen der Turbulenz:** Ab einer kritischen Reynoldszahl Re_{st} (st = Start der Turbulenzentstehung) beginnen die dreidimensionalen Strukturen zu zerfallen und die Störungen werden nicht-linear angefacht. Es kommt zur Ausbildung von Turbulenzflecken (engl. "Spots"), die willkürlich im Raum und in der Zeit entstehen und verschwinden. Der Grenzschichtzustand ist intermittierend, d.h. zu bestimmten Zeitpunkten laminar und zu anderen Zeitpunkten turbulent. Erst ab der kritischen Reynoldszahl kann eine Änderung der Grenzschichtgrößen beobachtet werden; die Schubspannung an der Wand τ_w steigt, der Formfaktor H_{12} sinkt.
- 4. Turbulente Grenzschicht:** Der laminar-turbulente Übergang ist durch das Zusammenwachsen der Turbulenzflecken zu einer vollturbulenten Grenzschicht an der Stelle Re_{end} abgeschlossen.

Während für das Einsetzen der Turbulenz noch keine analytische Möglichkeit der Berechnung existiert, ist das Verständnis der mit der Instabilität zusammenhängenden Vorgänge bereits in hohem Grade fortgeschritten.

2.2 Erstes Stadium (laminar-instabil)

Im ersten Stadium des laminar-turbulenten Grenzschichtumschlags werden zunächst die zweidimensionalen Störungen angefacht. Zur Untersuchung dieses Vorganges wird die primäre Stabilitätstheorie verwendet. Die sekundäre Stabilitätstheorie dient zur Beschreibung der Anfachung von dreidimensionalen Störungen.

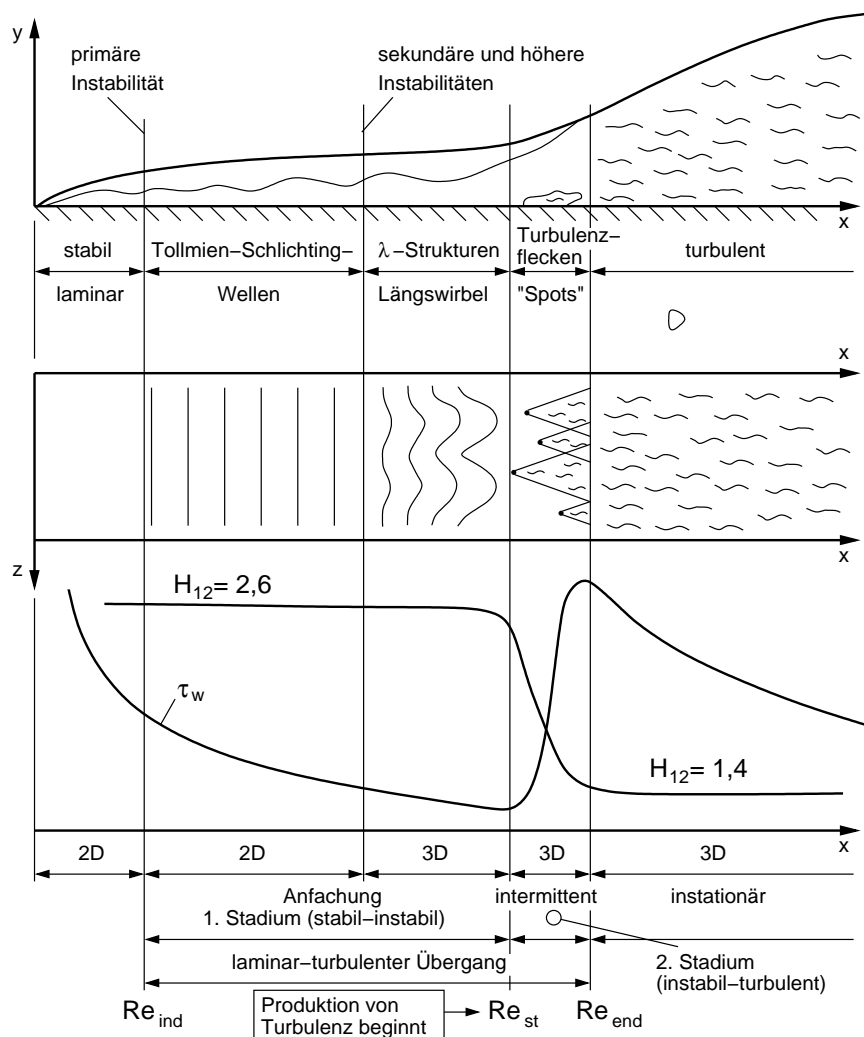


Abbildung 2.1: Schematische Darstellung der Phasen des laminar-turbulenten Übergangs, *Hirschel (1979)*

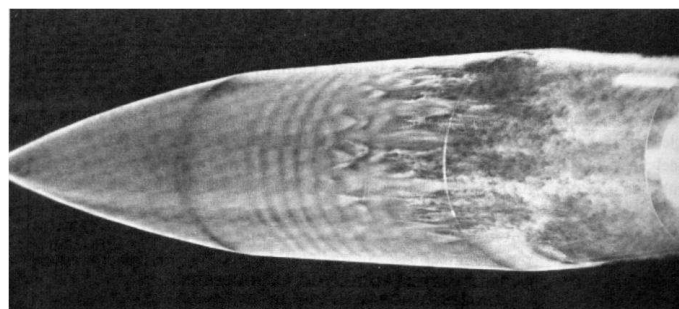


Abbildung 2.2: Turbulenzentstehung in der Grenzschicht eines rotationssymmetrischen Körpers, *Goldstein (1983)*

2.2.1 Primäre Stabilitätstheorie

Bei der primären Stabilitätstheorie für Parallelströmungen handelt es sich um eine Methode der kleinen Störungen. Da die Störungen sehr klein gegenüber der Grundströmung sind, kann eine Linearisierung der Gleichungen vorgenommen werden.

2.2.1.1 Grundgleichungen

Die Fluidbewegung wird in eine laminare stationäre Grundströmung und eine überlagerte Störbewegung zerlegt, dann gilt unter der Voraussetzung $u' \ll u$:

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} + u' \\ v &= \bar{v} + v' \\ w &= \bar{w} + w' \\ p &= \bar{p} + p' \end{aligned} \tag{2.2}$$

Die Grundströmung (u, v, w, p) sei eine Lösung der Navier-Stokes- oder der Grenzschichtgleichung. Folgende Voraussetzungen werden angenommen:

Inkompressible Grundströmung mit parallelen Stromlinien. Dieses entspricht einer Rohr- oder Kanalströmung und wird als Parallelströmung bezeichnet. Bei Grenzschichten umströmter Körper ist diese Annahme eine Näherung:

$$\bar{u}(y), \bar{v} = \bar{w} = 0, \bar{p}(x, y) \tag{2.3}$$

Zweidimensionale Störbewegung der Form:

$$u'(x, y, t), v'(x, y, t), p'(x, y, t) \tag{2.4}$$

Die resultierende Bewegung wird charakterisiert durch:

$$u = \bar{u} + u', v = v', w = 0, p = \bar{p} + p' \tag{2.5}$$

Zusätzlich zu der Voraussetzung, dass Gl. (2.3) eine Lösung der Navier-Stokes-Gleichung ist, wird gefordert, dass auch Gl. (2.5) eine Lösung der Gleichungen ist. Ferner wird vorausgesetzt, dass die Störglieder aus Gl. (2.4) so klein gegenüber der Grundströmung Gl. (2.3) sind, dass deren quadratische Glieder in der Gleichung vernachlässigt werden können.

Die Navier-Stokes-Gleichungen für die zweidimensionale, instationäre (die Störbewegung ist das instationäre Element), inkompressible Bewegung lauten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \tag{2.6}$$

Weiterhin wird die Kontinuitätsgleichung benötigt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.7)$$

Durch Einsetzen von Gl. (2.5) in Gl. (2.6) und Gl. (2.7) unter Vernachlässigung der quadratischen Glieder in den Störungstermen erhält man das Gleichungssystem für die resultierende Bewegung. Subtrahiert man hiervon das mittlere Strömungsfeld (also das allein mit der Grundströmung gebildete Gleichungssystem), so erhält man schließlich:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} = \nu \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} \right) \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} \right) \quad (2.9)$$

sowie:

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0 \quad (2.10)$$

mit den Randbedingungen $u' = v' = 0$ an den entsprechenden Grenzen.

Dies ergibt drei Gleichungen mit drei Unbekannten: u', v', p' (u vorgegeben). Durch Subtraktion der Gln. (2.8) und (2.9) läßt sich der Druck eliminieren, somit verbleiben zwei Gleichungen mit den zwei Unbekannten u', v' .

2.2.1.2 Ansatz für die Störungsbewegung

Es wird zunächst eine Stromfunktion für die Störbewegung eingeführt:

$$u' = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v' = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (2.11)$$

Mit Hilfe dieser Stromfunktion, die die Kontinuitätsbedingung identisch erfüllt, läßt sich das Gleichungssystem (2.8)–(2.10) auf eine Gleichung reduzieren.

Für die Störbewegung selbst wird i.a. ein komplexer Fourieransatz mit Dämpfungsglied eingesetzt:

$$\Psi(x, y, t) = \Phi(y) \exp[i(\alpha x - \beta t)] \quad (2.12)$$

Der physikalisch sinnvolle Teil der Störfunktion ist der Realteil:

$$\Re(\Psi) = e^{\beta t} (\Phi_r \cos(\alpha x - \beta_r t) - \Phi_i \sin(\alpha x - \beta_r t)) \quad (2.13)$$

$\Phi = \Phi_r + i\Phi_i$ ist die komplexe Amplitudenfunktion.

$\beta = \beta_r + i\beta_i$ setzt sich zusammen aus der Kreisfrequenz der Partialschwingung β_r und der Anfachungs- bzw. Dämpfungsgröße β_i .

$\beta_i < 0 \rightarrow$ Dämpfung \rightarrow Stabilität,
 $\beta_i > 0 \rightarrow$ Anfachung \rightarrow Instabilität.

Ferner ist dann:

$$\begin{aligned} u' &= \Phi'(y) \exp[i(\alpha x - \beta t)] \\ v' &= -i\alpha \Phi(y) \exp[i(\alpha x - \beta t)] \end{aligned} \quad (2.14)$$

$\alpha = 2\pi/\lambda$ ist die Wellenzahl der Störung mit der Wellenlänge λ .

$c = \beta/\alpha = c_r + ic_i$ ist die komplexe Geschwindigkeit, die sich aus der Phasengeschwindigkeit c_r und dem Dämpfungsparameter c_i zusammensetzt.

Durch Einsetzen der Störfunktion Gl. (2.12) und unter Berücksichtigung von Gl. (2.11) folgt aus Gln. (2.8)–(2.10) die folgende Störungsdifferentialgleichung.

2.2.1.3 Orr-Sommerfeld-Gleichung

Mit $\Phi = \Phi(y)$, $\Phi' = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$, $Re = \frac{U_{\max} L}{\nu}$ ergibt sich nach *Orr (1907)* und *Sommerfeld (1908)*:

$$(\bar{u}^* - c^*)(\Phi'' - \alpha^2 \Phi) - \bar{u}^{*''} \Phi = -\frac{i}{\alpha Re} (\Phi'''' - 2\alpha^2 \Phi'' + \alpha^4 \Phi), \quad (2.15)$$

wobei u^* sowie c^* mit U_{\max} , y mit L und α mit $1/L$ normiert wurden. Gleichung (2.15) ist dadurch dimensionslos geworden.

2.2.1.4 Stabilitätsuntersuchung einer Strömung

Die Lösung der Orr-Sommerfeld-Gleichung (2.15) stellt ein Eigenwertproblem mit den dazugehörigen Randbedingungen dar. Für ein gegebenes Geschwindigkeitsprofil hängt die Lösung von der Reynoldszahl Re und der Wellenzahl α ab.

Eine Störungsanfachung kann demnach durch zwei Mechanismen ausgelöst werden: Induktionsinstabilität, auch reibungslose Instabilität genannt (Wendepunktkriterium), und Reibungsinstabilität. Erstere bildet sich aufgrund einer Deformation des Geschwindigkeitsprofils, z.B. wegen eines Druckgradienten, und ist damit nicht primär auf die Reibung zurückzuführen (obgleich ohne Reibung keine Grenzschicht vorhanden wäre!). Letztere geht auf einen destabilisierenden Einfluss der Reibung selbst zurück und bildet sich auch in laminaren Grenzschichten ohne Druckgradienten aus. Beide Mechanismen bezeichnet man als Tollmien-Schlichting-Instabilität.

Ein wichtiges Resultat einer Stabilitätsrechnung ist die Indifferenzkurve (auch: Neutralitätskurve) für den Fall $c_i = 0$, d.h. Anfachung bzw. Dämpfung sind gleich Null (vgl. Abb. 2.3). Angefacht werden lediglich die Störungen, die von der reibungslosen und der viskosen Indifferenzkurve eingeschlossen werden. Aus Abb. 2.3 wird ebenfalls ersichtlich, dass es eine Indifferenz-Reynoldszahl Re_{ind} gibt, unter der alle Störungen gedämpft werden. Als eine Konsequenz davon bilden sich auch bei höheren Turbulenzgraden laminare Anlaufstrecken. Erst nach dem Überschreiten der Indifferenz-Reynoldszahl werden ausgewählte Störungen angefacht. Für eine ebene Platte ohne Druckgradienten ergibt sich: $Re_{ind} = 520$ (viskose Instabilität).

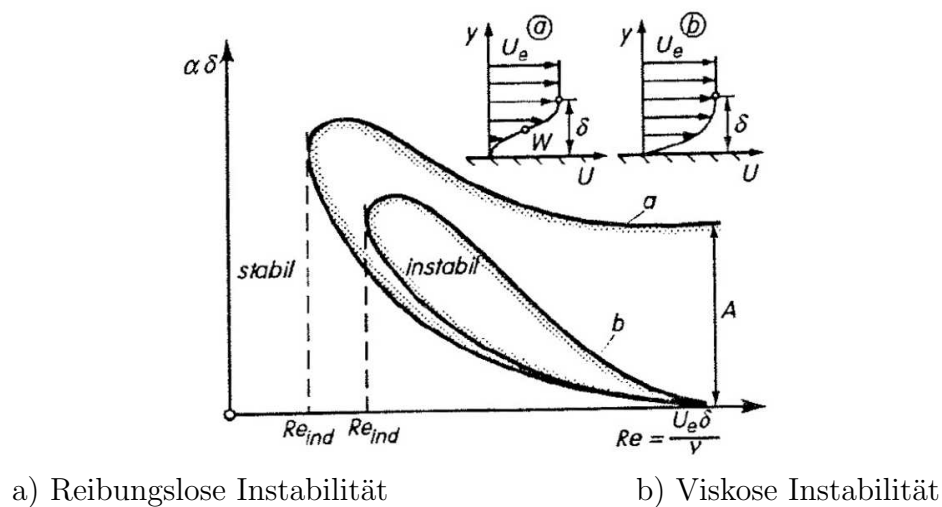


Abbildung 2.3: Indifferenzkurve einer ebenen Grenzsicht, *Schlichting und Gersten (1997)*

Die Unterscheidung nach der reibungslosen und der viskosen Indifferenzkurve ergibt sich aus dem Einfluss der Reynoldszahl auf die Orr-Sommerfeld-Gleichung (2.15). Die Reynoldszahl taucht auf der rechten Seite dieser Gleichung auf und führt - nach einer komplizierten Lösungsmethode, die in dieser Vorlesung nicht behandelt wird - auf die viskose Indifferenzkurve. Demgegenüber können die reibungslosen Instabilitätsmechanismen untersucht werden, indem die rechte Seite der Orr-Sommerfeld-Gleichung vernachlässigt wird. Dann ergibt sich folgende (reibungslöse) Störungsdifferentialgleichung:

$$(\bar{u} - c)(\Phi'' - \alpha^2 \Phi) - \bar{u}'' \Phi = 0. \quad (2.16)$$

Diese Form der Orr-Sommerfeld-Gleichung wird auch Rayleigh-Gleichung genannt. *Lord Rayleigh (1880)* fand bereits zwei Fundamentalsätze, die später von *Tollmien (1935)* verallgemeinert wurden:

1. Geschwindigkeitsprofile mit Wendepunkt sind instabil.

Dies ist das sogenannte Wendepunktskriterium, das eine reibungslose Instabilität darstellt. Die obige Formulierung ist eine notwendige und nach *Tollmien* auch hinreichende Bedingung.

2. **Existiert eine neutrale Störung, so muss es im Inneren der Strömung eine (kritische) Schicht geben, in der die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Störung c gleich der ungestörten Strömungsgeschwindigkeit u in dieser Schicht ist.**

Damit erhält man für Gl. (2.16) in dieser Schicht eine Singularität, die erst durch die Berücksichtigung der Reibungsglieder beseitigt werden kann (Reibungsinstabilität ist schwieriger zu behandeln).

Die primäre Stabilitätstheorie erlaubt nicht nur eine qualitative Aussage darüber, welche Störungsbewegungen angefacht werden, sondern auch eine quantitative Aussage über die Größe der Anfachtung, vgl. Abb. 2.4. Wie man aus den Kurven konstanter zeitlicher Anfachtung c_i erkennt, werden Störungen mit bestimmten Wellenlängen $\lambda = 2\pi/\alpha$ besonders stark angefacht. Für ebene Platten gilt:

- Kleinste instabile Wellenlänge: $\lambda \approx 6 \delta$
- Maximale Anfachtung für: $\lambda \approx 12 \delta$

Es handelt sich dabei um Schwankungsbewegungen in Strömungsrichtung und nicht quer dazu. Ferner fällt auf, dass die instabilen Wellenlängen gegenüber der Grenzschichtdicke recht groß sind.

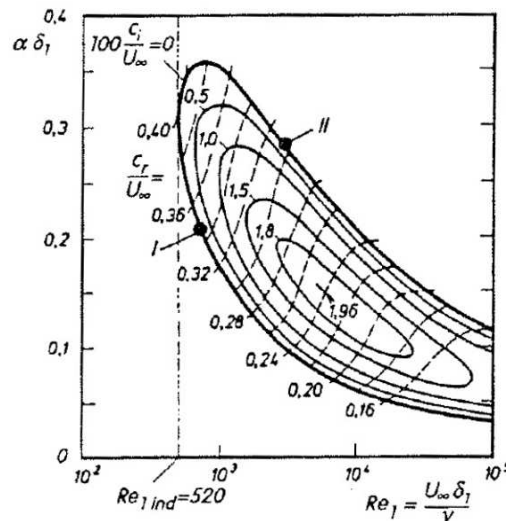


Abbildung 2.4: Kurven konstanter Anfachtung c_i , *Schlichting und Gersten (1997)*

2.2.2 Sekundäre Stabilitätstheorie

Nach dem Theorem von *Squire (1933)* werden zweidimensionale Störungen in einer ebenen Strömung stärker angefacht als dreidimensionale Störungen. Daher kommt es zunächst zur Ausbildung von Tollmien-Schlichting-Wellen, wie im vorherigen Abschnitt erläutert wurde. Die Präsenz dieser Wellen stellt eine Störung des Grundzustandes einer laminaren Grenzschicht dar. Nun kann dieser gestörte Zustand lokal als ein neuer Grundzustand betrachtet werden. In der sekundären Stabilitätstheorie werden Störungen dieses neuen (gestörten) Zustandes untersucht. Die Vorgehensweise entspricht dabei der Methode der primären Stabilitätsanalyse, ist jedoch mathematisch aufwändiger. Zur Vertiefung sei auf die Weiterführende Literatur, sowie das Vorlesungsmodul „Laminare Grenzschichten, Grenzschichtinstabilitäten, Transition“ im Sommersemester verwiesen. Als ein wesentliches Resultat ist die Anfachtung dreidimensionaler Störungen, die als Längswirbel sichtbar werden, zu nennen.

2.3 Zweites Stadium (instabil-turbulent)

Das erste Transitionsstadium ist durch die Entstehung und Anfachtung von Instabilitäten gekennzeichnet. Bei diesen Instabilitäten handelt es sich um geordnete und klar beschreibbare Strukturen, die sich in ihren Merkmalen deutlich von turbulenten Strukturen unterscheiden. Die Auswirkung der Instabilitäten auf die Integralwerte der Grenzschicht ist in dem ersten Stadium vernachlässigbar klein, vgl. Abb. 2.1. Daher kann dort nicht von Turbulenzentstehung gesprochen werden.

Der Prozess der Turbulenzentstehung setzt erst mit dem Zerfall der Instabilitäten in turbulente Strukturen ein. Diese Strukturen unterscheiden sich von den Instabilitätserscheinungen hauptsächlich durch die Dreidimensionalität und Instationarität. Nach heutigem Kenntnisstand existieren keine ausgereiften analytischen Methoden zur Vorhersage der Turbulenzentstehungsstelle (Re_{st}). Stattdessen muss im Rahmen von empirischen oder halb-empirischen Vorhersagemethoden auf experimentelle Daten zurückgegriffen werden.

Der Verlauf der Turbulenzentstehung ist ebenfalls unzureichend erklärt. Durch den Zusammenbruch der Instabilitäten bilden sich Turbulenzkeime bzw. Turbulenzflecken aus. Diese Turbulenzflecken breiten sich quer zur Strömungsrichtung aus und wachsen zu einer vollturbulenten Grenzschicht zusammen. Diese Stelle wird als das Ende des laminar-turbulenten Übergangs bezeichnet Re_{end} . Die Ausbreitung der Turbulenzkeime ist ein nicht-linearer Prozess der durch analytische Methoden nur schwer erfassbar ist. Erschwerend kommt hinzu, dass die Entstehung (bzw. das Verschwinden) der Turbulenzkeime sowohl räumlich als auch zeitlich ein "willkürlicher" Prozess ist. Demnach besitzt die Grenzschicht im zweiten Transitionsstadium einen stark intermittierenden Charakter, d.h. an einer bestimmten Stelle ist die Grenzschicht abwechselnd laminar und turbulent, siehe Abb. 2.5.

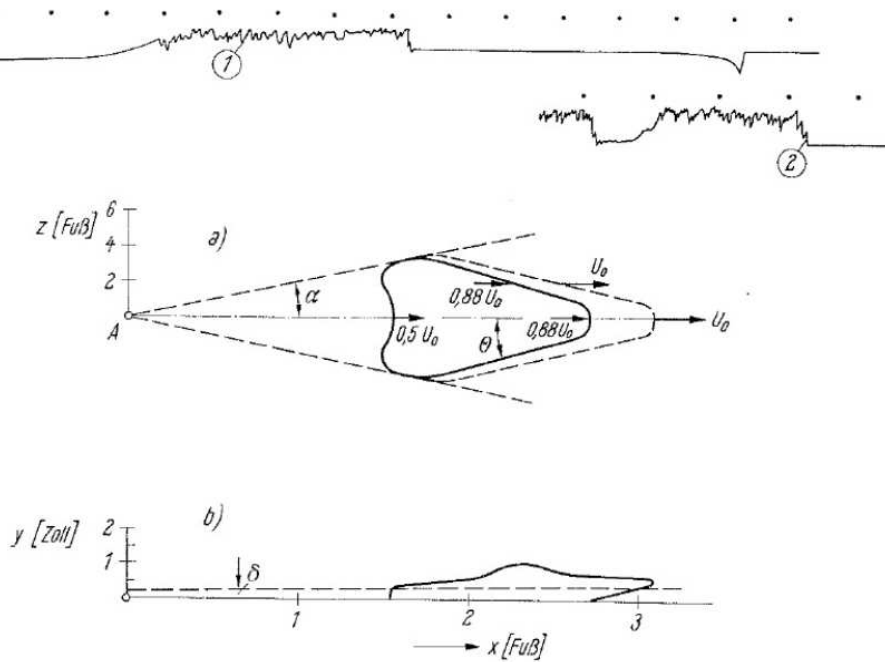
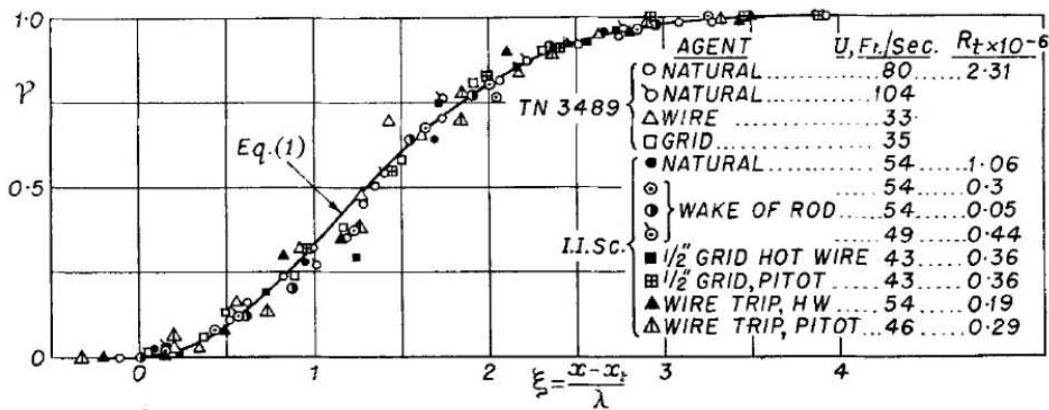


Abbildung 2.5: Intermittenz in einem Turbulenzkeim, Schubauer und Klebanoff (1955)

Der zeitliche Anteil, in dem die Grenzschicht turbulent ist, wird als Intermittenz γ bezeichnet (laminar: $\gamma = 0$; turbulent: $\gamma = 1$). Von Dhawan und Narasimha (1958) ist eine Korrelation zur Wiedergabe des Intermittenzverlaufes erstellt worden:

$$\gamma = 1 - e^{-0.412\xi^2} \quad \text{mit:} \quad \xi = \frac{x - x_{st}}{x(\gamma = 0,75) - x(\gamma = 0,25)} \quad (2.17)$$

Abbildung 2.6: Intermittenz γ nach Dhawan und Narasimha (1958)

Diese Korrelation basiert auf phänomenologischen Annahmen über die Entstehungs- und Wachstumsraten von Turbulenzkeimen, sowie auf Abgleich mit experimentellen Daten. Entsprechende Geschwindigkeitsprofile von Grenzschichten im zweiten Transi-

tionsstadium sind in Abb. 2.7 dargestellt. Die Umwandlung von einem laminaren zu einem turbulenten Profil ist klar erkennbar.

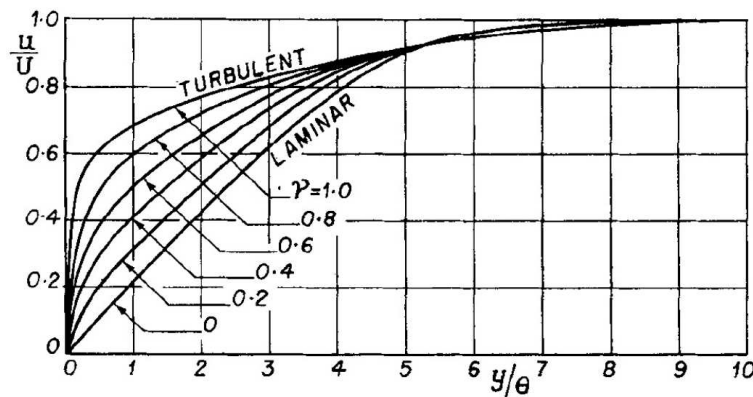


Abbildung 2.7: Geschwindigkeitsprofile in einer transitionellen Grenzschicht der ebenen Platte, *Dhawan und Narasimha (1958)*

2.4 Transitionsbeeinflussende Faktoren

2.4.1 Reynoldszahl

Durch die Reynoldszahl wird der Zustand der Grenzschicht maßgeblich beeinflusst. Bei kleinen Reynoldszahlen überwiegen die Reibungskräfte gegenüber den Trägheitskräften, so dass Störungen gedämpft werden. Folglich kommt es zur Ausbildung von laminaren Grenzschichten. Bei größeren Reynoldszahlen überwiegt hingegen die anfachende Wirkung von Trägheitskräften, so dass es zur Ausbildung von turbulenten Grenzschichten kommt. Da die laminaren Grenzschichten deutlich früher ablösen als turbulente Grenzschichten, sind Strömungen bei niedrigen Reynoldszahlen für gewöhnlich mit größeren Widerstands- bzw. Verlust-Beiwerten verbunden.

2.4.2 Turbulenzgrad

Der Turbulenzgrad charakterisiert die Schwankungsbewegungen in der ungestörten Außenströmung und übt dementsprechend eine anfachende Wirkung auf die Störungen in der laminaren Grenzschicht aus. Bei niedrigen Turbulenzgraden (z.B. Flügelumströmung) durchläuft die transitionelle Grenzschicht mehrere Stadien (Tollmien-Schlichting-Wellen, λ -Strukturen, Turbulenzflecken), bis sie in den turbulenten Zustand umschlägt. Dieses Umschlagszenario wird als natürliche Transition bezeichnet. Bei höheren Turbulenzgraden (z.B. Turbomaschinenströmungen) vollzieht sich die Störungsanfachung immer schneller, wodurch die anfänglichen Transitionsstufen immer kürzer werden. Eventuell werden diese Stufen übersprungen und es kommt zu einer sofortigen Ausbildung von Turbulenzflecken. Dies ist die sogenannte Bypass-Transition.

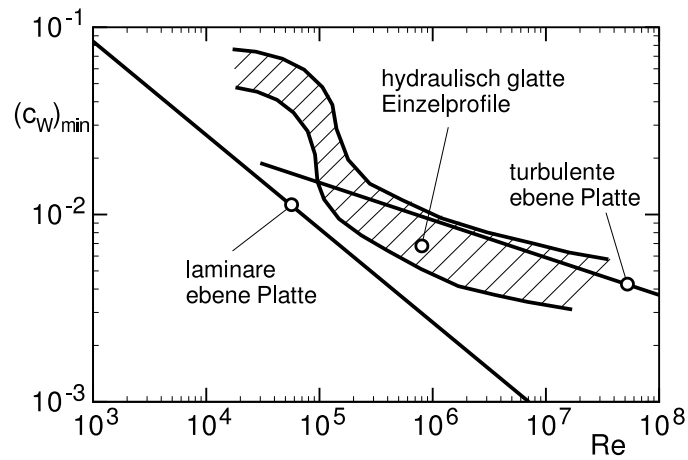


Abbildung 2.8: Der minimale Widerstandsbeiwert $c_{W,min}$ von hydraulisch glatten Einzelprofilen, *McMasters und Henderson (1980)*

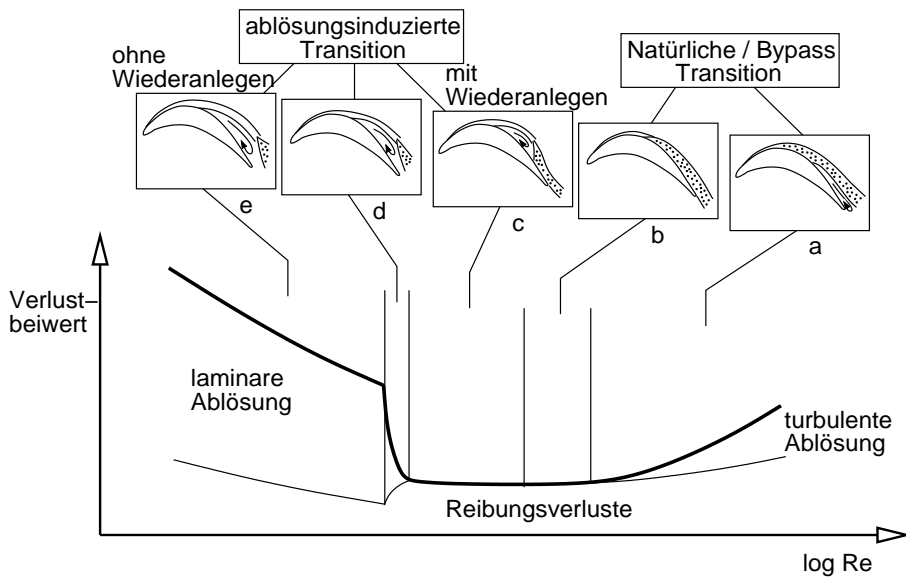


Abbildung 2.9: Einfluss der Reynoldszahl auf den Verlustbeiwert eines Turbinengitters, *Hourmouziadis (1989)*

Der Übergang zwischen dem natürlichen und dem Bypass-Modus ist kontinuierlich, so dass keine strikte Trennung vorgenommen werden kann.

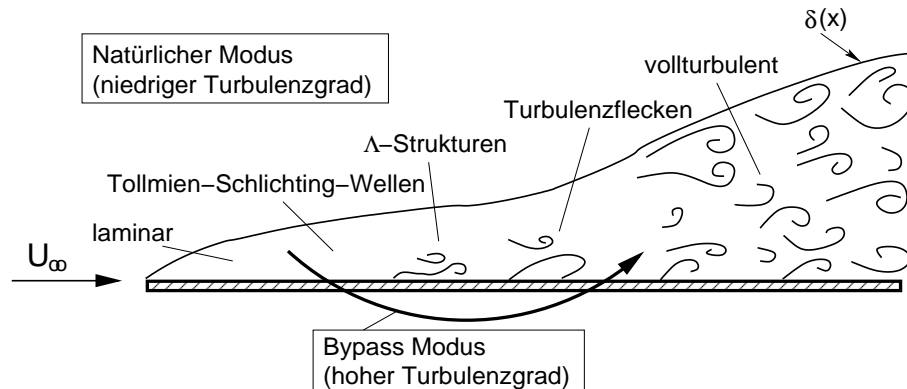


Abbildung 2.10: Natürliche und Bypass-Transition an einer ebenen Platte

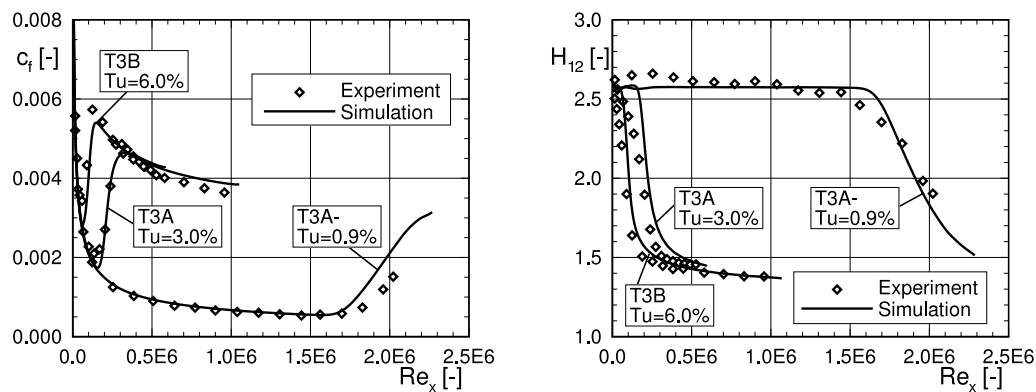


Abbildung 2.11: Einfluss des Turbulenzgrades auf den Grenzschichtumschlag an einer ebenen Platte

2.4.3 Druckgradient und Ablösung

Der abnehmende Druck in einer beschleunigten Strömung wirkt stabilisierend auf Störungen und zögert somit die Transition hinaus, vgl. Abb. 2.12. Demgegenüber wird die Transition durch den zunehmenden Druck in einer verzögerten Strömung begünstigt.

Nach dem Wendepunktkriterium, das eine Schlussfolgerung aus der Orr-Sommerfeld-Gleichung darstellt, weisen Geschwindigkeitsprofile mit einem Wendepunkt, wie sie in verzögerten Strömungen (Druckanstieg) und besonders ausgeprägt bei laminaren Ablöseblasen auftreten, eine Instabilität, bzw. eine starke Sensitivität gegenüber Störungen auf. Aufgrund dessen wird der laminar-turbulente Übergang durch die Präsenz einer Ablösung begünstigt.

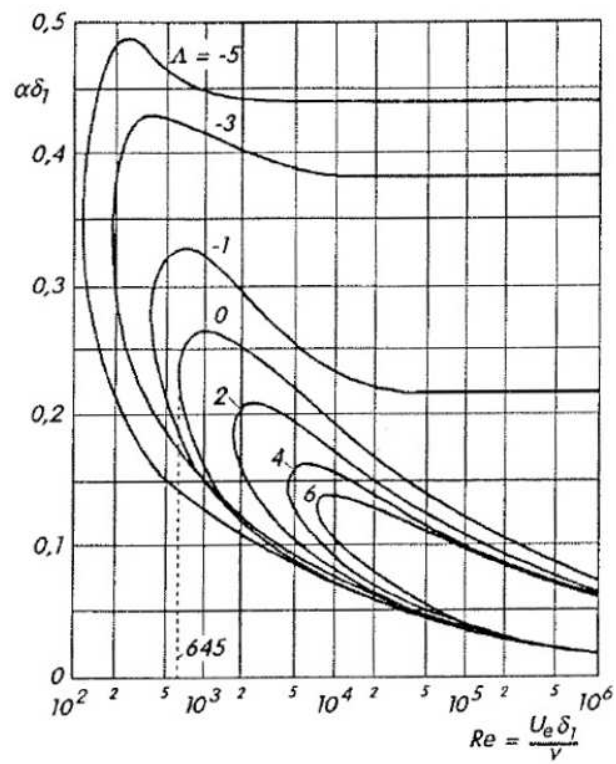


Abbildung 2.12: Indifferenzkurven für laminare Grenzschichten mit Druckabfall ($\Lambda > 0$) und Druckanstieg ($\Lambda < 0$), $\Lambda = (\delta^2/\nu)(dU_\delta/dx)$, *Schlichting und Gersten (1997)*

2.4.4 Instationarität der Hauptströmung

Periodische Oszillationen, wie z.B. Nachläufe in mehrstufigen Turbomaschinenströmungen, aber auch nicht-periodische Instationaritäten können das Transitionsverhalten von Grenzschichten beeinflussen. Durch die Präsenz von periodischen Nachläufen zeigen die Grenzschichten eine Tendenz zu früherem laminar-turbulentem Umschlag. Dieser Effekt wird durch den hohen Turbulenzgrad in den Nachläufen verstärkt. Weiterhin wird die Ausdehnung von Ablösungen durch Nachläufe reduziert.

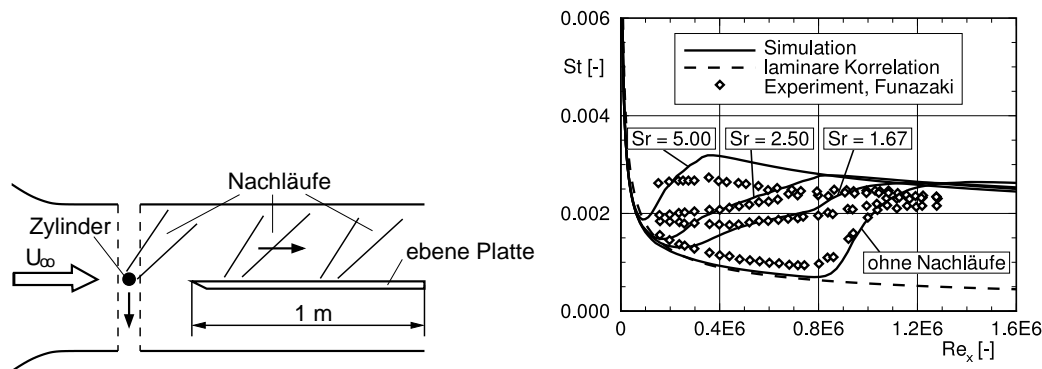


Abbildung 2.13: Einfluss der Nachläufe auf die Wärmeübertragung an einer ebenen Platte, Stantonzahl St = dimensionslose Wärmestromdichte, Strouhalzahl Sr = dimensionslose Nachlauffrequenz, *Funazaki (1996)*

2.4.5 Oberflächenrauigkeit

Für gewöhnlich werden durch Rauigkeit die Störungen in einer laminaren Grenzschicht verstärkt, so dass die Transition in den turbulenten Zustand begünstigt wird. Ein berühmtes Beispiel hierfür ist der Prandtlsche Stolperdraht, der zu der Kategorie der Einzelrauigkeiten (zylindrisch) gehört. Die Einzelrauigkeiten können ebenfalls von kugelförmiger oder anderer Gestalt sein. Darüber hinaus gibt es die Kategorie der Flächenrauigkeiten (Sandrauigkeit). Die Rauigkeitselemente müssen eine kritische Mindesthöhe aufweisen, um das Transitionsverhalten beeinflussen zu können.

2.4.6 Stromlinienkrümmung

Zentrifugalkräfte führen zu einer zusätzlichen Dämpfung von Störungen an konvexen Wänden und zu einer zusätzlichen Anfachung an konkaven Wänden. Diese Effekte sind in der Arbeit von *Görtler (1955)* erstmals theoretisch erklärt worden und werden daher „Görtler-Instabilität“ genannt.

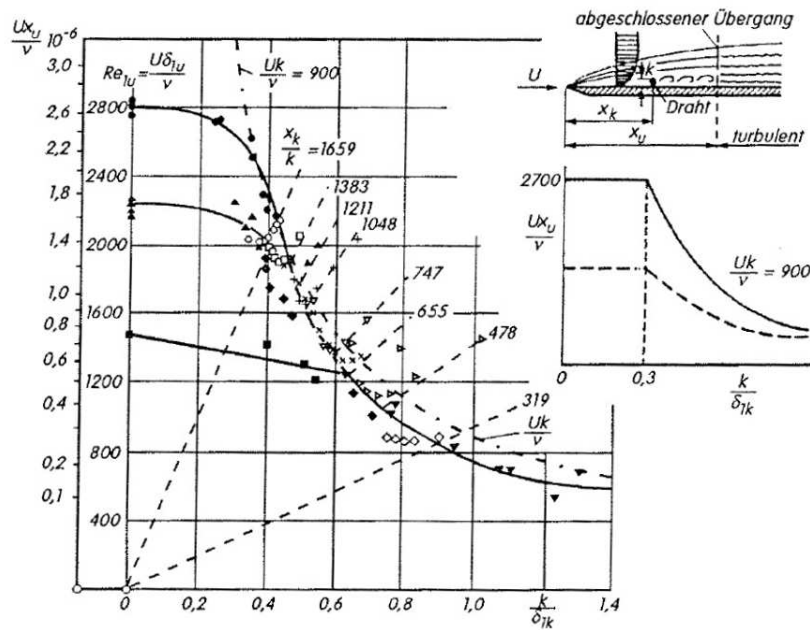


Abbildung 2.14: Einfluss des Drahtdurchmessers k auf den laminar-turbulenten Grenzschichtübergang, *Schlichting und Gersten (1997)*

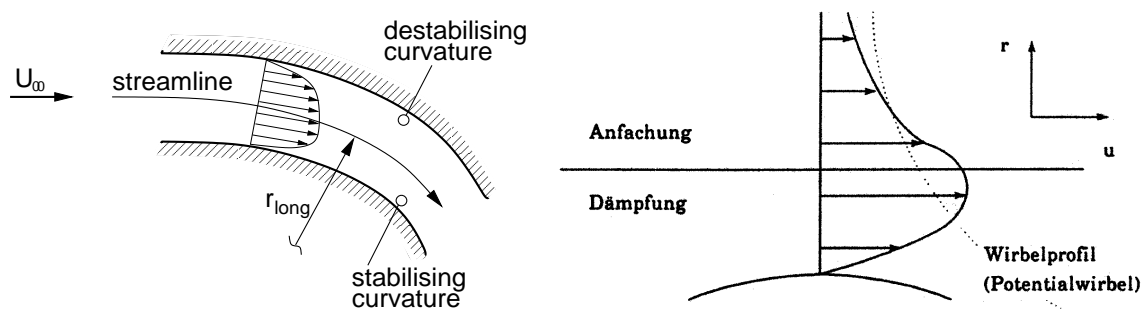
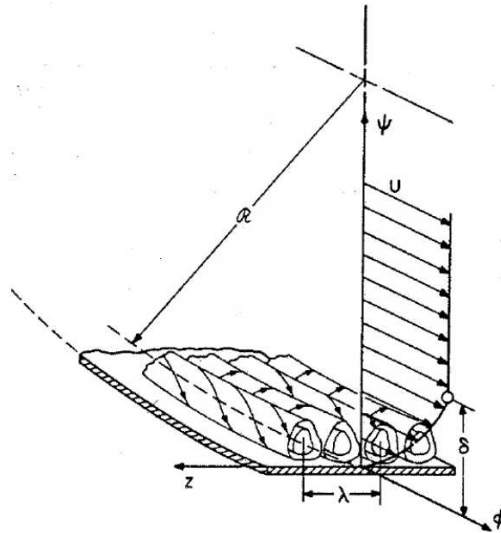


Abbildung 2.15: Stabilisierende und destabilisierende Wirkung der Stromlinienkrümmung

Abbildung 2.16: Görtler-Wirbel an einer konkaven Wand, *Saric (1994)*

2.4.7 Dreidimensionalität der Hauptströmung

Geschwindigkeitskomponenten, die quer zur Hauptströmungsrichtung ausgerichtet sind, können zu einer Anfachung von Störungen führen, und dadurch den Transitionsvorgang einleiten. Diese sogenannte Querströmungsinstabilität tritt an der Vorderkante von Pfeilflügeln auf. Die Tatsache, dass bei großen Transportflugzeugen (neben sehr hohen Reynoldszahlen) zugunsten des Wellenwiderstandes bei schallnahen Geschwindigkeiten immer große Pfeilwinkel vorhanden sind, ist eines der Grundprobleme bei der Laminarhaltung derartiger Konfigurationen.

2.4.8 Weitere Faktoren

Eine stabilisierende Wirkung auf die Störungen der laminaren Grenzschicht lässt sich durch Absaugung erzielen. Demgegenüber wird der Umschlag durch Ausblasung begünstigt. Der Fall mit Ausblasung ist z.B. für Turbinenströmungen von großer Bedeutung, da er im Zusammenhang mit der Filmkühlung auftritt. Die Kühlluft, die durch Kühlbohrungen in das Fluid eingeblasen wird, führt zu dreidimensionalen Wirbelstrukturen in der Grenzschicht, die den laminar-turbulenten Umschlag recht schnell herbeiführen können. Grenzschichten mit Absaugung werden im letzten Kapitel als Mittel zur aktiven Beeinflussung von Strömungen noch näher erörtert werden.

Die Wärmeübertragung von der Grenzschicht in die Wand (Kühlung) wirkt stabilisierend, während sich die Wärmezufuhr von der Wand in die Grenzschicht (Heizung) destabilisierend auswirkt. Diese Effekte sind jedoch für Fluide mit kleiner Prandtlzahl (z.B. Luft) sehr gering. Weitere Faktoren sind die Kompressibilität bei höheren Überschallströmungen, akustische Schwankungen, Elektromagnetismus bei Plasmaströmungen, Schwerkraft bei Dichteschichtungen, etc.

2.5 Transitionsvorhersage

2.5.1 Methodenübersicht

In der Modellierung des laminar-turbulenten Grenzschichtüberganges ist die Vorhersage folgender drei Informationen von besonderem Interesse:

Indifferenz-Reynoldszahl: Ab dieser Reynoldszahl (Re_{ind}) beginnt die Anfachung von Störungen.

Beginn der Turbulenzproduktion: An der Stelle Re_{st} bilden sich turbulente Strukturen.

Verlauf der Turbulenzproduktion (Intermittenzverlauf): Die Länge der Strecke zwischen Re_{st} und Re_{end} gibt eine Auskunft darüber, wie schnell sich die turbulenten Strukturen ausbilden und zusammenwachsen.

Aus der Fachliteratur sind mehrere Methoden bekannt, die zur Vorhersage dieser Schlüsselinformationen herangezogen werden können. Im Folgenden werden einige dieser Konzepte beschrieben, sowie deren Grenzen und Möglichkeiten aufgezeigt. In Abb. 2.17 ist eine Zusammenfassung dieser Methoden dargestellt. Hierbei wird ebenfalls eine Einteilung in analytische und empirische Methoden vorgenommen. Als Kriterium für diese Einteilung ist das Zurückgreifen auf experimentelle Korrelationen oder Modellierungen von Strömungsphänomenen verwendet worden. Da die DNS-Methode darauf nicht zurückgreift, wird sie als eine "analytische" Methode klassifiziert, obwohl die Lösung numerisch erfolgt.

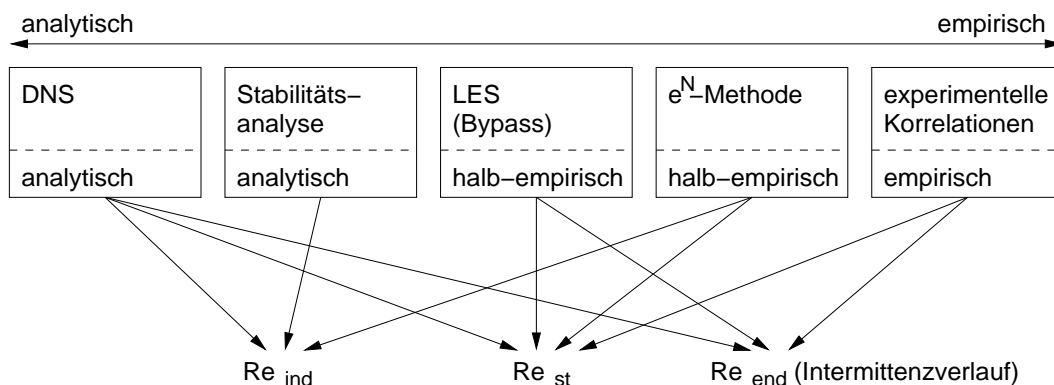


Abbildung 2.17: Methoden zur Transitionsvorhersage

DNS: Einen modellierungsfreien Ansatz zur Transitionsvorhersage stellen DNS-Rechnungen (Direct Numerical Simulation) dar. Da die Navier-Stokes-Gleichungen sämtliche linearen und nichtlinearen Mechanismen der Turbulenzentstehung wiedergeben, liefert eine hinreichend genaue numerische Lösung dieser Gleichungen automatisch den laminar-turbulenten Umschlagprozess. Solche

DNS-Rechnungen benötigen jedoch sehr große Rechnerkapazitäten, so dass industrielle Anwendungen erst in einigen Jahrzehnten möglich sein werden, selbst unter Beibehaltung der Moore'schen Abschätzung über Fortschritte in der Rechnerleistung.

Stabilitätsanalyse: Die klassische Methode zur theoretischen Transitionsvorhersage stellt die *lineare Stabilitätsanalyse* dar (vgl. Abschnitt 2.2). In diesem Ansatz wird die Strömung aus einem stationären Grundzustand und einer überlagerten kleinen Störung zusammengesetzt, wobei die Störungsdifferentialgleichung linearisiert wird. Bedeutende Ergebnisse sind die Vorhersagen der Indifferenz-Reynoldszahl und der Anfachungsrate. Mit dieser Methode können ebenfalls Instabilitäten in einer dreidimensionalen Grundströmung, wie z.B. Querströmungsinstabilitäten, vorhergesagt werden. Da es sich um eine Methode der kleinen Störungen handelt, können die nichtlinearen Anfachungsmechanismen nicht vorhergesagt werden. Demgegenüber werden in der *PSE-Methode* (Parabolized Stability Equations, parabolisierte Störungsdifferentialgleichungen) die nichtlineare Mechanismen der Störungsanfachung berücksichtigt.

Grobstruktursimulationen (LES): Eine weitere Möglichkeit zur Transitionsvorhersage bieten Grobstruktursimulationen (LES, Large Eddy Simulation). Hierbei werden die großen turbulenten Wirbelstrukturen direkt aufgelöst, während kleinere Wirbelstrukturen modelliert werden. Daher kann auch von einem halbempirischen Ansatz gesprochen werden. Da lediglich große Turbulenzwirbel berechnet werden, eignen sich LES-Simulationen nur für Transitionsvorhersagen mit hohem Turbulenzgrad in der ungestörten Außenströmung (Bypass-Transition). Für andere Strömungsbedingungen, die den laminar-turbulenten Umschlag herbeiführen können, sind zusätzliche Modellierungen notwendig. Obwohl der Rechenaufwand von LES-Simulationen deutlich geringer als der Rechenaufwand für DNS-Simulationen ist, so werden dennoch vergleichsweise große Rechnerkapazitäten beansprucht.

e^N -Methode: In dieser Methode finden sich sowohl analytische als auch empirische Elemente wieder. Die Vorhersage über die Anfachung bestimmter Frequenzen, sowie die entsprechende Anfachungsrate, wird mit Hilfe der Stabilitätsanalyse durchgeführt. Die Stelle ab der sich die ersten turbulenten Strukturen bilden (Re_{st}), wird jedoch aus Experimenten abgeleitet, wie weiter unten erläutert wird.

Experimentelle Korrelationen: Diese Methoden basieren auf empirisch ermittelten Zusammenhängen. Hierbei wird ein Zusammenhang zwischen der Turbulenzentstehungsstelle Re_{st} und äußerer Faktoren (Turbulenzgrad, Druckgradienten, Rauigkeit, etc.) hergestellt. Auf die gleiche Art und Weise werden der Intermitenzverlauf und die Stelle vollausgebildeter Turbulenz Re_{end} korreliert.

2.5.2 e^N -Methode für zweidimensionale Grenzschichten

In der e^N -Methode wird die Anfachungsrate instabiler Störungen untersucht. Die Stelle beginnender Turbulenzproduktion wird dadurch gekennzeichnet, dass das Amplitudenverhältnis angefachter Störungen einen bestimmten Wert überschreitet. Das Amplitudenverhältnis ist wie folgt definiert:

$$\frac{A}{A_0} = e^{-\int_{x_0}^x \alpha_i dx} \quad (2.18)$$

Hierbei bezeichnet A die Amplitude der Störbewegung und der Index 0 die Stelle an der die Störbewegung in den instabilen Bereich eintritt, vgl. Abb. 2.18. Eine Störbewegung mit der Frequenz f wird stromauf der Stelle x_0 gedämpft. Für stromab liegende Positionen ($x_0 < x < x_1$) wird diese Störbewegung zunächst angefacht, und anschließend wieder gedämpft (nachdem der instabile Bereich verlassen wurde, $x > x_1$). So ergibt sich für jede Frequenz ein maximaler Logarithmus des Amplitudenverhältnisses, wie im unteren Teil der Abb. 2.18 dargestellt. Dies ist der sogenannte N -Faktor:

$$N(x) = \max \left(- \int_{x_0}^x \alpha_i dx \right) \quad (2.19)$$

In der grafischen Darstellung stellt der Verlauf des N -Faktors eine Envelope dar.

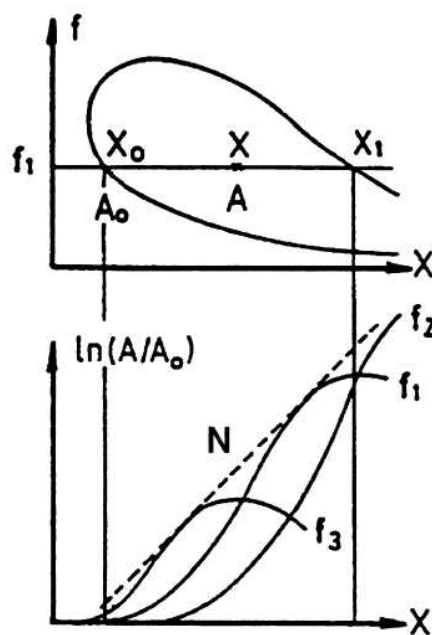


Abbildung 2.18: Ermittlung der Envelope aus dem Stabilitätsdiagramm, Arnal und Casalis (2000)

Die Stelle beginnender Turbulenzproduktion kann durch eine Abschätzung des N -Faktors, bei dem die Störungen zu turbulenten Strukturen zerfallen, ermittelt werden. Der Vergleich zu den Experimenten zeigt, dass ein Wert von $N_{St} = 9$ sehr gute Übereinstimmung zu den gemessenen Transitionsstellen liefert. Für diesen N -Faktor ergibt

sich ein Amplitudenverhältnis von $A/A_0 = e^9 = 8103$. Aus der Envelope kann die entsprechende x -Stelle sowie Frequenz abgelesen werden. Daraus kann die Schlussfolgerung gezogen werden, dass die Störbewegung mit der größten Anfachung zuerst in turbulente Strukturen zerfällt.

Die Wahl des Faktors $N_{St} = 9$ führt auf zuverlässige Transitionsvorhersagen für niedrige Turbulenzgrade der Außenströmung. Für höhere Turbulenzgrade wird jedoch in Experimenten eine deutlich frühere Transitionsstelle beobachtet. Um die e^N -Methode ebenfalls auf diesen Anwendungsbereich zu erweitern, kann der N -Faktor wie folgt mit dem Turbulenzgrad korreliert werden (vgl. Abb. 2.19):

$$N_{St} = -8,43 - 2,4 \ln Tu \quad (2.20)$$

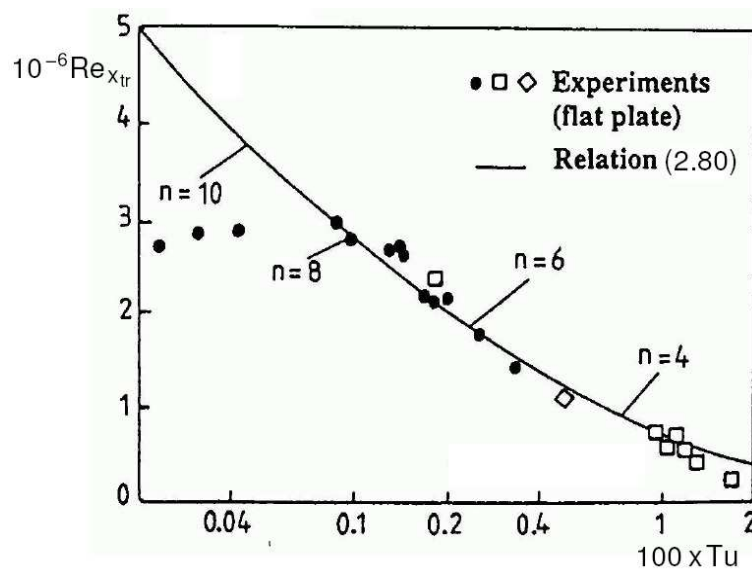


Abbildung 2.19: Abhängigkeit des N -Faktors von dem Turbulenzgrad Tu , Arnal (1994)

Die Transitionsvorhersage nach der e^N -Methode kann wie folgt zusammengefasst werden:

- Berechnung der laminaren Grenzschicht.
- Stabilitätsanalyse der laminaren Grenzschicht \rightarrow Stabilitätsdiagramme.
- Integration der Anfachungsraten und Ermittlung der Envelope für unterschiedliche Störfrequenzen.
- Wahl eines N_{St} -Faktors.
- Ermittlung der zugehörigen Transitionsstelle x_{tr} .

2.5.3 e^N -Methode für dreidimensionale Grenzschichten

An der Vorderkante eines gepfeilten Flügels bildet sich eine dreidimensionale Grenzschicht aus, in der neben dem Geschwindigkeitsprofil in Strömungsrichtung $u(y)$ ebenfalls ein Geschwindigkeitsprofil quer dazu $w(y)$ vorhanden ist (vgl. Abb. 2.20). Das Geschwindigkeitsprofil $w(y)$ weist einen Wendepunkt auf und ist somit instabil. Daher sind neben den Tollmien-Schlichting-Instabilitäten ebenfalls Querströmungsinstabilitäten vorhanden. Als eine Folge der Querströmungsinstabilitäten bilden sich Querströmungswellen bzw. Querströmungswirbel, deren Achse ungefähr in Strömungsrichtung ausgerichtet ist, aus. Diese Wellen zerfallen in turbulente Strukturen und führen zu einem laminar-turbulenten Grenzschichtumschlag in Vorderkantennähe. Daher ist die Laminarhaltung von gepfeilten Flügeln mit erheblichen Problemen verbunden. Mit zunehmendem Pfeilwinkel nimmt das Geschwindigkeitsprofil $w(y)$ immer größere Werte an, so dass der Effekt der Querströmungsinstabilität verstärkt wird.

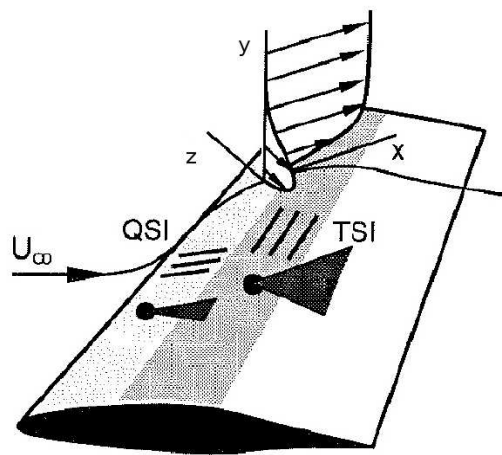
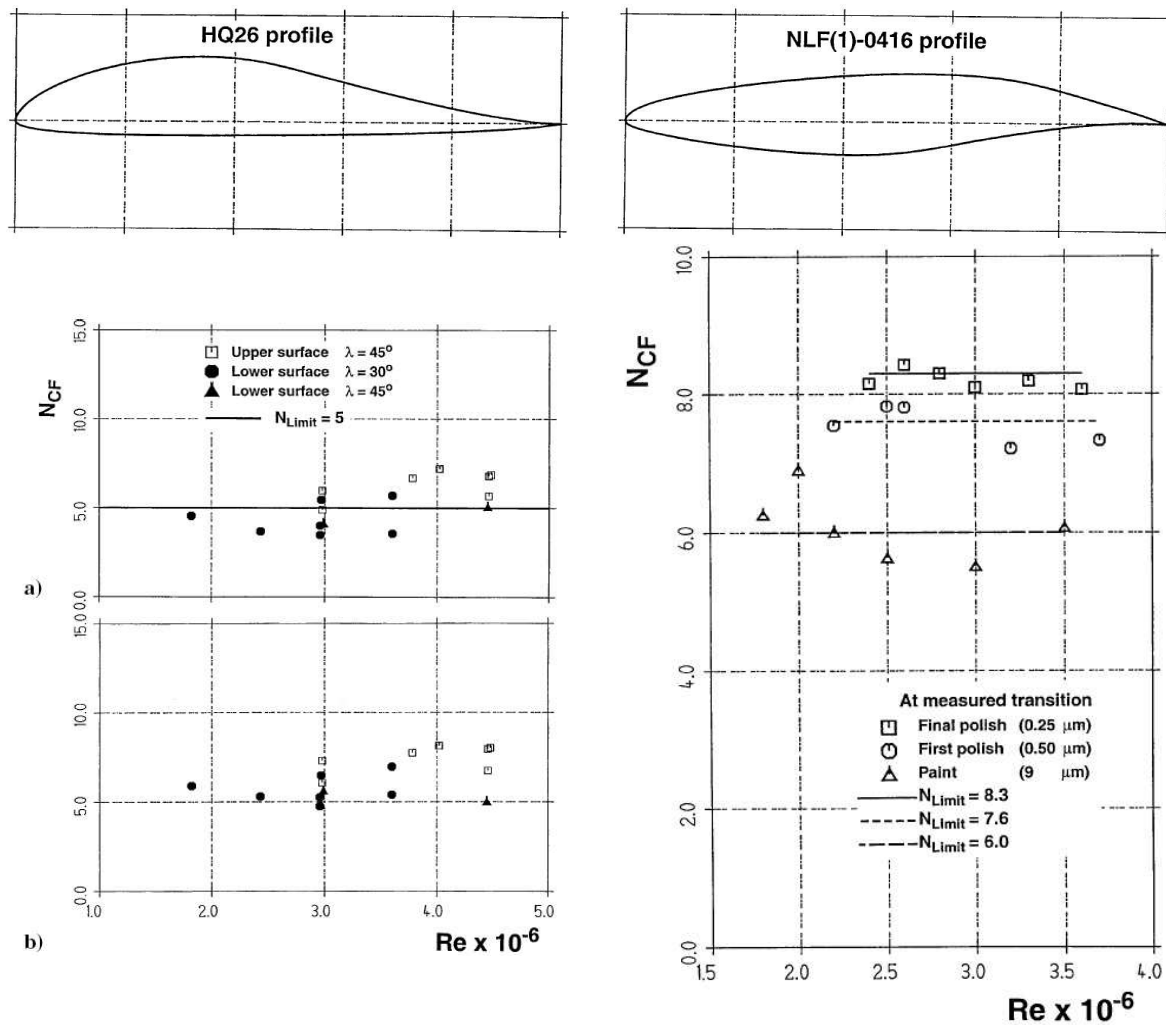


Abbildung 2.20: Querströmungsinstabilitäten (QSI) und Tollmien-Schlichting-Instabilitäten (TSI) an einem Pfeilflügel, *Oertel und Delfs (1996)*

Analog zu der Stabilitätsanalyse der Tollmien-Schlichting-Instabilitäten (TSI) kann eine Analyse der Querströmungsinstabilitäten (QSI) vorgenommen werden. In der e^N -Methode wird die Transitionsstelle, die durch TS-Instabilitäten hervorgerufen wird, durch den bereits behandelten Faktor N_{St} vorhergesagt. Um die e^N -Methode für die QS-Instabilitäten zu erweitern, wird zusätzlich zum Faktor N_{St} ein Faktor N_{CF} ("cross-flow instability") eingeführt. Beim Überschreiten eines N_{CF} -Wertes findet die querströmungsinduzierte Transition statt. Der entsprechende N_{CF} -Wert kann für verschiedene Anwendungsfälle recht unterschiedlich sein, wie aus Abb. 2.21 ersichtlich wird. Eine tiefergehende Ausführung der querströmungsinduzierten Transition ist in *Arnal und Casalis (2000)* enthalten.

Abbildung 2.21: N_{CF} -Faktor für zwei gepfeilte Tragflächen, *Stock und Seitz (2004)*

Kapitel 3

Grundlagen der ausgebildeten Turbulenz

Im ersten Kapitel wurde bereits erläutert, dass es sich bei der Turbulenz um ein instationäres, dreidimensionales Phänomen mit vielen wechselwirkenden Skalen handelt, welches sich nur mit statistischen Methoden sinnvoll beschreiben lässt. Diese Schlussfolgerung beruhte ferner auf der Erkenntnis, dass die Einzelheiten turbulenter Strömungen aufgrund von Instabilitäten und unkontrollierbaren Änderungen in den Anfangs- und Randbedingungen, in der Praxis nicht reproduzierbar sind. Zur Beschreibung stochastischer Prozesse existieren verschiedene Verfahren, mit denen sich der Informationsgehalt auf eine handhabbare und dem menschlichen Verstand zugängliche Form reduzieren lässt. Ein wesentliches Verfahren ist dabei die Mittelwertbildung.

3.1 Mittelwerte

Eine Mittelung über einen bestimmten Parameter q einer Funktion $f(q)$ stellt stets eine Informationseinbuße in dem Sinne dar, dass die jeweilige q -Abhängigkeit der gemittelten Funktion dadurch eliminiert wird. Von einem stochastischen Vorgang $f(\underline{r}, t)$ lassen sich verschiedene Mittelwerte bilden:

- Der zeitliche Mittelwert

Das zeitliche Mittel einer stochastischen Funktion $f(\underline{r}, t)$ eliminiert deren Zeitabhängigkeit, d.h. bei einer im Mittel stationären Strömung werden dadurch die turbulenten Schwankungen herausgeglättet. Ist die Strömung im Mittel instationär, so würde durch eine Mittelung über $\Delta t \rightarrow \infty$ mit dem instationären Verhalten der turbulenten Fluktuationen auch die Information über das Zeitverhalten der mittleren Strömung verloren gehen. Indem man Δt gerade so groß wählt, dass nur die Turbulenz, nicht aber die mittlere Geschwindigkeit gemittelt wird (was nicht immer möglich ist), lässt sich die Information über $f(t)$ näher

rungsweise erhalten. Die Definition des zeitlichen Mittelwertes lautet:

$$\overline{f(\underline{r})} = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_T^{T+\Delta t} f(\underline{r}, t) dt \quad (3.1)$$

Das grundlegende Problem in Verbindung mit dieser Vorschrift ist die Festlegung des Zeitintervalls Δt , da dieses einerseits hinreichend groß sein muss im Vergleich mit den charakteristischen Perioden turbulenter Fluktuationen $f' = f - \bar{f}$, aber andererseits klein verglichen mit den Perioden der mittleren Bewegung. Die Existenz eines solchen Zeitintervalls ist nur gegeben wenn sich die Frequenzen der Fluktuationen von denen der mittleren Bewegung unterscheiden. Üblicherweise wählt man das Integrationszeitintervall Δt so lang, dass $\Delta t \geq 100/\nu_{\min}$ ist, wobei ν_{\min} die niedrigste interessierende (energetragende) Frequenz des Spektrums von $f(\underline{r}, t)$ darstellt.

- Der räumliche Mittelwert

Mit dem räumlichen Mittel eliminiert man die Information über die Raumstruktur einer Strömung, wodurch das Problem allerdings u.U. trivial wird, da die räumliche Verteilung der Strömungsgrößen meist die gesuchte Lösung darstellt. Prinzipiell ist es jedoch möglich, eine Mittelung über einen gegenüber den charakteristischen Strömungsabmessungen kleinen Raumbezirk durchzuführen, wie z.B. bei den numerischen Simulationsverfahren, oder entlang einer Koordinate, in der die betrachtete Strömungsvariable homogene Eigenschaften besitzt (Kanalströmung, ebene Grenzschicht).

- Der Ensemble-Mittelwert

Während bei der numerischen Berechnung turbulenter Strömungen und deren experimenteller Erforschung die zeitlichen und räumlichen Mittelwerte von grundlegender Bedeutung sind, wird bei theoretischen Betrachtungen aus Eindeutigkeitsgründen stets der Ensemble-Mittelwert verwendet. Der Ensemble-Mittelwert $\langle f \rangle$ wird definiert als das arithmetische Mittel einer großen Anzahl N von Werten einer stochastischen Funktion $f(\underline{r}, t)$, die z.B. aus N identischen Experimenten gewonnen werden können:

$$\langle f \rangle = \langle f(\underline{r}, t) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_n(\underline{r}, t) \quad (3.2)$$

Im Unterschied zu den zeitlichen und räumlichen Mittelwerten wird bei dem Ensemble-Mittelwert nicht mehr *eine* Strömung betrachtet, sondern ein Ensemble aus *allen möglichen* Strömungen, die sich unter gegebenen Randbedingungen ausbilden können. Ein typisches Beispiel für die Anwendung einer Ensemble-Mittelung wäre die Bestimmung des mittleren Geschwindigkeitsverlaufes als

Funktion der Zeit in einer im Mittel instationären, turbulenten Strömung (z.B. Ausblasen aus einem Kessels).

Gerade der Wahl des Zeitraumes für eine zeitliche Mittelung kommt, z.B. bei der Entwicklung von numerischen Modellen, eine zentrale Bedeutung zu (siehe Kapitel 4.3, Grobstruktursimulation). Mitunter unterscheidet man hier in **transiente** und **instationäre** Strömungen: Turbulente Strömungen sind grundsätzlich instationär. Als transient bezeichnet man eine Strömung, wenn sich diese nicht vernünftigerweise mit stationären Randbedingungen darstellen lässt. Als Beispiele seien genannt bewegte Profile (Schlagflug) und gepulste Freistrahlen, wobei aber Transienz nicht zwangsläufig periodisch auftreten muss (z.B. Anstart- oder Abschaltvorgänge). Demgegenüber ist z.B. eine turbulente Rohrströmung zwar instationär, sie lässt sich jedoch mit konstanten Randbedingungen gut darstellen. Mit Bezug auf Δt in Gl. 3.1 würde man also Prozesse mit Zeitkonstanten $T < \Delta t$ als instationär, Prozesse mit $T > \Delta t$ jedoch als transient bezeichnen.

Der fundamentalste Ansatz um eine turbulente Strömung mit den Mitteln der Stochastik zu beschreiben ist die Dekomposition der Strömungsgrößen: Jede instantane Größe $f(\underline{r}, t)$ wird zerlegt in die Kombination aus Mittelwert und Schwankungskomponente:

$$f(\underline{r}, t) = \overline{f(\underline{r})} + f'(\underline{r}, t) \quad \text{bzw.} \quad f(\underline{r}, t) = \langle f(\underline{r}, t) \rangle + f'(\underline{r}, t) \quad (3.3)$$

wobei $\overline{f'(\underline{r}, t)} \equiv 0$. Im Falle periodisch transienter Strömungen (Karmman'sche Wirbelstraße, gepulste Freistrahlen, o.ä.) kann man ferner dekomponieren in (Ensemble-) Mittelwert, periodischen Anteil $\tilde{f}(\underline{r}, t)$ und stochastischen Anteil:

$$f(\underline{r}, t) = \langle f(\underline{r}, t) \rangle + \tilde{f}(\underline{r}, t) + f'(\underline{r}, t) \quad (3.4)$$

3.1.1 Ergodizität

Einen Zusammenhang zwischen dem Ensemble-Mittelwert und den zeitlichen und räumlichen Mittelwerten wird durch das Ergodizitäts-Theorem hergestellt. Dieses besagt, dass für einen stationären stochastischen Prozess der zeitliche Mittelwert \bar{f} für $\Delta t \rightarrow \infty$ gegen den Ensemble-Mittelwert $\langle f \rangle$ konvergiert. Dies ist immer dann gewährleistet, wenn alle Zustände in einem Ensemble von Systemen auch in jedem System des Ensembles auftreten. Bei im Mittel stationären Labor-Strömungen kann im Allgemeinen davon ausgegangen werden, dass es sich um ergodische Prozesse handelt und damit $\bar{f} = \langle f \rangle$ gilt. Bei einer isotropen und stationären Strömung wird die Ergodizität dadurch gekennzeichnet, dass zeitlicher, räumlicher und Ensemble-Mittelwert gleich sind.

3.1.2 Rechenregeln für Mittelwerte

$$f(\underline{r}, t) = \overline{f(\underline{r}, t)} + f'(\underline{r}, t) \quad (3.5)$$

$$\overline{a \cdot f(\underline{r}, t)} = a \cdot \overline{f(\underline{r}, t)} \quad \text{wenn } a = \text{const} \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial t} = \overline{\frac{\partial f}{\partial t}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial \overline{f}}{\partial r} = \overline{\frac{\partial f}{\partial r}} \quad (3.7)$$

$$\overline{f(\underline{r}, t) + g(\underline{r}, t)} = \overline{f(\underline{r}, t)} + \overline{g(\underline{r}, t)} \quad (3.8)$$

$$\overline{f(\underline{r}, t) \cdot g(\underline{r}, t)} = \overline{f(\underline{r}, t)} \cdot \overline{g(\underline{r}, t)} \quad (3.9)$$

$$\overline{\overline{f(\underline{r}, t)}} = \overline{f(\underline{r}, t)} \quad (3.10)$$

$$\overline{f(\underline{r}, t) \cdot h'(\underline{r}, t)} = 0 \quad (3.11)$$

$$\overline{f'(\underline{r}, t) \cdot h'(\underline{r}, t)} \neq 0 \quad (3.12)$$

$$\overline{f(\underline{r}, t) \cdot g(\underline{r}, t)} = \overline{f(\underline{r}, t)} \cdot \overline{g(\underline{r}, t)} + \overline{f'(\underline{r}, t) \cdot g'(\underline{r}, t)} \quad (3.13)$$

3.2 Die Kontinuitätsgleichung

Zur Vereinfachung der Darstellung wird in diesem Abschnitt neben der Vektorschreibweise auch die Indexschreibweise eingeführt, außerdem soll die Einsteinsche Summenkonvention gelten. Eine kurze Erklärung von Indexschreibweise und Summenkonvention wird in dem zu dieser Vorlesung gehörigen Übungsskript gegeben.

Zur Herleitung der Kontinuitätsgleichung für die gemittelten und fluktuierenden Größen gehen wir von der allgemeinen Kontinuitätsgleichung für inkompressible Medien aus:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{u} &= \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \underline{u} = 0 \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Durch Aufspaltung der Geschwindigkeitskomponenten in Mittelwert und Schwankungsanteil erhält man:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\underline{\bar{u}} + \underline{u'}) &= 0 \\ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} &= 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Durch zeitliche Mittelwertbildung ergibt sich:

$$\nabla \cdot \underline{\bar{u}} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.16)$$

Aus der Subtraktion der gemittelten von der ungemittelten Gleichung folgt:

$$\nabla \cdot \underline{u'} = 0$$

$$\frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.17)$$

Die Kontinuitätsgleichung gilt demnach aufgrund ihrer linearen Struktur für die mittleren und fluktuierenden Größen gleichermaßen.

3.3 Die Bewegungsgleichungen von Reynolds

Die Bewegungsgleichungen für turbulente Strömungen erhält man aus den Navier-Stokes-Gleichungen, indem man für die Geschwindigkeitskomponenten und den Druck (ggf. auch die Dichte) anstelle der Momentanwerte die jeweiligen Summen aus den Mittel- und den Schwankungswerten einsetzt und die Gleichungen dann mittelt. Um bei dieser Mittelung den bzgl. der Grundströmung und der zeitlichen Mittelwerte der Fluktuationen instationären Charakter der Bewegungsgleichung zu erhalten, muss die Mittelung wie besprochen als Ensemble- oder Zeit-Mittel über einen begrenzten Zeitraum verstanden werden. Dieser Zeitabschnitt muss so gewählt werden, dass nur die Kurzzeitvorgänge der Turbulenz geglättet werden, da der instationäre Charakter der Grundströmung erhalten bleiben soll. Für ein inkompressibles Einkomponentenfluid mit konstanten Stoffwerten und bei Vernachlässigung von Volumenkräften lautet die **instationäre Navier-Stokes-Gleichung**:

$$\frac{d\underline{u}}{dt} = \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \underline{u} \quad (3.18)$$

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$$

Mit

$$u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j u_i) - u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{Kontinuitätsgl.}) \quad (3.19)$$

folgt

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j u_i) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$$

Nach Einsetzen der Schwankungsgrößen $u_i = \bar{u}_i + u'_i$, $p = \bar{p} + p'$ und Mittelung folgt daraus wegen

$$\begin{aligned} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j u_i) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} [(\bar{u}_j + u'_j)(\bar{u}_i + u'_i)] \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_j \bar{u}_i + \bar{u}_j u'_i + u'_j \bar{u}_i + u'_j u'_i) \end{aligned}$$

und $\bar{u}_j u'_i = u'_j \bar{u}_i = 0$ die sog. **Reynolds-Gleichung**:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial(\overline{u'_j u'_i})}{\partial x_j} \quad (3.20)$$

Bezüglich der mittleren Größen hat die Reynolds-Gleichung dieselbe Form wie die Navier-Stokes-Gleichung, es erscheint jedoch aufgrund der Nichtlinearität der konvektiven Terme ein zusätzliches Element $\frac{\partial(\overline{u'_j u'_i})}{\partial x_j}$, das durch die Fluktuationen hervorgerufen wurde und diffuse Eigenschaften aufweist. Durch eine Gegenüberstellung der beiden diffusiven Terme

$$\nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad \text{und} \quad \frac{\partial(\overline{u'_j u'_i})}{\partial x_j} = \frac{\partial(\overline{u'_j u'_i})}{\partial x_j} \quad (3.21)$$

erhält man folgende Gleichung:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij} - \rho \overline{u'_i u'_j}) \quad (3.22)$$

Es zeigt sich also, dass der durch die Fluktuationen hervorgerufene Term im Sinne eines Spannungstensors τ_{ij} interpretiert werden kann:

$$(\tau_{ij})_{\text{tur}} = -\rho \overline{u'_i u'_j} = (-\rho) \cdot \begin{pmatrix} \overline{u'^2} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{v'u'} & \overline{v'^2} & \overline{v'w'} \\ \overline{w'u'} & \overline{w'v'} & \overline{w'^2} \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

$$(\tau_{ij})_{\text{mol}} = \mu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) \quad (3.24)$$

Die Terme auf der Diagonalen von links oben nach rechts unten bezeichnen wir als Normalspannungen, die restlichen als Schubspannungen. Diese sog. **Reynolds-Spannungen** stellen 9 zusätzliche Unbekannte in obigem Gleichungssystem dar, für

die zusätzliche Beziehungen angegeben werden müssen, um die Reynolds-Gleichungen lösen zu können. Deren Anzahl lässt sich zunächst auf 6 reduzieren, indem man die Symmetrie des Spannungstensors ausnutzt. Die verbleibenden Terme lauten:

$$\overline{u'^2}, \overline{v'^2}, \overline{w'^2}, \overline{u'v'}, \overline{u'w'}, \overline{v'w'} \quad (3.25)$$

Für im Mittel zweidimensionale, rotationssymmetrische oder eindimensionale Strömungen kann ihre Anzahl noch weiter reduziert werden. Das erscheint plausibel, wenn man bedenkt, dass in einer Strömung ohne Geschwindigkeitsgradienten (konstantes Impulsniveau an jedem Ort) kein Impulsaustausch stattfinden kann. Dies gilt z.B. bei zweidimensionalen Scherströmungen längs der neutralen Achse (d.h. der Achse, längs der der Geschwindigkeitsgradient gleich Null und die Turbulenzstruktur homogen ist).

Die in der Turbulenz gebundene Energie wird als turbulente kinetische Energie q wie folgt eingeführt:

$$q = \overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2} \quad (3.26)$$

Beispiele:

- Zweidimensionale Scherströmung (homogen längs der z -Richtung)

$$\overline{u'^2} = f_1(x, y), \quad \overline{v'^2} = f_2(x, y), \quad \overline{w'^2} = f_3(x, y) \quad (3.27)$$

$$\overline{u'v'} = f_4(x, y), \quad \overline{u'w'} = \overline{v'w'} = 0$$

- Homogene Turbulenz

$$\overline{u'^2} = C_1 = \text{const.}, \quad \overline{v'^2} = C_2, \quad \overline{w'^2} = C_3 \quad (3.28)$$

$$\overline{u'v'} = C_4, \quad \overline{u'w'} = \overline{v'w'} = 0$$

- Isotrope Turbulenz

$$\overline{u'^2} = \overline{v'^2} = \overline{w'^2} = C \quad (3.29)$$

$$\overline{u'v'} = \overline{u'w'} = \overline{v'w'} = 0$$

Eine Aufgabe der Turbulenztheorie besteht darin, die jeweils verbleibenden Reynolds'schen Schubspannungsterme durch Verknüpfung mit den mittleren Strömungsgrößen zu bestimmen. Diese Aufgabe ist äußerst komplex, das Kernproblem und der Hauptgrund für die Komplexität turbulenter Strömungen ist eben die Tatsache, dass die turbulenten Eigenschaften nicht in einem einfachen Verhältnis zu den mittleren Strömungsgrößen stehen.

3.3.1 Physikalische Deutung der Reynolds-Spannungen

- Turbulente Normalspannungen: $-\rho \overline{u'^2}$, $-\rho \overline{v'^2}$, $-\rho \overline{w'^2}$

Wir betrachten eine turbulente Parallelströmung in der (x, y) -Ebene und legen einen Schnitt senkrecht zur x -Achse. Der durch die Schnittfläche A hindurchtretende Massenstrom ist folglich $\rho u A$ und damit der Impulsstrom $\rho u^2 A$. Durch Mittelwertbildung ergibt sich:

$$\overline{\rho u^2} A = \rho \overline{(\bar{u} + u')^2} A = \rho (\bar{u}^2 + \overline{u'^2}) A \quad (3.30)$$

z.B. durch Dimensionsanalyse lässt sich so finden, dass die turbulenten Normalspannungen vergleichbar einem lokalen Druck sind im Sinne einer auf die Schnittfläche A wirkenden Impulskraft aus den turbulenten Fluktuationen. Es sei bemerkt, dass sich dies auch durch Bildung eines Analogons zur kinetischen Gastheorie, die in der Einleitung skizziert wurde, finden lässt.

$$\begin{aligned} x\text{-Richtung:} \quad p_{T,x} &= \overline{\rho u'^2} \\ y\text{-Richtung:} \quad p_{T,y} &= \overline{\rho v'^2} \\ z\text{-Richtung:} \quad p_{T,z} &= \overline{\rho w'^2} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Im isotropen Fall gilt:

$$p_T = \frac{1}{3} \rho (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}) = \frac{1}{3} \rho \overline{q'^2} \quad (3.32)$$

$q' \dots$ turbulente Gesamtbewegungsenergie pro Masse ($q'^2 = u'^2 + v'^2 + w'^2$)

- Turbulente Schubspannungen: $-\rho \overline{u'v'}$, $-\rho \overline{u'w'}$, $-\rho \overline{v'w'}$

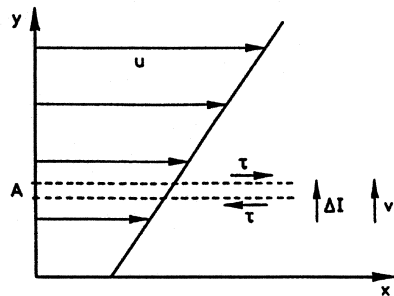


Abbildung 3.1: Schubspannung in Parallelströmung

Wir betrachten eine turbulente Parallelströmung in der (x, y) -Ebene und legen einen Schnitt parallel zur x -Achse. In diesem Schnitt wirkt die Schubspannung τ auf der Schnittfläche A . Vernachlässigt man die Wirkung der Molekularspannungen, so kann die Scherkraft $A \cdot \tau$ nur als Folge eines Impulsaustausches ΔI in y -Richtung verstanden werden. Tritt nun durch A der Massenstrom $\rho v A$ hindurch so ist der durch A transportierte x -Impuls $\rho v A$, bzw nach der Mittelung $\rho \bar{u} \bar{v} A$. Dann gilt in der Schnittebene:

$$\rho \bar{u} \bar{v} A = \rho (\bar{u} + u') (\bar{v} + v') A = \rho (\bar{u} \bar{v} + \overline{u' v'}) A \quad (3.33)$$

Da aufgrund der angenommenen Strömung $\bar{v} = 0$ ist, ergibt sich für den Impulsstrom der Schwankungsbewegung $-\rho \overline{u' v'}$ und somit für die "turbulente" Schubspannung $\tau_{\text{tur}} = F/A = -\rho \overline{u' v'}$.

3.4 Die Grenzschichtgleichungen

Bei der Berechnung von besonders einfachen Strömungen (z.B. von zweidimensionalen oder rotationssymmetrischen Grenzschichtströmungen) reduziert sich die Anzahl der zusätzlichen Unbekannten. In den Reynolds-Gleichungen bleiben dann im Allgemeinen nur vier unbekannte Terme übrig: $\overline{u'^2}$, $\overline{v'^2}$, $\overline{w'^2}$, $\overline{u' v'}$. In Strömungen mit Grenzschichtcharakter sind die Gradienten der gemittelten Geschwindigkeiten in Strömungsrichtung gegenüber den Quergradienten relativ klein. Deshalb verbleibt als einzig wirkungsvoller Term nur noch die turbulente Schubspannung $-\rho \overline{u' v'}$.

Obwohl $|u'_i| \ll \bar{u}_i$ können die Grenzschichtgleichungen für turbulente Strömungen nicht aus den Grenzschichtgleichungen für laminare Strömungen hergeleitet werden, da $|\partial u'_i / \partial x_j| \gg |\partial \bar{u}_i / \partial x_j|$. Die **Reynolds-Gleichungen** für eine stationäre, inkompressible, zweidimensionale Strömung unter Vernachlässigung der laminaren (molekularen) Spannungsanteile und der Volumenkräfte (Schwere)) lauten:

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \overline{u'^2} - \frac{\partial}{\partial y} \overline{u' v'} \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \overline{u' v'} - \frac{\partial}{\partial y} \overline{v'^2} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Folgende **Grenzschichtabschätzungen** werden eingeführt:

1. Alle Abmessungen in Strömungsrichtung sind von der Größenordnung $\mathcal{O}(1)$; der Längsgradient ist $\mathcal{O}(1/1)$.
2. Alle Abmessungen quer zur Strömungsrichtung sind von der Größenordnung $\mathcal{O}(\delta)$ mit $\delta \ll 1$; der Quergradient ist $\mathcal{O}(1/\delta)$.

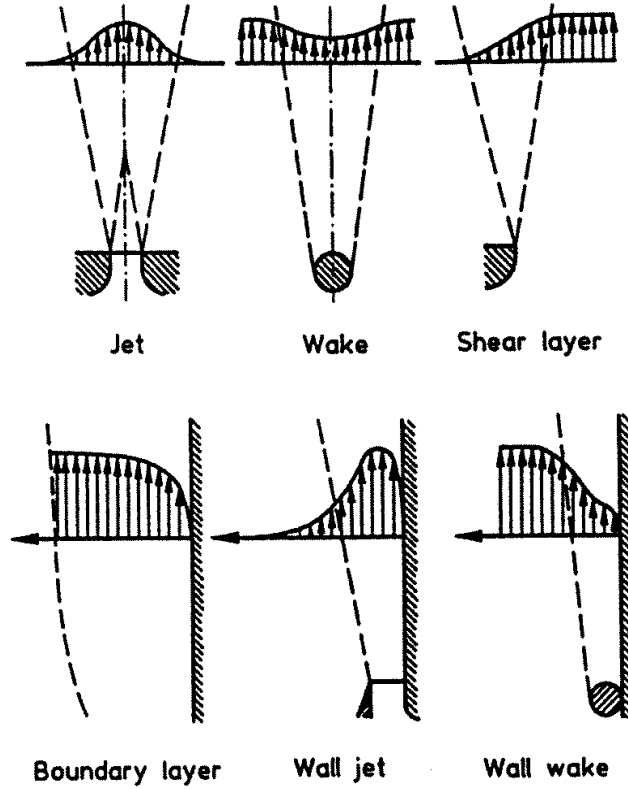


Abbildung 3.2: Beispiele für Scherströmungen

3. Alle mittleren Geschwindigkeitskomponenten in Strömungsrichtung sind von der Größenordnung $\mathcal{O}(1)$.
4. Alle mittleren Geschwindigkeitskomponenten quer zur Strömungsrichtung sind von der Größenordnung $\mathcal{O}(\delta)$.
5. Es ist ferner $\mathcal{O}(\overline{u'^2}) = \mathcal{O}(\overline{v'^2}) = \mathcal{O}(\overline{u'v'}) = \mathcal{O}(\delta)$.
6. Die maximale Größenordnung der Gradienten von p wird aus Gl.(3.37) gefolgert, sie ergibt sich zu $\mathcal{O}(p) = \mathcal{O}(\delta)$ und wird dann in Gl.(3.35) eingesetzt.

Damit lassen sich die Gl.(3.34) für freie Grenzschichtströmungen folgendermaßen abschätzen:

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \overline{u'^2} - \frac{\partial}{\partial y} \overline{u'v'} \quad (3.35)$$

$$(1) \frac{(1)}{(1)} + (\delta) \frac{(1)}{(\delta)} = -\frac{(\delta)}{(1)} - \frac{1}{(1)}(\delta) - \frac{1}{(\delta)}(\delta) \quad (3.36)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \overline{u'v'} - \frac{\partial}{\partial y} \overline{v'^2} \quad (3.37)$$

$$(1) \frac{(\delta)}{(1)} + (\delta) \frac{(\delta)}{(\delta)} = -\frac{(\delta)}{(\delta)} - \frac{1}{(1)}(\delta) - \frac{1}{(\delta)}(\delta) \quad (3.38)$$

Die Terme der Kontinuitätsgleichung sind von der Größenordnung $\mathcal{O}(1)$.

Unter Vernachlässigung der Glieder der Ordnung $\mathcal{O}(\delta)$ in den Gl.(3.35) und (3.37) ergeben sich die turbulenten Grenzschichtgleichungen für die mittlere Bewegung zu:

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \approx -\frac{\partial}{\partial y} \overline{u'v'} \quad (3.39)$$

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \approx -\frac{\partial}{\partial y} \overline{v'^2} \quad (3.40)$$

$$\text{Kontinuitätsgleichung: } \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (3.41)$$

Als ein zusammengehörendes Gleichungssystem sind die Gl.(3.39) und (3.41) zu betrachten, da die Glieder der Gl.(3.40) nicht in den beiden anderen erscheinen.

Die Gl.(3.40) liefert eine interessante Aussage über den statischen Druck in einer turbulenten Grenzschichtströmung. Da $\partial \bar{p} / \partial x \approx 0$ ist, ergibt sich $\partial \bar{p} / \partial y = d\bar{p} / dy$ und Gl.(3.40) ist damit integrierbar:

$$\bar{p} - p_0 \approx -\varrho \overline{v'^2} \quad (3.42)$$

In turbulenten Strömungen herrscht also ein — wenn auch geringer — statischer Unterdruck gegenüber der Umgebung (siehe auch *Townsend (1956)*).

Man findet die Grenzschichtgleichung für freie Strömungen unter Beachtung von

$$p - \bar{p} = -\varrho \overline{v'^2} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \overline{v'^2} \quad \text{usw.} \quad (3.43)$$

auch häufig in der Form (ohne Vernachlässigungen):

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'^2} - \overline{v'^2}) - \frac{\partial}{\partial y} \overline{u'v'} + \text{Zähigkeitsglied} \quad (3.44)$$

3.5 Energiegleichung der turbulenten Bewegung

Die Navier-Stokes'schen Bewegungsgleichungen (NSG), und davon abgeleitet auch die Reynolds-Gleichungen (RG), entstanden aus einer Analyse des Kräftegleichgewichtes am fluiden Volumenelement. Sie haben die Dimension *Kraft / Masse*:

$$\begin{aligned} \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}} \text{ [N/kg]} &= \text{Beschleunigung [m/s}^2\text{]} \\ &= \frac{\text{Spannungsänderung pro Länge}}{\text{Dichte}} \end{aligned} \quad (3.45)$$

Durch Multiplikation mit der jeweiligen Geschwindigkeit erhält man einen Ausdruck, der die zeitliche Änderung der mechanischen Energie pro Masse darstellt:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \cdot u = \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial t} \quad (3.46)$$

Dieses Verfahren wird sinngemäß auf die NSG angewendet, indem die x , y und z -Komponenten jeweils mit u , v , w multipliziert werden. Dadurch gelangt man zu den Energiegleichungen der Turbulenz, die einen Einblick in den Mechanismus des turbulenten Energiehaushaltes geben.

Gesucht wird also eine Gleichung der Form:

$$\frac{\partial \overline{u_i'^2}}{\partial t} = \dots \quad (3.47)$$

Diese kann wie folgt ermittelt werden:

$$\frac{\partial \overline{u_i'^2}}{\partial t} = 2 \overline{u_i' \cdot \frac{\partial u_i'}{\partial t}} \Rightarrow 2 \overline{u_i' \cdot \text{NSG}} \quad (3.48)$$

Hierbei ist folgende Gleichung zu beachten:

$$\frac{\partial \overline{u_i'^2}}{\partial t} = \frac{\partial \overline{u_i^2}}{\partial t} - \frac{\partial \overline{u_i^2}}{\partial t} \quad (3.49)$$

Die Herleitung ist relativ zeitaufwändig; deshalb wird an dieser Stelle die Herleitung lediglich skizziert und das Ergebnis angeführt:

1. Ausgangspunkt: NSG unter Verwendung der einfachen Dekomposition (Mittelwert und Schwankungsgröße)
2. Multiplikation jeder Gleichung mit der jeweiligen Schwankungsgeschwindigkeit

3. Mittelung unter der Verwendung der Beziehung:

$$\overline{u' \frac{\partial u'}{\partial (\dots)}} = \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial (\dots)} \quad (3.50)$$

4. Umstellen der Gleichungen und so summieren, dass auf einer Seite die turbulente Energie geteilt durch die Dichte steht.

5. Anwendung der Kontinuitätsbeziehung für Mittel- und Schwankungs-Werte führt auf die übliche vollständige Gleichung.

Die resultierende vollständige **Energiegleichung der Turbulenz** lautet in indizierter Schreibweise:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \overline{q'^2}}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{u_i q'^2}) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\overline{u'_i \left(\frac{p'}{\varrho} + \frac{q'^2}{2} \right)} \right) - \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \quad (3.51)$$

lokale instat.
Änderung

Konvektion

Diffusion

Produktion

$$+\nu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\overline{u'_j \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)} \right) - \nu \left(\overline{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}} \right)$$

zähe Diffusion

– Dissipation

Die Energiebilanz besitzt somit folgende allgemeine Form:

lokale instationäre Änderung der turbulenten Energie

= Konvektion + Diffusion + Produktion + zähe Diffusion – Dissipation

Eine Aufspaltung der Terme in Geschwindigkeitskomponenten unter Beachtung von $q'^2 = u'^2 + v'^2 + w'^2$ ergibt:

lokale instationäre Änderung der turbulenten Energie in der Zeit =

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \overline{q'^2} \quad (\text{für stationäre Vorgänge} = 0) \quad (3.52)$$

Konvektion =

Transport von Turbulenzenergie durch mittlere Bewegung (Divergenzterm).

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} \overline{q'^2}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v} \overline{q'^2}) + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{w} \overline{q'^2}) \right) \quad (3.53)$$

Diffusion =

Transport von Turbulenzenergie durch turbulente Fluktuation (Austausch-Divergenzterm).

$$- \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\overline{u' \left(\frac{q'^2}{2} + \frac{p'}{\varrho} \right)} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\overline{v' \left(\frac{q'^2}{2} + \frac{p'}{\varrho} \right)} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\overline{w' \left(\frac{q'^2}{2} + \frac{p'}{\varrho} \right)} \right) \right] \quad (3.54)$$

Produktion =

Erzeugung (Übernahme) von Turbulenzenergie aus der mittleren Bewegung aufgrund turbulenter Spannungen.

$$- \left[\overline{u'^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \overline{v'^2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \overline{w'^2} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right] \quad (3.55)$$

Normalspannungsterm (i.a. klein)

$$+ \overline{u'v'} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) + \overline{u'w'} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) + \overline{v'w'} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right)$$

Schubspannungsterm

Dissipation =

Verlust von Turbulenzenergie durch Übergang in Wärmeenergie, verursacht durch laminare (zähe) Reibung.

Φ' heisst die Dissipationsfunktion der Schwankungsbewegung $\left[\frac{J}{m^3 s} \right]$

ϵ wird als spezifische Dissipationsrate bezeichnet $\left[\frac{m^2}{s^3} \right]$

$$\epsilon = \frac{1}{\varrho} \Phi' = \nu \left[2 \overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2} + 2 \overline{\left(\frac{\partial v'}{\partial y} \right)^2} + 2 \overline{\left(\frac{\partial w'}{\partial z} \right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x} \right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial v'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial y} \right)^2} \right] \quad (3.56)$$

Zähe Diffusion =

Molekulare (zähe) Diffusion der Turbulenzenergie (i.a. vernachlässigbar klein, Divergenzterm), auch Drucktransport.

$$\frac{1}{\rho} \Phi' + \nu \left[\overline{u' \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} \right)} + \overline{v' \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial z^2} \right)} + \overline{w' \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} \right)} \right] \quad (3.57)$$

Nähere Erläuterungen zu den einzelnen Termen:

Produktion und Dissipation sind Energieänderungen im betrachteten Volumen, d.h. als Quelle und Senke in unterschiedlichen Frequenzbereichen interpretierbar. Konvektion und Diffusion stellen einen Energietransport durch die Volumenoberfläche dar.

Die Dissipation ist:

- der Übergang von geordneter in ungeordnete Energie (Wärme),
- ein Energieverlust durch innere Reibung,

Damit kann auch die Produktion als Dissipation in einem weiteren Sinne gedeutet werden, nämlich als Übergang der geordneten Energie der mittleren Bewegung u_i in die ungeordnete Energieform der Turbulenz u'_i (entspricht der turbulenten Spannung mal mittlerem Geschwindigkeitsgradienten). Es existieren also drei Stadien der Bewegung, zwischen denen ein Energiefluss längs der Frequenzachse (Zerfall) besteht:

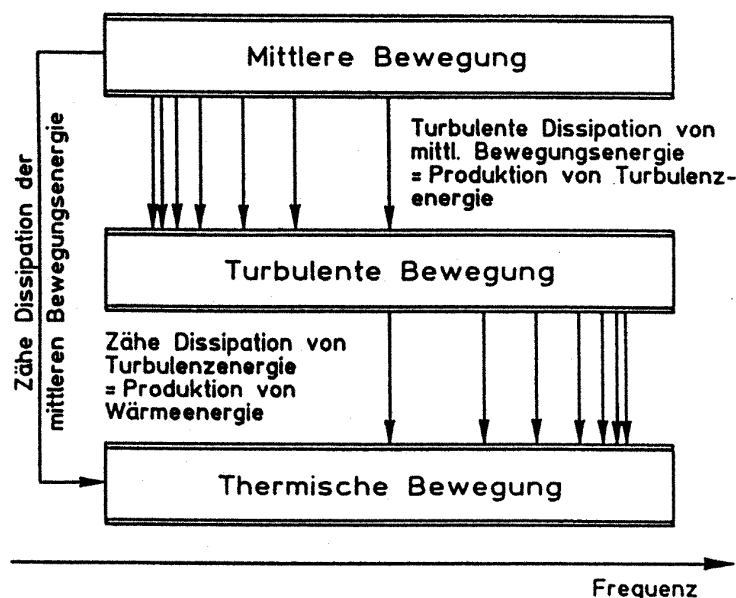


Abbildung 3.3: Strömungsrelevante Bewegungsformen

Die Bewegungs- bzw. Transportmechanismen in Raum, d.h. durch die Oberfläche des betrachteten Volumens hindurch, sind:

- Diffusion = Energietransport durch Fluktuationsbewegung
- Konvektion = Energietransport durch mittlere Bewegung

Einen Eindruck vom Mechanismus der Energieübertragung in einem turbulenten Freistrahel gibt Abb. 3.4. In Kapitel 7 (Scherströmungen) werden zu einer Vielzahl unterschiedlicher Strömungstypen weitere Verteilungen diskutiert werden.

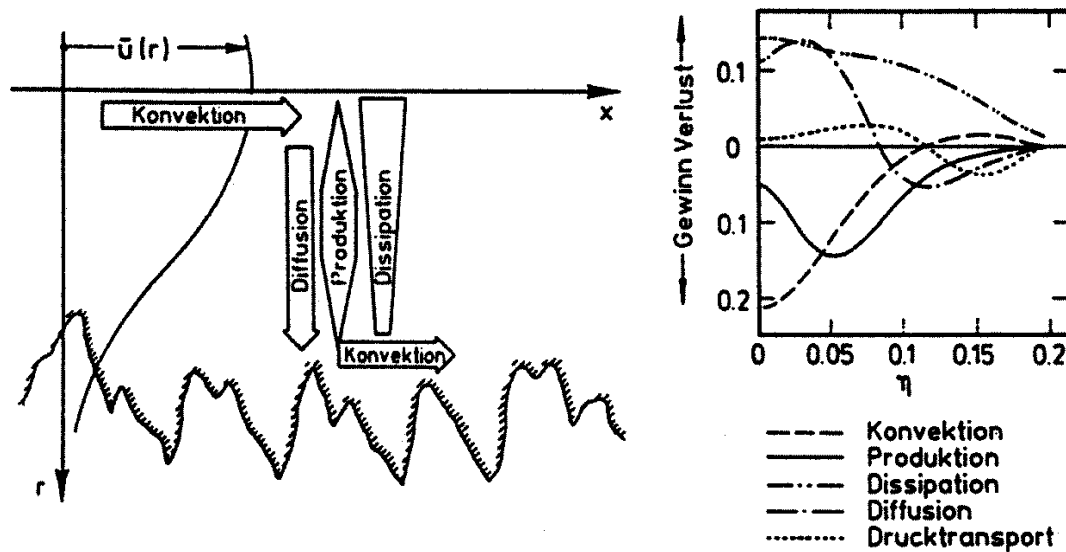


Abbildung 3.4: Energieübertragung im turbulenten Freistrahel und Analyse der Energierterme in einem radialen Schnitt, $\eta = y/x$

Aussagen der Energiebilanz-Gleichungen:

- Die Energiebilanz wird i.a. durch Messungen ermittelt und anhand ihrer Ergebnisse werden Turbulenzeigenschaften untersucht.
- Über die spektralen Zusammenhänge und die Eigenschaften der Energieübertragung sagt die Energiebilanz nichts aus.
- Bei hinreichend großen Reynoldszahlen sind alle Terme der Energiebilanz-Gleichungen unabhängig von der Reynoldszahl. Andererseits steht vor den Gliedern der molekularen Diffusion und der Dissipation die Zähigkeit, woraus wir folgern können, dass die räumlichen Ableitungen der Turbulenzfluktuationen wiederum von der Reynoldszahl abhängig sein müssen. Nähere Erläuterungen hierzu werden in Kapitel 5 gegeben.

Totale zeitliche Änderung der Turbulenzenergie:

Die totale oder substantielle zeitliche Änderung der Turbulenzenergie q'^2 ist

$$\frac{d\overline{q'^2}}{dt} = \frac{\partial \overline{q'^2}}{\partial t} + \overline{\frac{\partial q'^2}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt}} \quad (3.58)$$

wobei

$$\frac{dx_j}{dt} = u_j = \overline{u_j} + u'_j \quad (3.59)$$

und damit

$$\frac{d\overline{q'^2}}{dt} = \frac{\partial \overline{q'^2}}{\partial t} + \overline{\frac{\partial q'^2}{\partial x_j} u'_j} + \overline{\frac{\partial q'^2}{\partial x_j} u'_j} . \quad (3.60)$$

Nach Anwendung der Produktregel folgt daraus:

$$\frac{d\overline{q'^2}}{dt} = \frac{\partial \overline{q'^2}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_j q'^2}) - \overline{q'^2} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_j q'^2}) - \overline{q'^2} \frac{\partial \overline{u'_j}}{\partial x_j} \quad (3.61)$$

Unter Ausnutzung der Kontinuitätsgleichung ergibt sich schließlich:

$$\frac{d\overline{q'^2}}{dt} = \frac{\partial \overline{q'^2}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_j q'^2}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_j q'^2}) \quad (3.62)$$

Die totale zeitliche Änderung der Turbulenzenergie ist gleich der Summe aus der lokalen zeitlichen Änderung im Mittel, der Änderung aufgrund der mittleren Bewegung (Konvektion) und der Änderung aufgrund der Schwankungsbewegung (turbulente Diffusion).

Kapitel 4

Numerische Simulation turbulenter Strömungen

4.1 Methodenübersicht

Eine grobe Übersicht der Methoden zur numerischen Simulation turbulenter Strömungen ist in Abb. 4.1 enthalten. Die Methoden können zunächst danach klassifiziert werden, ob die zugrundeliegenden Gleichungen einer Mittelung unterzogen wurden. Während die DNS-Methode die ungemittelten Navier-Stokes-Gleichungen numerisch approximiert, wird bei der LES-Methode ein Teil des turbulenten Spektrums und bei der RANS-Simulation das gesamte turbulente Spektrum gemittelt. Weiterhin kann die RANS-Simulation in Wirbelviskositätsmodellierung bzw. in Reynoldsspannungsmodellierung eingeteilt werden. Hierbei kann die Modellierungskomplexität recht unterschiedlich sein. Während der algebraischen Wirbelviskositätsmodellierung ein verhältnismäßig einfaches Konzept zugrundeliegt, ist der Modellierungsansatz eines differenziellen Reynoldsspannungsmodells sehr anspruchsvoll. Da alle Methoden Vor- und Nachteile besitzen, sollte für das vorliegende Strömungsproblem die Methode mit der niedrigsten Komplexität und gleichzeitiger Erfassung wesentlicher Turbulenzphänomene gewählt werden.

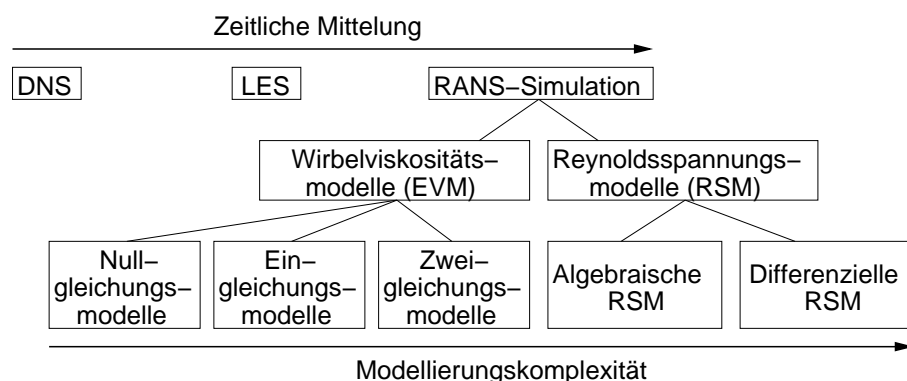


Abbildung 4.1: Numerische Methoden zur Vorhersage turbulenter Strömungen

4.2 Direkte Numerische Simulation (DNS)

Die direkte numerische Simulation stellt einen modellierungsfreien Ansatz dar, da sämtliche Turbulenzmechanismen in den Navier-Stokes-Gleichungen berücksichtigt werden. Da die Turbulenz ein inhärent instationäres und dreidimensionales Phänomen ist, müssen die entsprechenden Terme der Navier-Stokes-Gleichung in der DNS-Methode mitberücksichtigt werden, auch für den Fall, dass die gemittelte Strömung stationär und zweidimensional ist. Auf Grund der Vielzahl der räumlichen und zeitlichen Turbulenzskalen, werden bei der DNS-Methode sehr hohe Anforderungen an die räumliche und zeitliche Auflösung gestellt. Darüber hinaus werden Diskretisierungsmethoden, die sich durch niedrige numerische Dissipation und Dispersion auszeichnen (vgl. Abbn. 4.2 und 4.3), benötigt. Um den Einfluss des Turbulenzgrades korrekt wiederzugeben, müssen fluktuierende Strömungsgrößen, die den Navier-Stokes-Gleichungen genügen, als Einström-Randbedingung vorgegeben werden.

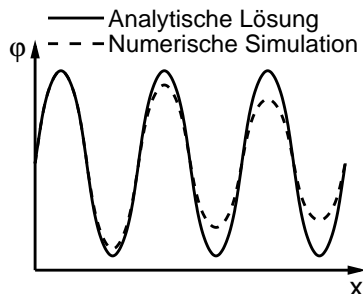


Abbildung 4.2: Numerische Dissipation (Amplitudenfehler)

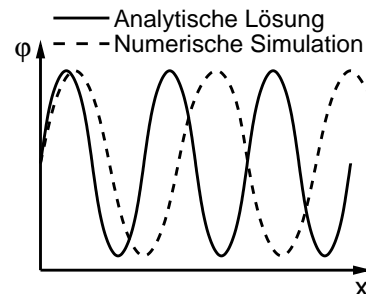


Abbildung 4.3: Numerische Dispersion (Phasenfehler)

4.3 Grobstruktursimulation (LES)

Bei der Grobstruktursimulation (LES – Large Eddy Simulation) wird ein Teil des turbulenten Spektrums (die "großen" Skalen) numerisch direkt aufgelöst, während der andere Teil (die "kleinen" Skalen) modelliert wird. Diese Vorgehensweise wird dadurch begründet, dass die Modellierung von großen Turbulenzstrukturen erhebliche Schwierigkeiten bereitet, so dass es vorteilhafter ist, diese Strukturen direkt zu simulieren, statt sie zu modellieren. Die Modellierungsschwierigkeiten ergeben sich aus den Eigenschaften von *großen Turbulenzstrukturen*, die wie folgt charakterisiert werden können:

- **Turbulenzentstehung (Aufrechterhaltung):** In Scherschichten werden zunächst große Turbulenzstrukturen gebildet. Bei diesem Prozess wird der gemittelten Grundströmung Energie entzogen.
- **Anisotropie:** In Scherschichten mit einem dominierenden Geschwindigkeitsgradienten bilden sich Turbulenzwirbel um eine bevorzugte Achse aus. Die Drehbewegung der turbulenten Strukturen um die anderen beiden Achsen ist dann deutlich schwächer ausgeprägt.

- **Umverteilung der turbulenten Drehbewegung:** Nach dem Helmholtz'schen Wirbelsatz werden durch Drehbewegungen um eine Achse ebenfalls Drehbewegungen um die anderen beiden Achsen induziert. Aus diesem Grund kommt es zu einer Umverteilung der turbulenten Drehbewegungen.
- **Zerfall der turbulenten Strukturen:** Die großen Strukturen zerfallen zu immer kleineren Strukturen, so dass sich ein Skalenspektrum über mehrere Größenordnungen ergibt.
- **Turbulente Bewegungsenergie:** Der Großteil der turbulenten Bewegungsenergie (ca. 80 %) ist in den großen Turbulenzstrukturen enthalten. Daher sollte das Grobstrukturfeld den Produktionsbereich und den Inertialbereich des Energiespektrums beinhalten, vgl. Abb. 4.4.

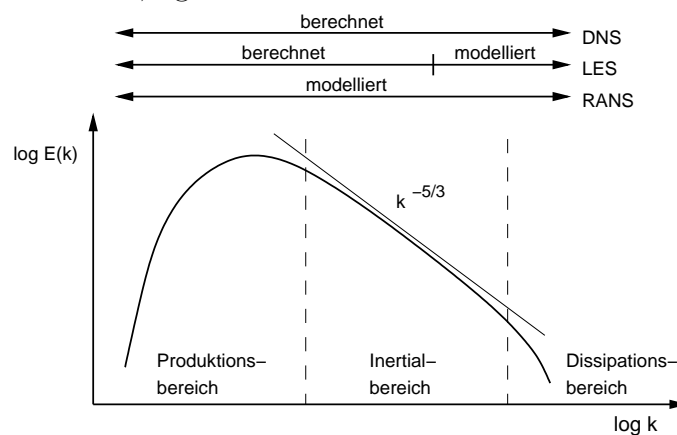


Abbildung 4.4: Energiespektrum der isotropen Turbulenz

Es besteht ein berechtigter Grund zu der Annahme, dass eine direkte numerische Auflösung obengenannter Vorgänge in vielen Fällen vorteilhafter als eine Modellierung derselben Vorgänge ist. Demgegenüber weisen die *kleinen Turbulenzstrukturen* deutlich unterschiedliche Merkmale auf, so dass eine Modellierung als genügend akkurat betrachtet wird:

- **Isotropie:** Aus zahlreichen Untersuchungen ist bekannt, dass die kleinen Turbulenzstrukturen einen hohen Grad an Isotropie aufweisen, d.h. die turbulenten Schwankungsbewegungen in alle drei Raumrichtungen sind ungefähr gleich groß.
- **Dissipation:** Durch molekulare Reibungswirkung wird in den kleinskaligen Schwankungsbewegungen die turbulente Bewegungsenergie in Wärmeenergie umgewandelt. Hierbei wird exakt diejenige Energiemenge dissipiert, wie von den großen Turbulenzskalen "geliefert" wird.

Grobstruktursimulationen werfen zwangsläufig die Frage nach einer geeigneten Trennung zwischen den aufgelösten und nicht-aufgelösten Turbulenzstrukturen auf. Zu diesem Zweck werden *Filterfunktionen*, die sich meist an der Maschenweite der

Rechennetz-Zellen orientieren, verwendet. Die daraus abgeleiteten Näherungsansätze für die kleinskalige Turbulenz werden als Subskalen-Modelle bezeichnet.

Bei der LES-Methode handelt es sich wie bei der DNS-Methode um ein inhärent instationäres und dreidimensionales Verfahren. Die Anforderungen an die numerische Dissipation und Dispersion, sowie an die "fluktuierenden" Randbedingungen, sind ebenfalls ähnlich wie bei der DNS-Methode. Obwohl die Anforderungen an die räumliche und zeitliche Auflösung nicht so hoch wie bei der DNS-Methode sind, handelt es sich dennoch um Anforderungen auf einem hohem Niveau, so dass sehr große Rechenkapazitäten benötigt werden.

4.4 RANS-Simulation

Die Reynolds-Gleichungen (RANS – Reynolds-averaged Navier-Stokes, vgl. Gl. (3.20)) weisen gegenüber den Navier-Stokes-Gleichungen einen zusätzlichen Term $-\rho \overline{u'_i u'_j}$ auf:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = k_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\tau_{ij} - \rho \overline{u'_i u'_j} \right) \quad (4.1)$$

Dieser Term wird als Reynolds-Spannungen, bzw. turbulente Spannungen bezeichnet und besteht aus 6 Größen, die a-priori nicht bekannt sind. Daher werden zusätzliche Beziehungen zwischen den unbekannten Reynolds-Spannungen und den bekannten Strömungsgrößen benötigt. Dieses Vorgehen ist der Kern der Turbulenzmodellierung.

Da die zeitlich gemittelte Auswirkung der Turbulenz auf die Grundströmung durch die Berücksichtigung von Reynolds-Spannungen bereits erfasst ist, ist eine instationäre Simulation nicht erforderlich und auch gar nicht möglich. Nicht-transiente Vorgänge (in der Praxis ist der Großteil der Strömungsprobleme nicht-transient) werden auf der Basis ihres zeitlichen Mittelwertes modelliert. Allerdings können transiente Prozesse durchaus auch mit einem RANS-Ansatz erfasst werden, hier wird dann die Strömung als stationär, jedoch mit variablen Randbedingungen betrachtet. Irritierenderweise hat sich der Begriff „unsteady RANS“, also „instationäre RANS“ eingebürgert, besser wäre „transiente RANS“, denn Instationarität im engeren Sinne kann aufgrund der Reynolds-Mittelung nicht betrachtet werden. Desweiteren kann eine RANS-Simulation zweidimensional sein, sofern die Grundströmung zweidimensional ist.

4.4.1 Wirbelviskositätsmodelle

4.4.1.1 Boussinesq-Approximation

Ein sehr weit verbreiteter Ansatz zur Modellierung der Reynolds-Spannungen ist die Boussinesq-Approximation¹. Diese Approximation beruht auf einer gewissen Ähnlichkeit der Reynolds-Spannungen zu den molekularen Schubspannungen $(\tau_{ij})_{mol}$: In einem

¹In der Literatur ist der Begriff "Approximation" geläufig, obwohl es sich vielmehr um eine "Annahme" handelt

Newton'schen Fluid sind die molekularen Schubspannungen proportional zu der (molekularen) Viskosität μ und zu den Gradienten der mittleren Geschwindigkeiten \bar{u}_i :

$$(\tau_{ij})_{\text{mol}} = \mu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.2)$$

Analog dazu, wird nun die Annahme gemacht, dass die turbulenten Spannungen proportional zu einer Wirbelviskosität μ_T und den Gradienten der mittleren Geschwindigkeiten seien:

$$(\tau_{ij})_{\text{tur}} = -\overline{\rho u'_i u'_j} = 2\mu_T S_{ij} - \frac{2}{3}\rho k \delta_{ij} \quad (4.3)$$

wobei hier die mittlere Strömung durch den sog. Scherraten-Tensor S_{ij} vertreten wird, der seinerseits der symmetrische Anteil des Gradiententensors der mittleren Geschwindigkeit $\partial \bar{u}_i / \partial x_j$ ist.

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \quad \text{mit:} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für: } i = j \\ 0 & \text{für: } i \neq j \end{cases} \quad (4.4)$$

Durch diese Annahme werden die 6 Unbekannten des Reynoldsspannungstensors durch eine unbekannte Größe, die Wirbelviskosität μ_T , ersetzt, woraus sich eine deutliche Vereinfachung des Schließungsproblems ergibt. Gleichzeitig werden jedoch einige Eigenschaften der Reynolds-Spannungen nur unzureichend wiedergegeben:

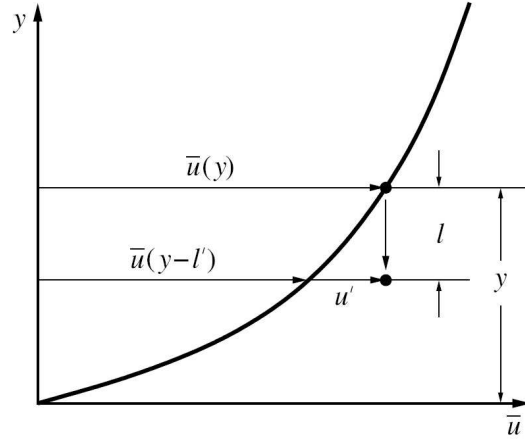
- Es wird ein *linearer* Zusammenhang zwischen den Reynolds-Spannungen und den Gradienten der mittleren Geschwindigkeiten unterstellt, was nicht immer ganz zutrifft. An dieser Stelle sei angemerkt, dass es auch *nicht-lineare* Erweiterungen von Wirbelviskositätsmodellen gibt.
- Da lediglich eine Wirbelviskosität für alle Reynolds-Spannungen benutzt wird, ist die Vorhersage der *Anisotropie* des Reynoldsspannungstensors nur eingeschränkt möglich.
- Durch die Analogie zu den molekularen Spannungen, die den Diffusionsterm der Navier-Stokes-Gleichungen darstellen, wird den turbulenten Spannungen ein *diffusiver* Charakter zugeschrieben, obwohl diese aus der Nichtlinearität der *konvektiven* Terme der Navier-Stokes-Gleichungen herrühren.

Turbulenzmodelle, die auf der Boussinesq-Approximation beruhen, werden als Wirbelviskositätsmodelle (EVM - Eddy Viscosity Models) bezeichnet. Eine geläufige Klassifizierung der Wirbelviskositätsmodelle beruht auf der Anzahl von Differenzialgleichungen, die zur Modellierung herangezogen werden. Dann ergibt sich folgende Einteilung:

- Nullgleichungsmodelle (algebraische Modelle)
- Eingleichungsmodelle
- Zweigleichungsmodelle

4.4.1.2 Nullgleichungsmodelle (algebraische Modelle)

Bei den Nullgleichungsmodellen handelt es sich um algebraische Zusammenhänge zwischen den mittleren Strömungsgrößen und der Wirbelviskosität. Diese Zusammenhänge basieren oft auf der *Prandtl'schen Mischungsweghypothese*. In dieser Hypothese wird die Auslenkung eines Fluidteilchens durch turbulente Schwankungsbewegungen um eine Länge l betrachtet, vgl. Abb. 4.4.1.2.



Es wird angenommen, dass die Schwankungsbewegung u' gerade der Geschwindigkeitsdifferenz $\Delta\bar{u}$ zwischen der ursprünglichen Stelle y und der ausgelenkten Stelle (hier: $y - l$) entspricht:

$$u' = \Delta\bar{u} = \bar{u}(y) - \bar{u}(y - l) = l \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (4.5)$$

Für v' gilt entsprechend:

$$v' \approx u' = l \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (4.6)$$

Dann ergibt sich für die Reynolds-Spannung $-\overline{\varrho u'v'}$:

$$-\overline{\varrho u'v'} = (\Delta\bar{u})^2 = \varrho l^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (4.7)$$

Eine Betrachtung des Vorzeichens der Reynolds-Spannung führt auf das verallgemeinerte Modell:

$$-\overline{\varrho u'v'} = \varrho l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (4.8)$$

Dieses kann ebenfalls wie folgt geschrieben werden:

$$-\overline{\varrho u'v'} = \mu_T \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (4.9)$$

mit der Wirbelviskosität μ_T :

$$\mu_T = \varrho l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \quad (4.10)$$

Die einzige Unbekannte zur Bestimmung der Wirbelviskosität μ_T ist die Länge l , die nun als Prandtl'scher Mischungsweg bezeichnet wird. Die einfachste Annahme ist eine lineare Abhängigkeit von dem Wandabstand y :

$$l = \kappa y \quad \text{mit:} \quad \kappa = 0,41 \quad (4.11)$$

Die sogenannte von-Kármán-Konstante κ wurde empirisch ermittelt. Eine weitere algebraische Beziehung für den Verlauf der Prandtl'schen Mischungsweges ist etwa von *van Driest (1956)* vorgeschlagen worden:

$$l = \kappa y \left(1 - e^{-\frac{y^+}{A_0^+}} \right) \quad \text{mit:} \quad \kappa = 0,41 \quad \text{und:} \quad A_0^+ = 26 \quad (4.12)$$

In dieser Gleichung steigt l und somit auch μ_T mit dem Wandabstand y , so dass unphysikalisch große Werte angenommen werden können. Daher ist von *Escudier (1966)* vorgeschlagen worden, l wie folgt zu limitieren:

$$l_{max} = 0,09\delta \quad (4.13)$$

Hierzu muss jedoch die Grenzschichtdicke δ bekannt sein.

Obwohl die Mischungsweghypothese von einer sehr vereinfachenden (und sogar falschen) Darstellung der Turbulenzphänomene ausgeht, ist sie in der Lage, erstaunlich gute Vorhersagen einiger einfacher turbulenter Strömungen zu erstellen, z.B. anliegende turbulente Wandgrenzschicht an einer ebenen Platte. Neben der vereinfachenden physikalischen Beschreibung, ist die fehlende Berücksichtigung der Vorgeschichte der Turbulenz als ein kritischer Punkt anzumerken. Weiterhin setzt die Anwendung der Mischungsweghypothese eine gewisse Kenntnis der zu berechnenden Strömung (z.B. Grenzschichtdicke) voraus.

4.4.1.3 Eingleichungsmodelle

Die Vorgeschichte der Turbulenz lässt sich durch die Benutzung einer Differenzialgleichung rechnerisch erfassen. Hierzu wird eine charakteristische Größe, mit der sich die Eigenschaften turbulenter Strukturen quantitativ erfassen lassen (z.B. turbulente Gesamtbewegungsenergie, Wirbelviskosität, etc.), im Strömungsfeld transportiert.

Als Beispiel sei hier das Turbulenzmodell von *Spalart und Allmaras (1992)* gezeigt. Die Wirbelviskosität ergibt sich zu:

$$\mu_T = \varrho \nu_T \quad \text{mit:} \quad \nu_T = \tilde{\nu} f_{v1} \quad (4.14)$$

wobei eine Differenzialgleichung für die ”modifizierte” Viskosität $\tilde{\nu}$ gelöst wird:

$$\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} = c_{b1} \tilde{S} \tilde{\nu} - c_{w1} f_w \left(\frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2 + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k} \right] + c_{b2} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k} \quad (4.15)$$

Schließungskoeffizienten sind:

$$c_{b1} = 0.1355, \quad c_{b2} = 0.622, \quad c_{v1} = 7.1, \quad \sigma = \frac{2}{3} \quad (4.16)$$

$$c_{w1} = \frac{c_{b1}}{\kappa^2} + \frac{(1 + c_{b2})}{\sigma}, \quad c_{w2} = 0.3, \quad c_{w3} = 2, \quad \kappa = 0.41 \quad (4.17)$$

$$f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3}, \quad f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}}, \quad f_w = g \left[\frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right]^{\frac{1}{6}} \quad (4.18)$$

$$\chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu}, \quad g = r + c_{w2}(r^6 - r), \quad r = \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S} \kappa^2 d^2} \quad (4.19)$$

$$\tilde{S} = S + \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2} f_{v2}, \quad S = \sqrt{2 \Omega_{ij} \Omega_{ij}}, \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.20)$$

Obwohl Eingleichungsmodelle nur eine Größe zur Erfassung der Turbulenz verwenden, kann eine recht gute Vorhersage auch komplexerer Strömungsformen erzielt werden. Als Beispiel sei hier die Berechnung beginnender Ablösungen an Profilen genannt.

4.4.1.4 Zweigleichungsmodelle

In den Eingleichungsmodellen wurde eine charakteristische Größe zur Beschreibung wesentlicher Eigenschaften der Turbulenz verwendet und in Form einer Differenzialgleichung transportiert. Für gewöhnlich beinhaltet diese Größe eine Information über die turbulenten Geschwindigkeiten u' , v' und w' (z.B. turbulente Gesamtbewegungsenergie q). Man kann jedoch durch Dimensionsanalyse zeigen, dass (mindestens) eine weitere Größe benötigt wird, um die turbulenten Strukturen genau zu beschreiben.

Bereits *Kolmogorov (1942)* konnte das erste umfassende Turbulenzmodell angeben, indem er eine zweite Differenzialgleichung für eine weitere Größe – die spezifische turbulente Dissipationsrate ω – aufstellte und diese mit der turbulenten Wirbelviskosität in einer algebraischen Beziehung verknüpfte. Dieser Ansatz wird die *Prandtl-Kolmogorov-Hypothese* genannt:

$$\mu_T = \frac{\rho k}{\omega} \quad (4.21)$$

Es existiert eine Vielzahl von Zweigleichungsmodellen. An dieser Stelle sei exemplarisch das k - ω -Turbulenzmodell von *Wilcox (2006)* dargestellt. Hierbei bezeichnet k die turbulente kinetische Energie (entspricht der turbulenten Gesamtbewegungsenergie q)

und ω die spezifische turbulente Dissipationsrate, $\omega = \epsilon/k$.

Die Größen k und ω werden mit folgenden Differenzialgleichungen modelliert:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{u}_i k)}{\partial x_i} = \tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \beta^* \rho k \omega + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\mu + \sigma^* \mu_T) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{u}_i \omega)}{\partial x_i} = \alpha \frac{\omega}{k} \tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \beta \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\mu + \sigma \mu_T) \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right] \quad (4.23)$$

Die Schließungskoeffizienten des k - ω -Modells lauten:

$$\alpha = \frac{13}{25} \quad \beta = \frac{9}{125} \quad \beta^* = \frac{9}{100} \quad \sigma = \frac{1}{2} \quad \sigma^* = \frac{1}{2} \quad (4.24)$$

Die Bestimmung der Schließungskoeffizienten erfolgt durch Abgleich mit bekannten turbulenten Strömungen bzw. mit experimentellen Ergebnissen. Im folgenden soll eine solche Bestimmung exemplarisch für die oben genannten Koeffizienten des k - ω -Modells kurz dargestellt werden.

Eine erste Beziehung für die Schließungskoeffizienten bietet die Betrachtung der abklingenden isotropen Turbulenz. Für diesen Fall nehmen die k - und die ω -Gleichung folgende Formen an (inkompressibel):

$$\frac{\partial k}{\partial t} = -\beta^* k \omega \quad \text{und:} \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = -\beta \omega^2 \quad (4.25)$$

Die asymptotische Lösung für die abklingende isotrope Turbulenz lautet:

$$k \propto t^{-\frac{\beta^*}{\beta}} \quad \text{beziehungsweise:} \quad k \propto t^{-n} \quad (4.26)$$

Aus zahlreichen experimentellen Untersuchungen ist der Faktor n bekannt:

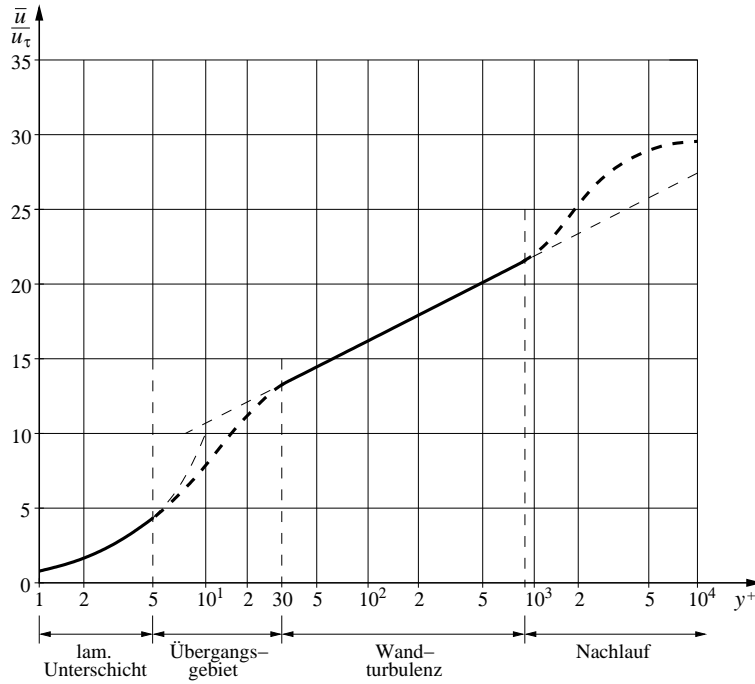
$$n = -\frac{\beta^*}{\beta} \approx 1,25 \quad (4.27)$$

Dies ist die erste Beziehung für die Bestimmung der Schließungskoeffizienten. Die zweite Beziehung wird aus der Näherungslösung für die logarithmische Wandschicht hergeleitet, vgl. Abb. 4.5. Dort gelten folgende Näherungslösungen (inkompressibel, hier ohne Herleitung):

$$\bar{u} = \frac{u_\tau}{\kappa} \ln y + \text{konst.} \quad (4.28)$$

$$k = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{\beta^*}} \quad (4.29)$$

$$\omega = \frac{u_\tau}{\sqrt{\beta^*} \kappa y} \quad (4.30)$$



Abbildungung 4.5: Geschwindigkeitsprofil einer wandgebundenen turbulenten Grenzschicht mit Zuordnung der verschiedenen Bereiche

mit der Wandschubspannungsgeschwindigkeit:

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad \text{und:} \quad \tau_w = \mu \left. \frac{d\bar{u}}{dy} \right|_{y=0} \quad (4.31)$$

Für die Reynoldsspannung τ_{xy} gilt:

$$\tau_{xy} = \rho \overline{u'v'} = \rho \frac{k}{\omega} \frac{d\bar{u}}{dy} \quad (4.32)$$

Mit den Gln. 4.28-4.30 ergibt sich in der logarithmischen Wandschicht:

$$\tau_{xy} = \rho u_\tau^2 \quad \text{beziehungsweise:} \quad \frac{\tau_{xy}}{\rho} = u_\tau^2 \quad (4.33)$$

Dann lässt sich Gl. 4.29 auch wie folgt schreiben:

$$\frac{\tau_{xy}}{\rho} = \sqrt{\beta^*} k \quad (4.34)$$

Zahlreiche Messungen liefern den Faktor 3/10 als eine gute Näherung zwischen τ_{xy} und k :

$$\frac{\tau_{xy}}{\rho} = \frac{3}{10} k \quad (4.35)$$

Demnach ergibt sich der Koeffizient β^* zu:

$$\beta^* = \frac{9}{100} \quad (4.36)$$

Mit der Korrelation für die abklingende isotrope Turbulenz (Gl. 4.27) kann der Koeffizient β bestimmt werden:

$$\beta = \frac{9}{125} \quad (4.37)$$

Um die Gültigkeit der Näherungslösungen für die logarithmische Wandschicht (Gln. 4.28-4.30) zu gewährleisten, muss zwischen der von Kármán-Konstante $\kappa = 0,41$ und den Schließungskoeffizienten folgender Zusammenhang bestehen:

$$\alpha = \frac{\beta}{\beta^*} - \frac{\sigma \kappa^2}{\sqrt{\beta^*}} \quad (4.38)$$

Dies ist eine weitere Beziehung zur Ermittlung der übrigen drei Schließungskoeffizienten. Das weitere Vorgehen verläuft analog zu der bereits gezeigten Bestimmung der Koeffizienten β und β^* , d.h. diese werden aus einem Abgleich bekannter turbulenter Strömungen mit Messungen gewonnen. So läßt sich zeigen, dass folgende Schließungskoeffizienten eine gute Übereinstimmung mit Näherungslösungen für die laminare Unterschicht und die Nachlaufschicht liefern:

$$\sigma = \sigma^* = \frac{1}{2} \quad (4.39)$$

Aus Gl. 4.38 folgt dann der letzte Schließungskoeffizient:

$$\alpha = \frac{13}{25} \quad (4.40)$$

Zweigleichungsmodelle auf Basis des k - ω - und k - ϵ -Ansatzes bilden heute den größten Anteil in der ingenieurmäßig angewendeten Turbulenzmodellierung. Sie bilden einen guten Kompromiss aus Vorhersagequalität und notwendiger Computerleistung. Aufgrund der Anwendung der Boussinesq-Hypothese können die Zweigleichungsmodelle die Anisotropie der Reynoldsspannungen nicht vollständig erfassen. Zudem setzt *Kolmogorov* in der Herleitung voraus, dass die Turbulenz im Gleichgewicht sei. Diese beiden Annahmen können mitunter unrealistisch werden, dies ist typischerweise der Fall bei starken Stromlinienkrümmungen und stark anisotroper Turbulenz, z.B. im wandnahen Bereich von Grenzschichten. Für solche Strömungstypen sind Erweiterungen der Zweigleichungsmodelle vorhanden, jedoch ist ein generalisiertes Modell formal ausgeschlossen.

4.4.2 Reynoldsspannungsmodelle

Durch Multiplikation der Navier-Stokes-Gleichungen mit den Schwankungsgeschwindigkeiten und anschließender Mittelung erhält man die exakte Gleichung für die Reynolds-Spannungen:

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} = -\tau_{ik} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} - \tau_{jk} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \epsilon_{ij} - \Pi_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\nu \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} + C_{ijk} \right] \quad (4.41)$$

mit:

$$\Pi_{ij} = \frac{p'}{\varrho} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.42)$$

$$\epsilon_{ij} = 2\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \quad (4.43)$$

$$\varrho C_{ijk} = \overline{\varrho u'_i u'_j u'_k} + \overline{p' u'_i \delta_{jk}} + \overline{p' u'_j \delta_{ik}} \quad (4.44)$$

Diese Beziehung liefert ein Gleichungssystem bestehend aus sechs Differenzialgleichungen für die unbekannten Reynoldsspannungen τ_{ij} , zuzüglich einer Differenzialgleichung für die Dissipationsrate ϵ . Mit den *differenziellen* Reynoldsspannungsmodellen werden numerische Lösungen dieses Gleichungssystems gesucht.

In dem vorhandenen Gleichungssystem ist keine weitere Vereinfachung möglich, beispielsweise kann keine der sechs Reynoldsspannungen als dominant angesehen werden, so dass die Gleichungen nicht entkoppelt werden können. Die Schwierigkeit an dieser Stelle besteht also darin, geeignete Modellierungen der Doppel- und Tripelkorrelationen zu finden. Die Differenzialgleichung 4.41 kann beispielsweise durch algebraische Ausdrücke approximiert werden, vgl. *Rodi (1976)*:

$$\frac{\tau_{ij}}{k} \left(\tau_{mn} \frac{\partial \bar{u}_m}{\partial x_n} - \epsilon \right) = -\tau_{ik} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} - \tau_{jk} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \epsilon_{ij} - \Pi_{ij} \quad (4.45)$$

Die entsprechenden Vorhersagemethoden werden *algebraische* Reynoldsspannungsmodelle genannt.

Als wesentliche Vorteile von Reynoldsspannungsmodellen können die Erfassung der Umverteilungsmechanismen, Wiedergabe der Turbulenzvorgeschichte, ein nicht-linearer Zusammenhang zwischen den Reynolds-Spannungen und den mittleren Geschwindigkeiten sowie exakte Modellierung der Turbulenzproduktion angeführt werden. Demgegenüber steht eine Reihe von Nachteilen. Hierzu sind die Schwierigkeiten in der Modellierung der Doppel- und Tripelkorrelationen, sowie der Dissipationsrate zu nennen. Darüber hinaus weisen einzelne Terme der Reynoldsspannungsmodelle große, nichtlineare Terme auf, die im Strömungsfeld stark variieren. Daher ist es schwierig, für diese Modelle robuste Lösungsverfahren bereitzustellen und deshalb und wegen der vielen Gleichungen haben diese Modelle einen deutlich erhöhten Rechenaufwand gegenüber den Wirbelviskositätsmodellen.

4.5 Detached-Eddy-Simulation

Bei der DES - der „Detached-Eddy-Simulation“ - handelt es sich um eine Mischung aus einer LES- und einer RANS-Methodik; sie zählt daher zur Klasse der hybriden RANS/LES-Verfahren. Die Grundidee dieser Verfahren liegt darin, dass sich anliegende turbulente Grenzschichten recht gut mit dem RANS-Ansatz darstellen lassen, während ihre (korrekte) Behandlung mit Grobstruktursimulationen nach äußerst feinen räumlichen und zeitlichen Diskretisierungen verlangt, weil die aufzulösenden turbulenten Skalen in den dünnen Grenzschichten sehr klein sind. Andererseits lassen sich abgelöste Gebiete, Nachläufe und freie Scherschichten recht gut und bei vertretbarem Aufwand mit der Grobstruktursimulation erfassen, während RANS-Modelle hier häufig versagen.

Die DES wurde von *Spalart et al. (1997)* vorgeschlagen. Sie zielt auf die Berechnung von aerodynamischen Strömungen mit massiver Ablösung bei moderater Erhöhung der Netzauflösung gegenüber RANS-Verfahren. Hierzu wird die Strömung durch einen geeigneten Detektor in Bereiche eingeteilt, in denen entweder das gesamte turbulente Energiespektrum nach dem RANS-Ansatz modelliert wird (anliegende, turbulente Wandgrenzschichten), oder aber die großen Turbulenzstrukturen im Sinne einer Grobstruktursimulation zeitlich und räumlich aufgelöst werden (abgelöste Strömung, freie Wirbel). Es wird also das für den jeweiligen Bereich geeignetere Verfahren hinsichtlich Effizienz und Genauigkeit ausgewählt.

Die ursprüngliche Form der DES basiert auf dem Spalart-Allmaras RANS-Modell nach Kap. 4.4.1.3, das durch eine leicht geänderte Formulierung auch als Subskalen-Modell im Rahmen einer LES verwendet werden kann. Zur Detektion geeigneter LES-Bereiche wird das integrale Längenmaß der Turbulenz, das beim Spalart-Allmaras Modell durch den Wandabstand d gegeben ist, im Dissipationsterm der Wirbelviskosität $D_{\tilde{\nu}}$ in Gl. (4.15) durch ein DES-Längenmaß ersetzt:

$$D_{\tilde{\nu},\text{DES}} = c_{w1} f_w \left(\frac{\tilde{\nu}}{l_{\text{DES}}} \right)^2, \quad l_{\text{DES}} = \min(d, C_{\text{DES}} \Delta) \quad (4.46)$$

$$\text{mit: } \Delta = \max[\Delta x, \Delta y, \Delta z], \quad C_{\text{DES}} = 0.65 \quad (4.47)$$

Damit wird eine Abhängigkeit der Dissipation von der lokalen Gitterweite Δ und der Modellkonstante C_{DES} eingeführt. In Strömungsgebieten mit

$$C_{\text{DES}} \Delta < d \quad \Rightarrow \quad l_{\text{DES}} = C_{\text{DES}} \Delta \quad (4.48)$$

reicht die Gitterauflösung aus, um die Grobstruktur der Turbulenz direkt aufzulösen, und das modifizierte RANS-Modell verhält sich lokal wie ein LES-Subskalen-Modell.

In anliegenden turbulenten Grenzschichten sind gängige Rechnernetze hierfür jedoch in der Regel zu grob aufgelöst:

$$C_{\text{DES}} \Delta > d \quad \Rightarrow \quad l_{\text{DES}} = d \quad (4.49)$$

und das Turbulenzmodell entspricht seiner ursprünglichen RANS-Formulierung.

Der DES-Ansatz lässt sich prinzipiell auf andere RANS-Modelle übertragen, indem die Längenmaßvariable im jeweiligen Destruktionsterm (und ggf. an weiteren Stellen des Modells) durch das modifizierte Längenmaß l_{DES} ersetzt wird.

Mit einer DES kann der Aufwand gegenüber einer vollständigen Grobstruktursimulation einschließlich der Grenzschichten auf ein vertretbares Maß reduziert werden. Aufgrund der grundsätzlich zeitgenauen und dreidimensionalen Simulation ist die Rechendauer dennoch deutlich höher als beim reinen RANS-Ansatz. Praktische Anwendungen auf reale Strömungsprobleme haben darüber hinaus mehrere Schwächen der obigen Form der DES aufgezeigt. So erfolgt der Übergang von modellierter Turbulenz im RANS Bereich zu direkt aufgelöster Turbulenz im LES Gebiet häufig zu langsam (*Graubereich* der DES), und es kann bei ungünstiger Gestaltung des Rechnernetzes zu *netzinduzierter Strömungsablösung* kommen. Aktuelle Forschungen beschäftigen sich daher mit Erweiterungen des RANS/LES-Detektors *Shur et al. (2008)* sowie der künstlichen Anfachung von turbulenten Strukturen im LES-Bereich *Kok und van der Ven (2010)*.

Einen recht guten Überblick über die Vielzahl der hybriden RANS/LES-Verfahren gibt *Fröhlich und von Terzi (2008)*.

Kapitel 5

Statistische Theorie der Turbulenz

5.1 Einführung

Während die beiden vorigen Kapitel einerseits den Einfluss der Turbulenz auf die mittlere Strömung (Kapitel 3) und andererseits die vereinfachte Modellierung der Turbulenz (Kapitel 4) zum Thema haben, soll mit dem nun folgenden Kapitel die Eigenart der Turbulenz an sich diskutiert werden. Typische Fragestellungen sind etwa, wie bestimmte Strömungsvariablen in turbulenten Strömungen korrelieren, was typische Längenmaße sind und welche Frequenzen sich finden. Das praktische Ziel dieser Untersuchungen ist es i.d.R. Verknüpfungsbeziehungen zwischen mittleren und fluktuierenden Größen zu finden und somit Erkenntnisse z.B. für die Modellierung der Turbulenz zu finden.

Zur Analyse werden klassische statistische Mittel angewandt. Eine fundamentale Operation, die Mittelwertbildung, wurde bereits in Kapitel 3.1 bei den Grundlagen ausgebildeter Turbulenz eingeführt. Um zu einer weitergehenden Analyse zu gelangen, geht man von den Reynolds'schen Gleichungen aus. Es ist offenkundig, dass Zusatzbeziehungen von der Art der Mischungsweghypothesen die äußerst verwickelten Vorgänge nicht zu beschreiben vermögen; andererseits erscheint es aber z.Z. nicht möglich, ein hinreichend allgemeines Modell aufzustellen, welches alle Phänomene zu erklären und zu erfassen vermag. Der einzig gangbare Ausweg aus dieser Situation ist nach heutigem Wissen daher eine statistische Theorie, die im wesentlichen auf der bereits bekannten Vorstellung beruht, dass sich die turbulente (Neben-) Bewegung aus den Bewegungen von Strukturen verschiedenster Größe zusammengesetzt hat, die der mittleren Strömung überlagert sind.

Wir wollen uns zunächst mit einigen statistischen Begriffen vertraut machen, mit denen die Turbulenztheorie arbeitet und die zur Beschreibung der Turbulenz verwendet werden. Klassischerweise ist die statistische Theorie eng verknüpft mit experimentellen Methoden, deren Aufgabe es ist, die gewünschten Strömungsgrößen in geeigneter Form aufzunehmen. Mit dem Fortschritt der Computertechnik werden nunmehr auch

turbulente Strömungen, z.B. Wandgrenzschichten, mit DNS berechnet. Die Methodik der Analyse ist dabei sehr ähnlich.

Die Intensitäten der Turbulenz sind definiert als die Effektiv- oder RMS-Werte der fluktuierenden Geschwindigkeitskomponenten und sind gleichzeitig die Wurzelwerte der mittleren Turbulenzenergien:

$$\sqrt{u'^2}, \quad \sqrt{v'^2}, \quad \sqrt{w'^2} \quad (5.1)$$

Die Bezeichnung „RMS“ ist eine Abkürzung aus der englischen Sprache: „Root (of the) mean square“ = Wurzel aus dem quadratischen Mittelwert; wir werden im folgenden dafür abgekürzt „quadratischer Mittelwert“ verwenden.

Die Intensität wird i.allg. in normierter Form dargestellt, z.B.:

$$\frac{\sqrt{u'^2}}{\bar{u}} \quad (5.2)$$

Als Bezugswert u kann je nach erwünschter Aussage prinzipiell jeder beliebige Geschwindigkeitswert der betrachteten Strömung gewählt werden. Der Einfluss des Bezugswertes auf die Aussagefähigkeit des Mittelwertes soll am Beispiel eines Freistrahles erläutert werden:

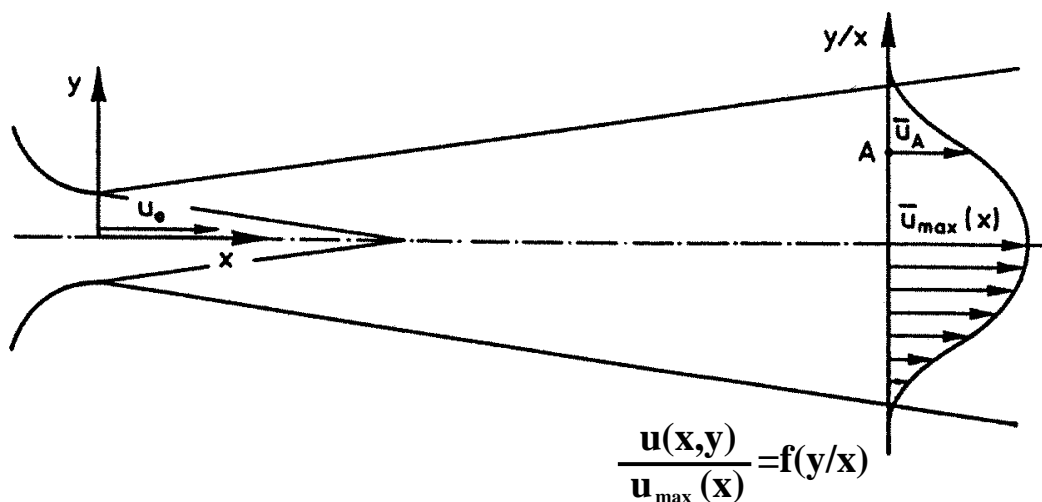


Abbildung 5.1: Geschwindigkeitsprofil eines Freistrahles

Im Fall ähnlicher Profile (vgl. Kapitel 6), z.B. bei großen Werten von x , lassen sich alle Verläufe quer zur Strömungsrichtung über einer normierten Querkoordinate $\eta = y/x$ auftragen. Sie fallen, wenn sie durch eine entsprechende lokale Größe normiert werden,

auf jeweils eine einzige Kurve zusammen.

Typische Normierungen sind:

1. Lokale Turbulenzintensität:

$$\frac{\sqrt{u_A'^2}}{u_A}, \quad \frac{\sqrt{v_A'^2}}{u_A} = f(y/x) \text{ etc.} \quad (5.3)$$

Dies ist der örtliche Turbulenzgrad. Man erhält über ihn eine Aussage über den lokalen Agitationszustand, was z.B. bei Vergleichen verschiedener Experimente, aber auch für die Vorbereitung von Messungen, z.B. für die Hitzdrahtmesstechnik (Fehlerabschätzung) von Bedeutung ist.

2. Querschnittsbezogene Turbulenzintensität:

$$\frac{\sqrt{u_A'^2}}{u_{\max}} = f(y/x) \text{ etc.} \quad (5.4)$$

Es wird der Intensitätsverlauf über einem Strömungsquerschnitt angegeben, relativiert mit der nur von x abhängigen Mittengeschwindigkeit $\overline{u_{\max}}(x)$.

Beide Normierungsmöglichkeiten stellen die Verhältnisse in einem bestimmten Strömungsquerschnitt dar. Im Fall ähnlicher Strömungsprofile genügt ein derartiges Profil zur Beschreibung der gesamten Strömung.

3. Turbulenzintensität als Funktion vom Radius und Abstand:

$$\frac{\sqrt{u_A'^2}}{u_0} = f\left(\frac{y}{x}, x\right) \text{ etc.} \quad (5.5)$$

Dies Variante bezieht die Turbulenzintensität auf eine radial (y/x), bzw. axial (x) invariante Geschwindigkeit. Man gewinnt somit kaum eine tiefergehende Aussage über die Turbulenz.

4. Axialer Intensitätsverlauf:

$$\frac{\sqrt{u_{\max}^2}}{u_0} = f(x) \text{ etc.} \quad (5.6)$$

Die Darstellung von Messwerten kann damit (Ähnlichkeit stets vorausgesetzt) durch zwei Diagramme geschehen, nämlich durch Anwendung der Gl.(5.4), woraus sich über den Verlauf von u/u_{\max} auch die Darstellungsform gemäß Gl.(5.3) ergibt, und durch Gl.(5.6) zusammen mit u_{\max}/u_0 .

In der Praxis der Strömungstechnik verwendet man — z.B. für die Bestimmung der Güte eines Windkanals — häufig den Begriff des Turbulenzgrades; er ist definiert als das quadratische Mittel der Intensitätskomponenten:

$$Tu = \frac{1}{u_0} \sqrt{\frac{1}{3} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})} \quad (5.7)$$

In isotroper Turbulenz vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$Tu \approx \frac{\sqrt{\overline{u'^2}}}{u_0}, \quad (5.8)$$

wobei u_0 die mittlere Strömungsgeschwindigkeit ist.

Bei guten Windkanälen liegt der Turbulenzgrad in der Messstrecke bei etwa 0.5%. Für spezielle Aufgaben, z.B. Transitionsstudien, kann ein $Tu < 0.1\%$ notwendig werden.

Im Gegensatz zu der Gesamtintensität der einzelnen Fluktuationskomponenten setzt sich die turbulente Gesamtenergie additiv zusammen:

$$\overline{q'^2} = \overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2} \quad (5.9)$$

Die Gesamtintensität ergibt sich damit aus der Gesamtenergie zu:

$$\sqrt{\overline{q'^2}} = \sqrt{\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}} \quad (5.10)$$

In Bezug auf die turbulente Energie ergibt nur eine dreidimensionale Betrachtungsweise Sinn. In der Messtechnik muss man allerdings häufig auf eine 2-Komponenten-Messung zurückgreifen (z.B. Hitzdrähte), mit der Annahme isotroper Turbulenz kann man dann den Anteil der verbleibenden dritte Komponente durch je einen halben Anteil der bekannten Komponenten ersetzen, wodurch folgt:

$$\sqrt{\overline{q'^2}} = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot (\overline{u'^2} + \overline{v'^2})} \quad (5.11)$$

Die Annahme isotroper Turbulenz ist dabei in der Realität meist nicht gegeben. Es hat sich jedoch gezeigt, dass dieses Vorgehen recht realistische Werte liefert, der Einfluss von Anisotropie also eher gering ist.

5.2 Korrelationen

5.2.1 Grundlagen der Korrelation

Auf die Bedeutung der Korrelationen bei der statistischen Beschreibung der Turbulenz hat *Taylor (1935)* aufmerksam gemacht. Allgemein versteht man unter Korrelation eine Verknüpfung verschiedener Ereignisse oder Eigenschaften. Im weiteren Sinne ist das z.B. die Verknüpfung des mittleren Geschwindigkeitsprofils mit der dazugehörigen Schubspannung. Im engeren — hier verwendeten — Sinne sei damit ein Ähnlichkeitsgrad, z.B. zwischen verschiedenen Vorgängen $A(\underline{r}, t)$ und $B(\underline{r}, t)$, beschrieben.

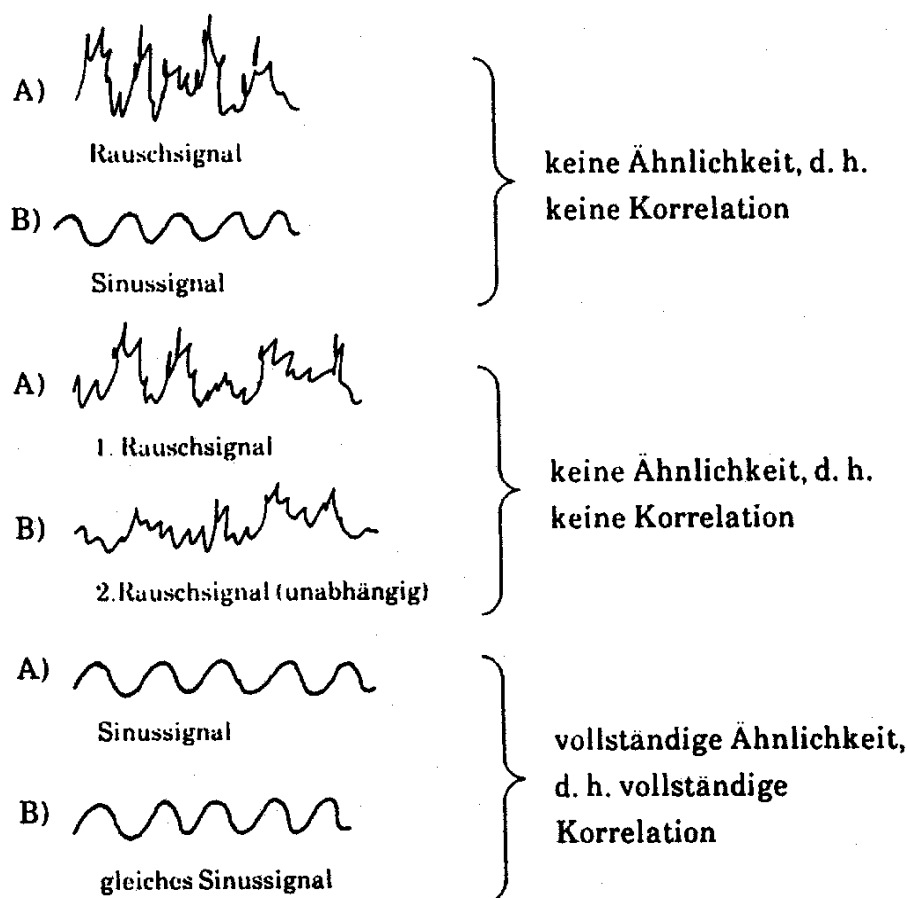


Abbildung 5.2: Beispiele für Doppel-Korrelationen

Der zeitliche oder Ensemble-Mittelwert des Produkts von n stochastischen Größen q_n wird als Korrelationsfunktion bezeichnet:

$$Q = \overline{\prod_n q_n} \quad (5.12)$$

Teilt man diesen Ausdruck Q durch das Produkt der quadratischen Mittelwerte von

q_k ($k = 1, \dots, n$), so erhält man den dimensionslosen Korrelationskoeffizienten R :

$$R = \frac{\overline{\prod_{k=1}^n q_k}}{\prod_{k=1}^n \sqrt{\overline{q_k^2}}} \leq 1 \quad (\text{Schwarzsche Ungleichung}) \quad (5.13)$$

Für die Beschreibung turbulenter Vorgänge und Strömungsfelder interessieren im wesentlichen Doppel-Korrelationen ($n = 2$). Für theoretische Untersuchungen werden in selteneren Fällen auch Tripel-Korrelationen ($n = 3$) verwendet, auf die an dieser Stelle jedoch verzichtet wird.

5.2.2 Doppelkorrelationen

Der Korrelationskoeffizient für $n = 2$ lautet:

$$R = \frac{\overline{q_1 q_2}}{\sqrt{\overline{q_1^2}} \sqrt{\overline{q_2^2}}} \quad (5.14)$$

Fallunterscheidung:

1. Für $q_1 = q_2$ erhält man

$$\overline{q_1 q_2} = \sqrt{\overline{q_1^2}} \sqrt{\overline{q_2^2}}, \quad (5.15)$$

und damit ergibt sich $R = 1$. Das ist die bestmögliche, vollständige positive Korrelation.

2. Für $q_1 = -q_2$ erhält man

$$\overline{q_1 q_2} = -\sqrt{\overline{q_1^2}} \sqrt{\overline{q_2^2}}, \quad (5.16)$$

und damit ergibt sich $R = -1$. Das ist die bestmögliche, vollständige negative Korrelation.

In einer turbulenten Strömung sind alle fluktuierenden Größen (Geschwindigkeitskomponenten, Druck, Temperatur, Dichte) stets Funktionen von Raum und Zeit, können also räumlich und/oder zeitlich korreliert werden. Wir betrachten zunächst die gebräuchlichsten Korrelationsmöglichkeiten:

Punktkorrelationen: Die Korrelation zweier gleicher (oder verschiedener) Größen (z.B. u') am gleichen Ort \underline{r} und zu gleichen Zeiten t in der Strömung ergibt die Korrelationsfunktion Q_{11} und den Korrelationskoeffizienten R :

$$Q_{11} = \overline{u'^2} = f(\underline{r}, t) \quad \text{und} \quad R = 1 \quad (5.17)$$

Prominente Beispiele für Punktkorrelationen gleicher Größen sind Normalspannungen und die Turbulenzenergie.

Auch die Korrelation zweier unterschiedlicher Größen (z.B. u' und v') am gleichen Ort und zur gleichen Zeit gehört zur Klasse der Punktkorrelationen und liefert:

$$Q_{12} = \overline{u'v'} = f(\underline{r}, t) \quad \text{mit} \quad |R| \leq 1 \quad (5.18)$$

Als Beispiel seien Schubspannungen genannt.

Autokorrelation: Korrelationen zweier gleicher Größen am gleichen Ort zu verschiedenen Zeiten gehören ebenfalls zu der Gruppe der Punktkorrelationen, werden aber i.d.R. Auto- oder Zeitkorrelationen genannt:

$$Q_{11} = \overline{u'(\underline{r}, t) u'(\underline{r}, t + \tau)} = f(\underline{r}, t, \tau) \quad (5.19)$$

$$R = \frac{\overline{u'(\underline{r}, t) u'(\underline{r}, t + \tau)}}{\sqrt{\overline{u'^2(\underline{r}, t)}} \sqrt{\overline{u'^2(\underline{r}, t + \tau)}}} = f(\underline{r}, t, \tau) \quad (5.20)$$

Raumkorrelation: Korrelationen zweier gleicher Größen an verschiedenen Orten zu gleichen Zeiten nennt man (2-Punkt)-Raumkorrelationen:

$$Q_{11} = \overline{u'(\underline{r}, t) u'(\underline{r} + \Delta \underline{r}, t)} = f(\underline{r}, \Delta \underline{r}, t) \quad (5.21)$$

$$R = \frac{\overline{u'(\underline{r}, t) u'(\underline{r} + \Delta \underline{r}, t)}}{\sqrt{\overline{u'^2(\underline{r}, t)}} \sqrt{\overline{u'^2(\underline{r} + \Delta \underline{r}, t)}}} = f(\underline{r}, \Delta \underline{r}, t) \quad (5.22)$$

Kreuzkorrelation: Korrelationen zweier gleicher oder unterschiedlicher Größen an zwei verschiedenen Orten oder zu verschiedenen Zeiten werden als Kreuzkorrelationen bezeichnet. Eine mögliche Form der Kreuzkorrelation ist die Korrelation zweier Signale von gleichen physikalischen Größen an zwei verschiedenen Orten zu verschiedenen Zeiten, also z.B.:

$$Q_{11} = \overline{u'(\underline{r}, t) u'(\underline{r} + \Delta \underline{r}, t + \tau)} = f(\underline{r}, \Delta \underline{r}, t, \tau) \quad (5.23)$$

$$R = \frac{\overline{u'(\underline{r}, t) u'(\underline{r} + \Delta \underline{r}, t + \tau)}}{\sqrt{\overline{u'^2(\underline{r}, t)}} \sqrt{\overline{u'^2(\underline{r} + \Delta \underline{r}, t + \tau)}}} = f(\underline{r}, \Delta \underline{r}, t, \tau) \quad (5.24)$$

Lagrange'sche Korrelation: Die in der Turbulenztheorie üblicherweise verwendeten Korrelationen sind *Eulersche Korrelationen*. Sie werden an festen Punkten in der Strömung bestimmt und können daher nur eine Aussage über den Verlauf der mittleren Zusammenhänge im umgebenden Strömungsbereich geben. *Lagrange'sche Korrelationen* sind an bestimmte Fluid-Elemente geknüpft und beschreiben deren Bewegungskohärenz in der Zeit. Sie sind somit – zumindest im Prinzip – besser geeignet, Diffusionsphänomene zu charakterisieren.

Die Lagrange'sche Autokorrelation für die Geschwindigkeitsfluktuationen eines Fluidpartikels lautet bei Ensemble-Mittelung über eine große Anzahl von Partikeln:

$$R_{Lij}(\tau) = \frac{\overline{u'_i(t) u'_j(t + \tau)}}{\sqrt{\overline{u'^2_i(t)}} \sqrt{\overline{u'^2_j(t + \tau)}}} \quad (5.25)$$

Ausgangspunkt der Betrachtung kann ein definierter Ort im Strömungsfeld sein, in der Zeitdifferenz τ ist dann die räumliche Verschiebung $\Delta \underline{r}$ implizit enthalten. In der Praxis lassen sich derartige Korrelationen nur auf Basis von DNS-Rechnungen bestimmen, da es kaum Möglichkeiten gibt, in einem mitbewegten System zu messen.

Nach der Beschreibung der gebräuchlichen Korrelationen bleibt festzuhalten, dass eine Korrelationsfunktion im allgemeinen ein Tensor ist, der für eine Doppelkorrelation folgende Form besitzt:

$$Q_{ij} = \overline{c'_i c'_j} \quad \text{mit} \quad \underline{c'} = \{u', v', w'\} \quad (5.26)$$

Dieser Tensor der Punktkorrelationen der Geschwindigkeitsfluktuationen besitzt demnach 9 Terme, die man in einer Matrix zusammenfassen kann:

$$Q_{ij} = \begin{pmatrix} \overline{u'^2} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{v'u'} & \overline{v'^2} & \overline{v'w'} \\ \overline{w'u'} & \overline{w'v'} & \overline{w'^2} \end{pmatrix} = f(\underline{r}, t) \quad (5.27)$$

Die allgemeine Form der Geschwindigkeits-Doppelkorrelationsfunktion ist der Tensor:

$$Q_{ij}(\underline{r}, \Delta \underline{r}, t, \tau) = \overline{c'_i(\underline{r}, t) c'_j(\underline{r} + \Delta \underline{r}, t + \tau)} \quad (5.28)$$

Er enthält alle möglichen früher beschriebenen Kombinationen. Darüber hinaus kann man die Analyse auch auf Druck-Geschwindigkeits-Korrelationen $\overline{p'u'}$, $\overline{p'v'}$, $\overline{p'w'}$ und mögliche Korrelationen unter Einbeziehung der Temperatur, z.B. $\overline{\vartheta'u'}$, ausdehnen.

Als kurzes Beispiel zeigt Abbildung 5.3 den gemessenen Verlauf einer lateralen Raumkorrelation im turbulenten Freistrah. Der in dem Diagramm aufgetragene Wert Λ_g ist der sog. Makromaßstab, der in einem folgenden Unterkapitel hergeleitet wird. Es lässt sich gut erkennen, dass die räumliche Turbulenzstruktur im Freistrah offensichtlich unabhängig von der stromab-Position x ist. Ferner fällt auf, dass der Korrelationskoeffizient auf negative Werte fällt, der Freistrah am Rand also nicht rein stochastisch fluktuiert, sondern schwach gegenphasiges Verhalten zeigt.

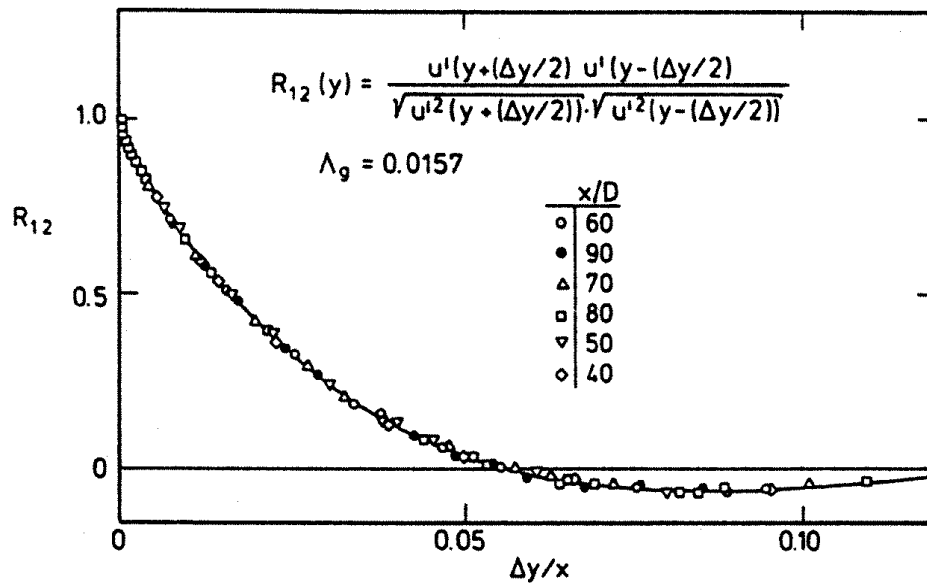


Abbildung 5.3: Raumkorrelationsmessung im turbulenten Freistrah

5.2.3 Bestimmung von Transportgeschwindigkeiten

Neben den Punktkorrelationen, die beispielsweise als Geschwindigkeitskorrelationen die Elemente des Reynolds-Spannungs-Tensors darstellen, liefern die verschiedenen Korrelationstypen etwas unterschiedliche Aussagen über das Strömungsfeld, die im folgenden kurz zusammengefasst werden sollen.

Auto-(Zeit-)Korrelationen: Sie liefern Aussagen über den zeitlichen Grad der Zusammenhänge eines Turbulenzsignals und sind im stationären Fall stets um die Ordinate symmetrisch.

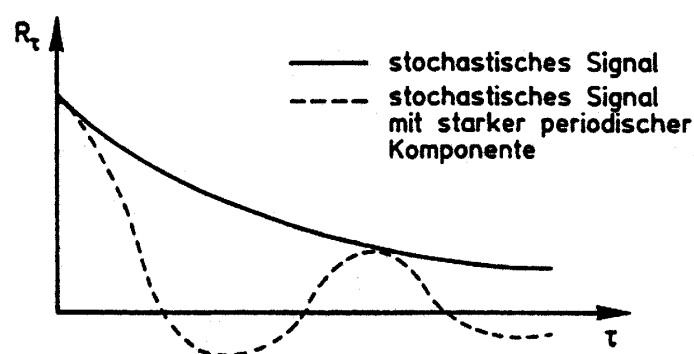


Abbildung 5.4: Autokorrelations-Kennlinie

Raumkorrelationen: Sie liefern Aussagen über den räumlichen Zusammenhang eines Turbulenzbereiches. Symmetrie um die Ordinate existiert nur bei isotropen

oder homogenen Strömungen. Im allgemeinen Fall kann Symmetrie für kleine Abszissenwerte angenommen werden.

Raum- und Zeitkorrelationen sind meist annähernd ineinander überführbar („Taylor-Hypothese“ im folgenden Unterkapitel). Sie entsprechen einander nur dann vollständig, wenn die Struktur „eingefroren“ ist. Praktisch ergibt sich ein etwas unterschiedlicher Verlauf durch den Einfluss der Diffusion bei der Zeitkorrelation. Raum- oder Zeitkorrelationen rein stochastischer Signale lassen sich oft gut durch einen Exponentialansatz beschreiben.

Kreuzkorrelationen: Sie liefern nach *Burgers (1951)*, *Balduin und Walsh (1961)* und *Deissler (1961)* einen gewissen Zusammenhang zwischen der Eulerschen und der Lagrangeschen Korrelation. Man findet, dass die mit der Strömung transportierte Eulersche Korrelation (entspricht der Autokorrelation im bewegten System) näherungsweise der Lagrange'schen Korrelation entspricht.

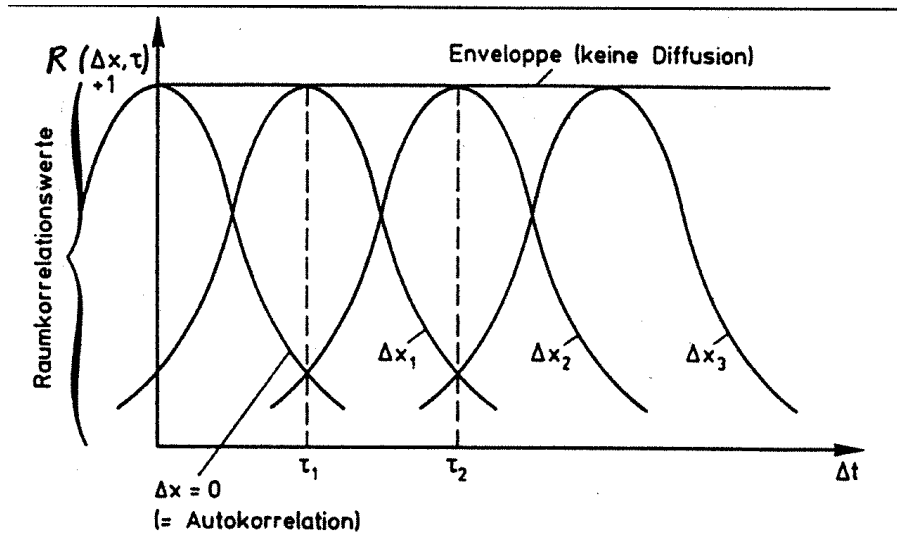


Abbildung 5.5: Beispiel eines Kreuzkorrelogramms

Denkt man sich eine turbulente Strömung, deren Struktur sich in der Zeit nicht ändert („frozen pattern“), so erhält man dafür das in Abb 5.5 skizzierte Kreuzkorrelogramm (Im folgenden wird der Einfachheit halber für $\underline{r} = \{x, 0, 0\}$ gesetzt und nur die Geschwindigkeitskomponente u' betrachtet).

Wir finden damit eine Geschwindigkeit

$$u_c = \frac{\Delta x}{\tau} = \tan \alpha, \quad (5.29)$$

die der Transportgeschwindigkeit der Strukturen (z.B. Wirbel) in der Strömung entspricht (Index $c \dots$ convection). Im hier vorausgesetzten Fall ist $u_c = \bar{u}$. Damit ist $R(\Delta x, \tau)$ direkt in $R(\tau)$ überführbar:

$$R(\Delta x, \tau) = R(0, \tau - \Delta x/u_c) = R(\tau - \Delta x/u_c) \quad (5.30)$$

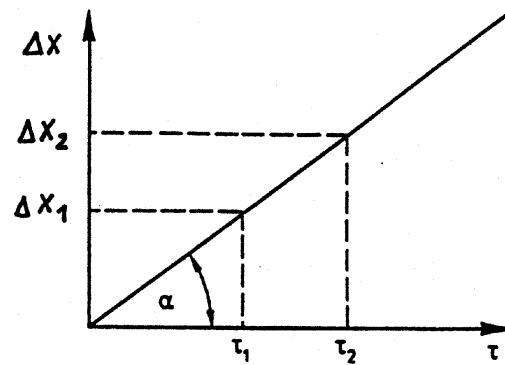


Abbildung 5.6: Transportgeschwindigkeit

In einer realen Strömung hat die Kreuzkorrelation etwa die in Abb 5.7 dargestellte Form, da sich die Strukturen auf Ihrem Weg durch die Strömung ändern und somit nicht mehr die maximale Korrelation liefern.

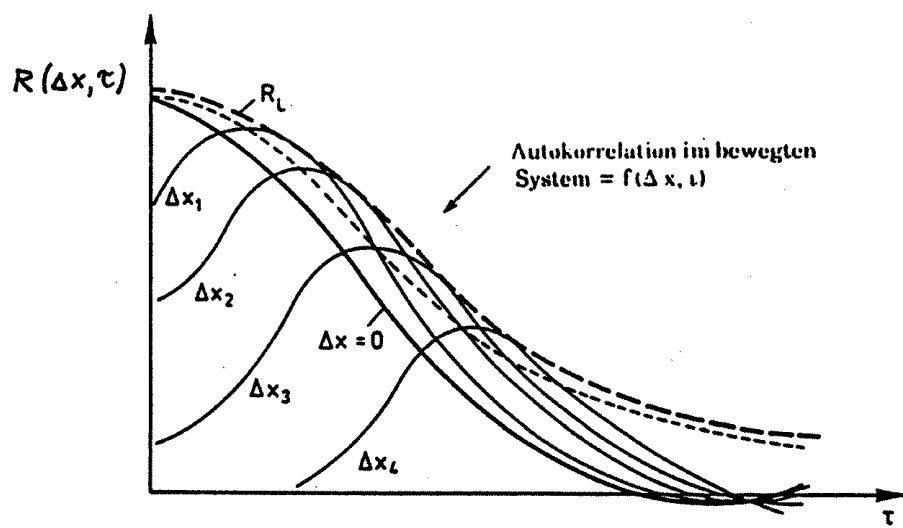


Abbildung 5.7: Kreuzkorrelogramm einer realen Strömung

Aus technischen Gründen trägt man meist Linien $\Delta x = \text{const.}$ in einem Koordinatensystem R über τ auf (da bei klassischen Messungen die Position der Sonden diskret ist, während das Zeitsignal kontinuierlich vorliegt). Man kann die Kreuzkorrelation auch auf andere Art (z.B. als Isoplethen – Linien gleicher Korrelationswerte) auftragen, wie es in Abb 5.8 dargestellt ist.

Die Verbindung der Maxima der Korrelationskurven ($\Delta x = \text{const.}$) in Abb 5.7 entspricht der Geraden (1) in der Isoplethen-Darstellung. Die Gerade (2) ist die Verbindung der Maxima der Korrelationskurven ($\tau = \text{const.}$), in der Darstellung ($\Delta x = \text{const.}$) ergibt es sich, dass dies die Verbindungslinie der Berührungspunkte der R -Kurve ist,

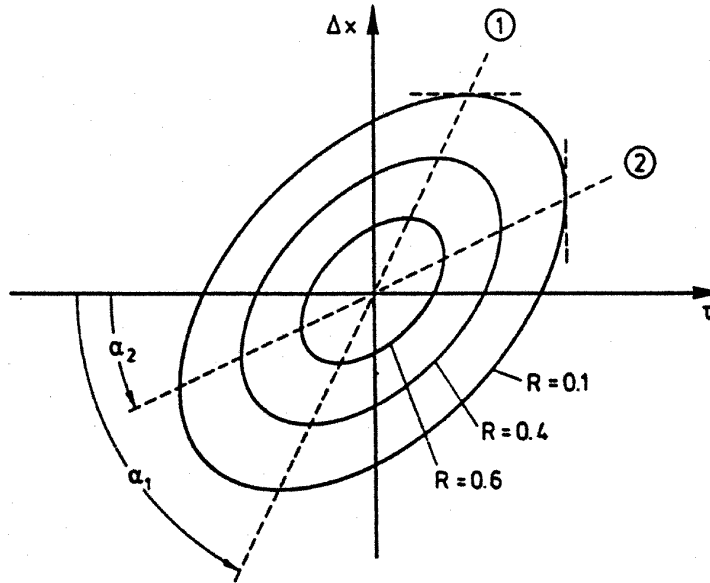


Abbildung 5.8: Isoplethen-Darstellung eines Kreuzkorrelogramms

also der Enveloppe in Darstellung 5.7. Damit erhält man zwei mögliche Definitionen der Geschwindigkeit:

$$\left. \frac{\partial R}{\partial \tau} \right|_{\Delta x = \text{const.}} = 0 \quad \rightarrow \quad u_{c, \Delta x} = \tan \alpha_1, \quad (5.31)$$

$$\left. \frac{\partial R}{\partial (\Delta x)} \right|_{\tau = \text{const.}} = 0 \quad \rightarrow \quad u_{c, \tau} = \tan \alpha_2,$$

wobei $u_{c, \Delta x} > u_{c, \tau}$ ist.

Die wirkliche Konvektionsgeschwindigkeit ist $u_{c, \tau} = u_c$ (also Gerade (2)). Die Ursache für den Unterschied zwischen den beiden Geschwindigkeiten und die Entscheidung für $u_{c, \tau}$ lässt sich anhand eines Gedankenexperimentes verdeutlichen: Angenommen sei eine diffundierende, diskrete Eigenschaft $q(x, t)$, z.B. gebe man der Strömung einen Farbtropfen hinzu, der mit der Strömung transportiert wird und langsam ausbleicht. Wenn man nun orts aufgelöst den Zustand an drei Zeitpunkten $\tau_1 \cdots \tau_3$ festhält (z.B. drei Fotos), so wird man das in Abbildung 5.9 oben dargestellte Verhalten festhalten. Zusätzlich wird an drei Orten $x_1 \cdots x_3$ zeitgenau gemessen. Man erhält das Signal aus Abb. 5.9 unten.

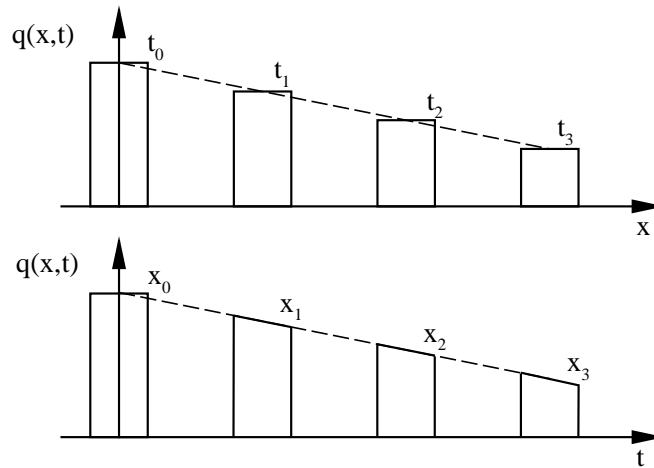


Abbildung 5.9: Zur Translation einer Eigenschaft mit Diffusion

Korreliert man die oben gezeigten Eigenschaftsverläufe $q(x, t)$, so ergeben sich im Falle der Raumkorrelation die in Abb. 5.10 oben dargestellten Verläufe $R(\Delta x, \tau)$ ¹, aus denen sich die Transportgeschwindigkeit zu $u_{c,\tau} = \frac{\Delta x_1}{\tau_1} = \frac{\Delta x_2}{\tau_2} = \frac{\Delta x_3}{\tau_3}$ ergibt. Nutzt man nun die Autokorrelation, so ergibt sich das Maximum der Korrelationswerte wegen der verzerrten Darstellung von $q(x, t)$ mit diesen Sensoren gegenüber der Raumkorrelation zu kleineren τ verschoben und es ist $u_{c,\Delta x} > u_{c,\tau}$. Die wahre Transportgeschwindigkeit ist aber $u_{c,\tau}$, da die Eigenschaft diffundiert ändert sich das Signal beim Überstreichen der Sensoren und die Autokorrelation liefert kein exaktes Ergebnis.

Bei gaußisch verteilten Eigenschaften ergibt sich die virtuelle Vergrößerung der Konvektionsgeschwindigkeit gerade so (hier ohne Beweis), dass das richtige Maximum der Korrelationsfunktion an der Berührungsstelle der Enveloppe aller Kurven mit $\Delta x = \text{const.}$ mit der aktuellen Kurve liegt. Diese Enveloppe entspricht Gerade (1) in der Isoplethen-Darstellung Abb. 5.8 und ist auch in dem Korelogramm Abb. 5.7 als lang-gestrichelte Linie eingetragen.

Der Unterschied zwischen beiden möglichen Konvektionsgeschwindigkeiten wird um so geringer, je spitzer die Korrelationskurve (hochfrequent) und je geringer die Diffusions- oder Dissipationsraten sind. Beide Effekte heben sich i.allg. auf, da Strömungen mit hochfrequenten Anteilen auch stärkere Dissipation zeigen. Bei Scherströmungen liegt der Unterschied zwischen $u_{c,\tau}$ und $u_{c,\Delta x}$ bei etwa 10...20%. Ein Beispiel zur Bestimmung von Konvektionsgeschwindigkeiten in einem turbulenten Freistrahle ist in Abbildung 5.11 gezeigt.

¹Bemerke: die Korrelationsfunktion ist hier linear spitzwinklig, weil $q(x, y)$ eine sprunghafte Eigenschaftsänderung sei. Im realistischeren Falle gaußisch verteilter Eigenschaften ist auch die Korrelationsfunktion gaußisch

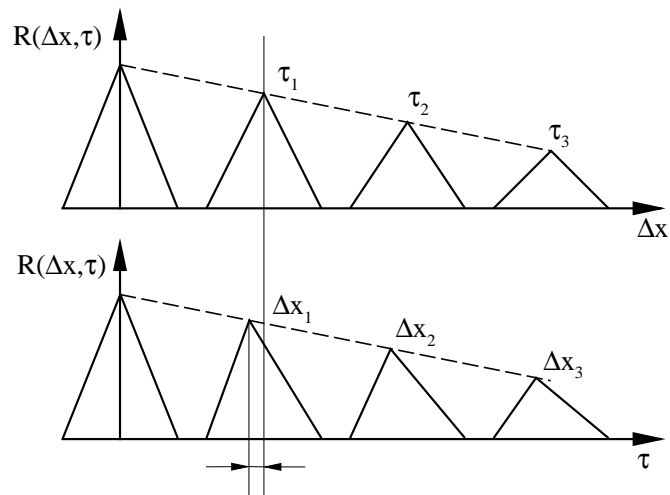


Abbildung 5.10: Korrelogramme der o.g. Eigenschaften

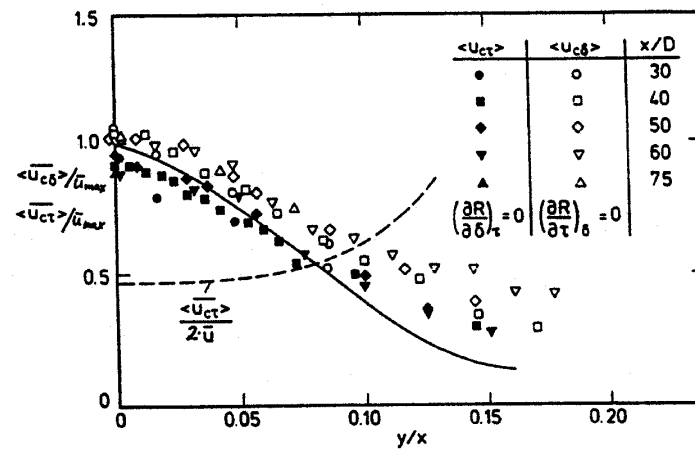


Abbildung 5.11: Korrelogramm eines Freistrahls

Man erhält bei genauerer Betrachtung keine Gerade als Verbindungslinie der Punkte $\partial R / \partial (\Delta x) |_{\tau = \text{const.}} = 0$, da u_c frequenzabhängig ist. Das Gesamtspektrum der Schwankungen wird aber nur bei kleinem Δx etwa vollständig erfasst, da bei größerem Δx wegen der schnelleren Dissipation der kleinen Wirbel die langwelligen Spektralanteile dominieren.

5.3 Die Taylor-Hypothese

Die von *Taylor (1938)* aufgestellte Hypothese lautet in Gleichungsform:

$$\frac{\partial}{\partial t} = -u \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_{\text{am festen Ort}} \quad (5.32)$$

Durch ihre Anwendung können räumliche in zeitliche Größen (auch Ableitungen) und umgekehrt transformiert werden. Sie gilt näherungsweise für homogene Turbulenz mit zeitlich konstanter mittlerer Geschwindigkeit $\bar{u} = \text{const.}$ unter der Randbedingung, dass $u' \ll \bar{u}$ ist, was man aus der Bewegungsgleichung ableiten kann (siehe *Corrsin (1953)* und *Lin (1953)*).

Physikalisch kann die Taylor-Hypothese wie folgt interpretiert werden: Die an einem bestimmten Ort des Strömungsfeldes auftretenden Schwankungsbewegungen werden verursacht durch das „Vorbeischwimmen“ von „eingefrorenen“ Turbulenzballen an diesem Ort („frozen pattern“).

Nehmen wir einmal an, dass in einer gegebenen Strömung die Turbulenzstruktur „eingefroren“ sei, dann ergibt die Anwendung der Taylor-Hypothese auf eine Größe q :

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (5.33)$$

Mit $q = \bar{q} + q'$ und $u = \bar{u} + u'$ erhält man:

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \frac{\partial q'}{\partial t} = -(\bar{u} + u') \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} - (\bar{u} + u') \frac{\partial q'}{\partial x} \quad (5.34)$$

Für eine im Mittel stationäre und homogene turbulente Strömung gilt:

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} = 0 \quad (5.35)$$

→

$$\frac{\partial q'}{\partial t} = -(\bar{u} + u') \frac{\partial q'}{\partial x} \quad (5.36)$$

Mit $u' \ll \bar{u}$ ergibt sich:

$$\frac{\partial q'}{\partial t} = -\bar{u} \frac{\partial q'}{\partial x} \quad (5.37)$$

Allgemeiner kann man schreiben:

$$\frac{\partial}{\partial t} = -u_{\text{Tr}} \frac{\partial}{\partial x}, \quad (5.38)$$

wobei u_{Tr} die mittlere Transformationsgeschwindigkeit der eingefrorenen Turbulenzstruktur repräsentiert. Als Transformationsgeschwindigkeit wird die zuvor beschriebene Konvektionsgeschwindigkeit verwendet werden $u_{\text{Tr}} \equiv u_c$, dies ist in anderen Turbulenzformen nicht identisch richtig. Sind die Fluktuationen klein gegenüber der mittleren Strömungsgeschwindigkeit (was ohnehin gefordert ist, s.o.), kann auch $u_c \approx \bar{u}$ approximiert werden. Es sei bemerkt, dass in Scherströmungen meist keine homogene oder isotrope Turbulenz angenommen werden kann und zudem (oder gerade deswegen) auch $\bar{u} \neq u_c \neq u_{\text{Tr}}$.

Nach *Lin (1953)* ist die Taylor-Hypothese nur unter folgenden Randbedingungen anwendbar:

$$\left| \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} \right| \gg \left| v' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \quad \text{und} \quad \overline{u'^2} \ll \bar{u}^2 \quad (5.39)$$

Wiederum sei bemerkt, dass die zweite Bedingung wird in den meisten praktischen Fällen verletzt, dennoch kann die Taylor-Hypothese in guter Näherung auch für Scherströmungen verwendet werden, ist dann aber nur noch näherungsweise gültig.

Beachte: Die Taylor-Hypothese ist nicht anwendbar auf Mittelwerte!

5.4 Die charakteristischen Längen der Turbulenzstruktur

Aus den Doppelkorrelationen (räumlich oder zeitlich) lassen sich Größen zur Charakterisierung der Turbulenzstruktur gewinnen:

5.4.1 Die integrale Korrelations- oder Strukturlänge („integral scale“)

Die Funktion $R(\Delta x)$ habe folgenden Verlauf:

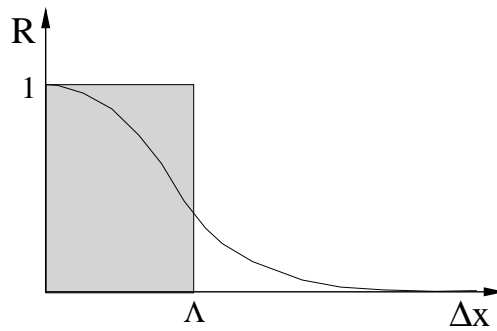


Abbildung 5.12: Ermittlung der integralen Korrelationslänge

Zur Charakterisierung bieten sich mehrere Möglichkeiten an. Will man eine Aussage über den mittleren Kohärenzbereich gewinnen, ist es naheliegend, eine integrale Länge $\Lambda(\underline{r}, t)$ zu definieren, die international als „macro scale“ oder „integral scale“ bezeichnet wird. Konventionsgemäß schreibt man dafür (ähnlich wie bei der Verdrängungsdicke in der Grenzschichttheorie):

$$\Lambda(\underline{r}, t) = \int_0^{\infty} R(\Delta x) d(\Delta x) \quad (5.40)$$

Schwierigkeiten mit dieser Definition bekommt man bei Periodizität oder Überschwingen der Funktion $R(\Delta x)$, d.h., wenn $R(\Delta x)$ auch negative Werte annimmt. Im Fall $R(\Delta x) \approx \sin(k\Delta x)$ z.B. wäre Λ auf diese Weise nicht eindeutig bestimmbar. Man kann sich dann damit behelfen, dass man eine spezielle Definition z.B. der Form

$$\Lambda = \int_0^{\Delta x^*} R(\Delta x) d(\Delta x) \quad (5.41)$$

wählt, wobei Δx^* der Abszissenwert des Schnittpunktes der Korrelationskurve mit der Abszisse ist. Das ist ohne weiteres möglich, da die Definition nach Gl.(5.40) nicht

zwingend ist, sondern lediglich Interpretationslängen liefern soll.

Eine bessere Aussage gewinnt man, wenn man sich vergegenwärtigt, dass sich Korrelationen additiv zusammensetzen, sofern die verschiedenen Signalanteile nicht untereinander korreliert sind:

Setzt sich die Schwankungsgeschwindigkeit $u' = u'_p + u'_s$ aus einem periodischen und einem stochastischen Anteil zusammen, so ergibt sich unter der Voraussetzung von $\overline{u'_p u'_s} = 0$:

$$R_{u'}(\Delta x) = \frac{\overline{u'_p u'_p(\Delta x)} + \overline{u'_s u'_s(\Delta x)}}{\sqrt{\overline{u'^2}} \sqrt{\overline{(u'(\Delta x))^2}}} \quad (5.42)$$

$$= \frac{\sqrt{\overline{u'^2_p}} \sqrt{\overline{(u'_p(\Delta x))^2}}}{\sqrt{\overline{u'^2}} \sqrt{\overline{(u'(\Delta x))^2}}} R_{u'_p}(\Delta x) + \frac{\sqrt{\overline{u'^2_s}} \sqrt{\overline{(u'_s(\Delta x))^2}}}{\sqrt{\overline{u'^2}} \sqrt{\overline{(u'(\Delta x))^2}}} R_{u'_s}(\Delta x) \quad (5.43)$$

Eine derart zusammengesetzte Korrelation lässt sich somit in ihre Komponenten zerlegen, deren Charakteristika sinnvoller zu bestimmen sind.

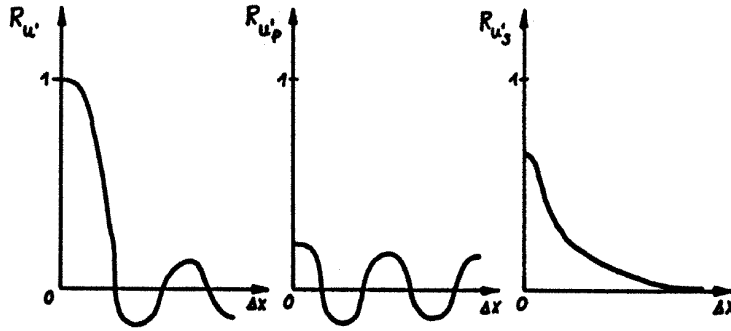


Abbildung 5.13: Zusammengesetzte Korrelationen

Aus dem Verlauf von $R_{u'_s}$ lässt sich nun Λ bestimmen. Für $R_{u'_p}$ erhalten wir als charakteristisches Maß die Wellenlänge der Schwingung. Diese zusammengesetzte Schwankungsbewegung lässt sich also durch zwei Größen (Längen) charakterisieren, eine deterministische und eine stochastische Länge. Diese sind allerdings unterschiedlich definiert und daher nicht kompatibel. Wie in der Diskussion zu Spektren noch gezeigt werden wird, kann man aber auf der Basis eines Wellenzahl-Spektrums zwei homogene Längen definieren.

Man kann Λ als eine Länge interpretieren, die die momentan einheitlich bewegte Luftmasse angibt. Dies ist somit eine quantitativ greifbare Definition des Begriffs „Turbulenzballen“ und entspricht in etwa den mittleren Abmessungen (Durchmesser) der energietragenden Wirbel. Sie charakterisiert den großräumigen, niederfrequenten

Anteil der Turbulenzstrukturen. Auf analoge Weise erhält man aus einer Autokorrelation ein charakteristisches zeitliches Maß Λ_τ , wobei $\Lambda(r_1, t_1) \approx u_c \Lambda_\tau(r_1, t_1)$ ist.

5.4.2 Die Mikro-Strukturlängen („micro scale“)

Die oben definierte integrale Korrelationslänge liefert keinen Aufschluss über den hochfrequenten Teil einer turbulenten Strömung, d.h. über die Vorgänge bzw. Strukturen im Dissipationsbereich. Die Information darüber ist in den Korrelationskurven jedoch auch enthalten, und zwar im Scheitelpunkt der Korrelationskurve bei kleinen Δx bzw. τ , da die kleinsten Wirbel die geringste Lebensdauer besitzen:

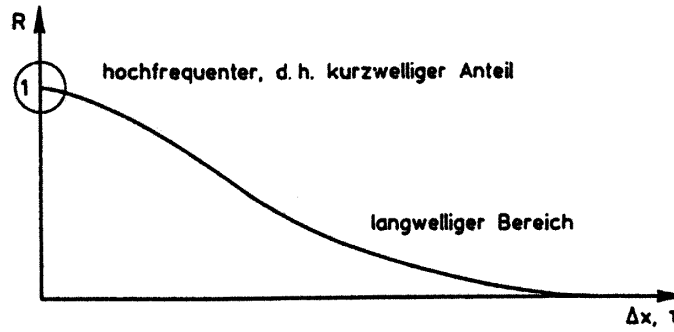


Abbildung 5.14: Korrelationskurve und Wirbeldurchmesser

Beispielsweise müsste die Korrelationskurve einer Turbulenzstruktur, bei der die Wirbeldurchmesser bis zu Null gehen, im Scheitelpunkt in eine Spitze auslaufen. Entwickelt man $R(\Delta x)$ in eine Taylor-Reihe, so gilt unter der Voraussetzung von Homogenität:

$$R(\Delta x) = 1 + \Delta x \left(\frac{\partial R}{\partial \Delta x} \right) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \left(\frac{\partial^2 R}{\partial (\Delta x)^2} \right) + \dots \quad (5.44)$$

Für ein kleines Δx (nächste Abbildung) kann vereinfacht werden zu:

$$R(\Delta x) = \frac{1}{\overline{u'^2(x)}} \overline{u'(x) u'(x + \Delta x)} \quad (5.45)$$

$$\frac{\partial R(\Delta x)}{\partial \Delta x} = \frac{1}{\overline{u'^2(x)}} \overline{u'(x) \frac{\partial u'(x + \Delta x)}{\partial (x + \Delta x)}} \quad (5.46)$$

$$\frac{\partial^2 R(\Delta x)}{\partial (\Delta x)^2} = \frac{1}{\overline{u'^2(x)}} \overline{u'(x) \frac{\partial^2 u'(x + \Delta x)}{\partial (x + \Delta x)^2}} \quad (5.47)$$

Damit werden in der Taylor-Reihe für $\Delta x \rightarrow 0$ alle ungeraden Ableitungen zu Null, wie sich für die erste Ableitung leicht zeigen läßt: Da alle Werte mit $f(x)$ Konstanten sind, kann man schreiben:

$$\left. \frac{\partial R}{\partial \Delta x} \right|_{\Delta x=0} = \frac{1}{\overline{u'^2(x)}} \overline{u'(x) \frac{\partial u'(x)}{\partial x}} \quad (5.48)$$

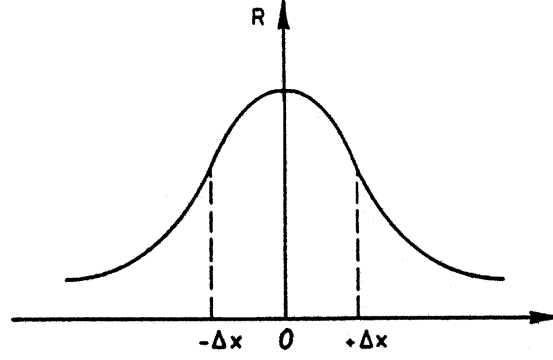


Abbildung 5.15: Zur Ableitung der Mikro-Strukturlängen

Da das Korrelogramm bei Homogenität symmetrisch ist, muss auch gelten:

$$\left. \frac{\partial R}{\partial \Delta x} \right|_{\Delta x=0} = \frac{1}{\overline{u'^2(x)}} \left(\overline{\frac{\partial u'^2(x)}{\partial x}} - \overline{u'(x) \frac{\partial u'(x)}{\partial x}} \right) \quad (5.49)$$

Wegen Homogenität bei $\Delta x = 0$ ist nun

$$\frac{\overline{\partial u'^2(x)}}{\partial x} = 0, \quad (5.50)$$

und damit ergibt sich:

$$\overline{u'(x) \frac{\partial u'(x)}{\partial x}} = -\overline{u'(x) \frac{\partial u'(x)}{\partial x}} = 0 = \left. \frac{\partial R}{\partial \Delta x} \right|_{\Delta x=0} \quad (5.51)$$

Für die zweite Ableitung gilt bei $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\left. \frac{\partial^2 R}{\partial (\Delta x)^2} \right|_{\Delta x=0} = \frac{1}{\overline{u'^2(x)}} \overline{u'(x) \frac{\partial^2 u'(x)}{\partial x^2}} \quad (5.52)$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial (\Delta x)^2} = \frac{1}{\overline{u'^2(x)}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\overline{u'(x) \frac{\partial u'(x)}{\partial x}} \right) - \overline{\left(\frac{\partial u'(x)}{\partial x} \right)^2} \right] \quad (5.53)$$

Wegen Homogenität bei $\Delta x = 0$ ist

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\overline{u'(x) \frac{\partial u'(x)}{\partial x}} \right) = 0, \quad (5.54)$$

woraus folgt:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} = \frac{1}{\overline{u'^2}} \overline{u' \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}} = -\frac{1}{\overline{u'^2}} \overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2} \quad (5.55)$$

Die Taylor-Reihe für $R(\Delta x)|_{\Delta x=0}$ ergibt sich dann zu:

$$\begin{aligned} R(\Delta x) &= 1 + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 R}{\partial (\Delta x)^2} \bigg|_{\Delta x=0} + \dots \text{(vernachl. bar für kleine } \Delta x) \quad (5.56) \\ &= 1 - \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{1}{\overline{u'^2}} \overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2} \bigg|_{\Delta x=0} \end{aligned}$$

Damit wurde gezeigt, dass $R(\Delta x)$ eine parabolische Funktion von Δx für sehr kleine Werte von Δx ist.

Da Parabeln allein durch ihre Krümmung im Ursprung eindeutig definiert sind, liegt es nahe, eine Länge λ einzuführen, die die Krümmung im Scheitelpunkt des Korrelogramms charakterisiert. Man findet dimensionsanalytisch:

$$R(\Delta x) = 1 - \frac{(\Delta x)^2}{\lambda^2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{\lambda^2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 R}{\partial (\Delta x)^2} \bigg|_{\Delta x=0} \quad (5.57)$$

Die Länge λ ergibt sich zu

$$\lambda = \frac{\sqrt{2} \sqrt{\overline{u'^2}}}{\sqrt{\overline{\left(\frac{\partial u'(x)}{\partial x} \right)^2} \bigg|_{\Delta x=0}}} \quad (5.58)$$

und nach dem Einsetzen der Taylor-Hypothese mit einer Transformationsgeschwindigkeit u_{Tr} (z.B. u_c) erhalten wir:

$$\lambda = \frac{\sqrt{2} \sqrt{\overline{u'^2}}}{\frac{1}{u_{\text{Tr}}} \sqrt{\overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial t} \right)^2}}} \quad (5.59)$$

Wie bereits erwähnt würde die Korrelationskurve einer Turbulenzstruktur, bei der die Wirbeldurchmesser bis zu null gehen, im Scheitelpunkt in eine Spitze auslaufen, d.h. eine sehr große Krümmung besitzen und somit sehr kleine Werte für λ liefern. Allgemeiner kann λ als die mittleren Abmessungen der kleinsten (dissipierenden) Wirbel in der Strömung interpretiert werden. Man bezeichnet diese Länge (Maßstab) daher als „Mikro-Strukturlänge“ oder „Dissipations-Länge“.

Prinzipiell lassen sich für u', v', w' und x, y, z insgesamt 9 derartige Längen bilden, die im allgemeinen von unterschiedlicher Größe sind. In Abhängigkeit von den korrelierten Geschwindigkeitskomponenten unterscheidet man in Anlehnung an die isotrope

Turbulenz zwischen dem „longitudinalen“ Dissipationsmaßstab λ_f und dem „lateralen“ Dissipationsmaßstab λ_g :

$$\lambda_f = \frac{\sqrt{2} \sqrt{u'^2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)^2}}, \quad \lambda_g = \frac{\sqrt{2} \sqrt{u'^2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u'}{\partial y}\right)^2}} \quad (5.60)$$

Auf analoge Weise liefern die drei Autokorrelationen drei zeitliche Mikrolängen λ_τ , die schon im Zusammenhang mit der Energiegleichung über den Dissipationsterm eingeführt und diskutiert wurden.

Geometrisch findet man λ aus dem Abszissenwert des Schnittpunktes der Oskulationsparabel der Korrelationskurve, wie es in Abb. 5.17 dargestellt ist. Diese „grafische“ Bestimmung ist einfacher auszuführen, wenn man das Korrelogramm doppellogarithmisch aufträgt. Es gibt jedoch genauere Methoden zur Ermittlung dieser Maßstäbe, die wir später diskutieren wollen.

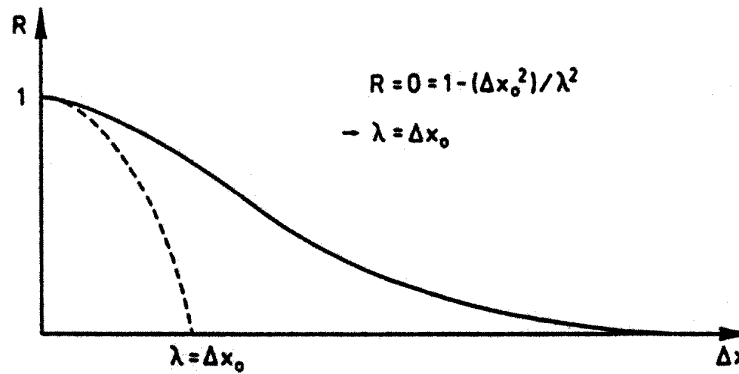


Abbildung 5.16: Geometrische Deutung der Dissipationslänge

Um eine Vorstellung von den absoluten Werten von Λ und λ in einer realen Strömung zu erhalten, sind in Abb. 5.18 die Messergebnisse aus einem Freistrah-Versuch abgebildet. Der Düsendurchmesser betrug 2.5 cm und der Messpunkt lag bei $x/D = 100$:

5.4.3 Die turbulente Reynolds-Zahl

Ein weiterer charakteristischer Parameter für die Turbulenzbewegung kann durch die Kombination einer Schwankungsgeschwindigkeits-Intensität, einer Dissipationslänge und der kinematischen (molekularen) Zähigkeit gebildet werden, wodurch er von besonderer Bedeutung für die Charakterisierung der Struktur im Dissipationsbereich ist.

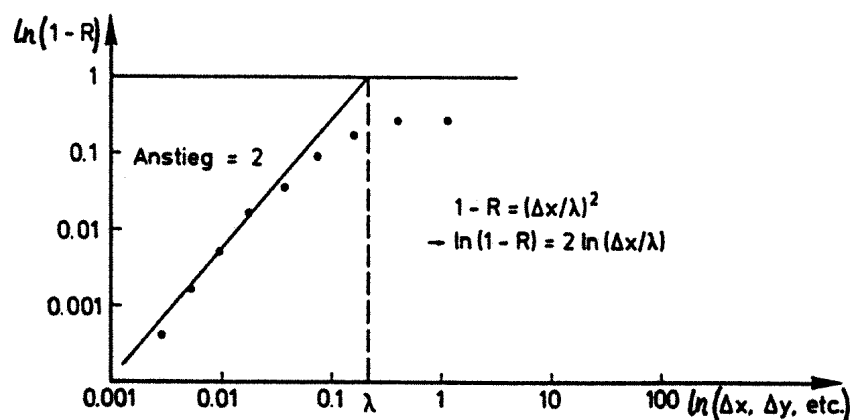


Abbildung 5.17: Praktische Ermittlung der Dissipationslänge

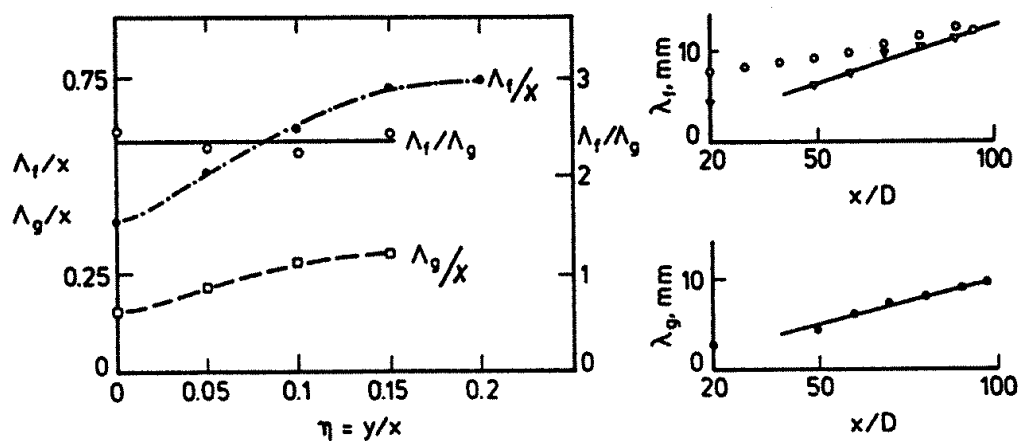


Abbildung 5.18: Maßstäbe in einem Freistrah-Versuch

Nach *Taylor* wird dieser Parameter als „Reynolds-Zahl der Turbulenz“ bezeichnet und mit Hilfe des Mikro-Maßstabes folgendermaßen definiert:

$$Re_T = \sqrt{u'^2} \frac{\lambda_g}{\nu} = Re_{\lambda_g} \quad (5.61)$$

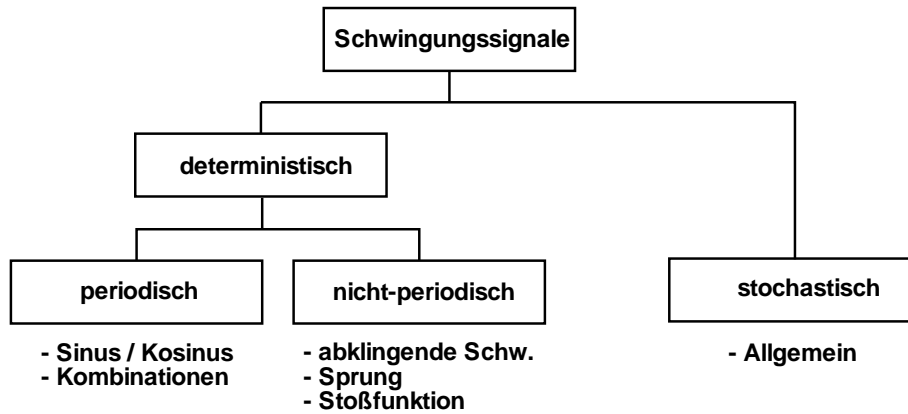


Abbildung 5.19: Klasifizierung von Schwingungssignalen, aus *Grote und Feldhusen (2007)*

5.5 Spektralanalyse von Strömungen

5.5.1 Grundlagen

In der allgemeinen, diesem Kapitel vorangestellten Betrachtung, wurde die Grundvorstellung dargelegt, die Turbulenzbewegung sei die Folge einer Überlagerung von Wirbeln verschiedener Frequenz und Stärke. Hierzu sollte bemerkt werden, dass in echter Turbulenz eine bestimmte Frequenz zwar nicht permanent auftritt, es jedoch möglich ist, einen bestimmten Anteil der totalen Schwankungsenergie einer bestimmten Frequenz zuzuordnen, d.h., eine harmonische Analyse der Schwankungsbewegung durchzuführen. Hierzu wird die Fourier-Transformation genutzt, auf deren Bedeutung bereits Taylor (1935) hingewiesen hat.

Allgemein lassen sich Schwingungen in periodische, nicht-periodische und stochastische Signale unterteilen, wie in Abb. 5.19 gezeigt. Obgleich turbulente Schwankungen stochastisch sind, sei zunächst die Fourieranalyse periodischer Schwingungen dargestellt. Demzufolge lassen sich reelle Funktionen $u(t)$ mit der Periodendauer T_0 , bzw. der Frequenz $f_0 = 1/T_0$ eindeutig durch eine Summe aus Sinus- und Kosinusfunktionen darstellen²:

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \sin(n \cdot 2\pi f_0 \cdot t) + b_n \cdot \cos(n \cdot 2\pi f_0 \cdot t)) \quad (5.62)$$

$a_0 = \overline{u(t)}$ ist der arithmetische Mittelwert des Signals. Bei der Betrachtung turbulenter Fluktuationen gilt wegen $\overline{u'} = 0$ stets $a_0 = 0$. f_0 ist die Grundfrequenz und a_n und b_n sind die Fourierkoeffizienten.

²In der Literatur sehr oft verwendet auch die Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2\pi/T = 2\pi \cdot f$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \sin(n \cdot 2\pi f_0 \cdot t) dt \quad (5.63)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cos(n \cdot 2\pi f_0 \cdot t) dt \quad (5.64)$$

$$(5.65)$$

Durch Nutzung der sog. Euler'schen Identität können die trigonometrischen Funktionen auch als Exponentialfunktion mit komplexwertigen Koeffizienten geschrieben werden, wobei $c_0 = a_0$ ($= 0$) und $c_n = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$ sowie $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$. Es ist dann

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{i \cdot n \cdot 2\pi f_0 \cdot t} \quad (5.66)$$

Für die Analyse von nicht-periodischen und stochastischen Signalen besteht nun die Problematik die Grundfrequenz f_0 anzugeben, da $u(t)$ nicht periodisch ist und alle (nicht nur diskrete) Frequenzen enthält. Um sämtliche mögliche Frequenzen zu erfassen muss man also zu unendlich großen Periodendauern $T \rightarrow \infty$ übergehen, wegen $f = 1/T$ nimmt f_0 nun infinitesimal kleine Werte df an.

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{c}(f) \cdot e^{i \cdot 2\pi f \cdot t} df \quad (5.67)$$

$\hat{c}(f)$ ist eine kontinuierliche, komplexwertige Funktion, die sog. Spektralfunktion. Die Fourier-Transformation ist eindeutig und damit auch umkehrbar, d.h. aus der Spektralfunktion $\hat{c}(f)$ lässt sich der Signalverlauf von $u(t)$ eindeutig rekonstruieren.

Die sog. Parseval'sche Gleichung besagt, dass die Energie eines Signals im transformierten Raum identisch ist der Energie im Ortsraum. Angewendet auf die Fourier-Transformation lässt sich hieraus schließen, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{c}(f)|^2 df \quad \text{wobei} \quad (5.68)$$

$$|\hat{c}(f)|^2 = \hat{c}(f) \cdot \hat{c}^*(f) \quad (5.69)$$

Ist also $u(t)$ die Fluktuation einer Geschwindigkeitskomponente, so ist das Quadrat der zugehörigen Spektralfunktion ein Maß für die in bestimmten Frequenzbereichen df enthaltene turbulente kinetische Energie dieser Komponente. Basierend auf dieser Überlegung definiert man das sog. **Energiespektrum** wie folgt:

$$E(f) = \frac{|\hat{c}(f)|^2}{df} = \frac{\hat{c}(f) \cdot \hat{c}^*(f)}{df} \quad (5.70)$$

Detailliertere Beschreibungen der Fouriertransformation finden sich in allen mathematischen Lehrbüchern, aber auch in *Grote und Feldhusen (2007)*; *Bronstein und*

Semendjajew (1989).

Die gesamte turbulente Energie kann gemäß Gl. (5.70) und Gl. (5.69) aus der Spektraldichte berechnet werden:

$$\overline{u'^2} = \int_0^\infty E(f) df \quad (5.71)$$

Es ergibt sich die physikalische Dimension von $E(f)$ aus Gl. (5.70) zu:

$$[E(f)] = \frac{[u'^2]}{\text{Frequenz}} = [u'^2] \cdot \text{Zeit} \quad (5.72)$$

$E(f)$ stellt damit eine **mittlere Energiedichte**³ (Energie pro Frequenz) im Punkt f der Frequenzachse dar, wobei u'^2 als Maß für die Energie des Prozesses u' angesehen wird. Für $E(f)$ sind auch die Bezeichnungen **Spektraldichte**, **Energiespektrum** oder einfach **Spektrum** gebräuchlich.

Man spricht vom **Frequenzspektrum**, wenn man hervorheben will, dass es sich um die Analyse einer Zeitfunktion $u(t)$ handelt. Betrachtet man die Zufallsfunktion $u(x)$ zu einer festen Zeit t auf einer Geraden G (x -Achse) und setzt Homogenität voraus, so kann man völlig analog zu Gl. (5.67) eine Zerlegung in räumlich periodische Moden (Wellenzahl k) mit zufälligen Amplituden zugrundelegen:

$$u'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{c}(k) e^{2\pi i k x} dk \quad (5.73)$$

Analog zum Frequenzspektrum $E(f)$ erhält man ein **Wellenzahlspektrum** $E(k)$. Die physikalische Dimension⁴ von $E(k)$ ist:

$$[E(k)] = \frac{[u'^2]}{\text{Wellenzahl}} = [u'^2] \cdot \text{Länge} \quad (5.74)$$

Da nur ein eindimensionaler Ausschnitt (Gerade G) der i.allg. von drei räumlichen Koordinaten abhängigen Schwankungsgröße u' betrachtet wird, nennt man diese Spektren $E(k)$ auch **eindimensionale (Wellenzahl-) Spektren**.

Hier sei noch bemerkt, dass die Wellenzahl hier *nicht* im Sinne einer Kreis-Wellenzahl zu verstehen ist, wie in der Trigonometrie mitunter üblich. Vielmehr ist die Wellenzahl die mit der Taylor-Hypothese in eine Ortsgröße umgewandelte Frequenz, wobei die Transportgeschwindigkeit u_{Tr} verwendet wird:

$$k = \frac{f}{u_{Tr}} \quad (5.75)$$

³Bedeutet u' eine Geschwindigkeitsschwankung, so ist $[E(f)] = m^2/s$.

⁴Bedeutet u' eine Geschwindigkeitsschwankung, so ist $[E(k)] = m^3/s^2$.

Die Transportgeschwindigkeit u_{Tr} ist wiederum nicht gleichzusetzen mit der lokalen mittleren Geschwindigkeit! Die turbulenten Strukturen werden in aller Regel langsamer transportiert, im Außenbereich einer turbulenten Grenzschicht gilt beispielsweise näherungsweise $u_{Tr} \approx 0,85 \cdot u_e$.

Um die Fouriertransformierte zu berechnen ist in obigen Formeln die Kenntnis einer analytischen Funktion $u(t)$ oder $u(x)$ vonnöten. In der Regel wird diese nicht vorliegen, d.h. man operiert mit diskreten Messdaten deren funktionaler Zusammenhang nicht explizit bekannt ist. Formal muss man nun die Differenziale in Differenzen und die Integrale in Summen überführen. Dies ist möglich indem man analog zur Fouriertransformation periodischer Funktionen (vgl. Gl.(5.62) und folgende) vorgeht, wobei als Grundfrequenz f_0 gerade die größte im Messzeitraum mögliche Frequenz gewählt wird $f_0 = 1/T_0$ und nicht $n \rightarrow \infty$, sondern $n = 1 \cdots N$ gesetzt wird, wobei N die Menge an aufgenommenen Datenpunkten entspricht. Die spektrale Betrachtung von Turbulenzgrößen ist recht weit verbreitet, da bereits früh effiziente Algorithmen zur Bestimmung der Fourierkoeffizienten aus diskreten Messdaten entwickelt wurden. Der bekannteste Algorithmus ist die sog. schnelle Fourier-Transformation (FFT).

5.5.2 Schnelle Fourier-Transformation (FFT)

Die Spektralanalyse hat insbesondere wegen der „schnellen Fourier-Transformation“ („fast fourier transformation“, FFT) genannten Algorithmus' große Bedeutung erlangt. Dieser wurde bereits 1805 von Carl Friedrich Gauß entwickelt. Eine Diskussion der mathematischen Theorie macht an dieser Stelle kaum Sinn, hier wird auf die entsprechenden mathematischen Werke verwiesen (z.B. *Bronstein und Semendjajew (1989)*). Die praktische Anwendung der FFT zur Spektralanalyse von Daten verlangt jedoch einige Kenntnisse über die Anordnung der Daten, die hier kurz vorgestellt werden soll.

Grundlegende Einschränkung der FFT gegenüber einer vollständigen Fourieranalyse sind die Voraussetzungen, dass genau N Messpunkte vorliegen, wobei N eine Potenz der Zahl 2 ist (256, 512, 1024, etc.) und diese in gleichmäßigem Zeitabstand, der Sampleweite t_S , aufgenommen wurden. In der Praxis ist diese Einschränkung nicht von großer Bedeutung, da N oft beliebig gewählt werden kann und typische Datenaufnahmegeräte ohnehin gleichmäßig sampeln. Die FFT bildet einen festen Zusammenhang zwischen Bandbreite, Messwerten und Sampleweite, daher können Messdaten eindimensional verarbeitet werden - es wird also nur das Signal, bsp. $u'(t)$ analysiert, die Zeit, bzw. Frequenzinformation ist nach der FFT implizit enthalten. Die Gesamt-Integrationszeit des Verfahrens beträgt $t_I = N \cdot t_S$.

Als Ergebnis werden diskrete Fourierkoeffizienten c_k mit einer Bandbreite BW (Frequenzabstand) berechnet, wobei diese dem Reziprok der Integrationszeit äquivalent ist: $BW = 1/t_I$. Die Gesamtbandbreite entspricht der Samplefrequenz. Gemäß des sog.

Nyquist-Kriteriums können aber in einem diskreten Messsignal mit der Samplefrequenz $f_S = 1/t_S$ maximal Frequenzen der halben Samplefrequenz abgebildet werden, da es zu dem sog. Aliasing kommt. Die obere Hälfte der Fourierkoeffizienten ist also ohne physikalische Bedeutung - mathematisch ergibt sich eine vollsymmetrische Verteilung der Fourierkoeffizienten, wobei die höherfrequenten Koeffizienten jeweils die konjugierten komplexen der niederfrequenten Koeffizienten sind: $c_{k,(0+\Delta f)} = c_{k,(f_I-\Delta f)}^*$

Aus den mit der FFT bestimmten Fourierkoeffizienten kann man dann das Energiespektrum berechnen:

$$E(f) = \frac{c_k \cdot c_k^*}{N} \quad (5.76)$$

Auch $E(f)$ ist keine kontinuierliche Funktion, sondern liegt für diskrete Einzelfrequenzen mit äquidistantem Abstand BW vor.

5.5.3 Zusammenhang von Spektraldichte und Korrelation

Aus den Gl.(5.67) und (5.70) lässt sich folgern, daß Korrelationsfunktion $\overline{u'^2} R(\tau)$ und Spektraldichte $E(f)$ **Fourier-Transformierte** voneinander sind:

Im vorliegenden Fall reeller $u'(t)$ reduziert sich die Fourier-Transformation auf die Kosinus-Transformation (Wiener-Chintschin-Gleichungen):

$$\overline{u'^2} R(\tau) = \int_0^\infty E(f) \cos(2\pi f\tau) df \quad (5.77)$$

$$E(f) = 4 \int_0^\infty \overline{u'^2} R(\tau) \cos(2\pi f\tau) d\tau \quad (5.78)$$

Setzt man in Gl.(5.77) $\tau = 0$, so erhält man wegen $R(0) = 1$ die Darstellung der mittleren Gesamtenergie $\overline{u'^2}$ als Summe (Integral) der spektralen Anteile $E(f) df$, also identisch Gl. (5.71).

Anwendung der Taylor-Hypothese :

Setzt man die Gültigkeit der Taylor-Hypothese (vgl. Abschnitt 5.2.2.3) mit $u_{Tr} = const.$ voraus, so kann man aus dem Frequenzspektrum $E(f)$ auch auf die **räumliche Korrelationsfunktion**

$$\overline{u'^2} R(\Delta x) = \overline{u'(x, t) u'(x + \Delta x, t)} \quad (5.79)$$

schließen. Dabei sei x die Koordinate auf einer Geraden G in Richtung der Transportgeschwindigkeit u_{Tr} .

Die Taylor-Hypothese lautet:

$$u'(x + \Delta x, t) = u' \left(x, t - \frac{\Delta x}{u_{\text{Tr}}} \right) \quad (5.80)$$

Gl.(5.80) in Gl.(5.79):

$$\begin{aligned} \overline{u'^2} R(\Delta x) &= \overline{u'(x, t) u' \left(x, t - \frac{\Delta x}{u_{\text{Tr}}} \right)} \\ &= \overline{u'(x, t) u'(x, t - \tau)} \quad \text{mit} \quad \tau = \frac{\Delta x}{u_{\text{Tr}}} \\ &= \overline{u'(x, t) u'(x, t + \tau)} \quad \text{weil} \quad R(-\tau) = R(\tau) \\ &= \overline{u'^2} R(\tau) \end{aligned} \quad (5.81)$$

Aus Gl.(5.77) folgen damit die modifizierten Wiener-Chintschin-Gleichungen:

$$\begin{aligned} \overline{u'^2} R(\Delta x) &= \int_0^\infty E(f) \cos \left(\frac{2\pi f \Delta x}{u_{\text{Tr}}} \right) df \\ E(f) &= \frac{4}{u_{\text{Tr}}} \int_0^\infty \overline{u'^2} R(\Delta x) \cos \left(\frac{2\pi f \Delta x}{u_{\text{Tr}}} \right) d(\Delta x) \end{aligned} \quad (5.82)$$

Zwischen räumlicher Korrelationsfunktion $\overline{u'^2} R(\Delta x)$ und Wellenzahlspektrum $E(k)$ bestehen analog zu Gl.(5.77) und (5.78) folgende Relationen:

$$\begin{aligned} \overline{u'^2} R(\Delta x) &= \int_0^\infty E(k) \cos(2\pi k \Delta x) dk \\ E(k) &= 4 \int_0^\infty \overline{u'^2} R(\Delta x) \cos(2\pi k \Delta x) d(\Delta x) \end{aligned} \quad (5.83)$$

Bei Gültigkeit der Taylor-Hypothese (Gl. (5.80)) erhält man gemäß den Gl. (5.81), (5.82) und (5.83) die nachfolgenden Zusammenhänge:

$$\begin{aligned} \overline{u'^2} R(\Delta x) &= \overline{u'^2} R(\tau) \quad \text{mit} \quad \tau = \frac{\Delta x}{u_{\text{Tr}}} \\ E(k) &= u_{\text{Tr}} E(f) \quad \text{mit} \quad f = k u_{\text{Tr}} \end{aligned} \quad (5.84)$$

Dabei steht auf der linken Seite die Orts- bzw. Wellenzahlfunktion, rechts die Zeit- bzw. Frequenzfunktion. Somit sind z.B. eindimensionale Wellenzahlspektren aus Frequenzspektren bestimmbar (Voraussetzung: Taylor-Hypothese ist gültig!).

Korrelationen und dazugehörige Spektralfunktionen (Spektraldichten) sind also über Fourier-Transformationen verknüpft und lediglich unterschiedliche Darstellungsformen gleicher Erscheinungen. Wird von der Gleichwertigkeit der Größen $R(\tau)$ (bzw. $R(\Delta x)$ gemäß der Taylor-Hypothese) und $E(f)$ ausgegangen, stellt sich für den Experimentator die wichtige Frage, welche der beiden Größen bei einer Messung vorzuziehen sei.

Die Spektralfunktion E ist i.allg. einfacher zu messen als die Korrelation R . In Abhängigkeit vom Ziel der Messung ist jedoch zu beachten, daß trotz der Gleichwertigkeit unterschiedliche Aussagen gewonnen werden:

- Informationen über die spektrale Verteilung der Energie, die Lage des Energiemaximums, Übertragungsmechanismen etc. erhält man aus der Messung der Spektralfunktion E .
- Genauere und unmittelbare Erkenntnisse über die charakteristischen Längen, und damit über die Turbulenzstruktur, gewinnt man aus der Ermittlung von R .

Es wird daher stets davon abhängen, welche Art von Information gewünscht ist, wenn man sich für eine der beiden Messungen entscheidet, insbesondere im Hinblick auf die Tatsache, dass wegen der meist nur mangelhaften Erfassung des Gesamtspektrums die Fourier-Transformationen ungenaue Resultate liefern. Dieser Aspekt ist bei digitaler Datenverarbeitung allerdings weniger problematisch.

Es muss ferner beachtet werden, daß eine korrekte Verknüpfung nur zwischen $R(\tau)$ und $E(f)$ besteht (vgl. Gl. (5.77) und (5.78)), während die Verknüpfung zwischen $R(\Delta x)$ und $E(f)$ (vgl. Gl.(5.82)) die Gültigkeit der Taylor-Hypothese voraussetzt.

Die in Abb. 5.20 dargestellten Diagramme zeigen Korrelationen und die dazugehörigen Spektralfunktionen, die in einem runden Freistrahle gemessen wurden (*Wyganski und Fiedler (1968)*). Wegen des größeren dynamischen Bereichs sind E und f logarithmisch aufgetragen.

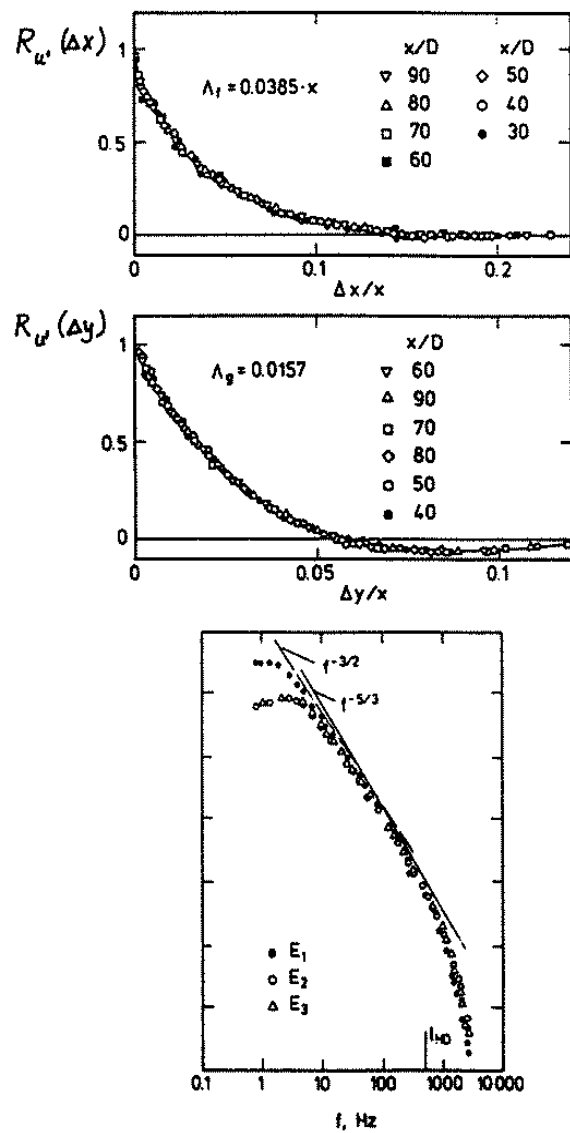


Abbildung 5.20: Korrelationen und Spektralfunktionen im runden Freistrah

Beispiele für den Zusammenhang zwischen $E(f)$ und $R(\tau)$:

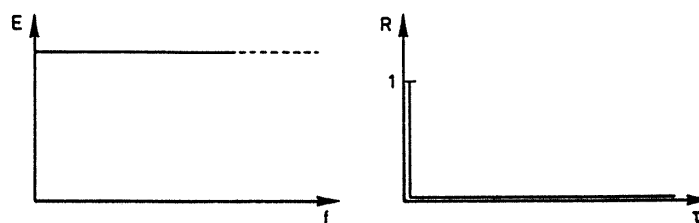
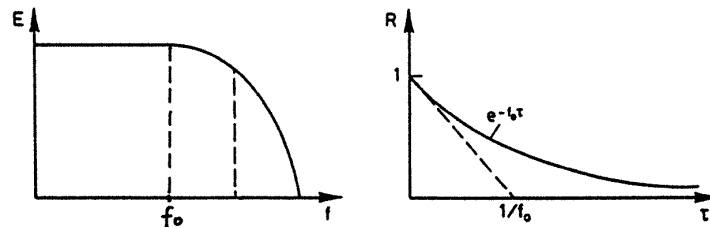
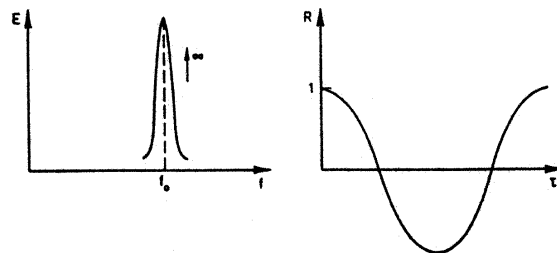
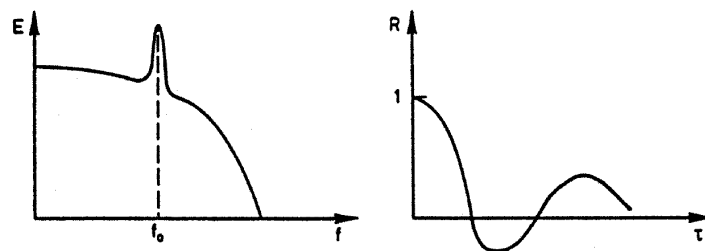


Abbildung 5.21: Weißes Rauschsignal

Abbildung 5.22: Rauschsignal mit Grenzfrequenz f_0 Abbildung 5.23: Sinussignal mit Frequenz f_0 Abbildung 5.24: Sinussignal mit f_0 und stochastisches Signal

5.5.4 Bestimmung charakteristischer Längen aus Spektralfunktionen

Aus den bisher angegebenen Gleichungen lassen sich Beziehungen zwischen den charakteristischen Längen und den dazugehörigen Spektralfunktionen eines Strömungsfeldes herleiten. Man erhält aus den Gl.(5.78) und (5.82) folgende Gleichungen für den zeitlichen und räumlichen Makromaßstab, definiert mittels der Komponente $u' = u'_1$ der Schwankungsgeschwindigkeit:

$$\Lambda_\tau = \int_0^\infty R(\tau) d\tau = \lim_{f \rightarrow 0} \frac{1}{4u'^2} E_1(f) \quad (5.85)$$

$$\Lambda_{\Delta x} = \int_0^\infty R(\Delta x) d(\Delta x) = \lim_{f \rightarrow 0} \frac{u_{Tr}}{4u'^2} E_1(f) \quad (u_{Tr} \approx u_c)$$

Die integralen Strukturlängen ergeben sich danach aus dem Schnittpunkt der $E(f)$ -Kurve mit der Ordinate bei $f = 0$. Mit dieser Methode sind sie jedoch schwierig zu ermitteln, da die Messzeit endlich ist und somit nicht beliebig kleine Frequenzen gemessen werden können. Die Kurve muss daher bei kleinen Frequenzen extrapoliert werden.

Den Zusammenhang zwischen $E(f)$ und den entsprechenden Mikromaßstäben gewinnt man auf folgende Weise:

Ausgangspunkt ist die Gl.(5.82) für $R(\Delta x)$. Der Korrelationskoeffizient ist auch in der Definitionsgleichung für den Mikromaßstab enthalten:

$$\frac{1}{\lambda_x^2} = -\frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 R(\Delta x)}{\partial (\Delta x)^2} \right|_{\Delta x \rightarrow 0} \quad (5.86)$$

Damit erhält man eine Verknüpfung zwischen λ und E , woraus sich für $\Delta x \rightarrow 0$, also für den Scheitelpunkt der Korrelationskurve, die gewünschte Beziehung ergibt:

$$\frac{1}{\lambda_\tau^2} = \frac{2\pi^2}{u'^2} \int_0^\infty f^2 E_1(f) df \quad (5.87)$$

$$\frac{1}{\lambda_x^2} = \frac{2\pi^2}{u_{Tr}^2 u'^2} \int_0^\infty f^2 E_1(f) df$$

Den Zusammenhang zwischen der Spektralfunktion und den kleinen (dissipierenden) Wirbeln demonstriert das folgende Bild:

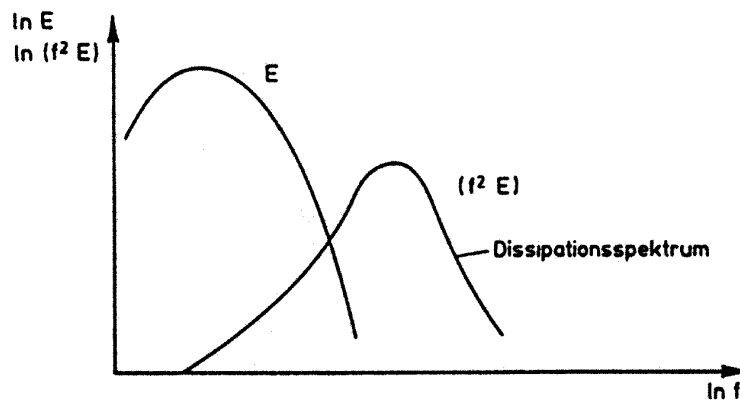


Abbildung 5.25: Dissipationsspektrum

5.5.5 Ergänzende Bemerkungen

Der Zusammenhang zwischen E und R nach Gl.(5.77) soll hier zusätzlich aus einer Betrachtung diskreter Frequenzen erarbeitet werden. Anstelle der statistischen Mittelung (vgl. Abschnitt 5.2.4.1) werden dabei zeitliche Mittelwerte verwendet (Ergodizität).

Gegeben sei ein harmonisches Signal $u'(t)$ mit

$$u' = a \sin(2\pi ft) \quad (5.88)$$

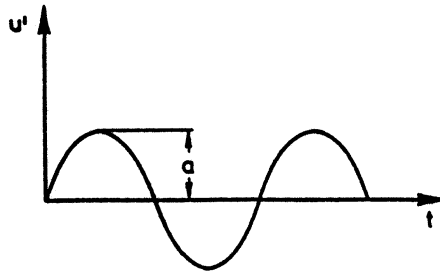


Abbildung 5.26: Harmonisches Signal

Das Quadrat des Effektivwertes ergibt sich zu:

$$\overline{u'^2} = \frac{a^2}{2} \quad (5.89)$$

Die Autokorrelationsfunktion dieses Signals ist:

$$Q = \frac{a^2}{2} \cos(2\pi f\tau) \quad (5.90)$$

Der Autokorrelationskoeffizient lautet:

$$R = \frac{Q}{\overline{u'^2}} = \cos(2\pi f\tau) \quad (5.91)$$

Setzt sich dieses Signal aus einer Anzahl n von Einzelfrequenzen f_k zusammen, dann erhält man:

$$u' = \sum_{k=1}^n a_k \sin(2\pi f_k t) \quad \text{mit} \quad f_k = k \cdot f = \frac{k}{T} \quad (T \dots \text{Periodendauer}) \quad (5.92)$$

$$\overline{u'^2} = \sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{2} \quad (5.93)$$

$$Q = \sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{2} \cos(2\pi f_k \tau) \quad (5.94)$$

$$R = \frac{1}{\overline{u'^2}} \sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{2} \cos(2\pi f_k \tau) \quad (5.95)$$

Für eine unendliche Zahl ($n \rightarrow \infty$) von überlagerten Einzelfrequenzen (das Spektrum ist über alle Frequenzen verteilt) lauten die Beziehungen dann:

$$u' = \int_0^{\infty} a^*(f) \sin(2\pi f t) df \quad (5.96)$$

$$\overline{u'^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} u'^2 dt = \int_0^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{a^{*2}(f)}{2T} df \quad (5.97)$$

$$Q = \int_0^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{a^{*2}(f)}{2T} \cos(2\pi f \tau) df \quad (5.98)$$

$$R = \frac{1}{\overline{u'^2}} \int_0^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{a^{*2}(f)}{2T} \cos(2\pi f \tau) df \quad (5.99)$$

Wir definieren für die Energie $E(f)$ einer harmonischen Partialschwingung mit der Frequenz f :

$$E(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{a^{*2}(f)}{2} \quad (5.100)$$

Damit erhält man die bekannten Beziehungen (vgl. Gl.(5.71)):

$$\overline{u'^2} = \int_0^{\infty} E(f) df \quad (5.101)$$

$$R = \frac{1}{\overline{u'^2}} \int_0^{\infty} E(f) \cos(2\pi f \tau) df \quad (5.102)$$

5.6 Weitere statistische Funktionen

5.6.1 Verteilungsfunktion (Wahrscheinlichkeitsintegral)

Gegeben sei eine periodische oder stochastische Funktion $u = u(t)$, z.B. eine turbulente Geschwindigkeit:

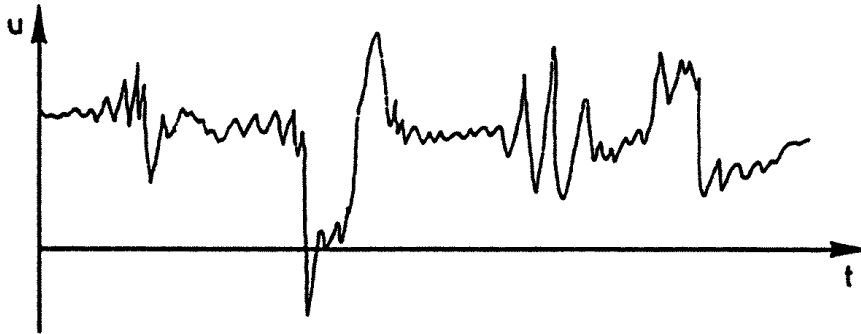


Abbildung 5.27: Stochastische Zeitfunktion $u(t)$

Man kann eine statistische Funktion $F(c)$ derart definieren, dass ihr Wert eine Aussage darüber liefert, wie groß die Wahrscheinlichkeit $W(u < c)$ ist, dass eine bestimmte Bedingung (z.B. $u < c$) über einen langen Beobachtungszeitraum erfüllt ist:

$$F(c) = W(u < c) = \frac{\text{Anzahl der Fälle (zeitlicher Anteil) mit } u < c}{\text{Gesamtzahl (Gesamtzeit)}} \quad (5.103)$$

Die Funktion $F(c)$ wird **Verteilungsfunktion** genannt.

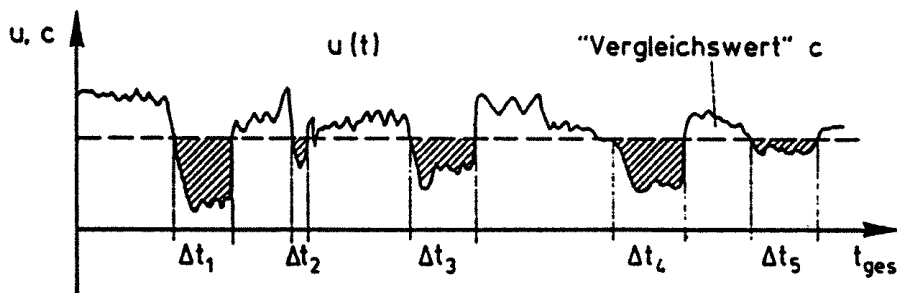


Abbildung 5.28: Zur Ableitung der Verteilungsfunktion $F(c)$

$F(c)$ hat die folgenden Eigenschaften (aus der Skizze ablesbar):

$$\begin{aligned} F(c) &\geq 0 \\ F(c_1) &\leq F(c_2) \quad \text{für } c_1 \leq c_2 \\ F(c) &\leq 1 \\ F(-\infty) &= 0 \\ F(+\infty) &= 1 \end{aligned} \quad (5.104)$$

5.6.2 Häufigkeitsdichte

Die **Häufigkeitsdichte** $B(c)$ (**probability density function** = **pdf**) ist definiert als:

$$B(c) = \frac{dF(c)}{dc} \quad (5.105)$$

Sie besitzt die Eigenschaften:

$$\begin{aligned} B(c) &\geq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} B(c) dc &= 1 \end{aligned} \quad (5.106)$$

Wir betrachten als Beispiel eine einfache Sinusfunktion: $u = \sin(2\pi t)$

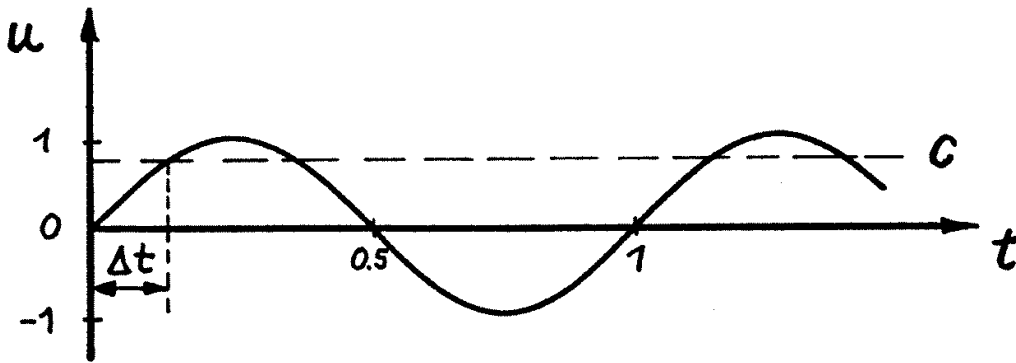


Abbildung 5.29: Einfache Sinusfunktion

Für die Verteilungsfunktion $F(c)$ erhält man mit $\Delta t = (2\pi)^{-1} \arcsin(c)$:

$$F(c) = \begin{cases} 1 & \text{für } c > 1 \\ 0.5 + \pi^{-1} \arcsin(c) & \text{für } -1 \leq c \leq 1 \\ 0 & \text{für } c < -1 \end{cases} \quad (5.107)$$

Die Funktionen $F(c)$ und $B(c)$ sind in Abb. 5.30 dargestellt.

Als weitere Beispiele sind in Abb. 5.31 die entsprechenden Funktionen für eine Sägezahnkurve dargestellt und in Abb. 5.32 für eine stochastische Funktion, deren zeitliches Mittel gleich Null ist (z.B. u').

Die Verknüpfung zweier Vorgänge u_1 und u_2 liefert auf analoge Weise kombinierte Verteilungsfunktionen 2. Ordnung (**joint distribution functions**):

$$F(c_1, c_2) = W(u_1 < c_1, u_2 < c_2) = \frac{\text{Zeit für } (u_1 < c_1, u_2 < c_2)}{\text{Gesamtzeit}} \quad (5.108)$$

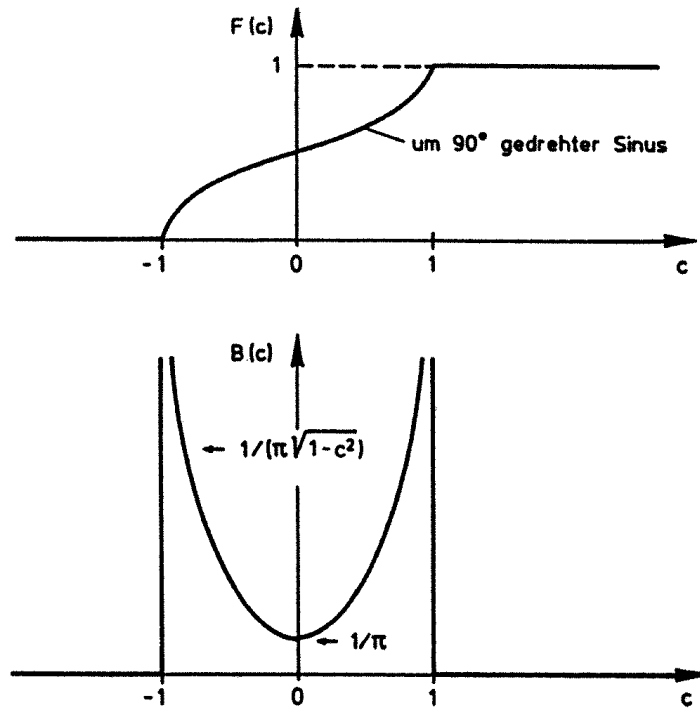


Abbildung 5.30: Verteilungsfunktion und pdf einer Sinusfunktion

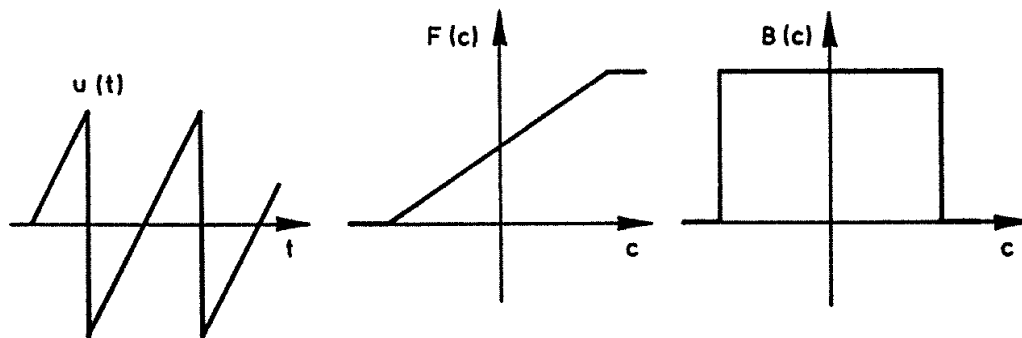


Abbildung 5.31: Verteilungsfunktion und pdf einer Sägezahnkurve

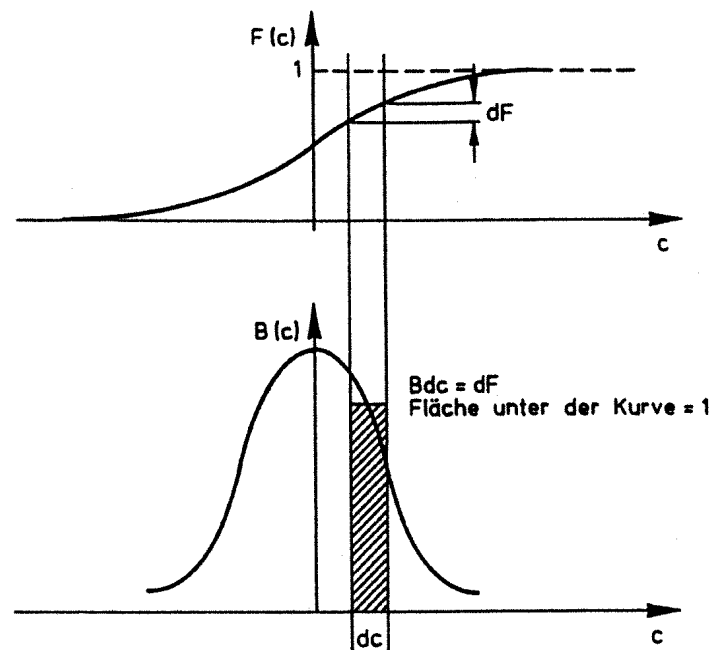
$$B(c_1, c_2) = \frac{\partial^2 F(c_1, c_2)}{\partial c_1 \partial c_2} \quad (5.109)$$

Bei statistischer Unabhängigkeit der Ereignisse u_1 und u_2 ist

$$F(c_1, c_2) = F(c_1) \cdot F(c_2) \quad (5.110)$$

Für diesen Fall muss auch gelten, daß u_1 und u_2 unkorreliert sind (nicht notwendigerweise umgekehrt).

Die Häufigkeitsdichte ist eng verknüpft mit der sog. **Häufigkeitsverteilung** und dem Histogramm. Die Häufigkeitsverteilung ist analog zur Häufigkeitsdichte, ist jedoch

Abbildung 5.32: Verteilungsfunktion und pdf einer Funktion $\overline{u} = 0$

nicht über eine (analytische) Funktion $F(c)$ definiert, sondern wird aus diskreten Messdaten ermittelt. Man teilt hierzu die Messwerte in sog. Klassen ein, z.B. für die in Abb. 5.29 dargestellte Sinusfunktion definiert man 22 Klassen $[1, -0,9]$, $[-0,9; -0,8]$, usw., und zählt nun für jede Klasse die Häufigkeit, dass das Messergebnis in diese Klasse fällt. Die Aussage ist identisch zur PDF, häufig wird zwischen (analytischer) PDF und (diskreter) Häufigkeitsverteilung nicht unterschieden. Die Häufigkeitsverteilung wird in der Regel als Balken- oder Säulendiagramm der Wahrscheinlichkeit (Zählwert) über der Klasse aufgetragen.

Ein **Histogramm** wiederum ist ähnlich der Häufigkeitsverteilung, es werden jedoch im Balken- bzw. Säulendiagramm die Häufigkeiten nicht durch die Höhe der Balken, sondern durch die Fläche der Balken repräsentiert. Einziger Vorteil dieser Anordnung ist die Tatsache, dass das Histogramm intuitiv besser verstanden wird, insbesondere wenn eine große Menge von Klassen aufgetragen wird und die einzelnen Balken “verschwinden” und nur ein ganzheitliches Bild der Verteilung gewonnen werden soll - Histogramme sind daher insbesondere in der Bildverarbeitung üblich.

5.6.3 Statistische Momente

Die Charakterisierung von Verteilungsfunktionen und Häufigkeitsdichte geschieht über statistische Momente. Dazu wollen wir zunächst den **Erwartungswert** definieren:

- Für **diskrete** Werte x ergibt sich die Erwartung aus:

$$E(x) = \sum x \cdot W(x) \quad (5.111)$$

x ... mögliche Werte (Skala ohne Bewertung)

$W(x)$... Wahrscheinlichkeit der möglichen Werte ($\sum W = 1$)

Beispiel: Für den Wurf eines Würfels ist $W(x) = 1/6$.

- Für **kontinuierliche** Funktionen (z.B. $u(t)$) definiert man:

$$E(u(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} c B(c) dc = \int_0^1 c dF \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt \quad (5.112)$$

c ... mögliche Werte der Funktion

$B(c)$... Wahrscheinlichkeitsdichte

$F(c)$... Verteilungsfunktion $F(c) = \int_{-\infty}^c B(c^*) dc^*$ mit $\int_0^1 dF = 1$

Man bezeichnet als das **n-te Moment der Variablen $u(t)$** (z.B. einer Geschwindigkeit) die Größe:

$$\begin{aligned} E(u^n) &= \int_0^1 c^n dF(c) = \int_{-\infty}^{+\infty} c^n B(c) dc \\ &= \overline{u^n} \end{aligned} \quad (5.113)$$

$B(c)$... „Gewichtsfunktion“, da die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten von c und damit auch c^n gleich groß sind.

Setzt man für den Mittelwert der Funktion $u(t)$ den Erwartungswert $E(u(t))$, dann werden die sog. **Zentralmomente** definiert zu:

$$\begin{aligned} E[(u - E(u))^n] &= \int_{-\infty}^{+\infty} (c - E(u))^n dF(c) = E[(u - \bar{u})^n] = E[u'^n] \\ &= \overline{u'^n} \end{aligned} \quad (5.114)$$

0. Moment:

$$\int B(c) dc = \int dF = 1 \quad (5.115)$$

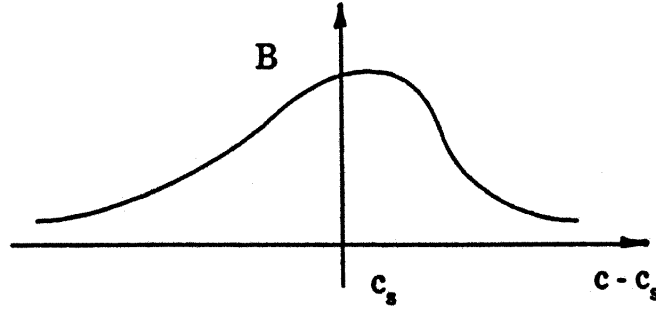


Abbildung 5.33: Schwerpunkt einer Häufigkeitsdichte

1. Moment: Es liefert den **Mittelwert** der Variablen

$$E(u^1) = \bar{u} \quad (5.116)$$

und den **Schwerpunkt** c_s der Häufigkeitsdichte $B(c)$:

1. Zentralmoment:

$$E[(u - E(u))^1] = \bar{u}' \equiv 0 \quad (5.117)$$

2. Zentralmoment: Wir bezeichnen es als **Varianz** und deren Quadratwurzel als **Streuung (standard deviation)** um den Mittelwert \bar{u} :

$$\sigma^2 = E[(u - E(u))^2] = \overline{(u - \bar{u})^2} = \overline{u'^2} \quad (5.118)$$

Die Varianz ist gleich der mittleren quadratischen Abweichung vom Schwerpunkt.

3. Zentralmoment: Dimensionslos gemacht mit der Streuung, heißt es **Schiefe (skewness)** und lautet:

$$S = \frac{1}{\sigma^3} E[(u - E(u))^3] = \frac{\overline{u'^3}}{(\overline{u'^2})^{3/2}} \quad (5.119)$$

4. Zentralmoment: Dimensionslos gemacht mit der Streuung, heißt es **Kurtosis (flatness factor)**:

$$K = \frac{1}{\sigma^4} E[(u - E(u))^4] = \frac{\overline{u'^4}}{(\overline{u'^2})^2} \quad (5.120)$$

Frenkiel und Klebanoff (1967) haben noch weitere Begriffe eingeführt:

Superskewness	$n = 5$
Superflatness	$n = 6$
Hyperskewness	$n = 7$
Hyperflatness	$n = 8$

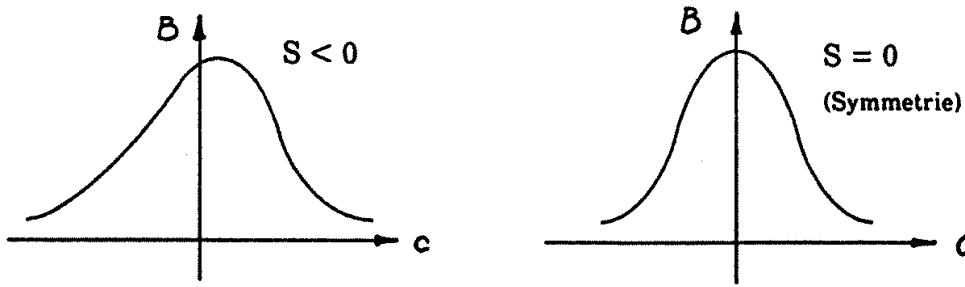


Abbildung 5.34: Zur Definition der Schiefe (skewness)

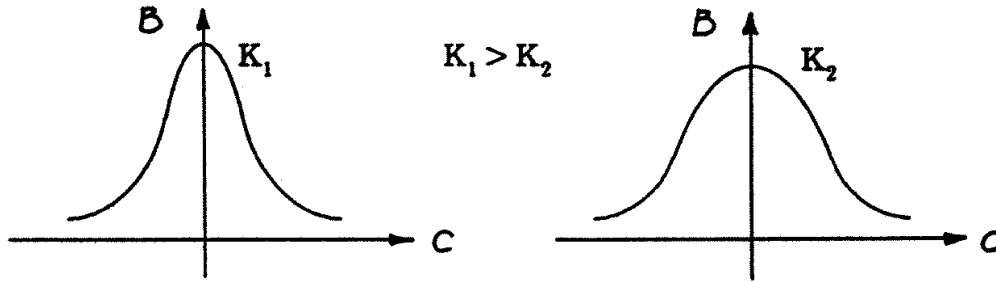


Abbildung 5.35: Zur Definition der Kurtosis (flatness factor)

Mitunter definiert man die Abweichung der Kurtosis vom Gauß'schen Wert als „Exzess“:

$$\text{Exzess} = K - 3 \quad \text{mit} \quad K_{\text{Gauß}} = 3 \quad (5.121)$$

Die Größen der Momente geben Auskunft über die Form dieser Funktion, wobei mit höher werdender Ordnung der Momente die Ausläufer der Kurve immer stärker in den Wert eingehen. Die ungeraden Momente liefern Informationen über den Grad der Unsymmetrie, die geraden Momente über die Breite der Funktion $B(c)$.

Die Verteilung einer stochastischen Turbulenzfunktion ist häufig in erster Näherung „Gaußisch“. Damit ist gemeint, daß die Verteilungsfunktion ähnlich zur Gauß'schen Glockenkurve einer Normalverteilung ist. Die Häufigkeitsdichte einer Normalverteilung berechnet sich dann zu:

$$B(c) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{(c - c_s)^2}{2\sigma^2} \right) \quad (5.122)$$

Für diese Verteilung sind die ungeraden Momente aus Symmetriegründen gleich Null. Für die geraden Momente gelten dann die Beziehungen

$$\frac{E[(u - E(u))^n]}{\sigma^n} = \frac{n!}{2^{n/2} \cdot \left(\frac{n}{2}\right)!} \quad (5.123)$$

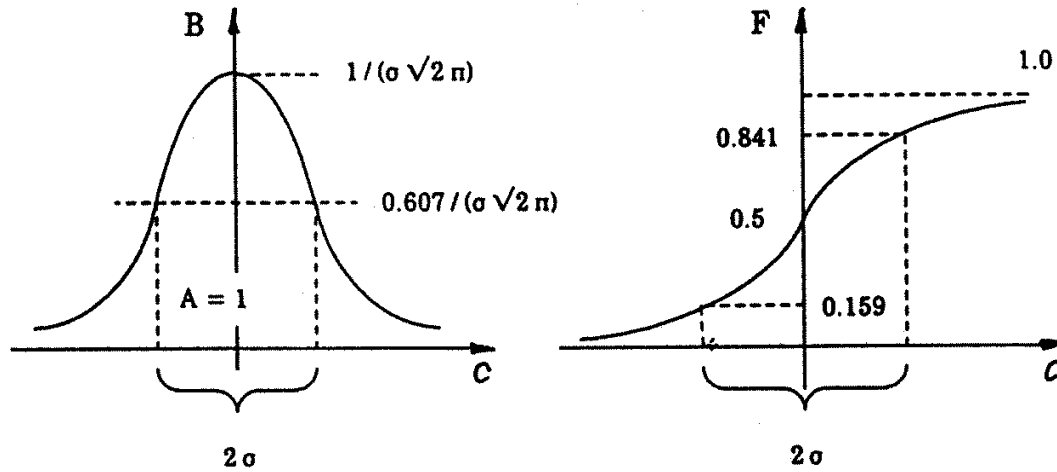


Abbildung 5.36: Momente einer Gauß-Verteilung

und

- $n = 4 \quad \rightarrow \quad \text{Kurtosis} = \text{Flatness} = 3$
- $n = 6 \quad \rightarrow \quad \text{Superflatness} = 15$
- $n = 8 \quad \rightarrow \quad \text{Hyperflatness} = 105.$

Turbulenzfluktuationen in isotroper Strömung sind annähernd Gaußisch (siehe z.B. *Frenkiel und Klebanoff (1967)*). Stärkere Abweichungen treten erst bei Scherströmungen (1) und an freien Strömungsberandungen (Intermittenzbereichen) (2) auf, vergleiche hierzu Abb. 5.37.

5.6.4 Ergänzende Bemerkungen

Statistische Momente und Korrelationsfunktionen sind ineinander überführbar. Die oben dargestellten statistischen Momente lassen sich leicht als Korrelationsfunktionen erkennen. Die Momente einer einfachen Häufigkeitsdichte stellen dabei die sog. Punktkorrelation dar.

Zweipunktkorrelationen entsprechen den Momenten einer Häufigkeitsdichte 2. Ordnung (joint distribution function), und es gilt („gemischte Momente“):

$$E(u_1^m u_2^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} c_1^m c_2^n B(c_1, c_2) dc_1 dc_2 = \overline{u_1^m u_2^n} \quad (5.124)$$

Mitunter wird in der Turbulenztheorie (besonders aber in der Meteorologie) mit sog. „Strukturfunktionen“ gearbeitet. Man versteht darunter speziell Beziehungen der Form:

$$\overline{(q(t) - q(t + \tau))^n} \quad \text{bzw.} \quad \overline{(q(\underline{r}) - q(\underline{r} + \Delta \underline{r}))^n} \quad (5.125)$$

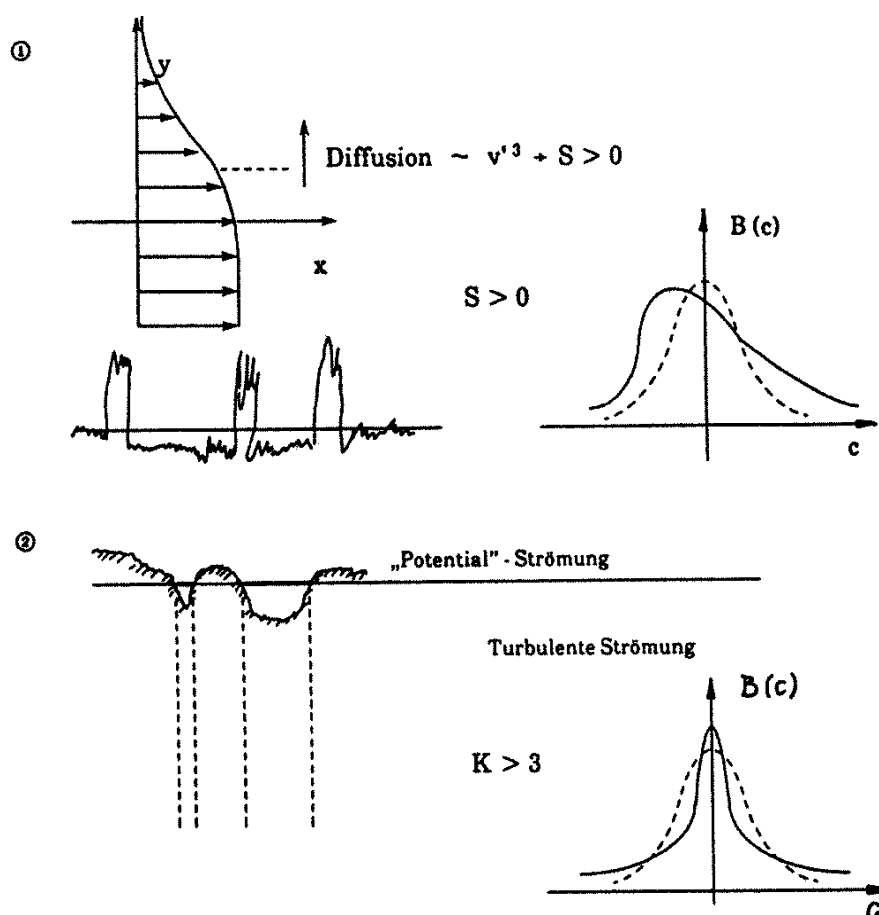
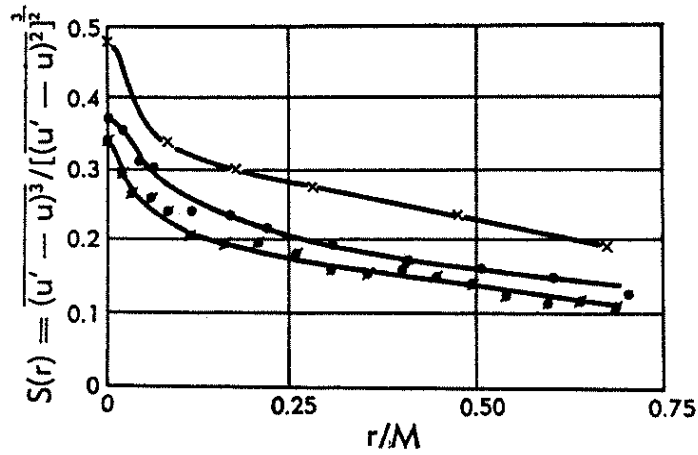


Abbildung 5.37: Beispiele für Nicht-Gaußsche Verteilungen

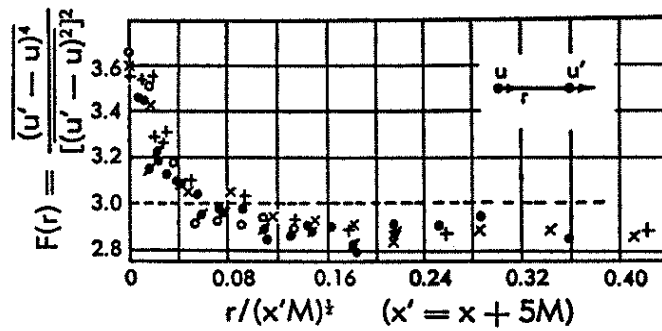
Die Betrachtung der statistischen Eigenschaften von Geschwindigkeitsdifferenzen vermag mitunter interessante Aussagen zu liefern.

Die folgenden Bilder nach *Stewart (1951)* zeigen hinter einem Sieb bei näherungsweise isotroper Turbulenz gemessene Schiefe- und Kurtosis-Verteilungen, wobei die Momente mit der Differenz der Geschwindigkeitsfluktuationen u'_1 und u'_2 an zwei um $\Delta \underline{r}$ auseinanderliegenden Orten gebildet wurden:

Diese mit der Geschwindigkeitsdifferenz gebildeten Momente setzen sich aus einfachen und „gemischten“ Momenten zusammen. Man erkennt, dass für große Abstände \underline{r} , wo die gemischten Momente zu Null werden (d.h., die Zweipunktkorrelation zu Null wird) und nur die einfachen (Punkt-)Momente erhalten bleiben, Schiefe und Kurtosis annähernd Gauß'sche Werte annehmen. Für $\underline{r} \rightarrow 0$, wo die gemischten Momente weitgehend dominieren, zeigen F und S vom Gauß'schen Verhalten stark abweichende Werte. Man erkennt daraus, daß die Häufigkeitsdichten 2. Ordnung i.allg. Nicht-Gaußisch sind (siehe auch *Camér (1937)*).



Skewness factor for turbulent fluctuations
behind a grid (after Stewart)



Flatness factor for turbulent fluctuations behind a grid across a
uniform air stream (after Stewart,

Abbildung 5.38: Gemessene Momente in einer Siebströmung

Bemerkung (siehe Seite 82):

Im Fall einer turbulenten Strömung mit periodischer Komponente existieren mindestens zwei charakteristische Längen, eine deterministische und eine stochastische. Beide Längen sollten auf die gleiche Definition zurückgehen, damit man sie vergleichen kann.

Gegeben sei beispielsweise ein Spektrum der folgenden Form:

Daraus kann man dann die folgenden (vergleichbaren!) Längen definieren:

$$\text{deterministische „Länge“:} \quad l_D \sim \frac{1}{k_D} \quad (5.126)$$

$$\text{stochastische „Länge“:} \quad l_D \sim \frac{\int E dk}{\int E k dk} \quad (5.127)$$

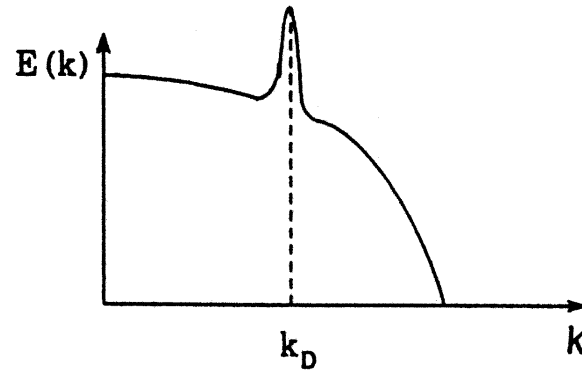


Abbildung 5.39: Spektrum einer turbulenten Strömung mit periodischer Komponente

Gegenüber dem auf Seite 82 gezeigten Vorgehen hat die Auswertung des Wellenzahl-spektrums den Vorteil, dass die zu der deterministischen Länge gehörende Frequenz k_D über eine einfache Extremwertsuche gefunden werden kann und beide Längen direkt aus dem Spektrum berechnet werden können.

5.7 Die Anisotropie-Invarianzkarte

Einen bedeutenden intellektuellen Beitrag zur Erforschung der Turbulenz konnten *Lumley und Newman (1977)* leisten, ausgehend von der Analogie des Reynolds-Spannungstensors zum strukturemechanischen Spannungstensor: Da es sich um einen symmetrischen Tensor handelt, ist dieser diagonalisierbar. D.h. durch die Wahl von geeigneten Rotationswinkeln lässt sich der Tensor so umwandeln, dass nur noch Normalspannungen auftreten und alle Schubspannungen verschwinden. Die Achsen auf die der Tensor gedreht werden muss, um dies zu erreichen nennt man Hauptachsen.

Bezüglich der einzelnen Komponenten des Tensors kann diese Forderung dergestalt zusammengefasst werden, dass sie nur physikalisch realisierbar sind, wenn n Eigenwerte λ größer null existieren, wobei n die Dimension ist, im Raum also $n = 3$; $\lambda_n(\overline{u_i u_j}) \geq 0$. Der Reynolds-Spannungstensor ist positiv semi-definit. Hieraus folgt u.a., dass die Schubspannungen immer kleiner sind als die Hauptspannungen, desweiteren auch folgende Bedingungen:

$$\overline{u'_i u'_i} \geq 0; \quad \overline{u'_i u'_i} + \overline{u'_j u'_j} \geq 2|\overline{u'_i u'_j}|; \quad DET(\overline{u'_i u'_j}) \geq 0 \quad (5.128)$$

Lumley und Newman (1977) dekomponieren nun den Reynolds-Spannungstensor wie folgt:

$$\overline{u'_i u'_j} = q^2 \cdot a_{ij} + q^2 \cdot \delta_{ij}/3 \quad (5.129)$$

δ_{ij} ist das Kronecker-Symbol, q^2 die Spur⁵ des Spannungstensors - physikalisch gesehen ist dies die turbulente kinetische Energie:

$$q^2 = \overline{u'_i u'_i} \quad (5.130)$$

Die Dekomposition trennt den Spannungstensor auf in einen isotropen Anteil $q^2 \cdot \delta_{ij}/3$ und einen Tensor a_{ij} , der die Anisotropie repräsentiert. Dieser Anisotropietensor a_{ij} ist dimensionslos, spurfrei und wird identisch null, wenn isotrope Turbulenz vorliegt. Durch umschreiben von (5.129) folgt sofort:

$$a_{ij} = \frac{\overline{u'_i u'_j}}{q^2} - \frac{1}{3}\delta_{ij} \quad (5.131)$$

Man bildet die zweite und dritte Invariante:

$$II_a = a_{ij}a_{ji} \quad (5.132)$$

$$III_a = a_{ij}a_{jk}a_{ki} \quad (5.133)$$

⁵Als die Spur einer Matrix B bezeichnet man die Summe der Diagonalelemente: $Sp(B) = b_i b_i$. Eine Matrix heißt spurfrei, wenn die Spur Null ist.

Die Invarianten sind Skalare, die ein vereinfachtes Maß für die Anisotropie des Spannungstensors darstellen. Man bezeichnet sie als “invariant”, weil sie auch bei Rotation des Reynolds-Spannungstensors erhalten bleiben, also rotationsinvariant sind. Demzufolge ist es auch nicht notwendig den Tensor im ersten Schritt in ein Hauptachsensystem zu überführen. Eine umfassende Darstellung der Invariantentheorie findet sich bei *Jovanovic (2004)*.

Die bemerkenswerte Eigenart der Invarianten ist die Tatsache, dass alle physikalisch realistischen Turbulenzarten gemäß *Lumley (1978)* nur recht eng eingegrenzte Zustände einnehmen können. Üblicherweise stellt man II_a und III_a in der sogenannten Anisotropie-Invarianzkarte dar, die in Abb. 5.40 abgebildet ist. Jegliche gemäß (5.128) physikalisch realisierbare Turbulenz liegt innerhalb des von den drei Randlinien begrenzten Gebietes.

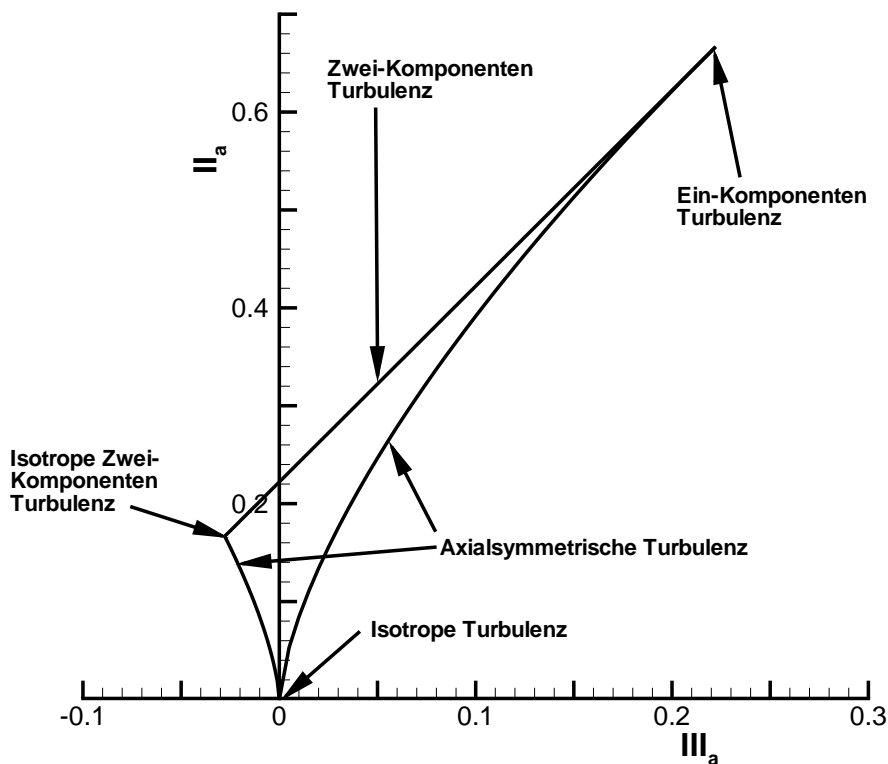


Abbildung 5.40: Anisotropie-Invarianzenkarte des Tensors a_{ij}

In isotroper Turbulenz folgt aus $a_{ij} = 0$ sofort $II_a = 0, III_a = 0$. Für die Randlinien lassen sich einfache analytische Zusammenhänge angeben:

- **Axialsymmetrische Turbulenz** zeichnet sich dadurch aus, dass nur Diagonalkomponenten existieren, wobei zwei davon gleich groß sind. Man kann dies erreichen, indem man (quasi-) isotrope Turbulenz, z.B. durch ein Sieb oder Gitter erzeugt und axialsymmetrisch kontrahiert oder expandiert, z.B. in einer Düse oder einem Diffusor. Der Anisotropietensor stellt sich dann in folgender Form dar:

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}b & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}b \end{pmatrix} \quad (5.134)$$

Mit

$$II_a = \frac{3}{2}b^2, \quad III_a = \frac{3}{4}b^3, \quad (5.135)$$

damit ergibt sich der funktionale Zusammenhang

$$II_a = \frac{3}{2} \left(\frac{4}{3} |III_a| \right)^{\frac{2}{3}} \quad (5.136)$$

Auf dem Pfad mit $III_a > 0$ ist die verbleibende, nicht symmetrische Komponente größer als die beiden symmetrischen Komponenten. Man kann dies erreichen, indem man homogene Turbulenz mit einem Sieb erzeugt und über einen axialsymmetrischen Diffusor expandiert, so dass die Turbulenz der Längsgeschwindigkeitskomponente groß wird. Auf dem Pfad $III_a < 0$ ist die alleinstehende Komponente kleiner als die beiden symmetrischen, dies entspricht einer axialsymmetrischen Kontraktion (Beschleunigung), bei der die Fluktuationen der Längsgeschwindigkeit gedämpft werden.

- **Zwei-Komponenten Turbulenz** tritt beispielsweise bei wandgebundenen Strömungen in unmittelbarer Wandnähe auf, wo die Schubspannungselemente von $\overline{u_i u_j}$ und eines der Diagonalelemente (in wandnahen Strömungen die wandnormale Komponente) gegen Null streben. Der Grenzfall für den Anisotropietensor lautet nun wie folgt:

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & -b + \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (5.137)$$

mit

$$II_a = 2b^2 - \frac{2}{3}b + \frac{2}{9}, \quad III_a = b^2 - \frac{1}{3}b, \quad (5.138)$$

Es ergibt sich

$$II_a = \frac{2}{9} + 2 \cdot III_a \quad (5.139)$$

Die Zusammenhänge (5.136) und (5.139) definieren die seitlichen und die obere Grenze der Anisotropie-Invarianzkarte. Der untere Schnittpunkt ist der Grenzfall, dass die axialsymmetrischen Komponenten der Turbulenz gleich groß werden wie die verbleibende Komponente. Dies ist dann isotrope Turbulenz, für die entsprechend gilt $II_a = III_a \equiv 0$.

Es gibt zwei Grenzzustände in denen Zwei-Komponenten Turbulenz axialsymmetrisch wird, diese beiden Zustände charakterisieren die beiden Schnittpunkte der Randlinien:

Der linke Schnittpunkt ist der Grenzfall, dass Zwei-Komponenten Turbulenz axialsymmetrisch, d.h. isotrop wird. Dies ist gegeben wenn

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (5.140)$$

Der Schnittpunkt hat also die universellen Koordinaten

$$II_a = \frac{1}{6}, \quad III_a = -\frac{1}{36}, \quad (5.141)$$

Der Schnittpunkt rechts oben ist der Grenzfall, dass nur eine einzige Turbulenzkomponente existiert (Ein-Komponenten Turbulenz). Der Anisotropietensor hat dann die Form

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (5.142)$$

und demzufolge der Schnittpunkt die Koordinaten

$$II_a = \frac{2}{3}, \quad III_a = \frac{2}{9}, \quad (5.143)$$

Abbildung 5.41 zeigt beispielhaft die Trajektorien einer turbulenten Kanalströmung in Abhängigkeit von der Reynoldszahl. Der mit $x_2 = 0$ gekennzeichnete Punkt ist unmittelbar an der Wand. $x_2 = 0$ liegt erwartungsgemäß auf der Linie die Zwei-Komponenten-Turbulenz beschreibt, da in unmittelbarer Wandnähe eine Komponente (nämlich die wandnormale) nicht existieren kann. Die Trajektorie läuft dann zunächst in Richtung der Ein-Komponenten-Turbulenz. Dies ist darauf zurückzuführen, dass bei zunehmendem Wandabstand zunächst dominante Fluktuationen in Längsrichtung u' auftreten (siehe hierzu auch die Ausführungen in Kap. 7.5, insbesondere Abb. 7.18). Etwa im Bereich der sog. Wandturbulenz (auch logarithmischer Bereich genannt) treten dann auch Fluktuationen in wandnormalen und Quer-Richtung auf, so dass die Trajektorie abbiegt und nahe der Linie für axialsymmetrische Turbulenz nach unten zielt. Beim Übergang zur Außenströmung weisen Wandgrenzschichten keine

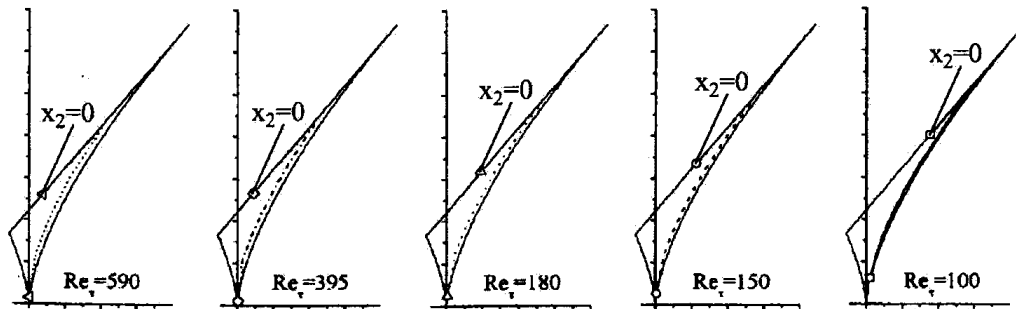


Abbildung 5.41: Trajektorien einer turbulenten Kanalströmung in der Anisotropiekarte, Jovanovic und Hillerbrand (2005)

ausgeprägt starke Anisotropie auf, d.h. die Trajektorie läuft auf das Limit der isotropen Turbulenz zu.

Bemerkenswert ist, dass mit zunehmender Reynoldszahl die Trajektorie immer weiter von der Linie axialsymmetrischer Turbulenz entfernt verläuft. In diesem Zusammenhang sei nochmals auf Abb. 7.18 vorgegriffen: Je höher die Reynoldszahl, desto ausgeprägter ist der Unterschied der Fluktuationen in wandnormalen- und Quer-Richtung. Im Grenzfall sehr kleiner Reynoldszahlen wären v' und w' von gleicher Größe, damit würde axialsymmetrische Turbulenz vorliegen und die Trajektorie gerade auf der Linie entlang laufen. Desweiteren ist bemerkenswert, dass der Punkt $x_2 = 0$ mit steigender Reynoldszahl “nach unten” rückt, d.h. mit steigender Reynoldszahl wird in wandgebundenen Strömungen die wandnächste Turbulenz isotroper.

Obwohl bereits Lumley und Newman (1977) erkannten, dass die Arbeit mit der Anisotropie-Invarianzkarte einen bedeutenden Schritt zu einer verbesserten Turbulenzmodellierung bedeutet, gelang es erst Jovanovic (2004) (und darauffolgende Arbeiten) einen Ansatz zu einer praxisrelevanten Modellierung zu finden. Welch große Hoffnung dies in sich trägt sei mit Abb. 5.42 diskutiert. Hier ist wiederum die Trajektorie einer turbulenten Wandgrenzschicht in der Anisotropiekarte dargestellt. Als Kreis in der Nähe des Ursprungs ist eine Abschätzung für das Maß an Anisotropie, das mit einem Standard k - ϵ -Modell dargestellt werden kann.⁶ Es ist offensichtlich, dass das tatsächlich vorhandene Maß an Anisotropie von dem Wirbelviskositätsmodell über die gesamte Grenzschichtdicke nicht dargestellt werden kann. Das mit diesen “einfachen” Modellen dennoch verhältnismäßig gute Vorhersagen für nicht-abgelöste, turbulent umströmte Körper möglich sind, liegt daran, dass die Konstanten anhand derartiger Strömungen kalibriert wurden. Die auf der Invarianztheorie beruhenden Turbulenzmodelle gehören

⁶Es sei hier bemerkt, dass die Modellierung der Wirbelviskosität bei Ein- und Zwei-Gleichungs-Modellen durch die Boussinesq-Hypothese vollständig isotrop ist. Dennoch können diese Modelle moderate Anisotropie darstellen, da der Tensor der Geschwindigkeitsgradienten nach wie vor anisotrop sein kann.

Kapitel 6

Dynamik isotroper Turbulenz

6.1 Einleitung

In Kapitel 5 wurde die Statistik als Mittel zur Klassifizierung turbulenter Strömungen eingeführt. Bereits aus der Analyse können - beispielsweise durch den Vergleich verschiedener Strömungsformen - interessante Erkenntnisse und Zusammenhänge gefunden werden. Die Statistik ist dabei ein universelles Mittel welches auf beliebige Datensätze angewendet werden kann. Es lassen sich nun durch eine Erweiterung der Betrachtungen auf strömungsmechanische Grundbeziehungen weitergehende Erkenntnisse gewinnen.

Grundlage ist dabei die Navier–Stokes–Gleichung, wobei zunächst vereinfachend eine ebene Translationsströmung vorausgesetzt sei, im betrachteten Bereich also $\bar{u} = \text{const.}$, $\bar{v} = \bar{w} = 0$, $\nabla \bar{u}_i = 0$. Von der Navier–Stokes–Gleichung wird die Reynolds’sche Gleichung (Darstellung der Mittelwerte) abgezogen, so dass eine Transportgleichung für die Schwankungskomponenten verbleibt:

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + (\bar{u}_i \nabla) u'_i + (u'_i \nabla) u'_i = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r_i} p' + \nu \Delta u'_i \quad (6.1)$$

Man betrachtet nun die Gleichung in einem Punkt A und multipliziert mit der Schwankungsgeschwindigkeit u'_j im Punkt B , d.h. man korreliert die Schwankungen in B mit dem Verhalten der Strömung in A .

$$\begin{aligned} u'_{jB} \frac{\partial u'_{iA}}{\partial t} + (\bar{u} \nabla_A) u'_{iA} u'_{jB} + (u'_A \nabla_A) u'_{iA} u'_{jB} \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r_{iA}} p'_A u'_{jB} + \nu \Delta_A u'_{iA} u'_{jB} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Dabei wird u'_{jB} bei einer Differentiation in A als Konstante betrachtet. Eine Betrachtung der Gleichung in Punkt B und Multiplikation mit u'_{iA} liefert eine entsprechende Gleichung:

$$\begin{aligned}
& u'_{iA} \frac{\partial u'_{jB}}{\partial t} + (\bar{u} \nabla_B) u'_{iA} u'_{jB} + (u'_B \nabla_B) u'_{iA} u'_{jB} \\
&= -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial r_{jB}} p'_B u'_{iA} + \nu \Delta_B u'_{iA} u'_{jB}
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Der Vektor von A nach B sei $\Delta \underline{r}$. Die Größen mit dem Index B hängen von $\Delta \underline{r}$ ab, solche mit dem Index A nicht. Eine Addition dieser beiden Gleichungen und anschließende Mittelwertbildung liefert (in kartesischer Tensornotation)

$$\frac{\partial Q_{ij}(\Delta \underline{r})}{\partial t} - \frac{\partial (S_{ik,j}(\Delta \underline{r}) - S_{i,kj}(-\Delta \underline{r}))}{\partial (\Delta r_k)} \tag{6.4}$$

Diffusion

$$= -\frac{1}{\varrho} \left(\frac{\partial \overline{p'_B u'_{iA}}}{\partial (\Delta r_j)} - \frac{\partial \overline{p'_A u'_{jB}}}{\partial (\Delta r_i)} \right) + 2\nu \frac{\partial^2 Q_{ij}(\Delta \underline{r})}{\partial (\Delta r_k) \partial (\Delta r_k)},$$

Druckdiffusion

Dissipation

Dabei ist Q_{ij} der Eulersche 2-Punkt-Korrelationstensor

$$Q_{ij} = \overline{u'_i(\underline{r}) u'_j(\underline{r} + \Delta \underline{r})} \tag{6.5}$$

und $S_{ik,j}$ bzw. $S_{i,kj}$ der Eulersche Tripel-Korrelationstensor:

$$S_{ik,j}(\Delta \underline{r}) = \overline{u'_i(\underline{r}) u'_j(\underline{r} + \Delta \underline{r}) u'_k(\underline{r})} \tag{6.6}$$

$$S_{i,kj}(-\Delta \underline{r}) = \overline{u'_i(\underline{r} - \Delta \underline{r}) u'_j(\underline{r}) u'_k(\underline{r})}$$

Gl. (6.4) ist unabhängig von \bar{u} und somit gleichermaßen gültig für Absolut- und Relativsysteme (keine Konvektion!). Sie beschreibt das Verhalten der Doppelkorrelationen Q_{ij} als Funktionen der Zeit. Hier sei an die früher beschriebene Energiegleichung (Gl. 3.51) erinnert, in der gleichfalls die Diffusionsterme durch Tripel-Produkte von Fluktuationsgeschwindigkeiten gebildet wurden.

Die wesentliche Erkenntnis aus dem gewonnenen Zusammenhang ist jedoch eine negative: Es lassen sich auf analoge Weise beliebig viele neue Gleichungen formulieren, d.h., man kommt dem Problem der Erfassung der Unbekannten auf diese Weise nicht näher, da mit jeder neuen Gleichung eine weitere neue Unbekannte (Korrelation höherer Ordnung) auftritt. Die Zahl der Unbekannten ist stets um eins größer als die Zahl der verfügbaren Gleichungen - das bekannte Schließungsproblem der Turbulenz.

Man kann jedoch Aussagen gewinnen, wenn vereinfachend isotrope Turbulenz angenommen wird. Im ersten Moment erscheint diese Vereinfachung stark idealisiert, da sich isotrope Turbulenz z.B. in Experimenten kaum realisieren lässt. Wie noch gezeigt werden wird, sind jedoch in beliebiger Strömung die kleinskaligen Turbulenzstrukturen isotrop, so dass das Studium der isotropen Turbulenz eine sehr umfassende Bedeutung hat.

Um die Beziehung (6.4) für isotrope Turbulenz zu vereinfachen, müssen Annahmen/Vereinfachungen für folgende Terme gefunden werden:

- Die Korrelationstensoren 1. Ordnung $\overline{p'u'}$ (Druck-Geschwindigkeitskorrelation)
- Der Korrelationstensor 2. Ordnung $(Q_{i,j})_{AB}$
- Die Tripel-Korrelationstensoren 3. Ordnung $S_{ik,j}$

Die exakte Herleitung der Beziehungen für isotrope Turbulenz ist recht langwierig und führt auch zu keinem tieferen Verständnis. Im Folgenden sollen daher nur die wesentlichen Ergebnisse angegeben werden. Die Bedeutung der Theorie der isotropen Turbulenz wurde von *de Karman und Howarth (1938)* erkannt und entwickelt.

6.2 Eigenschaften isotroper Turbulenz

6.2.1 Korrelationstensor 1. Ordnung $\overline{p'(A)u'_j(B)}$

Man kann die Druck-Geschwindigkeits-Korrelation in eine modifizierte Form umschreiben und unter Nutzung der Kontinuitätsbeziehung zeigen, dass gelten muss:

$$\overline{p'(A)u'_j(B)} = 0 \quad (6.7)$$

Dieses ebenso einfache wie bemerkenswerte Ergebnis besagt also, dass in isotroper Turbulenz Druck und Geschwindigkeitsfelder in beliebigen Raumpunkten vollständig unkorreliert sind. Es findet demnach keine Druckdiffusion statt.

6.2.2 Korrelationstensor 2. Ordnung $(Q_{i,j})_{AB}$

Dieser Tensor ist symmetrisch und hat sechs Elemente. Da isotrope Turbulenz vollständig rotationsinvariant sein muss, dürfen keine gemischten Korrelationen auftreten. Nicht verschwindende Korrelationen sind demnach lediglich:

$$\begin{aligned} \text{die Längskorrelation} \quad & \overline{u'_A u'_B} \quad \text{und} \\ \text{die Querkorrelationen} \quad & \overline{v'_A v'_B} = \overline{w'_A w'_B}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Daraus resultierend definiert man den **longitudinalen (Längs-) Korrelationskoeffizient** $f(\Delta x_i)$ und den **lateralen (Quer-) Korrelationskoeffizient** $g(\Delta x_i)$:

$$\overline{u'_{iA} u'_{iB}} = \overline{u'^2} \cdot f(\Delta x_i) \quad (6.9)$$

$$\overline{u'_{jA} u'_{jB}} = \overline{u'^2} \cdot g(\Delta x_i)$$

Wiederum über die Kontinuitätsbeziehung erhält man nach länglicher Rechnung eine Verknüpfung zwischen den beiden Korrelationskoeffizienten (mit $r = |\Delta x_i|$):

$$g(r) = f(r) + \frac{r}{2} \frac{df(r)}{dr} \quad (6.10)$$

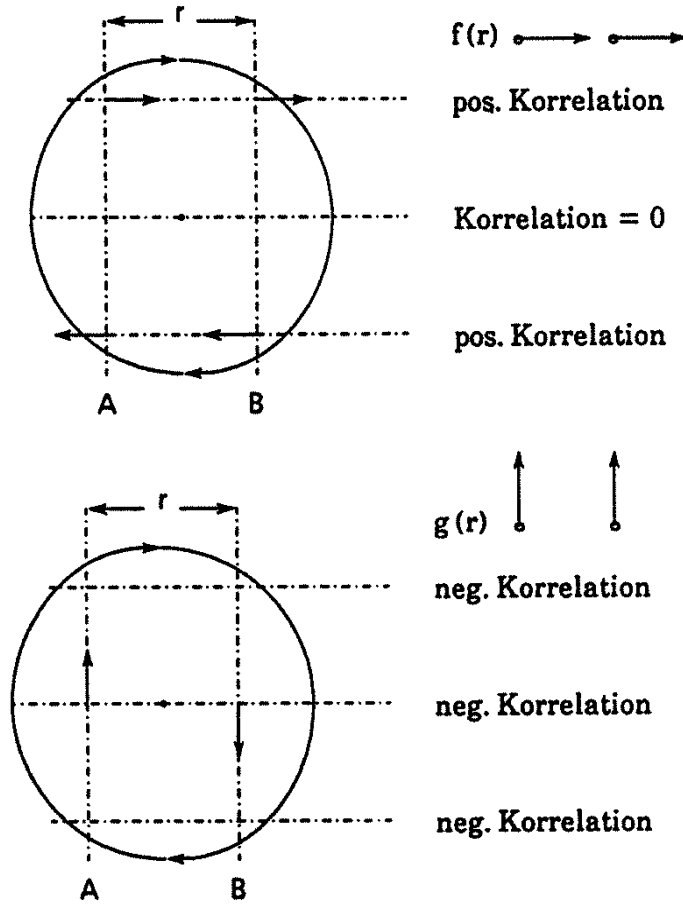


Abbildung 6.1: Korrelationen in einem Wirbel

Dabei kann man anhand von Abb. 6.1 das Postulat aufstellen, dass stets gilt $\overline{u'_A u'_B} > 0$, wohingegen $\overline{v'_A v'_B}$ auch negative Werte annehmen kann. In der hier ausgelassenen Herleitung von Gl. (6.10) treten Terme auf, die diese These unterstützen. Genauer wird dort gefordert, dass $g(r)$ negative Bereiche besitzen muss, andererseits aber für

$f(r)$ nur, dass es stärker gegen Null konvergiert als r^2 . Das folgende Bild zeigt den gemessenen Verlauf von $f(r)$ und $g(r)$ in einer isotropen Strömung hinter einem Sieb mit der Maschenweite M (siehe z.B. *Hinze (1975)*):

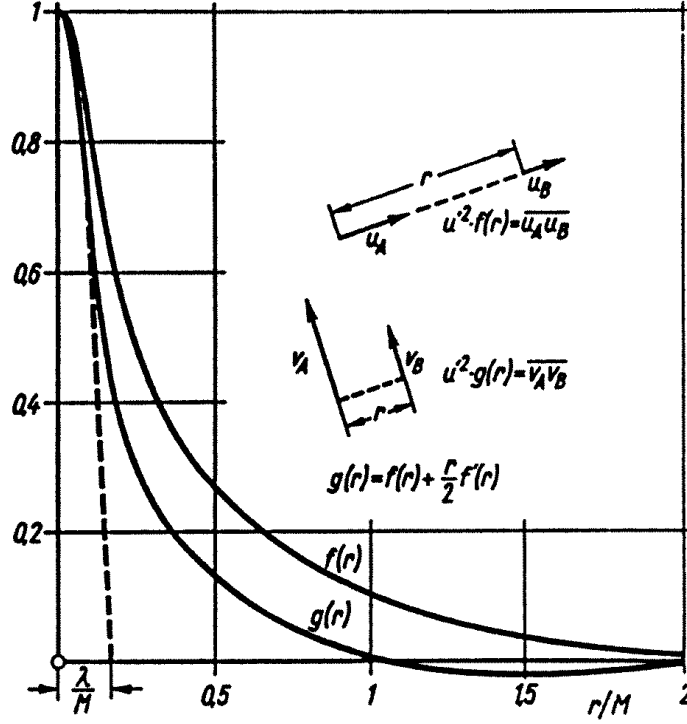


Abbildung 6.2: Gemessene Korrelationen in einer Gitterströmung

Die gemessenen Verläufe stimmen offensichtlich mit dem Ergebnis der Gl.(6.10) und den oben angestellten Überlegungen überein.

Für isotrope Strömungen lassen sich auch bestimmte Zusammenhänge zwischen den verschiedenen räumlichen Ableitungen angeben. Zu ihrer Ermittlung wird von Gl.(6.10) ausgegangen, deren Ableitungen nach r folgendermaßen aussehen:

$$\frac{\partial}{\partial r} g(r) = \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial r} f(r) + \frac{r}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} f(r) \quad (6.11)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} g(r) = 2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} f(r) + \frac{r}{2} \frac{\partial^3}{\partial r^3} f(r) \quad (6.12)$$

An der Stelle $r = 0$ (Scheitelpunkt) der Korrelation ist dann

$$\left. \frac{\partial^2}{\partial r^2} g(r) \right|_{r=0} = 2 \left. \frac{\partial^2}{\partial r^2} f(r) \right|_{r=0}. \quad (6.13)$$

In Kapitel 5.4.2 wurde gezeigt, dass der Taylor'sche Mikromaßstab über die Krümmung des Korrelogramms im Ursprung definiert ist. Es lässt sich daher auch herleiten, dass bei isotroper Turbulenz die Taylor'schen Strukturlängen der Längs- und Querkorrelation einen konstanten Zusammenhang bilden (siehe Definition laut Gl.(5.60)):

$$\lambda_f = \sqrt{2} \lambda_g \quad \text{und} \quad \Lambda_f = 2 \Lambda_g \quad (6.14)$$

Da der Scheitelpunkt des Korrelogramms, bzw. die Taylor'sche micro-scale gerade die kleinsten Strukturen der Turbulenz repräsentieren und weiterhin die Dissipation auf eben diesen kleinsten Skalen stattfindet, ist es ebenso möglich, eine (für hinreichend große Reynoldszahlen) annähernd allgemeingültige Formulierung für die **spezifische Dissipationsrate der isotropen Turbulenz** anzugeben:

$$\epsilon = 15 \nu \cdot \overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)^2} \quad (6.15)$$

Unter Einbeziehung der Taylor-Hypothese ergibt sich daraus:

$$\epsilon = 15 \nu \cdot \frac{1}{u_{Tr}^2} \overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial t}\right)^2} \quad (6.16)$$

Dies ist daher von so großer Bedeutung (vgl. *Rotta (1972)*), da $\overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial t}\right)^2}$ eine mit einem Ein-Komponenten-Hitzdraht relativ einfach messbare Größe ist. Man kann also mit $u_{Tr}^2 \approx \overline{u^2}$ und unter der Annahme von Isotropie, die z.B. in Windkanalströmungen annähernd gegeben ist, sehr einfach die spezifische Dissipationsrate bestimmen.

6.2.3 Tripel-Korrelationstensoren 3. Ordnung $S_{ik,j}$

Der Tensor der Tripelkorrelationen ist ein Tensor 3. Ordnung. Er hat 27 Komponenten, von denen bei Isotropie nur die folgenden 5 Komponenten von Null verschiedene Werte annehmen:

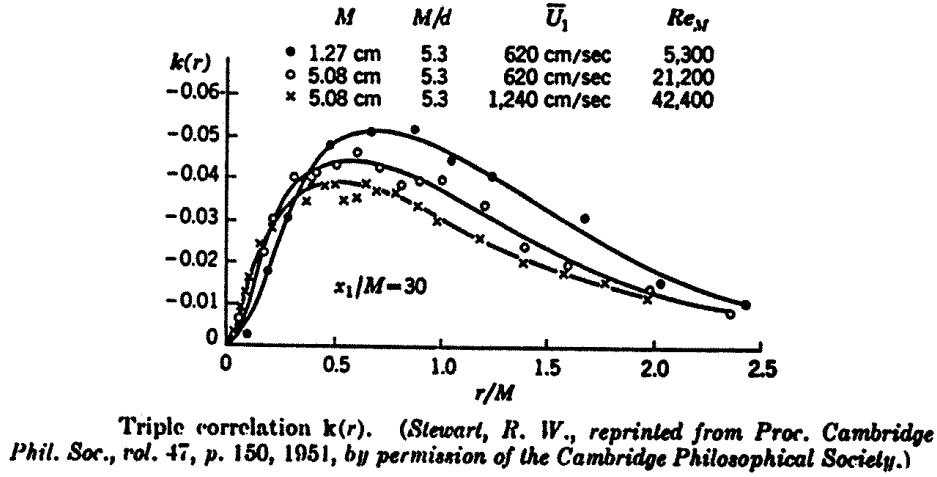
$$\overline{u_A'^2 u_B'} \quad (6.17)$$

$$\overline{u_A' v_A' v_B'} = \overline{u_A' w_A' w_B'}$$

$$\overline{v_A'^2 u_B'} = \overline{w_A'^2 u_B'}$$

Man definiert damit die Korrelationskoeffizienten k , h und q , wobei $i \perp j \perp k \perp i$ und $\Delta x_i = r$ gelten soll:

$$\overline{u_{iA}'^2 u_{iB}'} = \overline{u'^2}^{3/2} k(\Delta x_i) \quad (6.18)$$

Abbildung 6.3: Gemessene Tripelkorrelationen in einer Siebströmung, *Stewart (1951)*

$$\overline{u_{jA}^2 u'_{iB}} = \overline{u^2}^{3/2} h(\Delta x_i) \quad (6.19)$$

$$\overline{u'_{iA} u'_{jA} u'_{jB}} = \overline{u^2}^{3/2} q(\Delta x_i) \quad (6.20)$$

Ähnlich wie bei den 2-Punkt-Doppelkorrelationen findet man mit Hilfe der Kontinuitätsbedingung Verknüpfungsbeziehungen für $h(r)$, $k(r)$ und $q(r)$:

$$k(r) + 2h(r) = 0 \quad (6.21)$$

$$q(r) = \frac{1}{2} k(r) + \frac{r}{4} \frac{\partial}{\partial r} k(r) \quad (6.22)$$

Dieses wiederum bemerkenswerte Ergebnis besagt, dass die Kenntnis einer einzelnen Tripel-Korrelation $k(r)$ ausreichend ist, da die beiden anderen daraus berechenbar sind. Allerdings war die Messung von Tripel-Korrelationen lange Zeit eine Herausforderung, *Stewart (1951)* war der erste, der mit Hilfe von Hitzdrähten und einem aus 14 Radioröhren bestehenden "Korrelator" die in Abb. 6.3 dargestellten Ergebnisse erzeugen konnte.

6.2.4 Korrelationsbeziehung isotroper Turbulenz

Für die Verknüpfung der 2-Punkt-Doppelkorrelationen mit den 2-Punkt-Tripelkorrelationen haben wir mit der Gl.(6.4) eine dynamische Beziehung gewonnen. Unter Voraussetzung von Isotropie nimmt diese Gleichung gemäß der vorigen drei Unterkapitel die folgende vereinfachte Form an:

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_{i,j} - S_{i,j} = 2\nu \frac{\partial^2}{\partial(\Delta r_k) \partial(\Delta r_k)} Q_{i,j}, \quad (6.23)$$

wenn man an die Stelle des die Tripelkorrelation enthaltenden Diffusionsterms einen neuen Tensor 2. Ordnung einführt:

$$\frac{\partial}{\partial(\Delta r_k)} [S_{ik,j}(\Delta \underline{r}) - S_{i,kj}(-\Delta \underline{r})] = S_{i,j} \quad (6.24)$$

Durch Einführung der Doppelkorrelationen f, g und der Tripelkorrelationen h, k, q in Gl.(6.23) erhält man die sog. „v.Kármán–Howarth–Gleichung“:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overline{u'^2} f) + 2 \overline{u'^2}^{3/2} \left(\frac{\partial h}{\partial r} + \frac{4h}{r} \right) = 2 \nu \overline{u'^2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \right) \quad (6.25)$$

Diese Beziehung wurde erstmalig von *de Karman und Howarth (1938)* gefunden und wurde durch die bereits oben erwähnte Arbeit von *Stewart (1951)* experimentell in einer quasi-isotropen Strömung (hinter einem Sieb) verifiziert.

Die v.Kármán–Howarth–Gleichung stellt nun eine neue, vereinfachte Ausgangsbeziehung für das Studium der isotropen Turbulenz dar. Die analytische Lösung ist auch bei isotroper Turbulenz nicht möglich, da die Beziehung zwei Unbekannte enthält und somit nicht geschlossen ist. Im folgenden Kapitel wird jedoch gezeigt, dass durch eine Transformation der Gleichung in den Spektralraum fundamentale Erkenntnisse gewonnen werden, die zudem von allgemeingültiger Bedeutung sind.

6.3 Die Dynamik des Energiespektrums

6.3.1 Ansatz

Durch Fourier-Transformation der dynamischen Gleichung der Korrelationen (Gl.(6.23)) erhält man eine **Spektralgleichung für das dreidimensionale Spektrum** (ohne Produktion; allgemein für große k gültig):

$$\frac{\partial}{\partial t} E(k, t) = F(k, t) - 2\nu k^2 E(k, t) \quad (6.26)$$

Diese Spektralgleichung stellt eine Energiegleichung dar und beschreibt den Energietransport im Spektrum längs der k -Achse. F ist die Energie-Transportgröße zwischen Wirbeln verschiedener Größe bzw. unterschiedlicher Wellenzahl k .

Die theoretische Behandlung obiger Gleichung und damit das Finden einer Lösung für $E(k, t)$ ist einfacher als das Lösen der entsprechenden Korrelationsbeziehung, da sich für $F(k, t)$ leichter Modell-Ansätze finden lassen. Bevor jedoch einige dieser Modelle und die damit gewonnenen Lösungen diskutiert werden, soll $F(k)$ anhand eines Diagramms zu Gl.(6.26) visualisiert werden:

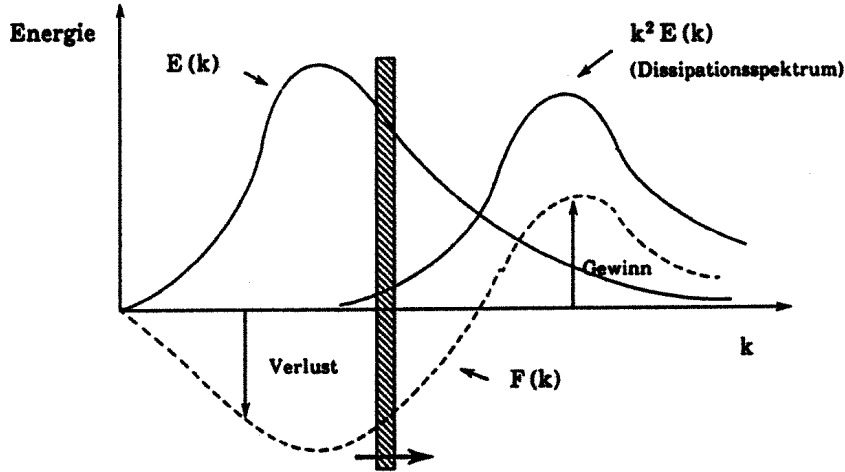


Abbildung 6.4: Dreidimensionales Spektrum mit $F(k)$

Man führt nun eine neue Übertragungsfunktion $F^*(k)$ ein:

$$F^*(k) = - \int_0^k F(k) dk \quad (6.27)$$

Damit repräsentiert $F^*(k)$ die gesamte Energie, die von den Wirbeln im Wellenbereich von $0 \dots k$ an die Wirbel der Wellenzahlen größer als k abgegeben wird. Die Gl.(6.26) verändert sich dann zu:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = - \frac{\partial F^*}{\partial k} - 2\nu k^2 E \quad (6.28)$$

Qualitativ erhält man dann für das Energiespektrum:

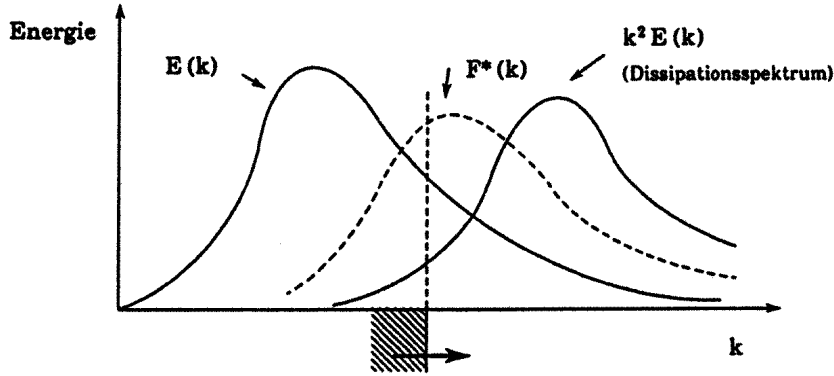


Abbildung 6.5: Dreidimensionales Spektrum mit $F^*(k)$

Die Funktionen F bzw. F^* beschreiben die Größe der Energieübertragung zwischen den Wirbeln verschiedener Wellenzahlen als Funktion der Wellenzahl in Richtung größerer Wellenzahlen k . Die Wellenzahl, bei der die Spektraldichte $E(k)$ ihr Maximum besitzt bezeichnet man als k_e , jene Wellenzahl wo das Dissipationsspektrum $k^2 \cdot E(k)$ maximal wird nennt man k_d .

Der Bereich des Spektrums, der von universeller Bedeutung ist, ist der Bereich $k > k_e$: Wirbel, deren Wellenzahl $k > k_e$ ist, erfahren eine geringere Einwirkung durch die der Strömung im langwelligen Bereich aufgeprägte Deformation, d.h., sie werden unabhängig von den Randbedingungen der Strömung und gleichen sich durch die richtungsfreien Druckkräfte (Fluktuationen) weitgehend aus. Diese Überlegung brachte *Kolmogoroff* im Jahre 1941 zu seiner Hypothese der Lokalisotropie, auf die wir später näher eingehen werden. In diesem Zusammenhang soll zunächst nur auf die Universalität und damit auf die besondere Bedeutung der hochfrequenten Spektralanteile hingewiesen werden.

Die Produktion von Turbulenzenergie durch turbulente Schubspannungen muss per Definition anisotrop sein. Der entsprechende Wellenzahlbereich liegt bei $0 < k < k_e$.

6.3.2 Das Spektrum bei kleinen Re_T

Betrachtet man zunächst den Extremfall, dass die gesamte Strömung durch die Zähigkeit bestimmt wird und kein Transport von Energie längs der k -Achse stattfindet $F(k, t) = 0$, so gelangt man mit Gl.(6.26) zu der Beziehung:

$$\frac{\partial}{\partial t} E(k, t) = -2\nu k^2 E(k, t) \quad (6.29)$$

Unter Berücksichtigung der Zeitabhängigkeit lautet deren allgemeine Lösung:

$$E(k, t) = E(k, t_0) \exp[-2\nu k^2 (t - t_0)] \quad (6.30)$$

Die physikalische Interpretation dieses Ausdrucks besagt, dass die kleineren Wirbel schneller dissipieren als die größeren. Dieser Gleichung zufolge, die im Übrigen nicht nur für isotrope, sondern auch allgemeiner für homogene Turbulenz gilt, wird die Energie einer bestimmten Wellenzahl exponentiell mit der Zeit dissipiert; und zwar je größer k ist, umso rascher klingt $E(k)$ mit t ab. nach hinreichend langer Zeit also (im sog. "Endstadium" oder "final stage of decay") wird die Form des Spektrums fast ausschließlich durch die Energie bei kleinen Wellenzahlen bestimmt.

Transformiert man die Gl.(6.30) zurück in eine Korrelationsbeziehung, so erhält man:

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_{ii}(r, t) = 2\nu \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial Q_{ii}(r, t)}{\partial r} \right] \quad (6.31)$$

Wegen der Isotropiebedingung müssen alle Terme mit den Indizes ij und $i \neq j$ gleich Null sein, deshalb bleiben nur die Glieder mit den Indizes ii übrig. Die allgemeine Lösung der Gl.(6.31) lautet:

$$Q_{ii}(r, t) = \text{const. } t^{-5/2} \left(3 - \frac{r^2}{4\nu t} \right) \exp \left[-\frac{r^2}{8\nu t} \right] \quad (6.32)$$

Definitionsgemäß ist

$$Q_{ii} = \overline{u'^2} (f + 2g) \quad (6.33)$$

und daraus folgt:

$$Q_{ii}(t, r=0) = 3\overline{u'^2} \quad (6.34)$$

Die Zeitabhängigkeit von $\overline{u'^2}$ wird dann beschrieben durch

$$\overline{u'^2} = \text{const. } t^{-5/2}, \quad (6.35)$$

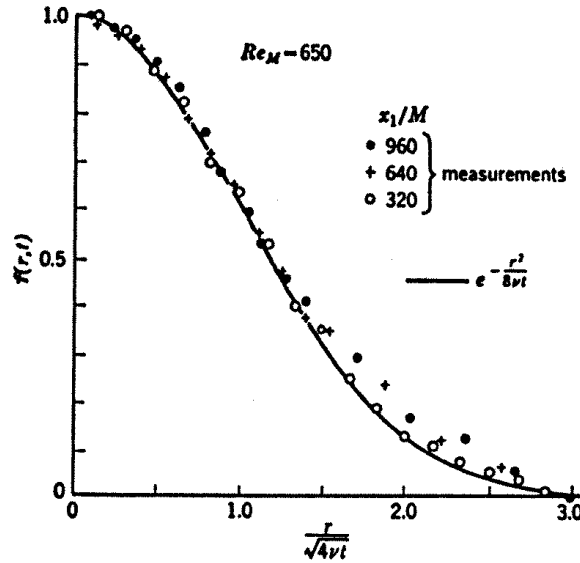
Die Korrelationen ergeben sich zu

$$Q_{ii}(r, t) = \overline{u'^2} \left(3 - \frac{r^2}{4\nu t} \right) \exp \left[-\frac{r^2}{8\nu t} \right] \quad (6.36)$$

$$f(r, t) = \exp \left[-\frac{r^2}{8\nu t} \right] = \exp \left[-\frac{\pi}{4} \left(\frac{r}{\Lambda} \right)^2 \right] \quad (6.37)$$

$$\rightarrow \quad \Lambda = \sqrt{2\nu t} \quad (6.38)$$

Diese einfachen Zusammenhänge sind im Endstadium abklingender isotroper Turbulenz universell. Abb. 6.6 zeigt Messergebnisse von *Batchelor und Townsend (1948)*, die die gezeigten Erkenntnisse sehr gut bestätigen.



Longitudinal-velocity-correlation coefficient $f(r,t)$ in the final period of decay. (Batchelor, G. K., and A. A. Townsend, reprinted from *Proc. Roy. Soc. London*, vol. 194A, p. 540, 1948, by permission of The Royal Society.)

Abbildung 6.6: Gemessene Längskorrelationen $f(r)$ im “final stage of decay” aus Batchelor und Townsend (1948)

Aufgrund der analytisch zu findenden, relativ einfachen und universell gültigen Zusammenhänge abklingender isotroper Turbulenz im Endstadium sind dies beliebte Testfälle, etwa um hochwertige numerische Rechenverfahren (z.B. direkte numerische Simulationen) zu validieren.

Schreibt man für die Längskorrelation:

$$f(r, t) = \exp \left[-\frac{\pi}{4} \left(\frac{r}{\Lambda_f(t)} \right)^2 \right], \quad (6.39)$$

dann folgt daraus für die Querkorrelation:

$$g(r, t) = \left(1 - \frac{\pi}{4} \left(\frac{r}{\Lambda_f(t)} \right)^2 \right) \exp \left[-\frac{\pi}{4} \left(\frac{r}{\Lambda_f(t)} \right)^2 \right] \quad (6.40)$$

$$\lambda_f = \sqrt{\frac{4}{\pi}} \Lambda_f \quad \rightarrow \quad \lambda_f > \Lambda_f \quad (6.41)$$

Diese Ungleichung besagt, dass die Dissipation dominiert, der Taylor’sche longitudinale Mikro-Maßstab λ_f wird größer (!) als der longitudinale Makro-Maßstab Λ_f .

Für die Spektralverteilung ergibt sich folgende Gleichung:

$$E(k) = \frac{4}{\pi^3} \overline{u'^2} \Lambda_f (k \Lambda_f)^4 \exp \left[-\frac{(k \Lambda_f)^2}{\pi} \right], \quad (6.42)$$

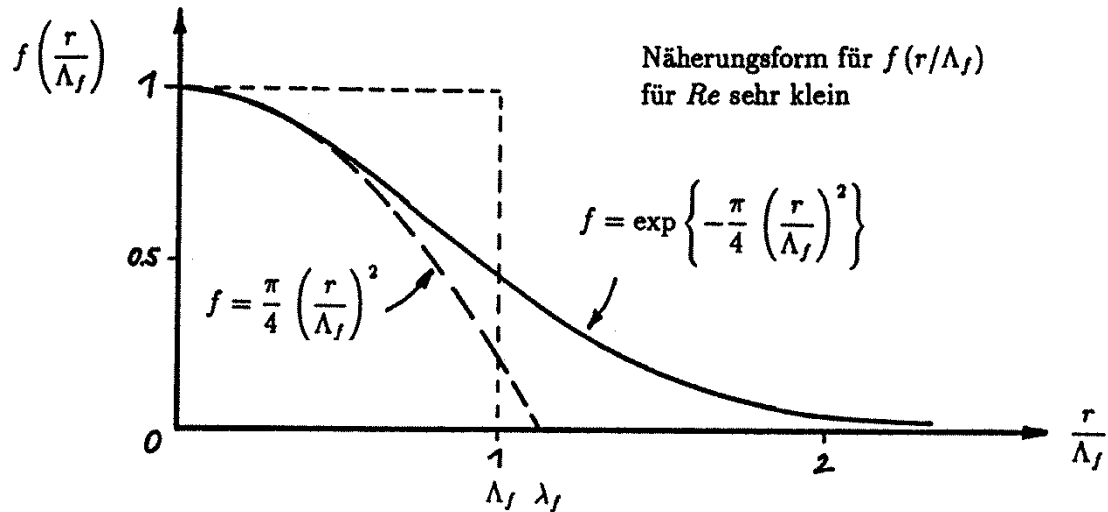
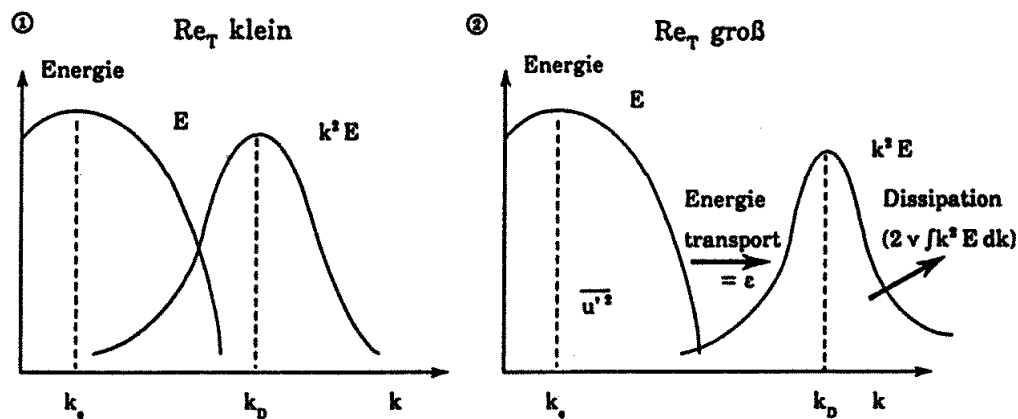


Abbildung 6.7: Näherungsform für die Längskorrelation

6.3.3 Das Spektrum bei großen Re_T

In realen Strömungen ist der Trägheitseinfluss meist nicht mehr vernachlässigbar; die Re -Zahl ist relativ groß. Je größer die Re -Zahl wird, um so größer wird die Wellenzahl, bei der das Dissipationsmaximum auftritt. Qualitativ erhält man für die Verteilung der Energien das in Abbildung 6.8 dargestellte Bild.

Abbildung 6.8: Energieverteilung in Abhängigkeit von der Re -Zahl

Wird angenommen, dass $k_D \gg k_e$ ist, dann kann ebenso angenommen werden, dass der Energietransport in Richtung steigender k -Werte durch einen Trägheitsmechanismus geschieht. Gleichzeitig verlieren die Wirbel einen Teil ihrer Energie durch Dissipation. Man geht ferner von der Voraussetzung aus, dass dieser Vorgang unabhängig von den äußeren Strömungsbedingungen ist, da die Strukturen mit $k > k_e$ nicht auf

die langwellige, großskalige Bewegung reagieren. Wenn dem so ist, so nimmt die Turbulenz im Dissipationsspektrum einen Gleichgewichtszustand ein, der durch den Energietransport entlang der k -Achse einerseits (eben die Funktion $F(k)$) und die Dissipation andererseits eindeutig bestimmt ist. Man findet demnach nur zwei „innere“ Parameter, die den Charakter der Turbulenz in diesem Bereich bestimmen können. Diese beiden Parameter ergeben sich aus der Definition des Dissipationsspektrums:

$$\varepsilon(t) = 2\nu \int_0^{\infty} k^2 E(k, t) dk \quad (6.43)$$

Demnach sind $\varepsilon(t)$ und ν die gesuchten Parameter, die die Größe und den Verlauf von $E(k, t)$ bestimmen. Davon ausgehend hat *Kolmogoroff (1941)* die nach ihm benannten Hypothesen formuliert, die zunächst für isotrope, darüber hinaus aber auch für nichtisotrope Strömungsformen weitgehend experimentell bestätigt werden konnten und die aufgrund ihrer großen Bedeutung im folgenden Unterkapitel zusammengefasst werden.

6.4 Die Kolmogoroff'schen Hypothesen

6.4.1 Die Lokalisotropie-Hypothese

Bei hinreichend großen Re-Zahlen existiert ein Frequenzbereich bei hohen Wellenzahlen k , in dem die Turbulenz im statistischen Gleichgewicht ist und ausschließlich durch die Parameter ε und ν bestimmt wird. Dieser Gleichgewichtszustand ist universell!

Im Bereich hoher Frequenzen sind Scherkräfte in der Strömung wenig von Bedeutung, weil die zugehörigen Strukturen sehr klein und somit - selbst in einem Scherfeld - keinen signifikanten Geschwindigkeitsunterschieden ausgesetzt sind. Jede Form einer turbulenten Strömung ist also in ihren kleinen Strukturen lokal isotrop. Hieraus muss gefolgert werden, dass die Turbulenzproduktion (bedingt durch Scherkräfte) bei kleinen Wellenzahlen stattfindet, Dissipation jedoch findet sich bei großen Wellenzahlen. Ergo bildet jede turbulente Strömung einen Bereich aus, in dem die Produktion von Turbulenz bei kleinen Wellenzahlen, der Zerfallsprozess von den großen zu den kleinen Wirbeln (der Energietransport hin zu großen Wellenzahlen) mit dem Abbau der Energie per Dissipation bei hohen Wellenzahlen im Gleichgewicht steht. Da jede Strömung in ihren kleinen Strukturen (hohen Wellenzahlen) isotrop ist, die Dissipation also immer auf isotroper Turbulenz beruht, ist dieser Zustand universell und gemäß der in dem vorangegangenen Unterkapitel gezeigten Überlegungen nur abhängig von ε und ν . Es lassen sich zwei relevante Parameter bilden:

Ein Längenmaßstab

$$l_k = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4}, \quad (6.44)$$

eine charakteristische Geschwindigkeit

$$v = (\nu \varepsilon)^{1/4}, \quad (6.45)$$

und davon abgeleitet eine charakteristische Wellenzahl:

$$k_d = \frac{1}{l_k} \approx k_D \quad (6.46)$$

Die durch Gl.(6.44) definierte Länge l_k nennt man **Kolmogoroff-Länge**. Sie ist die kleinste charakteristische Strukturlänge der Turbulenz und im Allgemeinen eine Größenordnung kleiner als der Taylor-Mikromaßstab. In vielen Bereichen der Turbulenzforschung wird die Kolmogoroff-Länge als Vergleichsmaßstab herangezogen. Beispielsweise kann man bei einer direkten numerischen Simulation davon ausgehen alle relevanten Turbulenzphänomene aufgelöst zu haben, wenn die Zellbreite des Gitters kleiner als die Kolmogoroff-Länge ist.

6.4.2 Das Kolmogoroffsche 5/3-Gesetz

Für $Re_T \rightarrow \infty$ existiert für Wellenzahlen im Bereich von $k_e < k < k_d$ ein „Zwischenbereich“ (Inertial subrange), in dem das Energiespektrum nur eine Funktion von k ist.

Bezüglich der notwendigen Größe der Re-Zahl lassen sich nur Ungleichungen und Abschätzungen angeben. Die experimentelle Erfahrung lehrt, dass für die Existenz eines „Zwischenbereiches“ etwa $Re_T > 100$ gelten muss (siehe z.B. *Bradshaw (1967)*).

Für den Inertialbereich lässt sich mit Hilfe einer dimensionsanalytischen Betrachtung (in Anlehnung an *Kolmogoroff*) eine einfache, aber sehr leistungsfähige und experimentell überzeugend bestätigte Beziehung für $E(k)$ finden:

Die am Energietransport (spektral) beteiligten Größen sind:

die Spektraldichte der Wellenzahl	$E(k)$	$[m^3 s^{-2}]$
die Dissipationsrate (die der transportierten Gesamtenergie entspricht)	ε	$[m^2 s^{-3}]$
die kinematische Zähigkeit	ν	$[m^2 s^{-1}]$
die Wellenzahl	k	$[m^{-1}]$

Mit Hilfe des Ansatzes

$$E(k) \sim \varepsilon^a \nu^b k^c \quad (6.47)$$

erhält man durch eine Dimensionsanalyse eine Beziehung der Form:

$$E = C \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (6.48)$$

Diese Verteilung von $E(k)$ im inertialen Zwischenbereich bezeichnet man auch als das Kolmogoroff-Spektrum.

6.5 Das Energiespektrum isotroper Turbulenz

Durch weitere Überlegungen — auf die hier nicht im Einzelnen eingegangen wird — findet man, dass im Bereich der energietragenden Wirbel ($k \approx k_e$) gelten muss:

$$\frac{\varepsilon t}{\nu} = \text{const.} \quad (6.49)$$

Im Produktionsbereich bei $k > k_e$ ist $E \sim k^{-1}$ (siehe *Chen*).

Ferner kann gefolgert werden, dass für $k < k_e$

$$E(k, t) = f(\varepsilon, t) \quad (6.50)$$

und für $k \rightarrow 0$

$$E(k, t) \sim k^4 \quad (6.51)$$

sein muss.

Der allgemeine Funktionsverlauf des Energiespektrums lässt sich mit diesen Kenntnissen für isotrope Turbulenz abschnittsweise angeben (siehe Abbildung auf der nächsten Seite).

Es sei erneut bemerkt, dass der sog. „universelle Gleichgewichtsbereich“ gemäß der Lokalisotropie-Hypothese für turbulente Strömungen aller Art, also auch für Scherströmungen relevant ist. Demgegenüber gelten die Spektralverteilungen bei kleinen Wellenzahlen tatsächlich nur für isotrope Turbulenz.

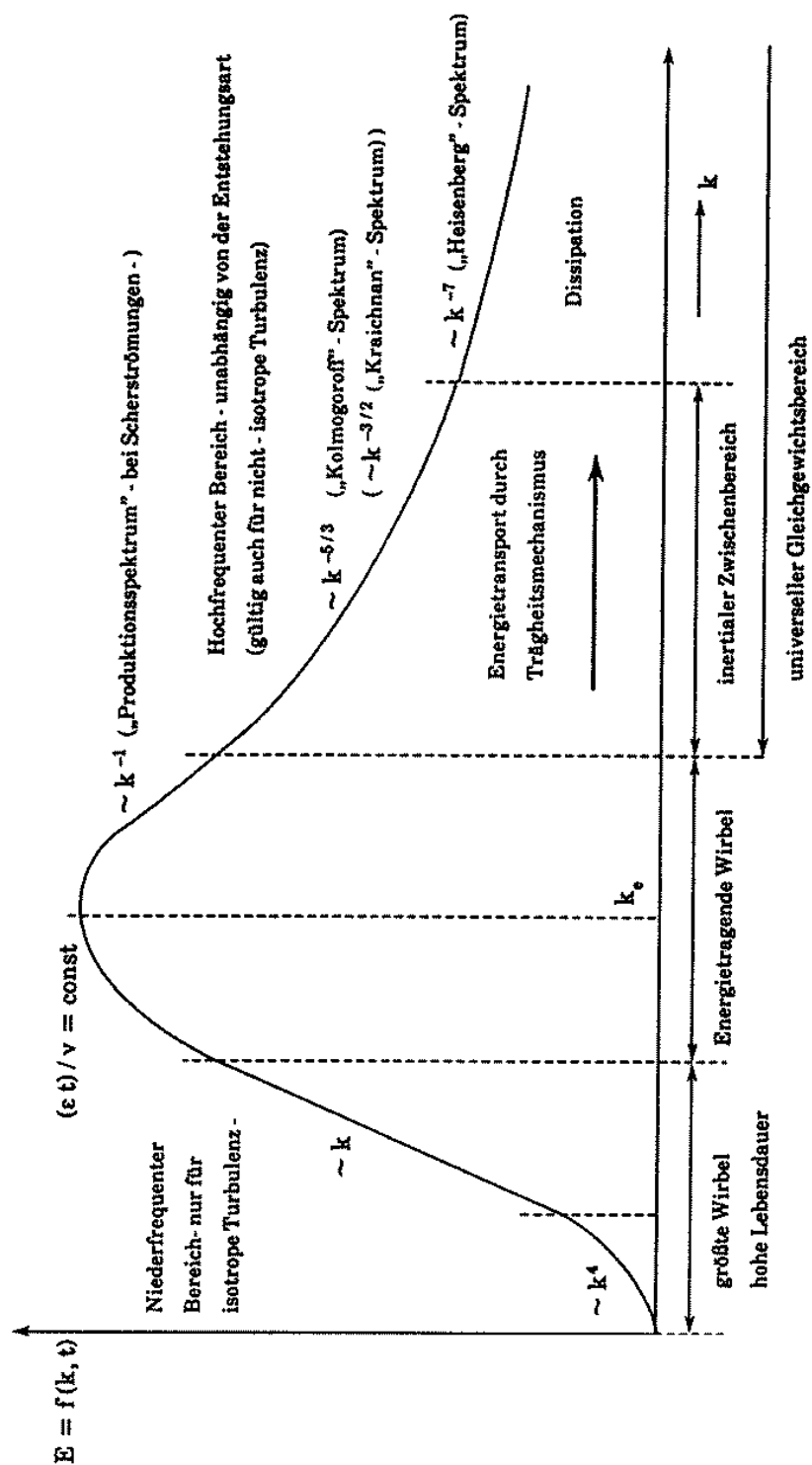


Abbildung 6.9: Spektrale Energieverteilung bei isotroper Turbulenz

Die bisherigen Betrachtungen gingen von der Voraussetzung aus, dass keine Produktion stattfindet, also der Gradient der mittleren Geschwindigkeit gleich Null ist. Da die Dissipation stets ungleich Null ist, ist der gesamte Vorgang zeitabhängig, er stellt einen Abklingvorgang dar:

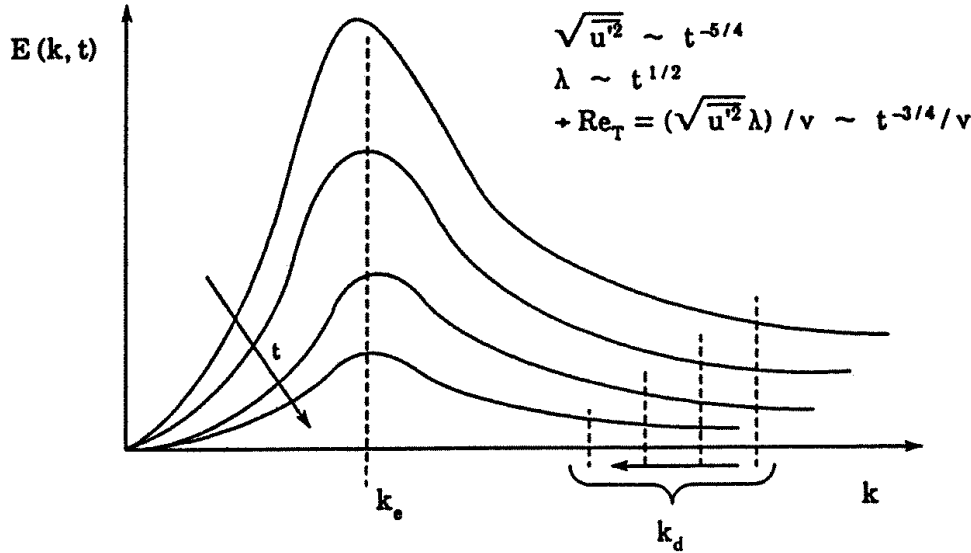


Abbildung 6.10: Zeitliche Abhängigkeit der Spektralfunktion

Mit wachsender Zeit wird Re_T kleiner. Der Endzustand der Spektralverteilung ist durch die in Abschnitt 6.3.2) dargestellten Zusammenhänge gegeben (Final stage of decay). Für den Fall, dass $E \neq E(t)$ und $\partial E / \partial t = 0$ ist, muss die Produktion der Turbulenzenergie ungleich Null sein (Scherströmungen).

Neben diesen dimensionsanalytischen Betrachtungen sind von verschiedenen Autoren echte physikalische Ansätze für die Funktion $F(k, t)$ gemacht worden, die zum Teil mit den oben gefundenen Verläufen übereinstimmen und experimentell bestätigt werden konnten. Hier sei der Vollständigkeit halber auf Originalarbeiten von *Heisenberg (1948)*, *Kraichnan (1959)* und entsprechend weiterführende Werke verwiesen.

Kapitel 7

Scherströmungen

Wie im vorigen Kapitel gezeigt wurde, ist die theoretische Modellierung der isotropen oder homogenen Strömungen („Trivialströmungen“) auf einem relativ hohen Stand. Diese Theorien dürfen trotz mitunter eingeschränkter praktischer Bedeutung nicht als bedeutungslos angesehen werden, denn

1. haben sie die zur Beschreibung und Analyse turbulenter Strömungen allgemein anwendbaren statistischen Begriffe und Größen erarbeitet und
2. lassen sich aus dem Verhalten der Trivialströmungen wertvolle Schlüsse allgemeiner Art, also auch für Scherströmungen, ziehen.

Nun sollen im Folgenden die nicht trivialen Strömungen behandelt werden. Es ist vielfach versucht worden, auch für diese Strömungsformen zusammenfassende statistische Theorien aufzustellen (vgl. *Burgers (1939)* und *Rotta (1951)*), jedoch erwiesen sich diese i.d.R. als zu kompliziert und unhandlich und sind kaum geeignet um für allgemeine Strömungen sichere Voraussagen zu treffen. Man ist daher in den meisten Fällen auf Klassifizierungen und Ähnlichkeiten beschränkt.

7.1 Typen von Scherströmungen

Gleiten zwei parallele Strömungen unterschiedlicher Geschwindigkeit (\bar{u}_1, \bar{u}_2) und unterschiedlichen Impulsstroms aneinander vorbei, so entsteht durch den turbulenten Queraustausch an der Berührungsfläche turbulente Schubspannung. Dadurch wird der Geschwindigkeitssprung zwischen den beiden Schichten „geglättet“. Bei einer genaueren Betrachtung erhält man den in der Abb. (7.1) skizzierten Bewegungsablauf.

Der Ort des turbulenten Zerfalls ist eine Funktion der Re-Zahl:

$$Re = \frac{x \Delta u_{1,2}}{\nu} \quad (7.1)$$

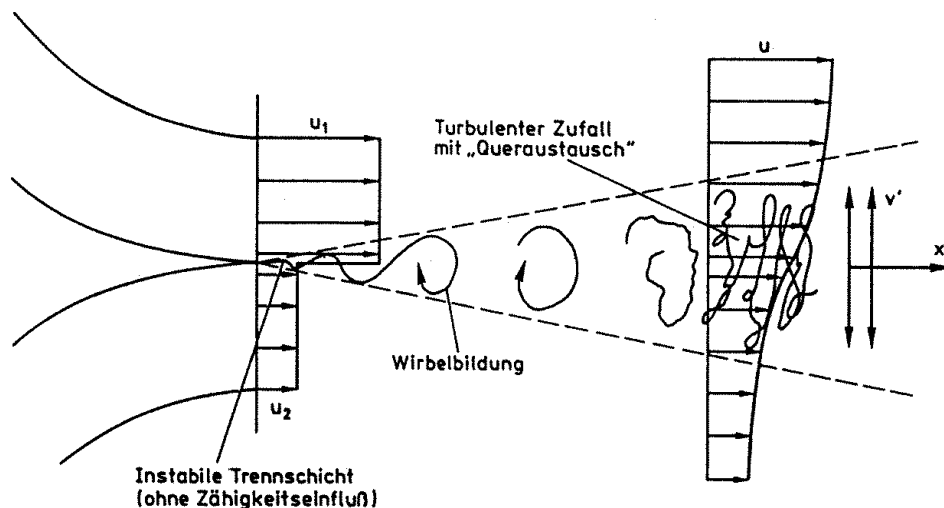


Abbildung 7.1: Scherung zweier Strömungen

Weitere Einflußgrößen sind z.B. der Turbulenzgrad der Teilströme, ν und die Dicke der Grenzschicht. Das turbulente Gleichgewicht stellt sich erst nach einer größeren Lauflänge x ein.

Der häufigste Sonderfall dieser Strömungsform ist gegeben, wenn $\bar{u}_2 = 0$ ist. Das ist z.B. überall dort der Fall, wo eine Parallelströmung in ruhende Umgebung austritt (Freistrah, Nachlauf hinter Abreißkörper):

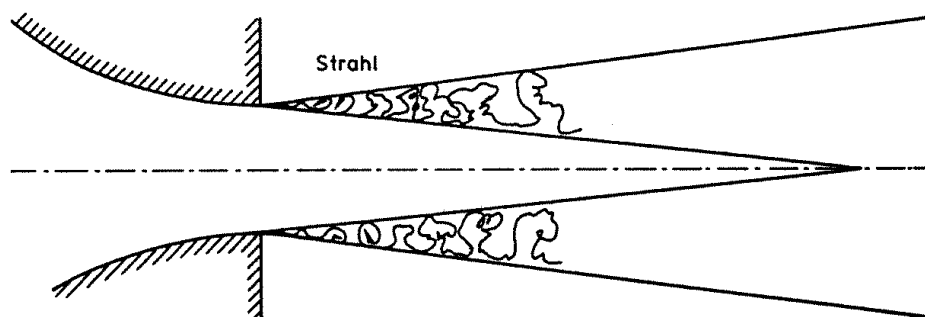


Abbildung 7.2: Strömungsaustritt in ruhende Umgebung

In vielen Fällen lassen sich mehr oder weniger komplexe Strömungen durch einfache sog. „Grundformen“ ersetzen bzw. darstellen und das Problem dadurch einfacher gestalten. Man unterscheidet:

1. Einfache Grund-Strömungsformen mit voll ausgebildeter Turbulenzstruktur, die durch die Grenzschichtgleichungen beschrieben werden können, und
2. Zusammengesetzte, gestörte oder nicht voll ausgebildete Strömungen. I.allg. solche, für die die Grenzschichtgleichungen oder die üblichen Turbulenzansätze nicht gelten.

Für die zweite Kategorie sind wiederum kaum Aussagen möglich (vgl. *Abramovich und Schindel (1963)*, *Rotta (1951)*), im Folgenden soll daher nur die erste Kategorie diskutiert werden, wobei eine weitere Unterscheidung zwischen „freien Strömungen“ und „Wandströmungen“ vorgenommen werden muss.

Zu den **freien Strömungen** gehören:

- Der axiale oder ko-axiale Freistrahls
(zweidimensional, rotationssymmetrisch oder asymmetrisch)
- Der radiale Freistrahls (Anemostat)
Die allgemeine Form ist der Strahl in bewegter Umgebung. Der Strahl in ruhender Umgebung ist ein einfacherer Spezialfall.
- Der Nachlauf
(zweidimensional, rotationssymmetrisch oder asymmetrisch).

Freistrahls und Nachlauf sind — in abstrahierter Betrachtungsweise — von der Konfiguration her identisch. Sie entstehen durch die Überlagerung eines parallelen Impulsstroms (der Außenströmung) mit einer Impulsquelle (Linien- oder Punktquelle), wobei im Fall der Nachlaufströmung die Ergiebigkeit der Quelle negativ ist.

In gewisser Weise ist die freie Scherschicht eine Kombination von Strahl- und Nachlaufströmung. Sie besitzt ein strahlähnliches Verhalten im Bereich niedriger Geschwindigkeit und ein nachlaufähnliches Verhalten auf der Hochgeschwindigkeitsseite, unterscheidet sich aber durch konstante Randbedingungen. (Die Scherschicht ist keine abklingende Strömung.)

In Abb. (7.3) sind unterschiedliche Konfigurationen der Überlagerung dargestellt.

Zu den **Wandströmungen** zählen (siehe Abb. (7.4)):

- Wandgrenzschicht (einseitige Wandbindung)
- Wandstrahl (eine „freie“ Seite)
- Wandnachlauf
- Rohrströmung bzw. Kanalströmung (allseitige Wandbindung)
- Couette-Strömung

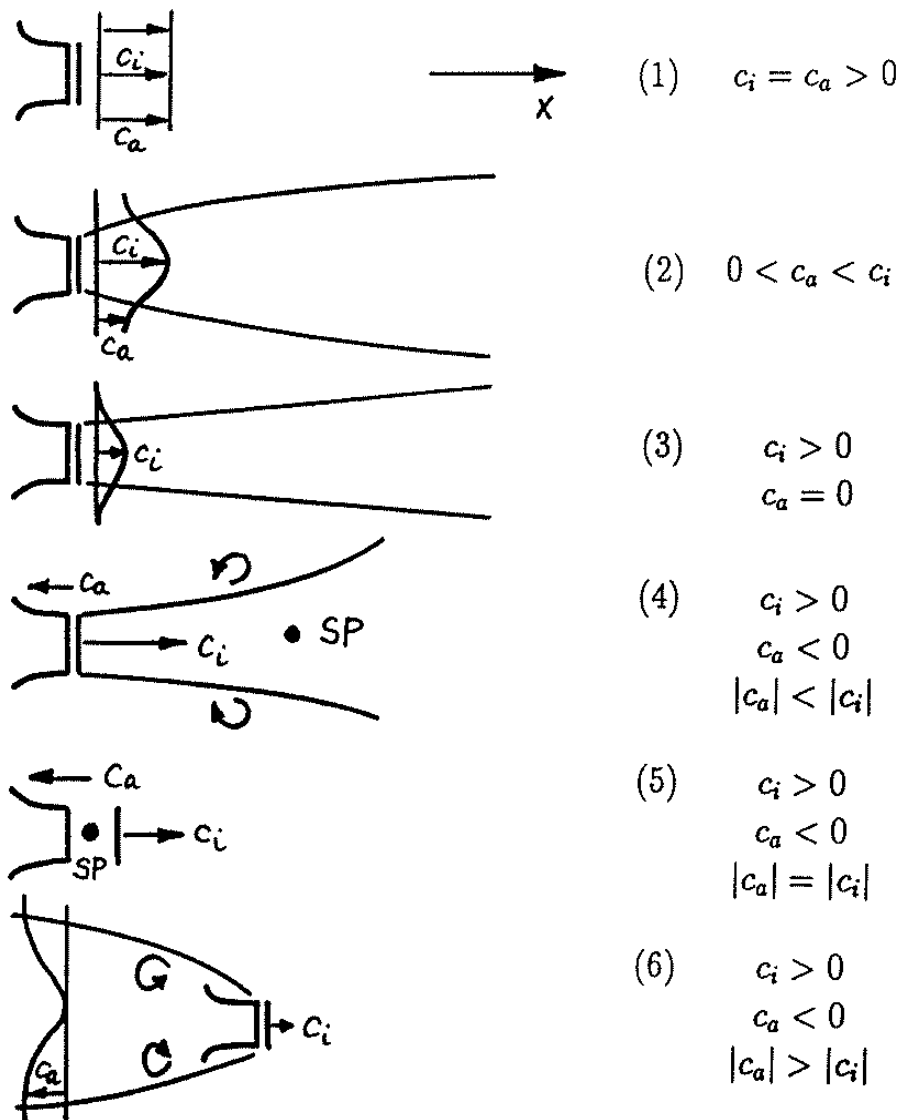


Abbildung 7.3: Familie der Impulsströme

Legende:

c_i Innenimpuls
 c_a Außenimpuls
 SP Staupunkt

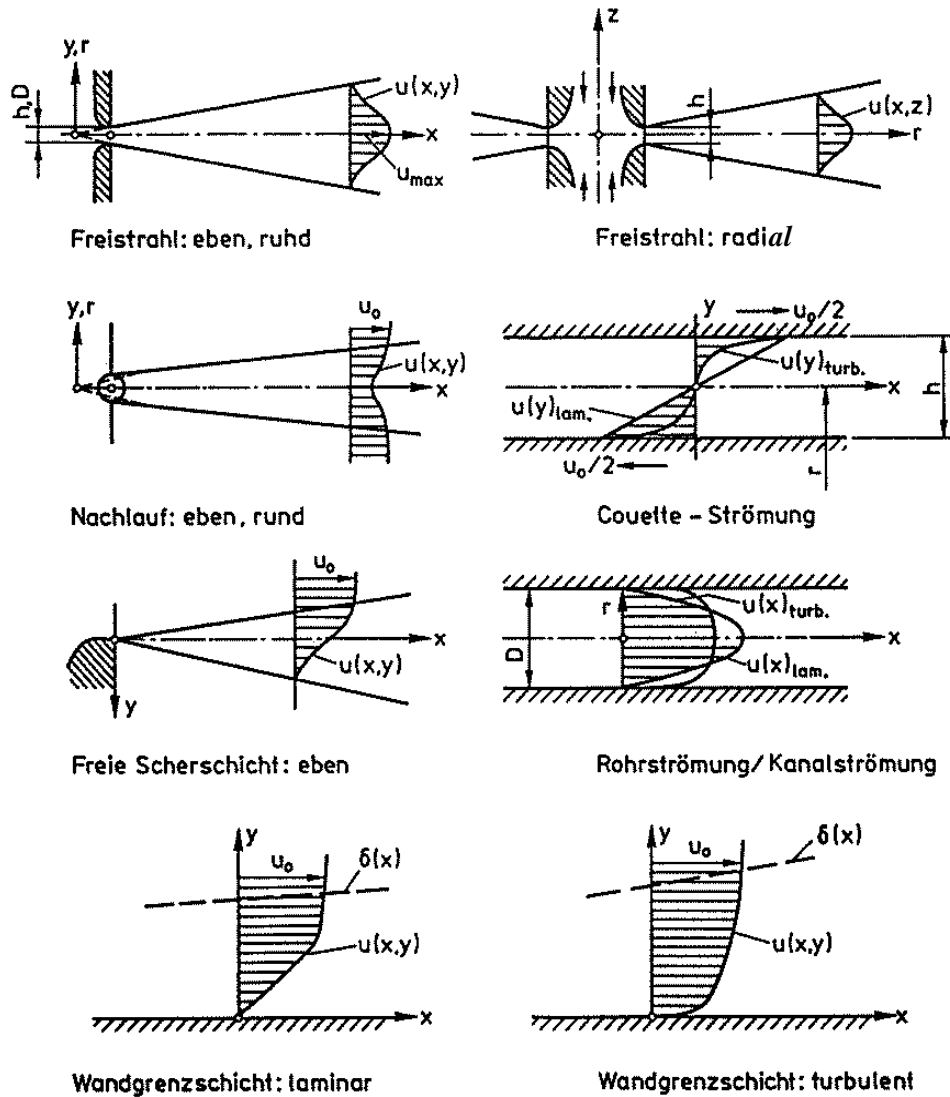


Abbildung 7.4: Formen der Wandströmung

7.2 Struktur der Scherströmungen

Zur Struktur der Scherströmungen kann man folgende allgemeine Aussagen treffen:

1. Die Ausbreitung des Turbulenzbereiches quer zur Strömungsrichtung ist ein relativ langsamer Prozess (Grenzschichtgleichungen).
2. Der Bereich der turbulenten Strömung ist von der nichtturbulenten Strömung (Potenzialströmung) durch eine stochastisch bewegte, geschlossene Grenzfläche getrennt. Dadurch erhält die Turbulenz im Außenbereich einen intermittierenden Charakter – der Turbulenzgrad macht an der Trennfläche einen Sprung.

3. Die Nähe einer Wand wirkt sich auf die Turbulenzstruktur im Sinne einer Disziplinierung aus. Das bedeutet, dass Wirbel, die sich in Wandnähe befinden, in Strömungsrichtung ausgerichtet werden.
4. Viele Eigenschaften, so z.B. Turbulenzintensität, Dissipation etc., sind relativ homogen über den Hauptbereich der Strömung verteilt, insbesondere, wenn die Intermittenz der Turbulenz berücksichtigt wird. Diese Eigenschaften nehmen zu einer freien Abgrenzung hin ab, während sie in Wandnähe höhere Werte annehmen, um dann abrupt auf Null abzufallen.
5. Je höher die turbulente Reynolds-Zahl der Strömung ist, um so universeller entwickeln sich die hochfrequenten Schwankungsanteile (Lokalisotropie).
6. Es existieren kohärente Strukturen im Strömungsfeld.

Als die bemerkenswertesten Struktureigenschaften seien hervorgehoben die

- **Grenzflächenstruktur** (Intermittenz) der freien Berandungen,
- die Tendenz zur **Isotropie der höheren Frequenzanteile** und die
- **Kohärenz**.

Diese drei wesentlichen Eigenarten werden in den folgenden Unterkapiteln kurz besprochen.

7.2.1 Grenzflächenstruktur / Intermittenz

Unter **Intermittenz** versteht man das alternierende Auftreten von turbulenter und nicht-turbulenter bzw. laminarer Bewegung einer Strömung an einem Ort im Strömungsfeld. Der dafür definierte Intermittenzfaktor Υ ist das Verhältnis aus der Summe der Zeiten, in denen die Strömung turbulent ist, zur Gesamtzeit.

$$\Upsilon = \frac{\sum \overline{t_{\text{turbulent}}}}{\sum t_{\text{gesamt}}} \quad (7.2)$$

Er stellt damit eine Wahrscheinlichkeitsgröße für das Vorhandensein von turbulenter Strömung an dieser Stelle dar. Intermittenz kann in zwei unterschiedlichen Fällen beobachtet werden,

1. im laminar-turbulenten Übergangsgebiet einer Grenzschichtströmung (Spotbildung), und
2. im Randgebiet turbulenter Strömungen.

An dieser Stelle soll auf die Intermittenz im Randgebiet turbulenter Strömungen näher eingegangen werden.

Beobachtet man eine turbulente Grenzschicht, in die Rauch eingeleitet wurde, so findet man die Abgrenzung des Rauches zur freien Außenströmung als eine unregelmäßig geformte, aber scharfe Kontur. Das gleiche gilt für die Turbulenz. Die in einer Scherströmung relativ starke Turbulenz geht nicht kontinuierlich in die turbulenzarme Potenzialströmung über, sondern zeigt eine diskontinuierliche Abgrenzung in Form einer turbulenten Front, die durch großflächige Wirbel deformiert ist. Der Übergang vollzieht sich dabei über eine sog. „laminare Oberschicht“ (laminar superlayer).

Offenbar stellt die Verteilung der Intermittenz in y -Richtung, d.h. senkrecht zur Strömungsrichtung, eine statistische Größe dar. Man verwendet die Funktion

$$\Upsilon = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_y^{\delta(\infty)} \exp\left(-\frac{(y-y_{0.5})^2}{2\sigma^2}\right) dy \quad (7.3)$$

zur Beschreibung. Durch Angabe der in dieser Funktion auftretenden Parameter $y_{0.5}$ und σ ist der Verlauf der Intermittenz in den wesentlichen Dimensionen angegeben. Die Größe $y_{0.5}$ entspricht dem Wert y , bei dem $\Upsilon = 0.5$ ist, d.h. sie ist das statistische Maß der mittleren Lage der Turbulenzfront.

Die Streuung σ ist ein Maß für die Breite des Intermittenzbereiches und ergibt sich aus Gl.(7.3) zu:

$$\begin{aligned} \sigma &= \left[- \int_{-\infty}^{\infty} (y - y_{0.5})^2 \frac{d\Upsilon}{dy} dy \right]^{1/2} \\ &= \left[\int_0^1 (y - y_{0.5})^2 d\Upsilon \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (7.4)$$

Eine dimensionslose Auftragung einer großen Zahl gemessener Intermittenzkurven zeigt Abbildung 7.5. Die Übereinstimmung einer Vielzahl an Messergebnissen mit dem exponentiellen Verteilungsgesetz gemäß (Gl.(7.3)) ist gut.

Eine beliebige Strömungseigenschaft lässt sich so aus dem Verhalten dieser Eigenschaft im turbulenten Gebiet und dem Verhalten im Gebiet der Potenzialströmung zusammensetzen (der Index T bedeutet Turbulenz, der Index P Potenzialströmung). Die mittlere Geschwindigkeit im Randbereich einer turbulenten Strömung als Funktion des Intermittenzfaktors Υ ist:

$$\bar{u}(y) = \Upsilon \bar{u}_T + (1 - \Upsilon) \bar{u}_P \quad (7.5)$$

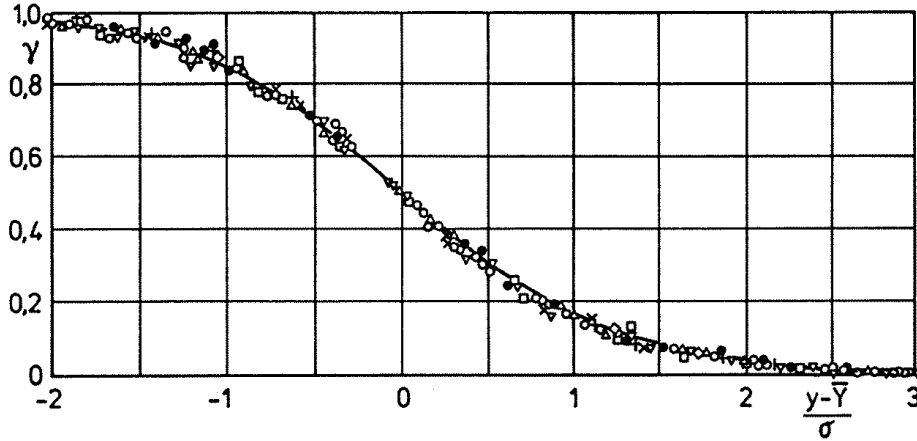


Abbildung 7.5: Gemessene Intermittenzfunktionen

Misst man die Geschwindigkeit mit einem Pitotrohr, so erhält man allerdings den folgenden Mittelwert, der vom wahren Mittelwert abweicht¹:

$$\bar{u}(y) = \sqrt{\Upsilon \bar{u}_T^2 + (1 - \Upsilon) \bar{u}_P^2} \quad (7.6)$$

Für die Schubspannungen gilt:

$$\overline{u'v'} = \Upsilon \overline{(u'v')}_T + (1 - \Upsilon) \overline{(u'v')}_P \quad (7.7)$$

Die Mittelwertsbeziehung für Größen, die bereits einen quadratischen Mittelwert darstellen (wie z.B. die Turbulenzintensität), lautet schließlich:

$$\overline{u'^2}(y) = \Upsilon \overline{u'^2}_T + (1 - \Upsilon) \overline{u'^2}_P \quad (7.8)$$

Bei der Anwendung dieser Beziehung setzt man oft vereinfachend voraus, dass die Potenzialströmung stets bis zum Erreichen der turbulenten Front konstante Werte aufweist.

Eine echte messtechnische Trennung der Strömungseigenschaften im Turbulenz- und Potenzialbereich zeigt u.a., dass die bei der Anwendung der obigen Näherungsbeziehungen verwendeten Annahmen (z.B. $u_P'^2 = 0$ usw.) nur eingeschränkt gelten. Tatsächlich ist auch ausserhalb der Trennfläche, d.h. nahe der Trennfläche im Potenzialbereich, bereits eine relativ starke Fluktuation vorhanden. Diese Fluktuation erzeugt jedoch keine Drehung ω (sie ist rotationsfrei), so dass man eine Beziehung der Art

$$\overline{\omega'^2} = \Upsilon \overline{\omega'^2}_T \quad (7.9)$$

¹Nach Untersuchungen von *Dhawn* und *Narasimha* (1957/58) ist diese Diskrepanz jedoch meist vernachlässigbar klein.

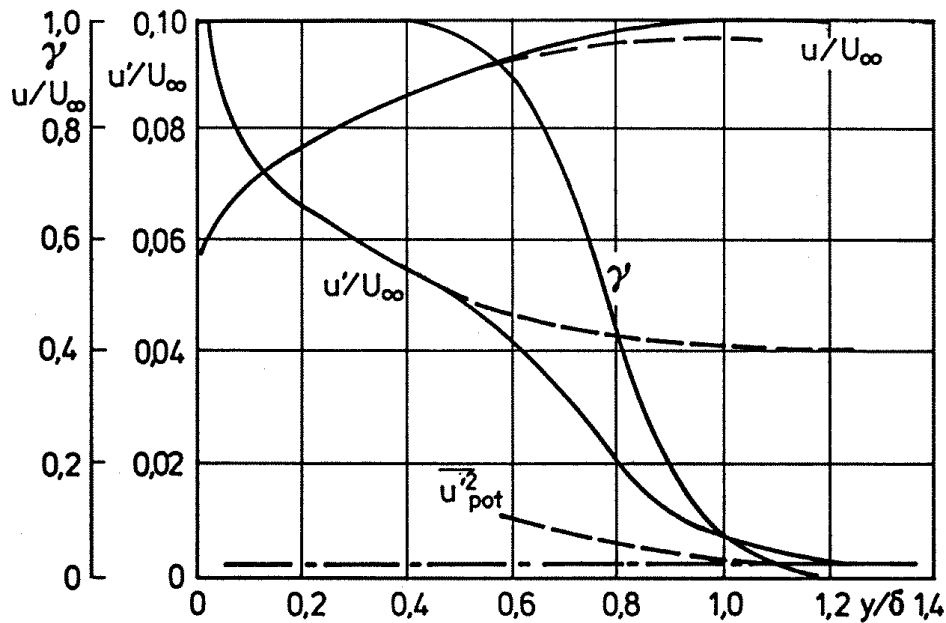


Abbildung 7.6: Geschwindigkeitsverteilung einer turbulenten Wandgrenzschicht (Messung: —, „wahre“ Verteilung: - - - -)

als korrekt ansehen könnte.

Abbildung 7.6 zeigt den Übergang vom turbulenten Bereich einer Wandgrenzschicht in die Potenzialströmung, obige Beziehungen sind zwar aus Ihrer Definition heraus nur näherungsweise gültig, zeigen aber dennoch eine gute Übereinstimmung mit Messungen. Demzufolge lassen sich wesentliche Strömungseigenschaften über die Intermittenzfunktion darstellen, wobei diese mit Gl. 7.3 nur von $y_{0,5}$ und σ abhängt.

Werden Hitzdrahtmessungen und Rauch-Aufnahmen im Außenbereich turbulenter Wandgrenzschichten bei verschiedenen Wandabständen verglichen, so erkennt man, dass Rauch- und Turbulenzverteilung bezüglich Υ vollständig korreliert sind. Dies kann dadurch erklärt werden, dass einerseits aufgrund der hohen Diffusionsrate im Turbulenzbereich eine homogene Verteilung des Rauches bis an die Trennschicht erfolgt, andererseits aber durch diese hindurch kein Rauch tritt.

In unmittelbarem Zusammenhang mit dieser Grenzflächenstruktur steht das Phänomen des sog. „**Entrainment**“, d.h. der Mitnahme und Inkorporation einer bestimmten Menge rotationsfreien Umgebungsfluids durch die turbulente Strömung. Dieses sehr interessante Phänomen ist noch nicht vollständig erklärt, es scheint jedoch sicher, dass die vom Turbulenzbereich aufgenommene Menge eine Funktion der Intermittenzbreite, also des Verhältnisses σ/y ist. Man stellt sich den Vorgang etwa so vor, dass durch die bewegte Trennfläche rotationsfreies Fluid eingerollt und schließlich geschluckt wird. Die Einrollbewegung findet auf verschiedenen Skalen der Trennfläche statt

und ermöglicht so turbulenten Impulsaustausch, mit dem schließlich auch Drehung übertragen wird. Auch eine negative Entrainment-Rate ist im Fall der Relaminisierung einer turbulenten Strömung möglich.

Aufgrund des Entrainments lässt sich z.B. ein ebener turbulenter Strahl bezüglich seiner Wirkung auf seine Umgebung als Liniensenke konstanter negativer Ergiebigkeit längs x simulieren. Von *Head (1958)* stammt eine Berechnungsmethode zur Entwicklung turbulenter Grenzschichten unter Verwendung eines auf dem Entrainment basierenden Ansatzes.

7.2.2 Lokalisotropie

Das Phänomen, dass die kleinskaligen, hochfrequenten Anteile einer turbulenten Strömung zur Isotropie neigen, wurde in dem Kapitel über isotrope Turbulenz in Form der Kolmogoroff'schen Hypothesen ab Seite 130 dargestellt. Zur vertiefenden Lektüre sei die zusammenfassende Veröffentlichung von *Bradshaw (1967b)* empfohlen. Herrscht Lokalisotropie, so muss folgende Gleichung erfüllt sein:

$$E = K \varepsilon^{2/3} k_1^{-5/3} \quad \text{mit} \quad K = \text{const.} \quad (7.10)$$

Wie sich Abb. 7.7 entnehmen lässt, ist dies für Reynoldszahlen ab etwa 100 (basierend auf der Taylor'schen Mikrostrukturlänge λ) auch experimentell nachweisbar.

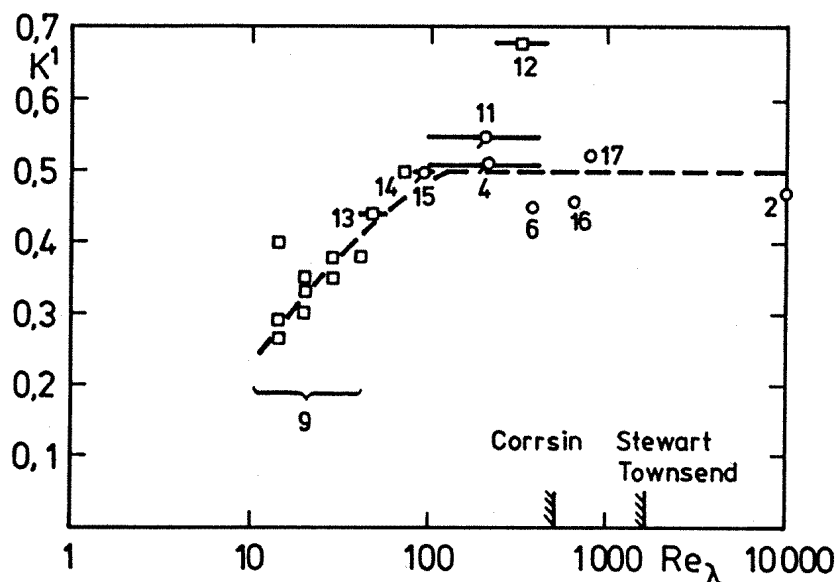


Abbildung 7.7: Messergebnisse zur Lokalisotropie, *Bradshaw (1967b)*

7.2.3 Kohärente Strukturen

Durch das Vorhandensein einer turbulenten Scherschicht wird der Potenzialströmung kinetische Energie entzogen, in turbulente Fluktuationen umgewandelt und durch die Wirkung der Viskosität nach und nach in innere Energie dissipiert. Dieser Prozess läuft kontinuierlich ab. Allerdings ist nicht abschließend geklärt, wie genau der Energietransport stattfindet. Einigkeit besteht insofern, als dass „kohärente Strukturen“ als die wichtigsten Elemente dieses Vorganges gesehen werden. Eine umfassende Sammlung und Erklärung von Phänomenen im Zusammenhang mit kohärenten Strukturen wurde von *Robinson (1991)* veröffentlicht.

Eine kohärente Struktur kann definiert werden als „*ein dreidimensionales Gebiet in der Strömung, in dem wenigstens eine der Strömungsgrößen (Geschwindigkeitskomponente, Dichte, Druck, etc.) eine signifikante Korrelation mit sich selbst oder mit einer weiteren Strömungsvariable in Raum oder Zeit eingeht, die erheblich größer ist als die kleinsten (lokalen) charakteristischen Längen der Strömung*“. Sie ist also großskaliger, geordneter als eine rein stochastische turbulente Fluktuation. Obwohl in numerischen Turbulenzmodellen eigentlich kein Raum für derartige Strukturen ist, so wird die Existenz dennoch durch eine Betrachtung der zugehörigen Gleichungen bewiesen: Das Schließungsproblem der reynoldsgemittelten Navier-Stokes-Gleichungen (vgl. Gl. 3.20, Gl. 3.23) wird durch die turbulente Schubspannung $-\rho \overline{u'v'}$ hervorgerufen. Wären alle turbulenten Schwankungen rein stochastisch, so wäre dieser Term gleich null.

Zu den kohärenten Strukturen werden folgende Erscheinungen gezählt:

Streaks: längliche Strukturen aus schnellerem oder langsamerem Fluid.

Scherschichten: Trennungsschichten zwischen Fluidstrukturen unterschiedlicher Geschwindigkeit.

Wirbel: rotierende Strukturen, die teilweise um eine in Strömungsrichtung gerichtete Achse (Längswirbel) oder um eine spannweite Achse (Querwirbel) drehen.

Hairpin-Strukturen: Strukturen, die i.d.R. um eine geschwungene Achse rotieren und damit einen halboffenen Ring formen.

An dieser Stelle sei kurz bemerkt, dass ein Wirbel (*vortex*) und die Drehung ω (auch Wirbelstärke; *vorticity*) zwei Phänomene sind, die nur schwach miteinander in Verbindung stehen. Die Wirbelstärke ist ein Vektor, dessen Komponenten in jedem Punkt des Strömungsfeldes berechnet werden kann: z.B. $\omega_z = \frac{1}{2}(\partial v / \partial x - \partial u / \partial y)$. Demgegenüber setzt ein Wirbel Kohärenz einiger fundamentaler Größen über einen gewissen räumlichen und zeitlichen Bereich voraus. Zwar wird in einem Wirbel immer eine erhöhte Wirbelstärke vorliegen, ein lokales Maximum der Wirbelstärke ist aber mitnichten ein gutes Kriterium für die Präsenz eines Wirbels, insbesondere nicht in

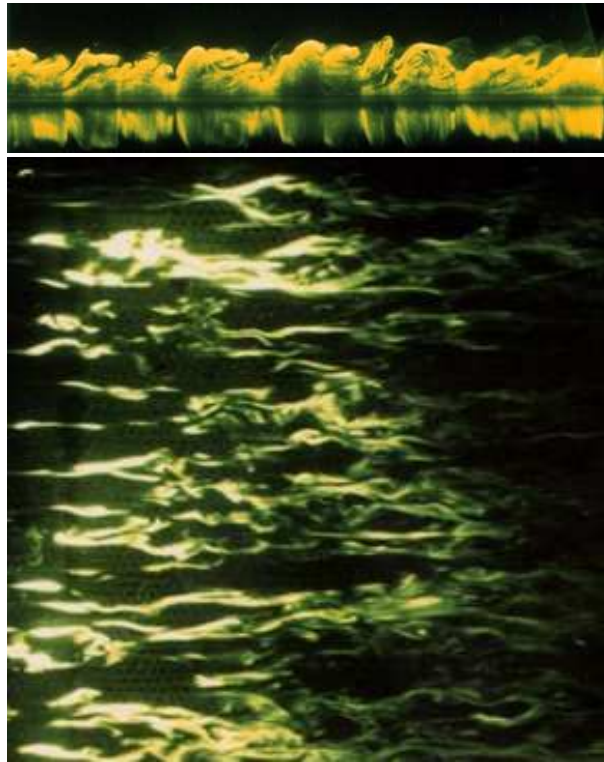


Abbildung 7.8: Kohärente Strukturen in einer turbulenten Grenzschicht (oben) und wandparallele Ansicht mit den turbulenten „streaks“; *Gad-el Hak (2000)*

einer ohnehin gradientendominierten Strömung wie einer turbulenten Scherschicht.

Im noch folgenden Unterkapitel über die turbulente Wandgrenzschicht wird auf die Dynamik der kohärenten Strukturen näher eingegangen.

7.3 Ähnlichkeitslösungen

Auf Seite 136 wurden die Unterschiede zwischen einfachen Grundströmungsformen und zusammengesetzten, gestörten oder nicht voll ausgebildeten Strömungen erläutert, wobei im Folgenden nur Strömungen betrachtet werden, die durch die Bewegungsgleichungen in Grenzschichtform zusammen mit der Kontinuitätsbedingung beschrieben werden können.

Eine wesentliche Vereinfachung lässt sich erzielen, wenn es gelingt, **ähnliche** Lösungen für die zu untersuchende Strömung zu finden. Unter dem Begriff „**Ähnlichkeitslösungen**“ versteht man mathematisch eine Transformation, mit deren Hilfe die Anzahl der Variablen in einem Gleichungssystem reduziert wird. In vorliegenden Falle bedeutet das, die partiellen Bewegungs-Differentialgleichung

auf eine gewöhnliche Differentialgleichung mit entsprechend einfacherer Lösbarkeit zu reduzieren. Dies heisst, es müssen Modellierungsansätze für die Ausbreitung von Strömungen in y -Richtung (quer zur Strömungsrichtung) und für den Geschwindigkeitsabfall in x -Richtung gefunden werden.

Die Existenz von ähnlichen Lösungen für eine Geschwindigkeitsverteilung bedeutet, dass Strömungs- oder allgemein Eigenschaftenprofile überall im Strömungsfeld längs x ähnlich sind, d.h. allein durch Reduktion mit einer bestimmten charakteristischen Länge (Querabmessung) und einer bestimmten charakteristischen Geschwindigkeit auf eine einzige Kurve abgebildet werden können.

Nur eine beschränkte Zahl einfacher Strömungen besitzt Ähnlichkeitslösungen. Ferner ist die Tatsache, dass eine ähnliche Lösung mathematisch herleitbar ist, noch kein Beweis dafür, dass eine solche Strömung auch tatsächlich in der Natur auftritt. Allerdings zeigt die Erfahrung, dass Strömungen oft das Verhalten entsprechend der ähnlichen Lösung anstreben (Minimalprinzip).

7.3.1 Der ebene Freistrah in ruhender Umgebung

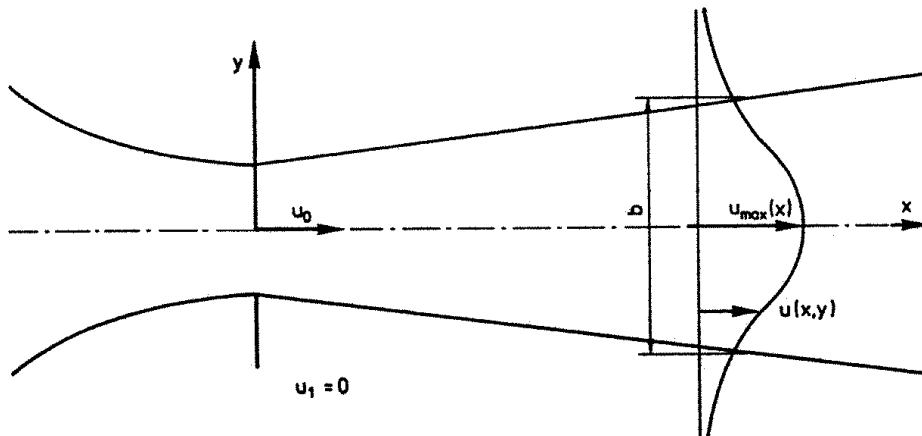


Abbildung 7.9: Ebener Freistrah in ruhender Umgebung

Die Bewegungsgleichung in Grenzschichtform lautet (für $p = const.$):

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{u}'v'}{\partial y} \quad (7.11)$$

Wenn Ähnlichkeit gelten soll, kann man folgendes ansetzen:

$$\bar{u} = \bar{u}_{\max}(x) \cdot f\left(\frac{y}{b}\right) \quad (7.12)$$

$$\bar{v} = \bar{u}_{\max}(x) \cdot g\left(\frac{y}{b}\right)$$

$$\overline{u'v'} = \bar{u}_{\max}^2(x) \cdot h\left(\frac{y}{b}\right)$$

Die charakteristische Länge ergibt sich dann zu $b = F_1(x)$ und die charakteristische Geschwindigkeit ist $u_{\max} = F_2(x)$. Im nächsten Schritt wird ein Potenzansatz eingeführt:

$$b \sim x^m \quad (7.13)$$

$$\bar{u}_{\max} \sim x^{-n}$$

Weiterhin wird eine neue Variable $\eta = y/b = y/x^m$ definiert. Man erhält damit:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -m \frac{y}{x^{m+1}} = -m \eta x^{-1} \quad (7.14)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{b} = \frac{1}{x^m}$$

Unter Beachtung der Gl.(7.12) und (7.13) erhält man für die einzelnen Glieder der Bewegungsgleichung als Funktionen von x und η :

$$\bar{u} \sim x^{-n} \cdot f(\eta) \quad (7.15)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \sim -n x^{-n-1} f(\eta) - m \eta x^{-n-1} \frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta}$$

$$\bar{v} \sim x^{-n} g(\eta)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \sim x^{-n-m} \frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} \sim x^{-2n-m} \frac{\partial h(\eta)}{\partial \eta}$$

Die Bewegungsgleichung (7.11) verändert sich damit zu:

$$\begin{aligned} & -x^{-2n-1} f(\eta) \left[n f(\eta) + m \eta \frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta} \right] + x^{-2n-m} g(\eta) \frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta} \\ & = x^{-2n-m} \frac{\partial h(\eta)}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (7.16)$$

Existiert eine ähnliche Lösung, so muss sich diese Gleichung in eine von x unabhängige Form bringen lassen. Dies ist in obigem Fall durch $m = 1$ gegeben. Die partielle

Differentialgleichung (7.11) wurde damit zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung reduziert. Der Fall $m = 1$ bedeutet, dass $b \sim x$ ist; die Breitenzunahme des ebenen Freistrahls in ruhender Umgebung ist proportional der Lauflänge x , also strahlenförmig.

Zur Ermittlung von η wird das Impulserhaltungsprinzip verwendet:

$$\varrho \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}^2 dy = \text{const.} \neq f(x) \quad (7.17)$$

Mit Gl.(7.12) und (7.13) folgt dann

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}_{\max}^2 f^2(\eta) x^m d\eta \sim \int_{-\infty}^{\infty} x^{-2n+m} f^2(\eta) d\eta \neq f(x), \quad (7.18)$$

und damit muß x^{-2n+m} konstant sein.

Mit $m = 1$ ergibt sich $n = 0.5$, somit kann der Abfall der Mittengeschwindigkeit des Strahlprofils durch folgendes Gesetz beschrieben werden:

$$u_{\max} \sim x^{-1/2} \quad (7.19)$$

Die Gleichung (7.11) besitzt also für die vorliegende Strömung eine Ähnlichkeitslösung für $m = 1$ und $n = 0.5$.

7.3.2 Der ebene Freistrah in gleichförmig mitbewegter Umgebung

Man geht wieder von der Bewegungsgleichung (7.11) aus. Die Ähnlichkeitsansätze müssen jedoch — entsprechend der Skizze — neu formuliert werden:

Annahmen:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{u} - \bar{u}_1}{\bar{u}_{\max} - \bar{u}_1} &= f(\eta) \rightarrow \bar{u} = (\bar{u}_{\max} - \bar{u}_1) f(\eta) + \bar{u}_1 \\ \frac{\bar{v}}{\bar{u}_{\max} - \bar{u}_1} &= g(\eta) \rightarrow \bar{v} = (\bar{u}_{\max} - \bar{u}_1) g(\eta) \\ \frac{\overline{u'v'}}{(\bar{u}_{\max} - \bar{u}_1)^2} &= h(\eta) \rightarrow \overline{u'v'} = (\bar{u}_{\max} - \bar{u}_1)^2 h(\eta) \end{aligned} \quad (7.20)$$

Mit folgenden Proportionalitäten

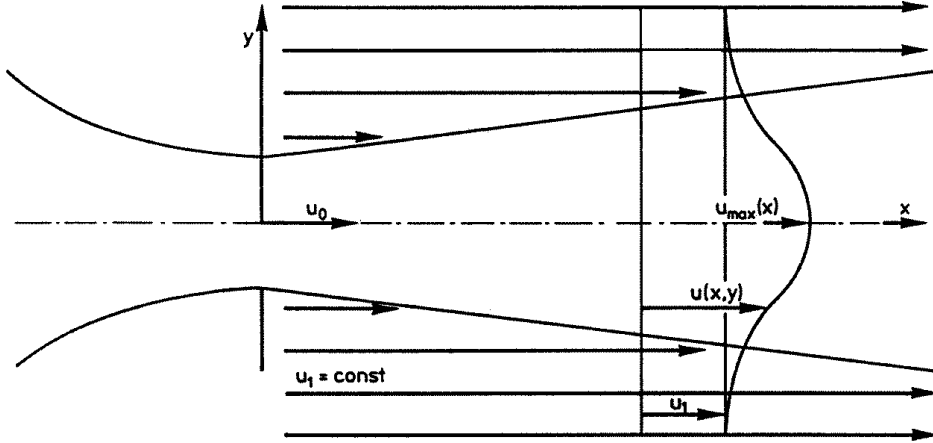


Abbildung 7.10: Ebener Freistrah in gleichförmig mitbewegter Umgebung

$$\bar{u}_{\max} - \bar{u}_1 \sim x^{-n} \quad (7.21)$$

$$\bar{u} = x^{-n} f(\eta) + \bar{u}_1$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \sim n x^{-n-1} f(\eta) - x^{-n-1} m \eta \frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta}$$

$$\bar{v} \sim x^{-n-m} \frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \sim x^{-n-m} \frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial \bar{u}'v'}{\partial y} \sim x^{-2n-m} \frac{\partial h(\eta)}{\partial \eta}$$

erhält man für die Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned} & - \left(x^{-n} f(\eta) + \bar{u}_1 \right) \left(n x^{-n-m} f(\eta) - x^{-n-1} \frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta} m \eta \right) \\ & + x^{-2n-m} g(\eta) \frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta} \\ & = x^{-2n-m} \frac{\partial h(\eta)}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (7.22)$$

Diese Gleichung ist nur dann von x unabhängig, wenn $n = 0$ und $m = 1$ ist; ein sehr unrealistisches Ergebnis, wie man sich leicht klarmachen kann. Betrachten wir nun die

Impulsbedingung

$$\varrho \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u} (\bar{u} - \bar{u}_1) dy = \text{const.} \neq f(x), \quad (7.23)$$

so folgt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x^{-n} f(\eta) + \bar{u}_1) x^{-n+m} f(\eta) d\eta = \text{const.}, \quad (7.24)$$

wobei diese Lösung nur dann unabhängig von x ist, wenn $m = n = 0$ gilt. Dies ist mit dem Ergebnis aus der Bewegungsgleichung inkompatibel, d.h., für diese Strömung existiert keine ähnliche Lösung der angesetzten Form.

In der Tat ist diese Strömung im allgemeinen Fall schwierig theoretisch zu behandeln. Sie besitzt jedoch annähernd ähnliche Lösungen für zwei Extremfälle (asymptotische Fälle):

1. Wenn $u - u_1 \gg u_1$ ist, kann man ansetzen: $u \approx x^{-n} f(\eta)$

Hierfür erhält man das Ergebnis des Freistrahls in ruhender Umgebung, nämlich $n = 0.5$ und $m = 1$.

Dieser Extremfall kann evtl. in Düsennähe auftreten.

2. Für $u - u_1 \ll u_1$ erhält man mit Hilfe der Bewegungsgleichung und des Impulsintegrals

$$n = m = 0.5.$$

Dieser asymptotische Fall wird in sehr großer Entfernung von der Düse erreicht.

7.3.3 Andere Ähnlichkeitslösungen

Für den Fall, dass eine Strömung ähnliche Lösungen besitzt, erhält man mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung eine Beziehung der Form $g(\eta) = F(f(\eta))$. Die dann noch fehlende Beziehung zwischen $f(\eta)$ und $h(\eta)$ gewinnt man mit Hilfe eines Schubspannungsansatzes der in Kapitel 4 erläuterten Formen, z.B. dem Prandtl'schen Mischungsweg.

Einige Strömungsformen mit exakt ähnlichen Lösungen sind:

- Scherschichten zwischen zwei parallelen Strömungen mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten.
- Axiale zweidimensionale und axialsymmetrische Strahlen in ruhender Umgebung.

- Radiale Strahlen in ruhender Umgebung.
- Nachläufe und Strahlen in bewegter Umgebung bei angepasstem Längs-Druckgradienten ($u_1 = f(x)$).
- Wandstrahl längs logarithmisch gekrümmter Wand.

Angenähertes Ähnlichkeitsverhalten findet man bei Nachläufen oder Strahlen in bewegter Umgebung bei $\partial p / \partial x = 0$, wenn u_{\max} viel größer als u_1 ist (asymptotische Fälle), sowie für Wandströmungen bei speziellen Druckgradienten.

In der folgenden Tabelle sind Werte für m und n für einige exakt oder angenähert ähnliche Strömungen zusammengestellt, wobei der Index „L“ für die entsprechenden laminaren Strömungen gilt:

	Ebene, axiale Scherschicht	ebener Strahl	runder Strahl	ebener Nachlauf (großes x/d)	runder Nachlauf (großes x/d)
m	1	1	1	1/2	1/3
n	0	1/2	1	1/2	2/3
m_L	1/2	2/3	1	1/2	1/2
n_L	0	1/3	1	1/2	1

Geht man von der ursprünglichen Definition der Wirbelzähigkeit als dem Produkt einer charakteristischen Länge mit einer charakteristischen Geschwindigkeit aus, so kann man schreiben:

$$\varepsilon_M \sim x^{m-n} \quad (7.25)$$

Wenn also $m - n = 0$ ist, so ist zu erwarten, dass die Gesetze für Breitenzunahme (x^m) und Geschwindigkeitsabfall (x^{-n}) gleich denen im laminaren Fall sind, da dort die Strömung durch $v = \text{const.} \sim x^0$ bestimmt wird. Entsprechend ist eine schnellere Mischung für $m - n > 0$ und langsamere Mischung für $m - n < 0$ zu erwarten.

Tatsächlich erhält man die folgenden Abschätzungen für die Wirbelzähigkeit, die diese Überlegungen bestätigen:

	Ebene, axiale Scherschicht	ebener Strahl	runder Strahl	ebener Nachlauf (großes x/d)	runder Nachlauf (großes x/d)
ε_M	$\sim x^1$	$\sim x^{1/2}$	$\sim x^0 = \text{const.}$	$\sim x^0 = \text{const.}$	$\sim x^{-1/3}$

7.3.4 Ausbildung der Ähnlichkeit

Häufig verwendet man nicht den Begriff „Ähnlichkeit“ im weiteren Sinne, sondern definiert enger die sog. „Selbst-Ähnlichkeit“ (self preservation). Gemäß *Townsend (1956)* ist diese gegeben, wenn die Struktur einer bestimmten turbulenten Strömung während des Abklingvorgangs bzw. seiner Entwicklung gleichbleibt und – ausgedrückt durch ein oder zwei einfache Parameter – in jedem Schnitt geometrisch ähnlich ist. Selbst-Ähnlichkeit ist also ein Zustand, bei dem die Turbulenzstruktur im Gleichgewicht ist und sich relativ nicht mehr ändert. Dieser Gleichgewichtszustand wird verständlicherweise erst nach einer bestimmten Anlaufänge erreicht, für die *Townsend (1956)* eine einfache Abschätzungsmöglichkeit angegeben hat:

Wir nehmen an, dass für jede Strömungsform eine bestimmte normierte „Relaxationszeit“ T^* benötigt wird, um den Gleichgewichtszustand zu erreichen. Dazu wird wegen der unterschiedlichen Geschwindigkeitsverläufe in den verschiedenen Strömungen die damit zusammenhängende Lauflänge $(x/d)^*$ für jede Strömung verschieden groß sein.

Der Zusammenhang zwischen $(x/d)^*$ und T^* ist über die Beziehung $dx/dt = \bar{u}(x)$ gegeben, wobei man erhält:

$$T^* = \frac{u_0 T}{d} = u_0 \int_0^{(x/d)^*} \frac{1}{\bar{u}_{\max(\min)}} d\left(\frac{x}{d}\right) \approx \text{const.} \quad (7.26)$$

Für den Nachlauf hinter einem Zylinder des Durchmessers d in einer Parallelströmung mit der Geschwindigkeit u_0 und $u = u_{\min}$ gilt:

$$\frac{u_0 - u_{\min}}{u_0} = k \left(\frac{x - x_0}{d} \right)^{-1/2} \quad (7.27)$$

$$\begin{aligned} x_0 = -10 d & \rightarrow u_{\min} \approx 0.9 u_0 \\ k = 1.0 \text{ für } x/d = 100 \\ x/d > 100 & \rightarrow \bar{u}_{\min} \approx u_0 \end{aligned}$$

$$T^* \approx \left(\frac{x}{d} \right)^* \quad (7.28)$$

Für einen runden Strahl bei einem Düsendurchmesser d und der Anfangsgeschwindigkeit u_0 ergibt sich:

$$\bar{u}_{\max} \approx 5.5 u_0 \left(\frac{x}{d} \right)^{-1} \quad (7.29)$$

$$T^* \approx 0.08 \left[\left(\frac{x}{d} \right)^* \right]^2 \quad (7.30)$$

Für einen ebenen Strahl der Anfangsbreite d und der Anfangsgeschwindigkeit u_0 erhält man:

$$\bar{u}_{\max} \approx 2.5 u_0 \left(\frac{x}{d} \right)^{-1/2} \quad (7.31)$$

$$T^* \approx 0.28 \left[\left(\frac{x}{d} \right)^* \right]^{3/2} \quad (7.32)$$

Setzt man die Anlaufänge für den runden Freistrahle zu $(x/d)^* = 70$ an, so erhält man für den ebenen Nachlauf über die oben angegebene Beziehung ($T^* = \text{const.}$)

$$\left(\frac{x}{d} \right)^*_{\text{Nachlauf, eben}} \approx 392, \quad (7.33)$$

und für den ebenen Strahl:

$$\left(\frac{x}{d} \right)^*_{\text{Strahl, eben}} \approx 125 \quad (7.34)$$

Diese Werte stimmen mit Messergebnissen gut überein.

7.4 Gleichgewicht der Turbulenzstruktur

7.4.1 Gleichgewichtsbedingungen

Im vorigen Unterkapitel war der Zustand der Ähnlichkeit darauf zurückgeführt worden, dass die Turbulenz einen Gleichgewichtszustand erreicht hat. Gleichgewicht in diesem Sinne bedeutet, dass in der mit der charakteristischen Länge und der charakteristischen Geschwindigkeit dimensionslos gemachten Energiegleichung der Turbulenz alle Energietransportterme einen konstanten Wert annehmen. Voraussetzung dafür ist, dass die Fluktuationskomponenten ihre Gleichgewichtswerte angenommen haben, was verständlicherweise nicht für alle Komponenten gleichzeitig der Fall ist.

Die Ausbildung der Gleichgewichtsstruktur kann etwa in folgender Weise dargestellt werden:

1. Längsfluktuationen (u') existieren aufgrund der gleichzeitigen Existenz der turbulenten Schubspannungen und des mittleren Geschwindigkeitsgradienten (Produktions-Glied) und erzeugen ihrerseits Druckfluktuationen
2. Querfluktuationen (v', w') entstehen aufgrund der Druckfluktuationen.
3. Die turbulenten Schubspannungen wiederum entstehen aufgrund der gleichzeitigen Existenz von Querfluktuationen und eines mittleren Geschwindigkeitsgradienten.

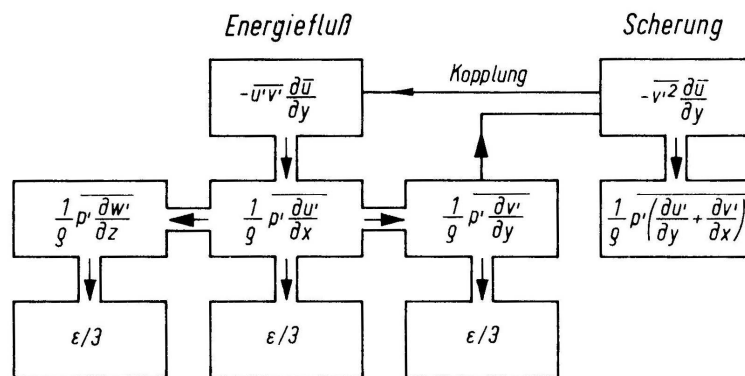


Abbildung 7.11: Ausbildung der turbulenten Gleichgewichtsstruktur in einer Scherströmung mit $d\bar{u}/dy \neq 0$

Rotta (1972) hat für diesen Vorgang das in obiger Abbildung dargestellte Schema am Beispiel einer ebenen Scherströmung mit konstantem Gradienten $d\bar{u}/dy \neq 0$ und homogener Turbulenz entwickelt. Man gewinnt diese Zusammenhänge, indem man die Energiegleichung der turbulenten Bewegung (Gl. 3.51) für eine Scherströmung mit

einem Geschwindigkeitsgradienten in y -Richtung aufschreibt und dann in y -Richtung integriert. Es entfallen dann z.B. alle Glieder die die Konvektion beschreiben. Dies ist insofern nicht verwunderlich, als dass man intuitiv bereits sagen würde, dass Konvektion wenig Einfluss auf die Aufrechterhaltung eines turbulenten Gleichgewichts hat.

Turbulente Energie in Scherströmungen wird in der Größe $\overline{u'v'}(\partial\bar{u}/\partial y)$ produziert und wird zunächst in eine Längsgeschwindigkeits-Fluktuation $\overline{u'^2}$ umgewandelt. Somit muss gelten:

$$\overline{u'^2} > \overline{v'^2} \approx \overline{w'^2} \quad (7.35)$$

Die Komponente $\overline{u'^2}$ wird also früher als $\overline{v'^2}$ und $\overline{w'^2}$ den selbst-ähnlichen Zustand erreichen. Die Wirkung der Druck-Geschwindigkeits-Korrelationen lässt sich in folgender Weise interpretieren. Wenn

$$p' \frac{\partial u'}{\partial x} > 0 \quad (7.36)$$

ist, so folgt aufgrund der Kontinuitätsgleichung

$$p' \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) = 0 \quad (7.37)$$

die Relation

$$p' \left(\frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) < 0, \quad (7.38)$$

bzw. wegen der Isotropie des Drucks

$$p' \frac{\partial v'}{\partial y} \approx p' \frac{\partial w'}{\partial z} < 0 \quad (7.39)$$

und umgekehrt. Wenn nun im Mittel $\overline{u'^2} > \overline{v'^2} + \overline{w'^2}$ ist, dann gelten im Mittel:

$$\overline{p' \frac{\partial u'}{\partial x}} < 0 \quad \text{und} \quad \overline{p' \frac{\partial v'}{\partial y}} \approx \overline{p' \frac{\partial w'}{\partial z}} > 0 \quad (7.40)$$

Die Produktion von Druckfluktuationen aus der Längsfluktuation und ferner die Umwandlung in Querfluktuationen lässt sich aus der in Abb. 7.12 dargestellten Skizze ansehen.

Die Druck-Geschwindigkeitsgradient-Korrelationen entziehen also der energiereichsten Komponente (u') Energie und geben sie an die beiden anderen Komponenten (v' und w') weiter. Die Konsequenz ist eine Energievergleichmäßigung, die dazu führt, dass im Anlaufbereich die beiden „Sekundärkomponenten“ den Gleichgewichtszustand

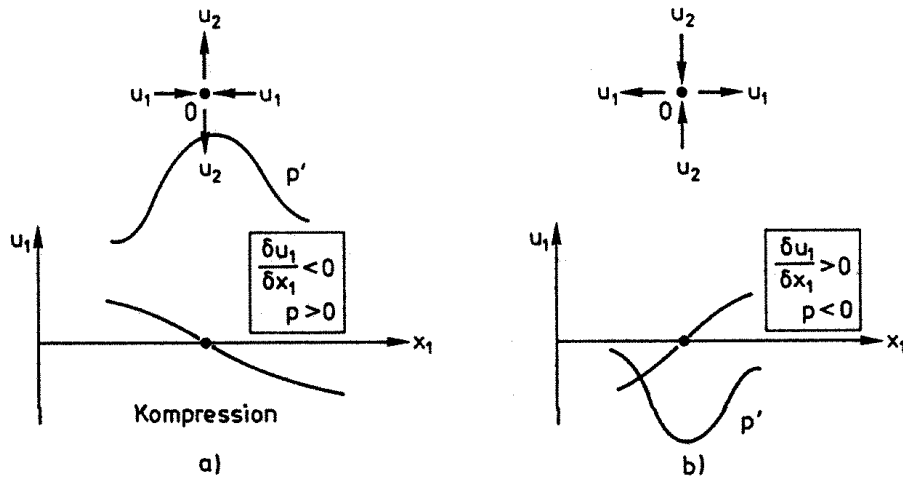


Abbildung 7.12: Geschwindigkeits-Druck-Korrelation

später erreichen. Andererseits muss im Dissipationsbereich, dort nämlich, wo keine Produktion existiert und somit die Primärkomponente (u') keine Energiezufuhr mehr besitzt, sich Isotropie asymptotisch einstellen, sofern die Existenzdauer der Wirbel dazu ausreicht (große Re-Zahl).

Die Reynolds-Scherspannung wird durch das Gleichgewicht zwischen dem Erzeugungsglied $\overline{v'^2 \partial \bar{u} / \partial y}$ und den Korrelationen aus Druckschwankungen und Schertensor $p'(\partial u' / \partial y + \partial v' / \partial x)$ aufrecht erhalten. Offensichtlich sind neben einer mittleren Scherung $\partial \bar{u} / \partial y$ auch Querfluktuationen v' notwendig um $-\overline{u'v'}$ zu erhalten – andererseits wird im Energiefluss aber $-\overline{u'v'}$ benötigt um v' zu erhalten, die Gleichungen sind also gekoppelt.

Die Form des mittleren Geschwindigkeitsprofils hängt von $\overline{u'v'}$ ab und erreicht daher erst nach längerer Zeit die Ähnlichkeitsform. Sie weist jedoch als Integraleigenschaft nur eine geringe Empfindlichkeit gegenüber Veränderungen der Turbulenzstruktur auf und erscheint daher als erste Strömungseigenschaft voll ausgebildet.

7.4.2 Turbulenzstruktur im Gleichgewichtszustand

Aus der Forderung nach Konstanz der mit der charakteristischen Länge und der charakteristischen Geschwindigkeit dimensionslos gemachten Energieterme in der Lauflänge x folgt für die ausgebildete Strömung:

1. Die Komponenten der Terme, die nur Geschwindigkeiten und Längen enthalten, sind ebenfalls selbst-ähnlich.
→ Alle Eigenschaften des energiehaltigen Spektralbereichs, bei denen die Zähigkeit ohne Einfluss ist, müssen ebenfalls selbst-ähnlich sein. Dazu gehören die Schwankungsmittelwerte, die mit den Schwankungen gebildeten Korrelationen und die integralen Korrelationslängen.

2. Die Komponenten der Terme, in denen die Zähigkeit auftritt (Dissipationsterm), sind nur dann selbst-ähnlich, wenn die lokale Re-Zahl, gebildet mit der Scherschichtbreite b ,

$$Re = \frac{\bar{u}_m b}{\nu} \quad (7.41)$$

während des Abklingvorgangs konstant bleibt.

→ Die Mittelwerte der Ableitungen der Schwankungsgeschwindigkeiten und damit die Dissipationslängen verhalten sich u.U. nicht selbst-ähnlich im Sinne des integralen Strömungsverlaufs.

Man kann den Verlauf z.B. von λ für den allgemeinen Fall abschätzen. In x -Richtung erhält man aus der Energiegleichung durch eine Dimensionsbetrachtung (vgl. Zusammenhang zwischen Re_T und Re) für die Dissipation D und die Produktion P :

$$D \sim \nu \overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)^2} \sim \nu \frac{\overline{u'^2}}{\lambda^2} \sim P \sim \overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \dots \quad (7.42)$$

Alle Geschwindigkeiten sind proportional zu x^{-n} und alle Längen sind proportional zu x^m . Damit ergibt sich:

$$P \sim x^{-3n-m} \sim D \sim \frac{x^{-2n}}{\lambda^2} \quad (7.43)$$

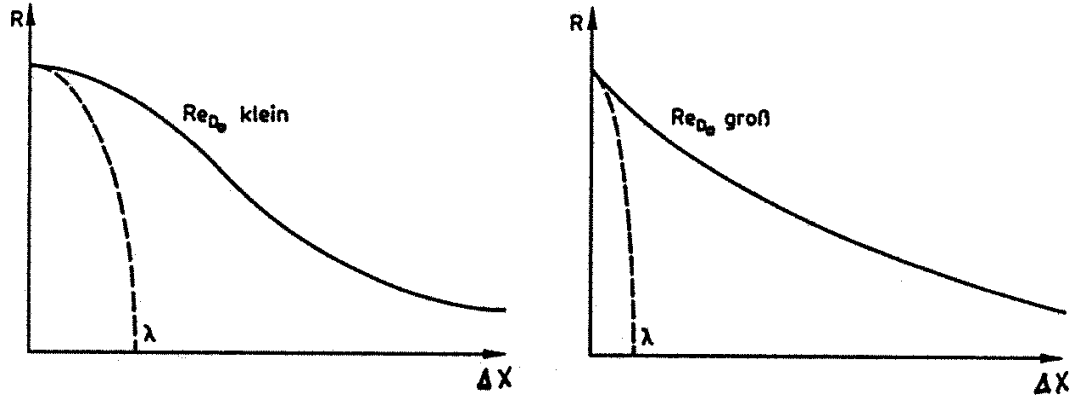
Die x -Abhängigkeit von λ berechnet sich also zu:

$$\lambda^2 \sim x^{-2n+3n+m} = x^{n+m} \quad \text{bzw.} \quad \lambda \sim x^{\frac{n}{2}+\frac{m}{2}} \quad (7.44)$$

Andererseits findet man damit auch, dass für eine bestimmte Strömung an einer bestimmten Stelle x_0/D , wobei D z.B. der Düsendurchmesser sein kann, für λ gilt (mit $u_M \sim u_0$ und $b \sim D$):

$$\begin{aligned} \lambda &\sim \sqrt{\frac{b\nu}{\bar{u}_m}} \sim b \sqrt{\frac{1}{\frac{\bar{u}_m b}{\nu}}} \\ &\sim \frac{b}{\sqrt{\frac{\bar{u}_m b}{\nu}}} \sim \frac{b}{\sqrt{\frac{u_0 D}{\nu}}} \sim \frac{b}{\sqrt{Re_{D_0}}} \end{aligned} \quad (7.45)$$

Mit steigender Re-Zahl wird die Dissipationslänge λ also kleiner, d.h. die Turbulenzstrukturen werden feiner, während die äußere oder integrale Struktur im wesentlichen von der Re-Zahl unabhängig ist. Die Form einer Korrelation wird sich demnach gemäß

Abbildung 7.13: Korrelationsverlauf in Abhängigkeit von Re_{D_0}

der Abb. (7.13) ändern.

Die lokale Reynolds-Zahl sei definiert zu:

$$Re = \frac{\bar{u}_m b}{\nu} \sim x^{m-n} \quad (7.46)$$

Die turbulente Reynolds-Zahl ist:

$$Re_T = \frac{\lambda \sqrt{u'^2}}{\nu} \sim x^{\frac{m}{2} - \frac{n}{2}} \quad (7.47)$$

Für $Re = const.$ folgt $Re_T = const. \neq f(x)$, und das ist nur der Fall, wenn $m = n$ ist. Dann ist aber auch

$$\lambda \sim x^{\frac{n}{2} + \frac{m}{2}} \sim x^m, \quad (7.48)$$

Demzufolge gilt für Strömungen, die eine Ähnlichkeitslösung mit $m = n$ besitzen, die Selbst-Ähnlichkeit auch im Dissipationsbereich. Gemäß der auf Seite 152 aufgelisteten Fälle sind dies der runde Strahl und der ebene Nachlauf.

Für die schon angeführten Grundströmungsformen ergeben sich die folgenden Proportionalitäten:

	Ebene, axiale Scherschicht	ebener Strahl	runder Strahl	ebener Nachlauf	runder Nachlauf
Re	$\sim x^1$	$\sim x^{1/2}$	$\sim x^0$	$\sim x^0$	$\sim x^{-1/3}$
Re_T	$\sim x^{1/2}$	$\sim x^{1/4}$	$\sim x^0$	$\sim x^0$	$\sim x^{-1/6}$
λ	$\sim x^{1/2}$	$\sim x^{3/4}$	$\sim x^1$	$\sim x^{1/2}$	$\sim x^{1/2}$
$\Lambda \sim b$	$\sim x^1$	$\sim x^1$	$\sim x^1$	$\sim x^{1/2}$	$\sim x^{1/3}$
l_K	$\sim x^{1/4}$	$\sim x^{5/8}$	$\sim x^1$	$\sim x^{1/2}$	$\sim x^{7/12}$
m	1	1	1	1/2	1/3
n	0	1/2	1	1/2	2/3

Die beiden Fälle mit $m = n$ (runder Strahl und ebener Nachlauf), sind zudem noch dadurch gekennzeichnet, dass dort notwendigerweise die turbulente Zähigkeit $\varepsilon_M \sim x^0 = \text{const.}$ ist. Diese Forderung leuchtet ein, wenn man bedenkt, dass der energiehaltige Spektralbereich von ε_M und der Dissipationsbereich von ν abhängt, und ein konstantes Verhältnis von ε_M/ν auch gleiche Ähnlichkeitsverhältnisse in beiden Bereichen zur Folge haben muss.

7.5 Die ebene turbulente Wandgrenzschicht

Die turbulente Wandgrenzschicht ist die Strömungsform, der wegen ihrer großen und allgemeineren Bedeutung wohl die größte Aufmerksamkeit gewidmet worden ist. *Prandtl (1925)* hat als erster das Konzept der Wandreibung in einer dünnen, wandnahen Schicht — der Reibungs- oder Grenzschicht — vorgestellt. Wegen der großen Schwierigkeit der theoretischen Behandlung von Wandgrenzschichten ist die Zahl der näherungsweise Berechnungsmethoden und -modelle extrem groß, unser Wissen über die tatsächlichen Vorgänge hingegen noch relativ mangelhaft. In diesem Kapitel sollen zunächst rein phänomenologisch verschiedene Vorgänge innerhalb einer turbulenten Grenzschicht aufgezeigt werden, im zweiten Abschnitt wenden wir uns den daraus resultierenden mittleren und fluktuierenden Strömungsgrößen zu.

7.5.1 Aufbau und Phänomenologie

Um die unterschiedlichen Erscheinungen besser den Bereichen der Grenzschicht zuordnen zu können, sollen zunächst einige Definitionen gegeben werden, durch die auch ein großer Fortschritt bei der Bildung universeller Gesetze aus den statistischen Verteilungen erzielt wurde. An dieser Stelle seien die Bereiche zunächst nur benannt, die zugehörigen Gesetze finden sich im nächsten Unterkapitel.

Die turbulente Grenzschicht unterteilt sich in den „inneren“ und den „äußeren“ Bereich. Der Erstgenannte ist der Bereich in dem die Wandnähe und damit die Zähigkeit einen Einfluss besitzt. Er reicht von der Wand bis etwa $y^+ \approx 100$ und umfasst somit die sog. viskose Unterschicht, die Übergangsschicht („buffer layer“) und Teile der „Wandturbulenz“-Region, die aufgrund der Geschwindigkeitsverteilung auch „logarithmische Region“ genannt wird. Der äußere Bereich ist der darüber liegende Rest der Grenzschicht bis zur umgebenden Potentialströmung, er wird alleine durch turbulente Vorgänge beherrscht, wobei der wandnähere Teil des äußeren Bereiches noch die logarithmische Region umfasst und zusätzlich die wandfernen Gebiete in denen die Grenzschicht einen eher nachlaufähnlichen Charakter besitzt. Der äußere Bereich ist weitestgehend intermittent, hier findet das Entrainment statt.

Zur Beschreibung der Bewegung im inneren Bereich der Wandgrenzschicht wird hier auf das Modell von *Hinze (1975)* eingegangen, welches skizzenhaft in Abb. 7.15 dargestellt ist. Demzufolge nimmt das turbulente Geschehen seinen Anfang in einer Störung in der viskosen Unterschicht. Ist eine derartige Störung instabil, so entwickelt sich ein relativ kurzer Wirbelfaden mit einer Achse quer zur Hauptströmungsrichtung, der die Strömung unterhalb dieses Fadens verzögert. Es kommt zur Ausbildung eines sog. „low-speed streaks“, Strukturen die in wandparallelen Visualisierungen sehr gut zu beobachten sind. Da der Streak langsames Fluid befördert, muss er zur Erhaltung der Kontinuität eine Verdrängungswirkung ausüben, die dazu führt, dass der Wirbelfaden sich aufrichtet und zu einer sog. Hairpin-Struktur heranwächst.

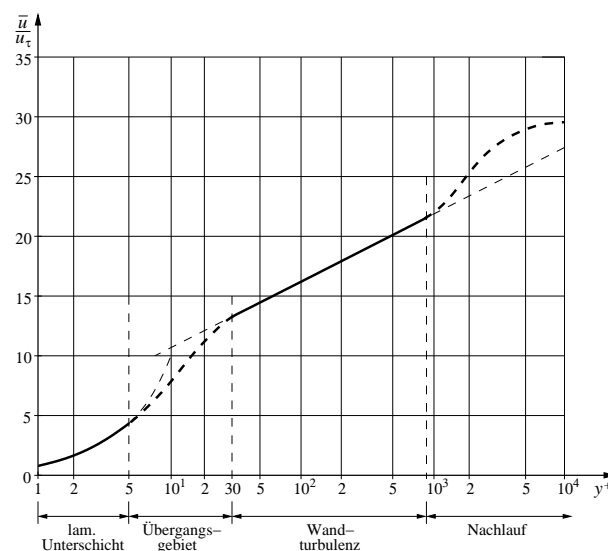


Abbildung 7.14: mittleres Geschwindigkeitsprofil einer turbulenten Grenzschicht mit Zuordnung der verschiedenen Bereiche

Im Inneren dieser Struktur treten starke Gradienten auf, die diesen Bereich sehr instabil machen. Der Wirbel entlädt die in ihm gebundene Drehenergie nach oben („ejection“) und zerfällt dann relativ schnell („bursting“), wobei ein Gebiet mit hoher Turbulenzintensität zurückbleibt und die Mutterstruktur, der Hairpin-Wirbel, zerstört wird. Kurz vor diesem Zerfall wird durch den wandwärts gerichteten, oberen Teil des Wirbels Fluid nach unten transportiert, welches hier einerseits den Streak schließt, andererseits eine lokale Scherschicht bildet, die instabil gegenüber Druckstörungen ist. Nun gehen von dem gebohrsten Wirbel Druckfluktuationen aus, die Störungen in diese Scherschicht einbringen und somit den Prozess von neuem anstoßen.

Die Längenskalen dieser Bewegung umfassen etwa 100 viskose Längen in Breite und Höhe, somit ist dieses Geschehen auf den inneren Bereich begrenzt. Dies ist im Sinne der Turbulenzproduktion und -dissipation der wichtigste Bereich der Grenzschicht, wie bereits in früheren Kapiteln gezeigt wurde. Es ist durchaus bemerkenswert, dass die Größe der Strukturen in viskosen Einheiten fundamental ist, d.h. relativ zur Wandschubspannungsgeschwindigkeit sind die Strukturen in jeder Grenzschicht ohne Druckgradient von ähnlicher Größenordnung.

Die Bewegungen im äußeren, wandferneren Bereich der Grenzschicht wird durch großskalige Wirbel geprägt, die Strukturen die in Visualisierungen sehr gut zu beobachten sind. Ein Konzeptmodell wurde hier u.a. von *Pratt und Brodkey (1978)* vorgestellt, das in Abbildung 7.16 dargestellt ist. Dabei sind die Skizzen so angefertigt, als würde sich der Beobachter mit der Geschwindigkeit in der Höhe x („camera matching speed“, siehe (a)) mitbewegen. Diesem Modell zufolge sind lokale Scherschichten der Auslöser für die großskaligen Strukturen. Diese Scherschichten entstehen beispielsweise

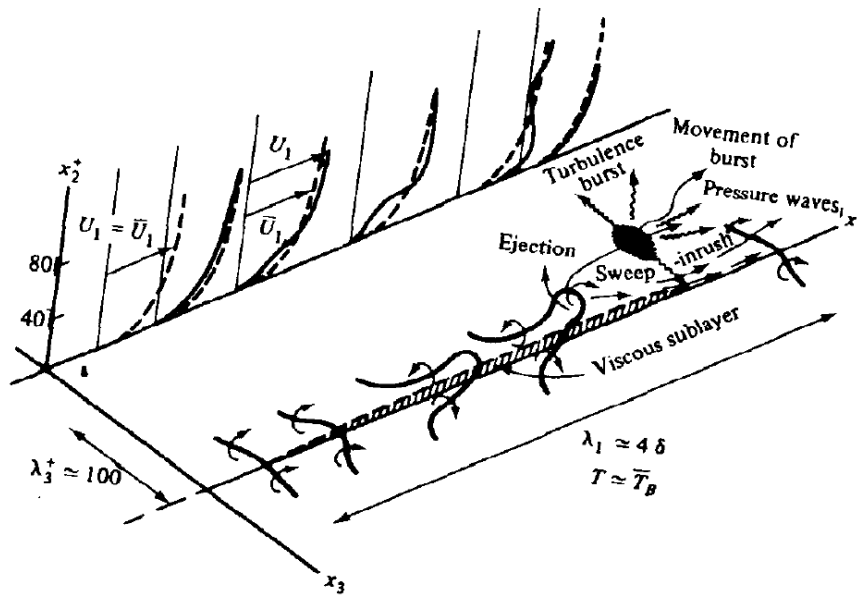


Abbildung 7.15: Konzeptmodell zur Entstehung und Erhaltung der Turbulenz in Wandnähe in einem zyclischen Prozess; *Hinze (1975)*

bei dem oben beschriebenen „ejection“-Prozess und führen dazu, dass sich ein Querwirbel bildet, der in der Grenzschicht aufsteigt und eine Auffaltung der Trennungsschicht bewirkt, also jener Schicht die den turbulenten Bereich der Grenzschicht von der quasi-reibungslosen Außenströmung trennt (wohlgemerkt nicht der Grenzschichttrand, dieser ist ein integraler Mittelwert über einen gewissen Zeitraum). In das Tal der Trennschicht wird Fluid aus der umgebenden Potentialströmung eingesaugt, welches mit dem Zerfall des Wirbels in die Grenzschicht aufgenommen wird und so die in der Grenzschicht angereicherte Energie erhält, bzw. immer weiter auffüllt, während der Außenströmung immer mehr Energie entzogen wird. Die Querwirbel können teilweise doppelt so groß sein wie die Grenzschichtdicke, im Mittel konvektieren sie mit einer Geschwindigkeit von etwa $0.85 \cdot u_e$. Ihre Lebensdauer ist sehr stark begrenzt, i.d.R. lebt ein einzelner Wirbel nicht einmal eine ganze Umdrehung, sondern zerfällt sofort wieder in kleinere. Anders als im inneren Bereich gibt es im Äußeren keine bevorzugte Wirbelgröße und keine fundamentalen charakteristischen Größen, was auch anhand des Frequenzspektrums bereits offensichtlich wird, da eine turbulente Grenzschicht keine bevorzugten Frequenzen besitzt.

Eines der bemerkenswerten Details in einer turbulenten Grenzschicht ist die Tatsache, dass die turbulente kinetische Energie im Wesentlichen in den großen Wirbeln gebunden ist. Man kann jedoch durch geeignete Messung und Auswertung der einzelnen Terme der Grenzschichtgleichungen zeigen, dass die Turbulenzproduktion (und Dissipation) in Wandnähe am größten ist. Demnach müssten für die Produktion und den Erhalt der Turbulenz unterschiedliche Strukturen verantwortlich sein. Obwohl die qualitative Beschreibung turbulenter Wandgrenzschichten fortgeschritten ist, sind einige wesentliche Fragen weitgehend ungeklärt, z.B. welches der

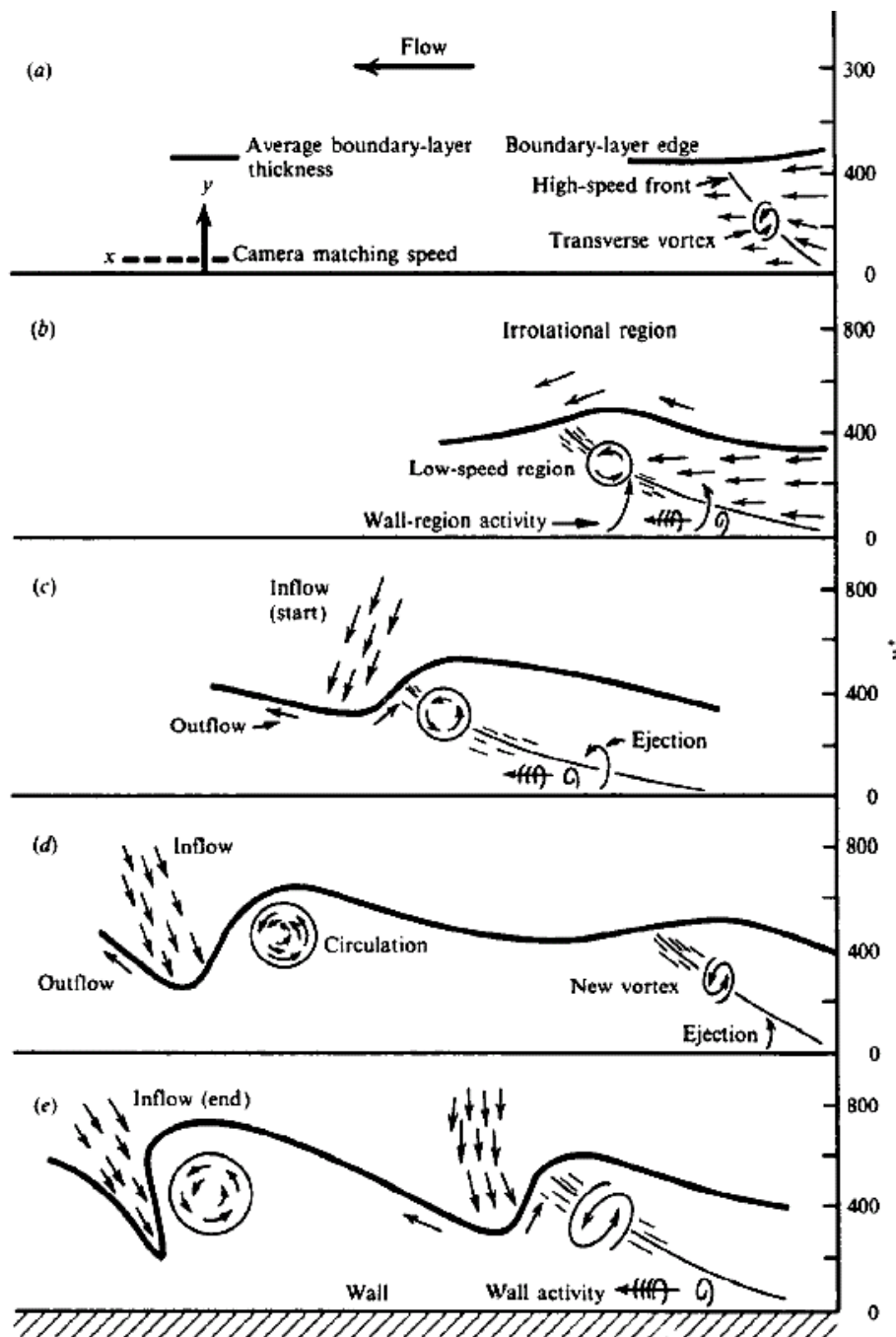


Abbildung 7.16: Konzeptmodell der Vorgänge im äußeren Bereich und der Interaktionen mit dem inneren Bereich; Praturi und Brodkey (1978)

Phänomene *Ursache* und welches *Wirkung* ist. Ferner findet man bei neueren Messungen² Details, die nicht in die oben beschriebenen Prozesse einzusortieren sind. Beispielsweise zeigt *Kähler (2004)*, dass die low-speed-streaks im inneren Bereich nicht zwangsläufig symmetrisch zu einer Achse in Hauptströmungsrichtung sind. Es ist also noch unklar, ob jeder Streak auch von einer λ -Struktur überspannt wird.

7.5.2 Profile der Strömungsgrößen

Zur Bestimmung des Geschwindigkeitsprofils muss man die Grenzschicht unterteilen in den inneren Bereich und den äußeren Bereich - für beide Bereiche lassen sich grundlegend verschiedene Annahmen treffen.

Der wandnahe Bereich ist gekennzeichnet durch den nicht mehr vernachlässigbaren Einfluss der Zähigkeit aufgrund des steilen Geschwindigkeitsgradienten und der Wandhaftbedingung. Er besitzt im wesentlichen folgende Eigenschaften:

1. Es existiert keine Selbst-Ähnlichkeit im bisher bekannten Sinn aufgrund der Zähigkeit.
2. Die Schubspannung ist in etwa konstant.
3. Die Wirbelzähigkeit kann angenähert durch den Prandtlschen Ansatz beschrieben werden.
4. Der „Mischungsweg“ gehorcht etwa einem Gesetz der Form $l_m \sim y$ ($y \dots$ Wandabstand).
5. Die Strömungsstruktur hängt stärker von der Wandbeschaffenheit, nicht aber von den äußeren Bedingungen der Strömung ab (universelle Form).

Der Außenbereich ist mit dem Innenbereich nur über die Schubspannungsgeschwindigkeit verknüpft. Er hängt stark von den äußeren Bedingungen der Strömung ab und kann in seiner Struktur als „nachlaufähnlich“ bezeichnet werden. Der äußere Bereich ist annähernd „selbst-ähnlich“ für $Re \rightarrow \infty$ (*Townsend (1956)*).

7.5.2.1 Der innere Bereich

Um zu einem Ansatz für die Geschwindigkeitsprofile zu kommen geht man für den inneren Bereich von einer ebenen Couette-Strömung ohne Druckgradient aus - in diesem Bereich muss sich aufgrund obiger Vorüberlegungen eine universelle Form herstellen lassen, so dass jede Strömung im wandnahen Bereich einer Couette-Strömung ähnlich ist. Die stationäre Reynolds-Gleichung in Strömungsrichtung lautet zunächst (vgl. Gl. 3.20)

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{dp}{dx} - \mu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \rho \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} \quad (7.49)$$

²durch den Fortschritt der PIV-Technik lassen sich in jüngerer Zeit sehr hochwertige Messergebnisse generieren, die den Forschern vor 20 Jahren noch nicht zur Verfügung standen

und vereinfacht sich für die ebene Couette-Strömung ohne Druckgradient zu

$$0 = \mu \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} - \rho \frac{d\bar{u}'v'}{dy} \quad (7.50)$$

Man definiert mit Hilfe der Wandschubspannung τ_W die *Schubspannungsgeschwindigkeit* als

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_W}{\rho}} \quad (7.51)$$

und kann somit die mittlere Geschwindigkeit und den Wandabstand mit dieser Schubspannungsgeschwindigkeit dimensionslos darstellen:

$$u^+ = \frac{\bar{u}}{u_\tau}, \quad y^+ = \frac{u_\tau}{\nu} y \quad (7.52)$$

Die in Gl 7.50 dargestellte Bewegungsgleichung vereinfacht sich dann zu

$$\frac{du^+}{dy^+} - \frac{\overline{u'v'}}{u_\tau^2} = 1 \quad (7.53)$$

Wegen der starken Disziplinierung können in unmittelbarer Wandnähe keine Querfluktuationen v' existieren, hier entfällt also die turbulente Schubspannung $\overline{u'v'} = 0$. Gl. 7.53 lässt sich dann direkt integrieren und mit der Nebenbedingung $u^+(y^+ = 0) = 0$ ergibt sich das bekannte Ergebniss der viskosen Unterschicht:

$$u^+ = y^+ \quad (7.54)$$

Für den Bereich in einiger Entfehnung von der Wand kann man andererseits davon ausgehen, dass der Anteil der turbulenten Schubspannung überwiegt, d.h. $-\overline{u'v'} = u_\tau^2$. Mit diesem Wissen alleine lässt sich Gl 7.53 noch nicht lösen, man kann jedoch dimensionsanalytisch einen Parameter κ und einen Ansatz für $d\bar{u}/dy$ finden, der integriert die logarithmische Form

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C \quad (7.55)$$

ergibt. Die beiden Parameter κ – die v.Kármán-Konstante – und C können dann empirisch ermittelt werden und ergeben sich für glatte Wände nahezu universell zu $\kappa \approx 0,41$ und $C \approx 5$. Einige Messergebnisse sind in Abb. 7.17 dargestellt³

³Es sei darauf hingewiesen, dass in dieser Darstellung nicht der natürliche Logarithmus, sondern \log_{10} gewählt wurde, was eine andere v.Kármán'sche Konstante ergibt.

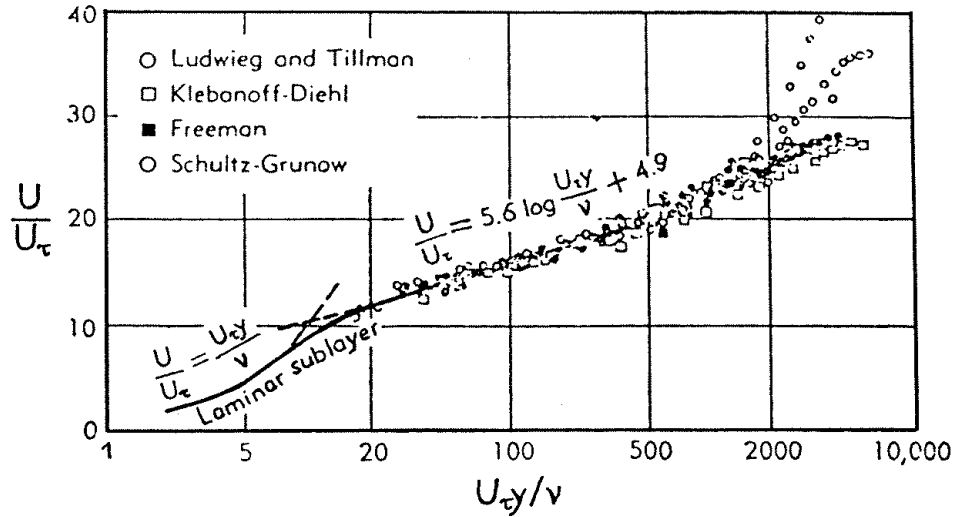


Abbildung 7.17: Messergebnisse zum Wandgesetz

7.5.2.2 Der äußere Bereich

Mit zunehmendem Wandabstand liefert die universelle logarithmische Verteilung zu niedrige Werte für u^+ , was auf die zunehmende Anisotropie der großen Wirbel zurückzuführen ist. Da dieser Bereich von den äußeren Bedingungen der Strömung stark abhängt, lassen sich keine universellen Gesetzmäßigkeiten a priori angeben. Dennoch hat man festgestellt, dass sich die Geschwindigkeitsprofile mit bemerkenswerter Genauigkeit durch eine Kurvenschar mit nur einem einzigen freien Parameter zurückführen lassen. *Coles (1956)* hat ein Gesetz verfasst, dass an dem Verlauf von Nachläufen hinter festen Körpern orientiert ist:

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C + \frac{F}{\kappa} \omega\left(\frac{y}{\delta}\right) \quad (7.56)$$

Die Nachlauffunktion ω dient als Skalierungsgröße und steigt von 0 (an der Wand) auf den Wert 2 (am Grenzschichtrand). Diese Funktion wurde von *Coles* rein numerisch verwendet, es haben sich allgemein trigonometrische Formulierungen etabliert:

$$\omega = 1 + \sin \frac{\pi}{2} \left(2 \frac{y}{\delta} - 1 \right) \quad (7.57)$$

Es muss nun nur eine Beziehung für den freien Parameter F angegeben werden. Diese Funktion stellt letztlich den Zusammenhang zu den integralen (und makroskopischen) Eigenschaften der Grenzschicht her. Mit der Geschwindigkeit am Grenzschichtrand u_e und der analog zu Gl. 7.52 dimensionslos gemachten Grenzschichtdicke δ hat *Coles* zunächst wie folgt angegeben:

$$F = \frac{\kappa}{2} \left[\frac{u_e}{u_\tau} - \frac{1}{\kappa} \ln \delta^+ - C \right] \quad (7.58)$$

Die Zusammenhänge wurden rein empirisch durch Korrelation einer großen Menge experimenteller Daten gewonnen. Mit einer anderen Formulierung für F (dann $\Pi(x)$ genannt)

wurde Gl. 7.56 sogar auf Grenzschichten mit Druckgradienten erweitert, wobei *Bradshaw (1976)* kritisch anmerkt, dass die Vorgeschichte eines Druckgradienten sicherlich nicht durch eine lokale Formulierung erfasst werden kann. Der Erfolg einer derartigen Korrelation beruht vornehmlich auf der Tatsache, dass bereits das logarithmischen Wandgesetzes aus der Betrachtung einer Strömung ohne Druckgradient entstand.

Die Formulierungen von *Coles* sind hilfreich, wenn bei bekannten integralen Größen das Grenzschichtprofil rekonstruiert werden muss. Da zu Berechnung von F einige Größen vorgegeben werden müssen (u_e , δ , u_τ) kann der Nachlauf-ähnliche Bereich turbulenter Grenzschichten jedoch nicht durch eine vereinfachte Entwicklungsgleichung beschrieben werden.

7.5.2.3 Integralmethoden

Die Berechnung des Verlaufes einer turbulenten Grenzschicht längs x geschieht oft mit Hilfe von „Integralmethoden“ – Ziel ist es dabei eine Transportgleichung für einige integrale Grenzschichteigenschaften aufzustellen. Als Grundlage dient hierbei die Grenzschichtgleichung in der bekannten Form

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{dp}{dx} - \mu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \rho \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} \quad (7.59)$$

zusammen mit der Kontinuitätsbedingung:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (7.60)$$

Dieses Gleichungssystem wird nun quer zur Strömungsrichtung integriert. Dabei werden einige Hilfsgrößen eingeführt:

1. Verdrängungsdicke:

$$\delta^* = (\delta_1) = \int_0^{\delta(\infty)} \left(1 - \frac{\bar{u}}{u_0}\right) dy \quad (7.61)$$

2. Impulsverlustdicke:

$$\theta = (\delta_2) = \int_0^{\delta(\infty)} \frac{\bar{u}}{u_0} \left(1 - \frac{\bar{u}}{u_0}\right) dy \quad (7.62)$$

3. Formparameter

$$H = (H_{12}) = \frac{\delta^*}{\theta} \quad (7.63)$$

Es ergibt sich dann die „Kármánsche Impulsgleichung“:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{2} (H + 2) \frac{\theta}{q} \frac{dp}{dx} + \frac{\tau_W}{2q} \quad \text{mit} \quad q = \frac{\rho}{2} u_0^2 \quad (7.64)$$

Setzt man $q(x)$ und dp/dx als bekannt voraus, so bietet sich eine Lösungsmöglichkeit für $\theta(x)$ an, wenn es gelingt, für H und τ_W Hilfsgleichungen zu finden. Ein Ansatz ist die Nutzung der Integralgleichung der kinetischen Energie, die sich ebenfalls aus der Kontinuitätsgleichung und dem Impulssatz gewinnen lässt. An dieser Stelle sei auf die Ausführungen in der Vorlesung „Airfoil Aerodynamics“ (*Radespiel (2008)*), sowie auf die zugehörige Literatur, insbesondere die Veröffentlichung von *Drela und Giles (1987)* verwiesen.

7.5.3 Turbulenzstruktur

Abbildung 7.18 zeigt die in einer turbulenten Wandgrenzschicht gemessenen Turbulenzintensitäten $\sqrt{u'^2}/u_{\tau}$, $\sqrt{v'^2}/u_{\tau}$, $\sqrt{w'^2}/u_{\tau}$, im inneren Bereich. Diese Verteilungen finden sich in allen turbulenten Grenzschichten (ohne Druckgradienten) in ähnlicher Form. Bemerkenswert ist, dass die wandnormale Komponente v' unabhängig von der Reynoldszahl ist, während die Längskomponente u' bei größeren Wandabständen eine Sensitivität gegenüber der (lokalen) Reynoldszahl entwickelt.

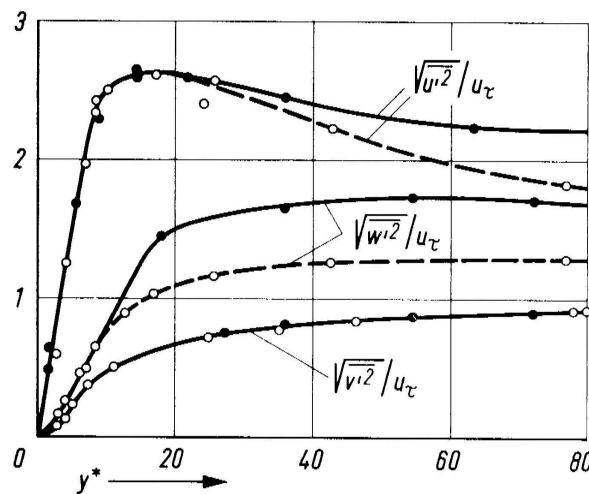


Abbildung 7.18: Verteilung der Turbulenzintensitäten in einer Wandgrenzschicht; durchgezogen $Re \approx 5 \cdot 10^5$, gestrichelt $Re \approx 4 \cdot 10^5$

Abb. 7.19 zeigt die Verteilungen der Reynolds'schen Schubspannung $-\overline{u'v'}/u_{\tau}^2$ und der Newton'schen Schubspannung $\nu(d\bar{u}/dy)/u_{\tau}^2$, zusammen mit dem Korrelationskoeffizienten $-\overline{u'v'}/\sqrt{u'^2 v'^2}$. Die Messung bestätigt sehr gut die Annahme, dass in der viskosen Unterschicht $y^+ < 5$ die Newton'sche, im Bereich des logarithmischen Wandgesetzes $50 < y^+ < 300$ jedoch die turbulente Schubspannung überwiegt.

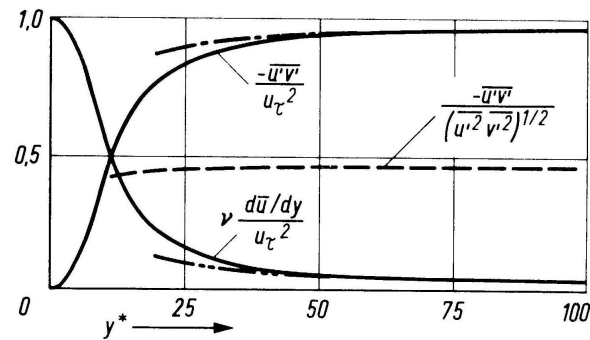


Abbildung 7.19: Verteilung der Newton'schen und der turbulenten Schubspannung in einer Wandgrenzschicht

Aussagen über den Energiehaushalt im inneren Bereich erhält man, indem Gl. 7.50 mit \bar{u} multipliziert, nach y differenziert und auf folgende Form bringt:

$$-\overline{u'v'} \frac{d\bar{u}}{dy} + \nu \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2 = \frac{\tau_W}{\rho} \cdot \frac{d\bar{u}}{dy} \quad (7.65)$$

Die einzelnen Glieder sind nun (in der aufgetragenen Reihenfolge) die Turbulenz-Produktion aus den Reynolds'schen Spannungen, die sog. direkte Dissipation durch die Krümmung des mittleren Geschwindigkeitsprofils und die Energiezufuhr aus dem mittleren Strömungsgradient. Um die Terme dimensionslos zu machen multipliziert man mit ν/u_τ^4 . Die Ergebnisse sind in Abb. 7.20 aufgetragen.

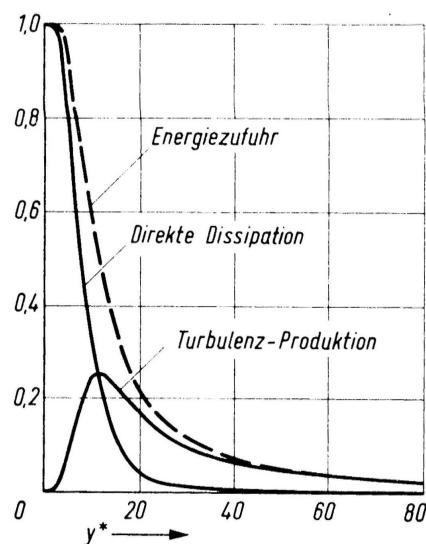


Abbildung 7.20: Energiehaushalt im inneren Bereich der turbulenten Grenzschicht

Es lässt sich erkennen, dass direkte Dissipation nur in einem sehr eng begrenzten Gebiet in direkter Wandnähe stattfindet und bereits im Bereich der logarithmischen Verteilung $y^+ > 50$ ohne Bedeutung ist. Die Turbulenzproduktion besitzt ein Maximum bei $y^+ \approx 11$ mit einem Maximalwert

$$\left(-\overline{u'v'} \frac{d\bar{u}}{dy} \right)_{\max} = 0,25 \cdot \frac{u_\tau^4}{\nu} \quad (7.66)$$

Da – wie zuvor diskutiert – die Turbulenz zunächst in Form einer Längsgeschwindigkeitschwankung u' produziert wird, ist es nicht verwunderlich, dass auch die Turbulenzintensität $\sqrt{u'^2}$ an dieser Stelle ein Maximum besitzt.

Mitunter lässt sich beobachten, dass in Wandnähe die postulierten Ähnlichkeitsgesetze Gl. 7.54 und Gl. 7.55 nicht eingehalten werden, obwohl die den Vorüberlegungen zufolge universell sein müssten. *Bradshaw (1967a)* führt dies zurück auf sog. „inaktive Bewegungen“ – drehungsfreie, sehr niederfrequente Schwankungen, die mit den großskaligen Bewegungen im äußeren Bereich der Grenzschicht in Zusammenhang stehen, aber nicht zur Reynolds-Spannung beitragen.

Die zu obigen Abbildungen äquivalenten Verteilungen im äußeren Bereich der Grenzschicht sind in Abb. 7.21 und Abb. 7.22 dargestellt. Während man für den inneren Bereich zur Entdimensionalisierung die Schubspannungsgeschwindigkeit verwendet (da diese universell ist), bezieht man die Geschwindigkeitskomponenten im äußeren Bereich meist auf die Geschwindigkeit am Grenzschichtrand u_e (bzw. in den Abbildungen u_0) und Längen auf die Grenzschichtdicke δ .

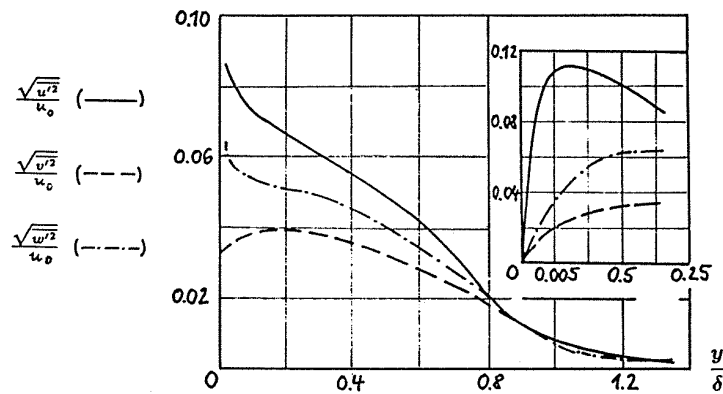


Abbildung 7.21: Verteilung der Turbulenzintensitäten im äußeren Bereich

In der Energiebilanz bleiben aus Gl. 3.51 für eine ebene Grenzschicht die folgenden Terme erhalten, die durch Multiplikation mit δ/u_τ^3 dimensionslos gemacht wurden:

- Konvektion

$$\frac{\delta}{2u_\tau^3} \left[\bar{u} \frac{\partial q^2}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial q^2}{\partial x} + \bar{y} \right]$$

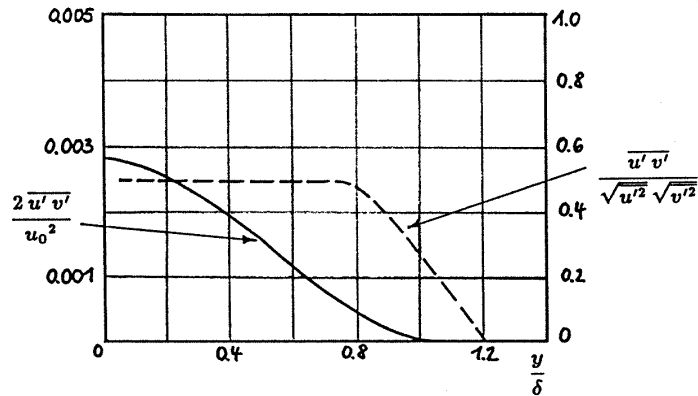


Abbildung 7.22: Verteilung der turbulenten Schubspannung im äußeren Bereich

- Produktion

$$-\frac{\delta}{u_\tau^3} \overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$

- Dissipation

$$\frac{\delta \epsilon}{u_\tau^3}$$

- Diffusion

$$\frac{\delta}{u_\tau^3} \frac{\partial}{\partial y} \left[v' \frac{q^2}{2} + \frac{p'}{\rho} \right]$$

Die entsprechende Verteilung im äußeren Bereich zeigt Abb. 7.23. Im äußeren Bereich werden die Glieder sehr klein, weswegen sie für $y/\delta > 0,6$ in zehnfach vergrößertem Massstab dargestellt sind. Im wandnäheren Bereich der Grenzschicht halten sich die Produktion und die Summe aus Dissipation und Diffusion die Waage, erst in der Nähe des Grenzschichtrandes gewinnt auch die Konvektion an Bedeutung. Dies ist erklärbar durch die Tatsache, dass die großen Wirbel in der Grenzschicht die Energieträger sind und diese sich im Randbereich der Grenzschicht formieren. Sie stehen weder mit dem Erzeugungsprozess noch mit der Dissipation in direktem Zusammenhang, die eher auf den kleineren Skalen arbeiten.

Es sei ergänzend angemerkt, dass sich der Energiehaushalt bei Grenzschichten mit Druckgradient ändert: Die Produktion findet dann eher im mittleren Bereich ein Maximum und die Diffusion ist von wesentlich größerer Bedeutung in der gesamten Grenzschicht. Qualitativ hat die Grenzschicht bei Druckgradient einen ähnlichen Energiehaushalt wie die freie Scherschicht, siehe Abb. 7.46.

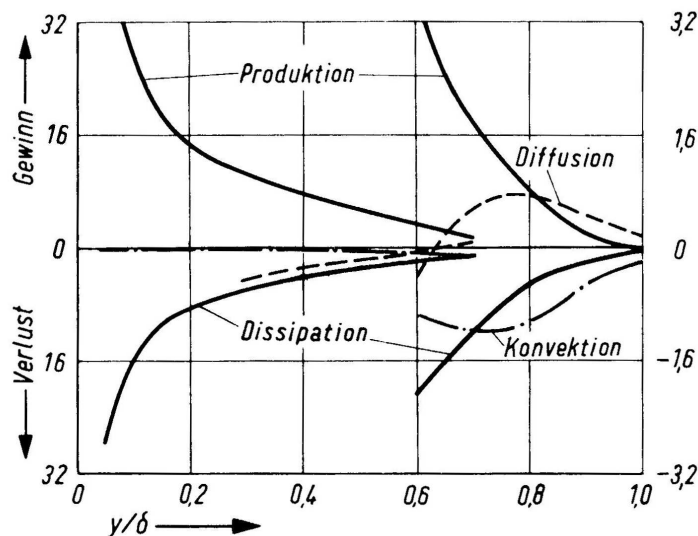


Abbildung 7.23: Energiehaushalt im äußeren Bereich der turbulenten Grenzschicht

7.6 Andere turbulente Strömungsformen

Zunächst sei eine Zusammenstellung von *Kovaszny (1965)* vorangestellt, in der eine Übersicht über die Größe örtlicher Schwankungsintensitäten (Turbulenzgrad Tu_{lokal}) für einige häufig vorkommende Strömungen gegeben wird:

$$Tu = \frac{1}{\bar{u}} \sqrt{\frac{1}{3} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})} \cdot 100\% \approx \frac{\sqrt{\overline{u'^2}}}{\bar{u}} \cdot 100\% \Big|_{\text{Isotropie}} \quad (7.67)$$

Strömungsform	Tu_{lokal} in [%]
Strahl	30 ... 60
Kármánsche Wirbelstraße	5 ... 15
Turbulente Grenzschicht	4 ... 10
Nachlauf	2 ... 5
Gitter	0.3 ... 2.0
Windkanal	< 0.05 ... 0.1 ... 0.5

Die größten örtlichen Turbulenzgrade treten bei turbulenten Strahlen in der Randzone auf. Die absolute Turbulenzintensität ist am Rand bereits relativ gering, denn ihr Maximum liegt in der Strahlmitte, aber bezogen auf die dort sehr geringen mittleren Geschwindigkeiten wird ihr relativer Wert sehr hoch, so dass z.B. Schwankungsmessungen mit Hilfe eines Hitzdrahtes unsicher werden (siehe Abb. (7.26)).

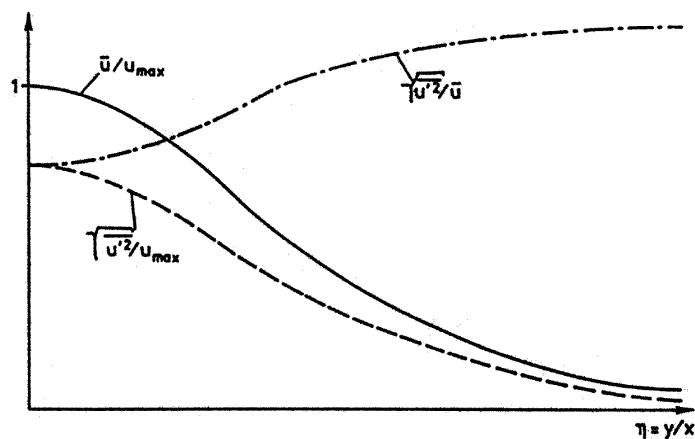


Abbildung 7.24: Turbulenzgrad am Strahlrand

Beim turbulenten Nachlauf liegt der Fall umgekehrt: Wegen der am Strömungsrand maximalen mittleren Geschwindigkeit treten in Strömungsmitte die höchsten relativen Turbulenzintensitäten auf.

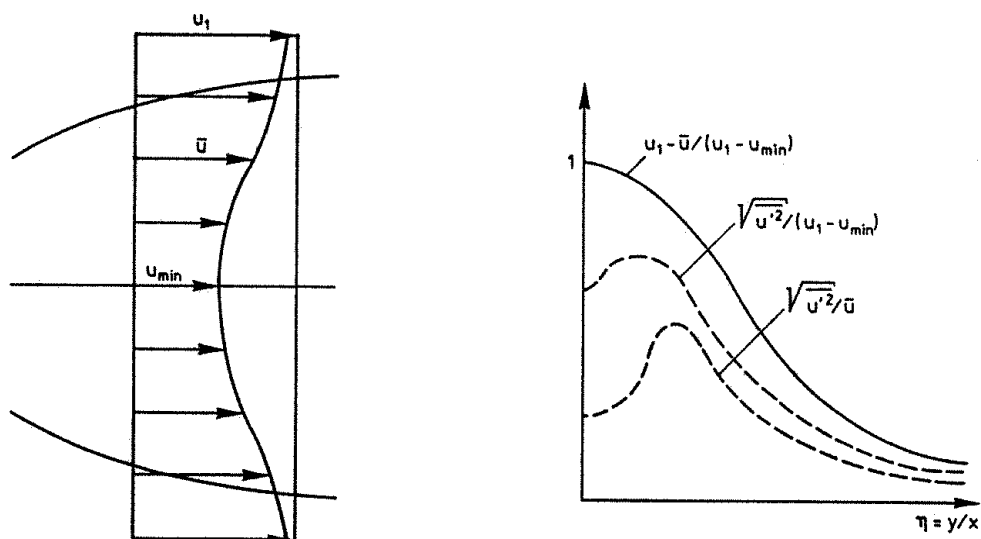


Abbildung 7.25: Turbulenzgrad im turbulenten Nachlauf

Die annähernd isotrope turbulente Strömung hinter einem Gitter ist analog zu einer Nachlaufströmung in großer Entfernung vom Erzeugungsort dar. Daher sind niedrige Turbulenzgrade

zu erwarten. Die experimentelle Untersuchung wird durch den geringen Schwankungspegels erschwert, andererseits ist aber der systematische Messfehler vernachlässigbar. Im folgenden soll näher auf die Strukturen einiger spezieller Strömungsformen eingegangen und diese anhand gemessener Verläufe diskutiert werden.

7.6.1 Der turbulente Freistrah (rund)

Betrachtet man einen turbulenten Freistrah über seine gesamte Länge, so findet man mehrere, voneinander unterscheidbare Bereiche:

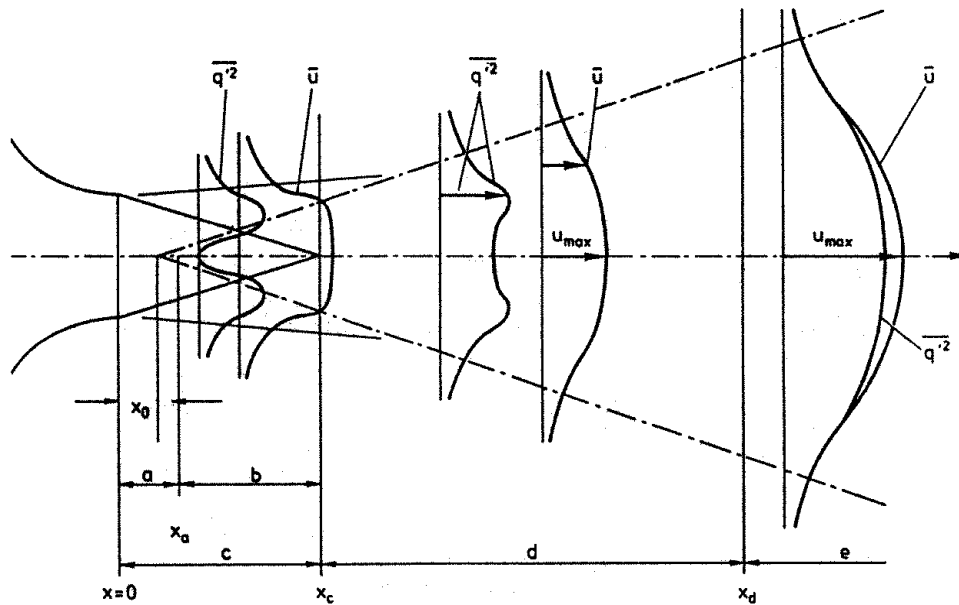


Abbildung 7.26: Geschwindigkeitsprofile beim turbulenten Freistrah

- a) Anlaufstrecke für die Scherschicht
(Umwandlung der Wandgrenzschichtstrukturen)
 $x_a = f(\text{Wandgrenzschicht})$
- b) Ausgebildete Scherschicht (Gleichgewichtsstruktur)
- c) Gesamter Scherschichtbereich
Länge des Potentialkerns: $x_c (\text{rund}) \approx 5d$; $x_c (\text{eben}) \approx 6d$
- d) Umwandlungsbereich Scherschicht – Strahl
Anlaufstrecke des Strahls:
 $x/d_{\text{rund, Tu}} \approx 70$; $x/d_{\text{eben, Tu}} \approx 110 \dots 130$
 $x/d_{\text{rund, } \bar{u}} \approx 20$; $x/d_{\text{eben, } \bar{u}} \approx 40$
- e) Vollständig ausgebildeter Strahl mit virtuellem Ursprung bei x_0

Die theoretische Erfassung dieser Strömung ist auf „einfache“ Weise nur in den ausgebildeten Bereichen möglich. Daher soll der Bereich e) ($x > x_d$) näher betrachtet werden:

1. Die mittlere Geschwindigkeitsverteilung lässt sich gut theoretisch berechnen. Abb. 7.27 zeigt den experimentell ermittelten Verlauf \bar{u}/u_{\max} im Vergleich mit zwei berechneten Verläufen:

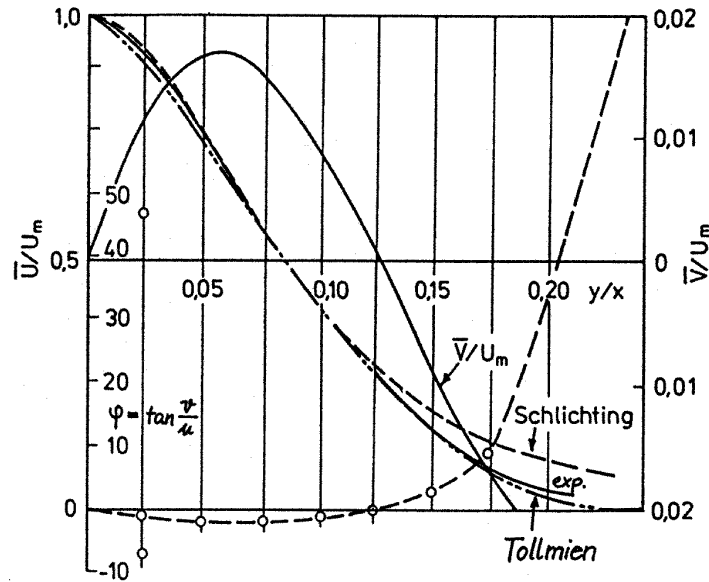


Abbildung 7.27: Geschwindigkeitsprofile: Vergleich Theorie — Experiment

Tollmien (1926) verwendete den Prandtlischen Mischungswegansatz mit $l_m \sim b$ und *Schlichting* (1961) einen Ansatz $\varepsilon_M = \text{const.}$ Der Vergleich zwischen Theorie und Experiment liefert die für diese Art von Strömungen typischen Ergebnisse:

- Die Mischungsweghypothese liefert einen zu spitzen Verlauf in der Strahlmitte wegen dem Versagen des Prandtlischen Ansatzes bei Extremwerten der mittleren Geschwindigkeit.

Es ist nicht einzusehen, dass der Impulsaustausch und somit die wirksame turbulente Zähigkeit in einem Bereich maximaler Turbulenzbewegung gleich null sein sollte. Nach *Prandtl* ist jedoch

$$\varepsilon = l_m^2 \left| \frac{du}{dy} \right|, \quad (7.68)$$

und man erhält $\varepsilon = 0$ im Scheitelbereich der Strömung.

Berechnet man aus dem gemessenen Geschwindigkeitsverlauf l_m , so ergibt sich näherungsweise der in Abb. 7.28 dargestellte Kurvenverlauf (in der Strahlmitte ist $\varepsilon \neq 0$):

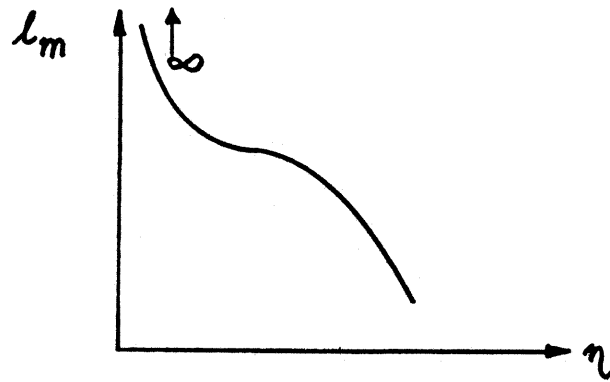
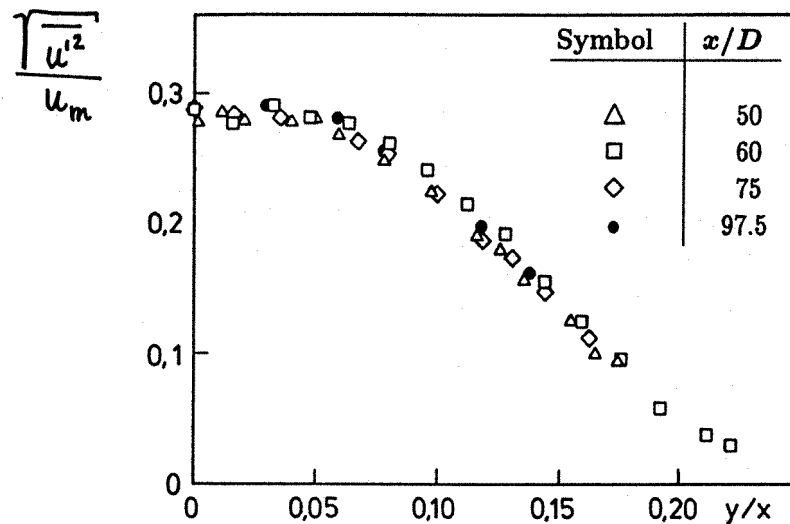


Abbildung 7.28: Radiale Abhängigkeit des Mischungsweges

- Die Annahme $\varepsilon = \text{const.}$ liefert eine gute Übereinstimmung im Mittelbereich der Strömung, versagt jedoch am Strömungsrand, also dort wo diese Strömung nur intermittierend turbulent ist. Diese Beobachtung gibt Anlass zu der Vermutung, dass tatsächlich im turbulenten Bereich gilt: $\varepsilon = \text{const.}$

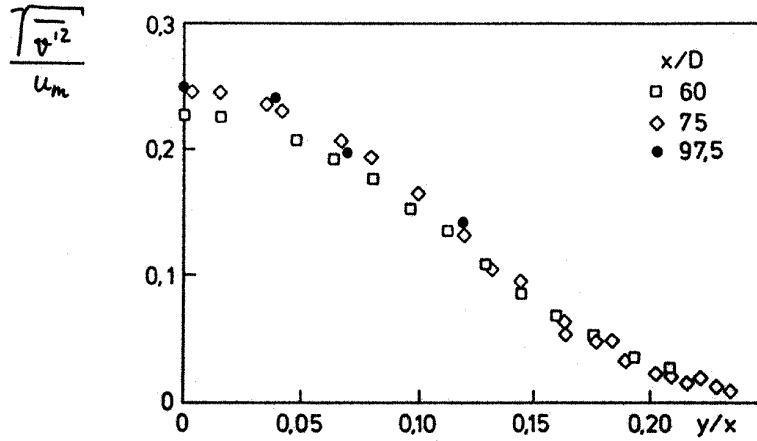
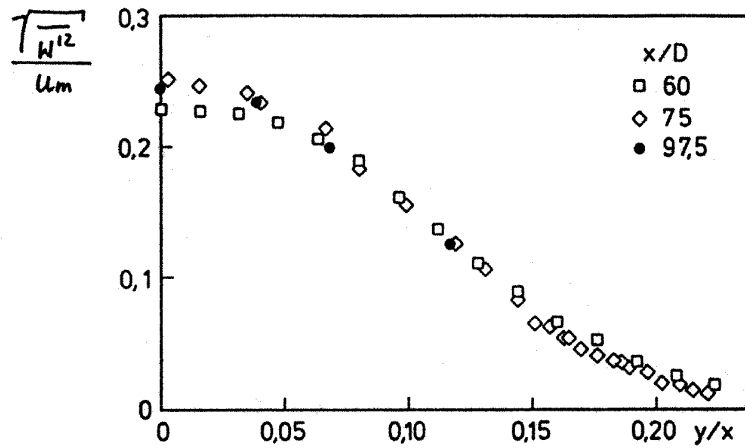
Aus der mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung ermittelten v/u_{\max} — Verteilung erkennt man die Größe des Entrainments.

- Die gemessenen Turbulenzintensitäten für den runden Strahl sind in den folgenden drei Diagrammen dargestellt (*Wyganski und Fiedler (1969)*):

Abbildung 7.29: Intensität der u' -Fluktuationen im runden Strahl

Die Maximalwerte der Intensität liegen bei 28 % für die Längskomponente und bei 25 % für die beiden Querkomponenten.

Die folgenden Punkte seien als typisch hervorgehoben:

Abbildung 7.30: Intensität der v' -Fluktuationen im runden StrahlAbbildung 7.31: Intensität der w' -Fluktuationen im runden Strahl

- Beide Transversal-Fluktuationsschwankungen (v' und w') besitzen überall etwa gleiche Intensitäten, die wiederum geringer sind als die Intensität der Longitudinal-Fluktuation u' .
- Die u' -Intensität besitzt gegenüber den v' – und w' –Intensitäten einen flacheren Verlauf in dem Sinne, dass sie im Bereich hoher Werte von $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \sqrt{\overline{u'^2}}$ noch hohe Werte aufweist. Das lässt sich anhand des Produktionsmechanismus $\overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \rightarrow \sqrt{\overline{u'^2}}$ nachvollziehen.

(Ein ähnliches Verhalten zeigen der zweidimensionale und der radiale Strahl.)

3. Die in Abb. 7.32 dargestellte normierte Schubspannungsverteilung $\overline{u'v'}/\bar{u}_{\max}^2 = f(\eta)$ besitzt ein Maximum bei etwa $\partial(\bar{u}/\bar{u}_{\max})/\partial\eta = \max$ und hat bei $\eta = 0$ einen Nulldurchgang.

Die durchgehend eingezeichnete Kurve, die mit den Mittelwerten gut übereinstimmt, ist mit Hilfe der Grenzschichtgleichung und der Kontinuitätsgleichung aus dem mittleren Geschwindigkeitsprofil $\bar{u}/u_{\max} = f(\eta)$ gewonnen worden (Test der Messungen).

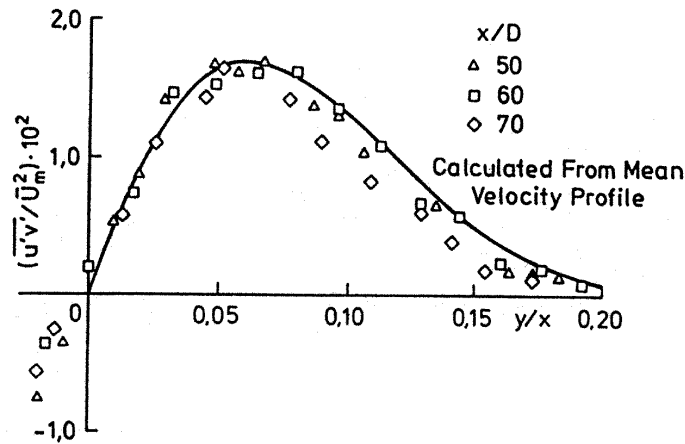


Abbildung 7.32: Schubspannungsverteilung

4. Die Verteilung des Energieflusses ist in Abb. 7.33 gezeigt.

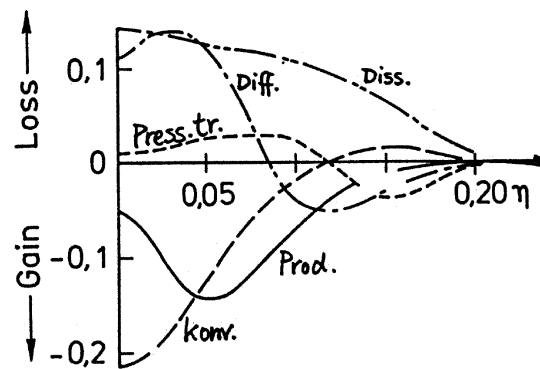


Abbildung 7.33: Verteilung des Energieflusses

Bemerkenswert ist die starke Homogenität der Dissipation im Hauptbereich der Strömung. Der Fall *Produktion* \approx *Dissipation*, der für die Anwendbarkeit der Mischungsweghypothese Voraussetzung ist, trifft etwa bei $\eta = 0.06 \dots 0.14$ zu. In diesem Bereich stimmt der theoretische Verlauf von \bar{u}/u_{\max} der Tollmienschen Rechnung daher auch gut mit den Messwerten überein.

5. Die Verteilung des Intermittenzfaktors über den Querschnitt des runden Strahls wiederum zeigt Abb. 7.34.

Die Messpunkte wurden mit einer direkten Messmethode gewonnen. Daneben ist der Verlauf eingezeichnet, wie er sich indirekt aus einer Messung der Kurtosis ergibt. Dieser Verlauf weicht augenscheinlich von dem direkt gemessenen Verlauf, insbesondere im Außenbereich, relativ stark ab.

Townsend (1948) hat diese indirekte Methode der Intermittenzbestimmung erstmalig im Zusammenhang mit seinen Arbeiten zur turbulenten Nachlaufströmung angewendet:

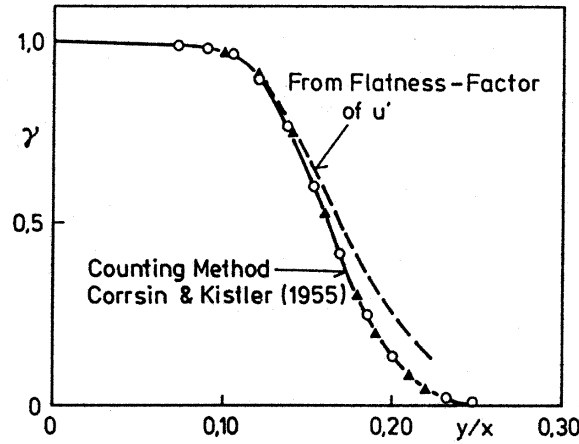


Abbildung 7.34: Verteilung des Intermittenzfaktors

Betrachtet man eine Eigenschaft q , die innerhalb des Turbulenzbereiches stets positiv und endlich und außerhalb, d.h. im Potentialbereich, stets gleich null ist, so gilt:

$$\bar{q} = \Upsilon \bar{q}_T \quad \text{bzw.} \quad \overline{q^2} = \Upsilon^2 \bar{q}_T^2 \quad (7.69)$$

Stellt man die gleiche Betrachtung für q^2 an, so ergibt sich:

$$\overline{q^2} = \Upsilon \bar{q}_T^2 \quad (7.70)$$

Aus der Zusammenfassung beider Ergebnisse folgt:

$$\Upsilon = \frac{\left(\frac{\overline{q^2}}{\bar{q}^2} \right)_T}{\frac{\overline{q^2}}{\bar{q}^2}} \quad (7.71)$$

Es wird nun angenommen, dass unter der Voraussetzung von homogener statistischer Verteilung der Intermittenz im Turbulenzbereich die Kurtosis der Turbulenzfluktuation (u') im gesamten Turbulenzbereich den gleichen Wert besitzt. In der Tat gilt erfahrungsgemäß in voll ausgebildeter Turbulenz bei $\Upsilon = 1$ der Wert: $k \approx 3$ (etwa Gaußischer Wert).

Setzt man dann $q = u'^2$, so erhält man die Beziehung

$$\Upsilon = \frac{K(u')_T}{K(u')} \quad (7.72)$$

Im allg. verwendet man die Kurtosis von $(\partial u' / \partial t)$, jedoch haben *Corrsin* und *Kistler* (1954) darauf hingewiesen, dass der Wert von $(\partial u' / \partial t)^2$ im Außenbereich nicht vollständig verschwindet und man daher mit gewissen Ungenauigkeiten rechnen muss.

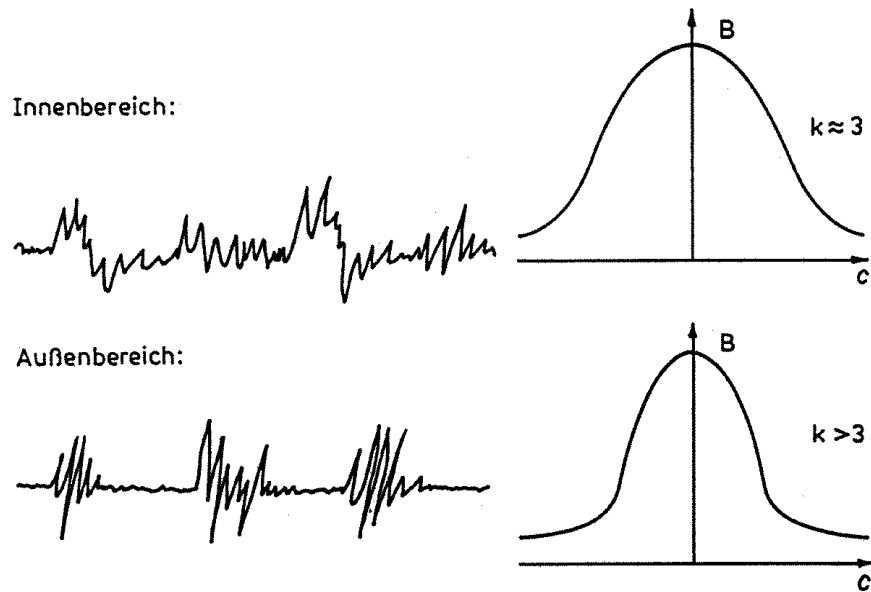


Abbildung 7.35: Kurtosis im Außen- und Innenbereich des Strahls

7.6.2 Die ebene Nachlaufströmung

Nach den Untersuchungen von *Townsend (1956)* ist der für diese Strömung asymptotisch erreichbare Zustand der Selbst-Ähnlichkeit erst bei Werten $x/D \geq 500$ annähernd erreicht.

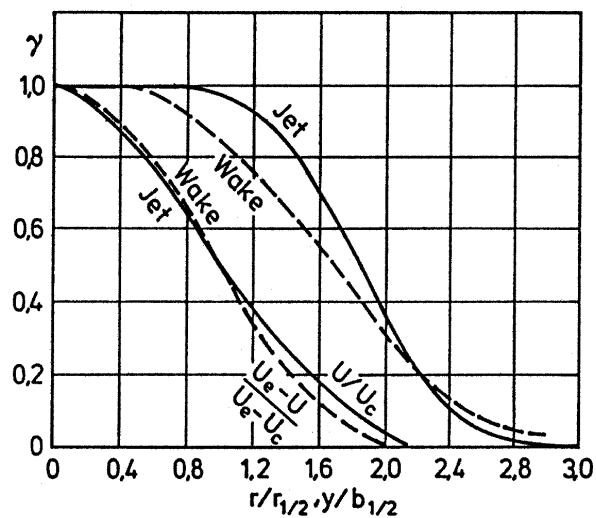


Abbildung 7.36: Vergleich zwischen Freistrahls und Nachlauf

Vergleicht man die Profile der mittleren Geschwindigkeitsverteilungen eines runden Freistrahls und eines ebenen Nachlaufs dergestalt, dass man für beide Profile den Punkt der halben Maximalgeschwindigkeit auf den gleichen Abszissenwert legt, so findet man einen steileren Verlauf von u^*/u_{\max}^* für den Nachlauf (Delle) als für den Strahl (Abb. 7.36).

Dieses Verhalten lässt zunächst keine direkten Schlüsse bezüglich der Wirbelstrukturen zu; umsomehr dagegen die in der obigen Abbildung ebenfalls eingezeichneten Intermittenzverteilungen, aus denen man wegen der bedeutend größeren Breite (Streuung) im Fall der Nachlaufströmung erkennt, dass dort die für die Ausbildung der Trennfläche verantwortlichen „großen Wirbel“ stärker bzw. größer sein müssen als im Freistrah.

Die Berechnung der mittleren Geschwindigkeitsverteilung im fernen Nachlauf liefert mit der Annahme $\varepsilon_M = \text{const.}$ eine gute Übereinstimmung mit den experimentellen Werten im Mittelbereich der Strömung. Im Außenbereich liefert die Rechnung — ähnlich wie beim Freistrah — zu große Werte.

Townsend (1956) hat versucht, die Theorie zu verbessern, indem er zur Berücksichtigung der intermittierenden Strömungsberandung für die Wirbelzähigkeit folgenden Ansatz verwendete:

$$\varepsilon_M = \varepsilon_{M_T} \Upsilon \quad \text{mit} \quad \varepsilon_{M_T} = \text{const.} \quad (7.73)$$

Zur Vereinfachung der Rechnung verwendete er anstelle des Gaußschen Verteilungsgesetzes für Υ die Funktion:

$$\Upsilon \approx \frac{1}{1 + \text{const.} \eta^4} \quad (7.74)$$

Die derart verbesserte Theorie lieferte das in der folgenden Abbildung dargestellte sehr schöne Ergebnis, wobei über die gesamte Strömungsbreite eine gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment erzielt werden konnte.

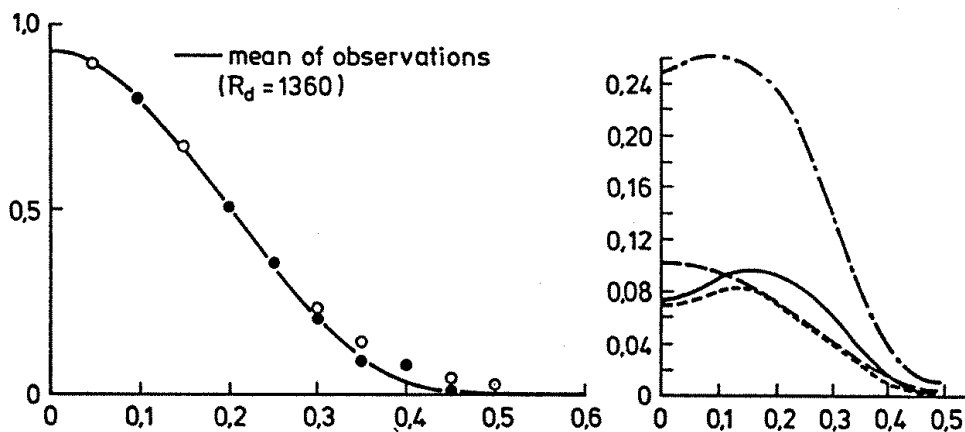


Abbildung 7.37: Verteilung der mittleren Geschwindigkeit in einer Nachlaufströmung (links) und relative Turbulenzintensitäten (rechts)

Die Energiebilanz im Nachlauf zeigt große Ähnlichkeit mit der im Strahl ermittelten. Während jedoch beim Strahl die Transportanteile durch Konvektion und Diffusion etwa gleich groß sind, überwiegt die Konvektion beim Nachlauf, während Diffusions- und Drucktransport etwa gleich groß sind (starke Wirbel).

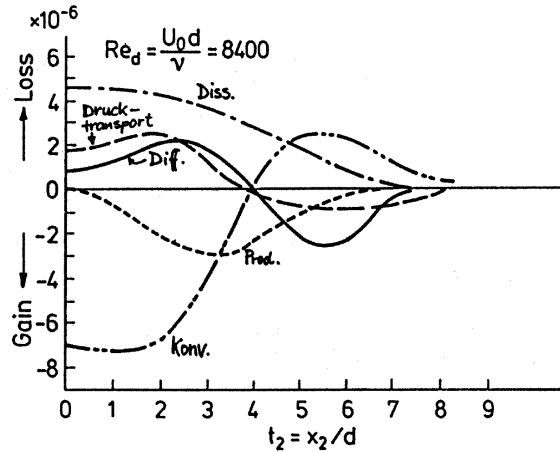


Abbildung 7.38: Energiebilanz im Nachlauf eines Kreiszylinders

7.6.3 Die freie Scherschicht

Die freie Scherschicht besitzt Strahl- und Nachlaufcharakter.

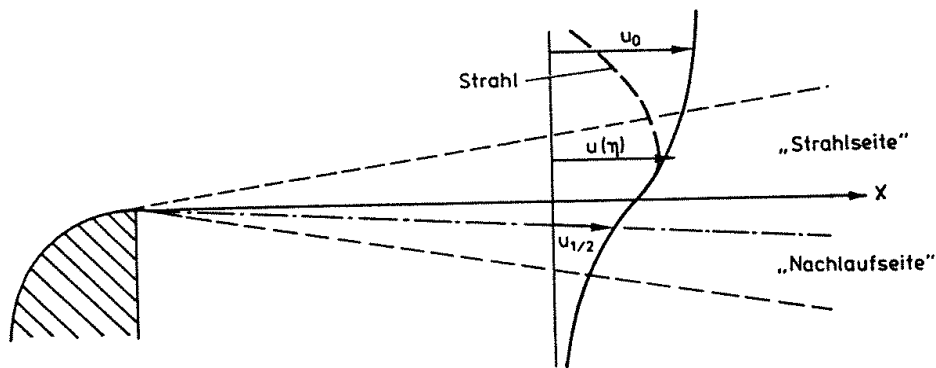


Abbildung 7.39: Zur Geometrie der freien Scherschicht

Sie besitzt eine ähnliche Lösung und erreicht relativ schnell den selbst-ähnlichen Zustand. Die Verteilung der mittleren Geschwindigkeit lässt sich gut durch ein empirisches Gesetz der Form

$$\frac{\bar{u}}{u_0} = 0.5 \left(1 - \tanh \sqrt{k \Delta \eta^4} \right) \quad (7.75)$$

beschreiben. Eine theoretisch mit $\varepsilon_M = \text{const.}$ gewonnene Lösung ist durch das sog. Fehlerintegral gegeben, welches jedoch an den Strömungsberandungen zu geringe Werte ergibt. Bezüglich der Wirbelzähigkeit bedeutet das, dass die Annahme $\varepsilon_M = \text{const.}$ an den Rändern nicht gilt (Intermittenz), man erhält etwa den in Abb. 7.40 dargestellten Verlauf.

Durch die Berichtigung der Randintermittenz gelangt man für den Turbulenzbereich wieder auf $\varepsilon_{M_T} \approx \varepsilon_M / \Upsilon \approx \text{const.}$

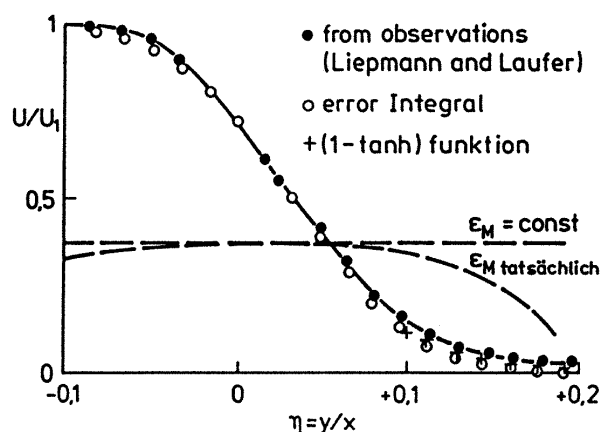


Abbildung 7.40: Mittlere Geschwindigkeitsverteilung in einer Scherschicht

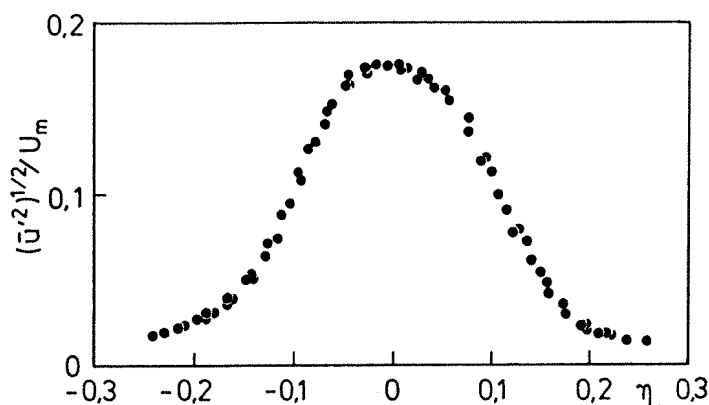


Abbildung 7.41: Axiale Geschwindigkeitsfluktuationen

Abb. 7.41 zeigt die gemittelten Turbulenzintensitäten. Die drei Kurven haben einen ähnlichen glockenförmigen Verlauf. Eine bemerkenswerte Besonderheit liegt in der Lage der Maxima dieser Verlaufskurven:

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\sqrt{\overline{u'^2}}}{u_0} \right|_{\max} &\approx 0.175 && \text{bei } \eta \approx 0 \\
 \left. \frac{\sqrt{\overline{v'^2}}}{u_0} \right|_{\max} &\approx 0.140 && \text{bei } \eta \approx -0.028 \\
 \left. \frac{\sqrt{\overline{w'^2}}}{u_0} \right|_{\max} &\approx 0.150 && \text{bei } \eta \approx -0.030
 \end{aligned} \tag{7.76}$$

Bereits eingangs wurde auf den Einfluss der turbulenten Trennfläche und in diesem Zusammenhang auf die unterschiedlichen Strukturen im rotationsbehafteten und im drehungsfreien Bereich eingegangen. Die turbulente Scherschicht war — nach der turbulenten

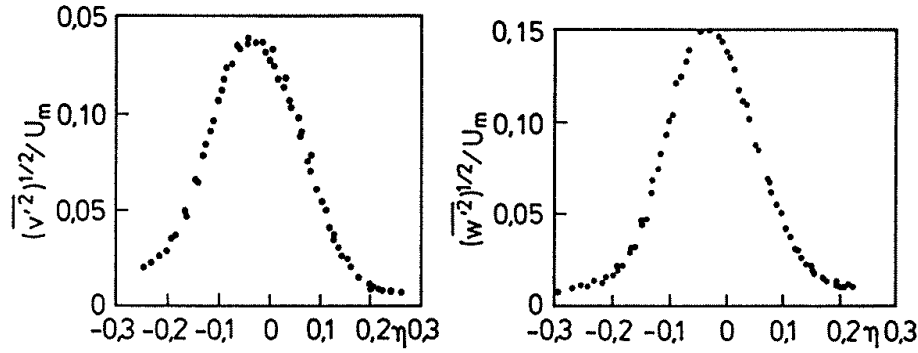


Abbildung 7.42: Laterale und transversale Geschwindigkeitsfluktuationen

Wandgrenzschicht (*Kibens, Kovaszany (1969)*) — die erste Strömungsform, wo mit Hilfe einer speziellen Signalverarbeitung eine echte Trennung der Messwerte des turbulenten und des nicht-turbulenten Bereichs erreicht wurde (*Wyganski, Fiedler (1970)*).

Geht man von der vereinfachenden Annahme aus, dass am Außenrand der Strömung $u_P = 0$ und am Innenrand $u_P = u_0$ ist, so gilt mit $\Upsilon = \Upsilon(\eta)$ für den Innenbereich

$$\bar{u} = \bar{u}_T \Upsilon + u_0 (1 - \Upsilon), \quad (7.77)$$

woraus folgt:

$$\bar{u}_T = \frac{\bar{u}}{\Upsilon} - u_0 \left(\frac{1}{\Upsilon} - 1 \right) \quad (7.78)$$

Für den Außenbereich ergibt sich:

$$\bar{u}_T = \frac{\bar{u}}{\Upsilon} \quad (7.79)$$

Damit erhält man etwa den Kurvenverlauf aus Abb. 7.43. Die Messung zeigt dagegen, dass die Voraussetzungen $u_{Pa} = 0$ und $u_{Pi} = u_0$ nur eine grobe Näherung darstellen. Der tatsächlich gemessene Verlauf von u_P , u_T und Υ gegenüber u ist in Abb. 7.44 dargestellt, welche vornehmlich den Verlauf von u_P erkennen lässt.

Die folgende Abb. 7.45 zeigt die gemessenen Verläufe von $\overline{u_T'^2}$, $\overline{v_T'^2}$, $\overline{w_T'^2}$, wobei $\overline{u_P'^2} \sim 1/\eta^4$ ist (*Phillips (1955)*).

Eine echte Energiebilanz in einer turbulenten Strömung sollte sinnvollerweise ausschließlich für den turbulenten Bereich erstellt werden. In Abb. (7.46) wird ein Vergleich zwischen einer konventionell gemessenen Energiebilanz und der Energiebilanz für den Turbulenzbereich allein in der freien Scherschicht dargestellt.

Aus diesem Vergleich ergeben sich Schlussfolgerungen:

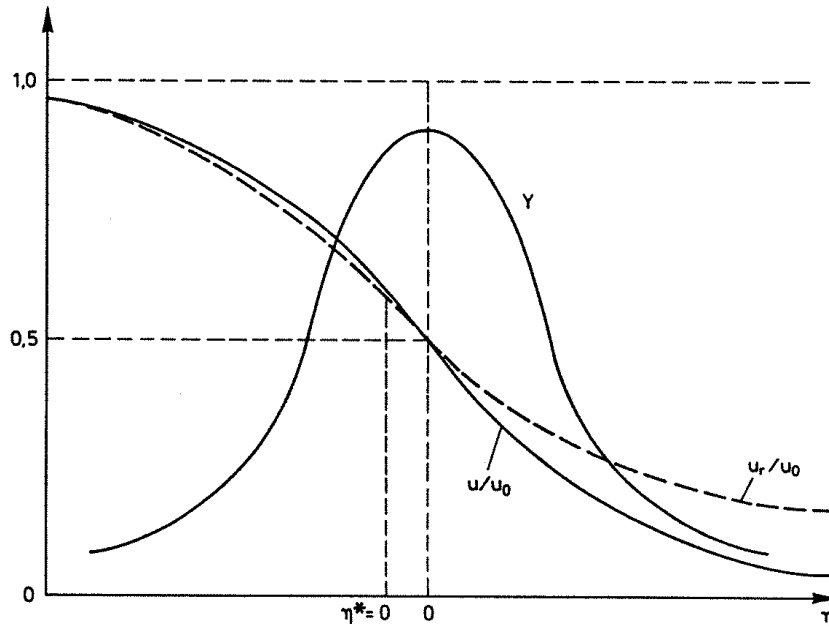


Abbildung 7.43: Intermittenzfunktion und Geschwindigkeitsprofile

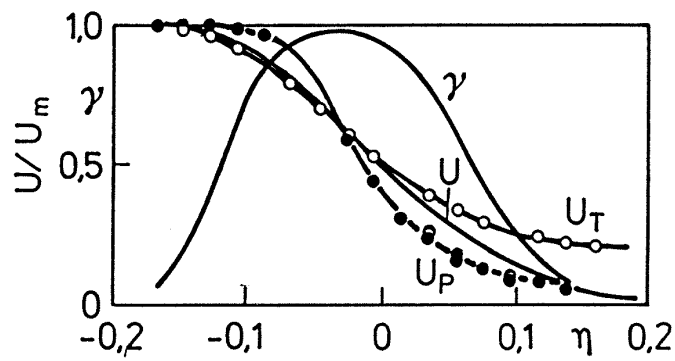


Abbildung 7.44: Verteilung der gemittelten Axialgeschwindigkeiten

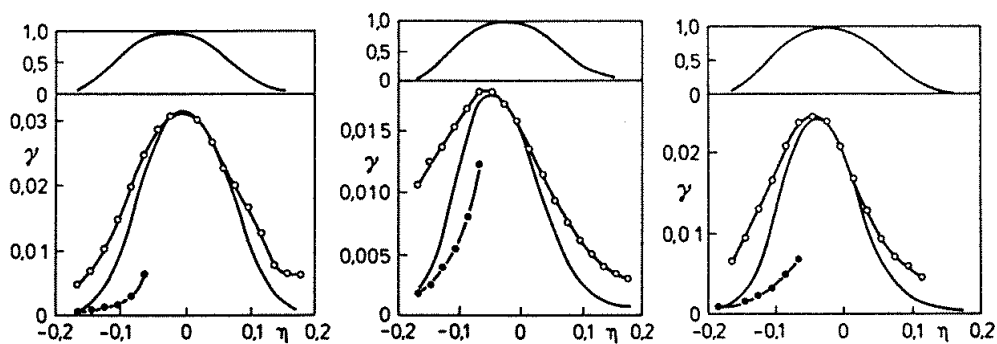


Abbildung 7.45: Mittlere Profile der longitudinalen, lateralen und transversalen Fluktuationen (v.l.n.r.)

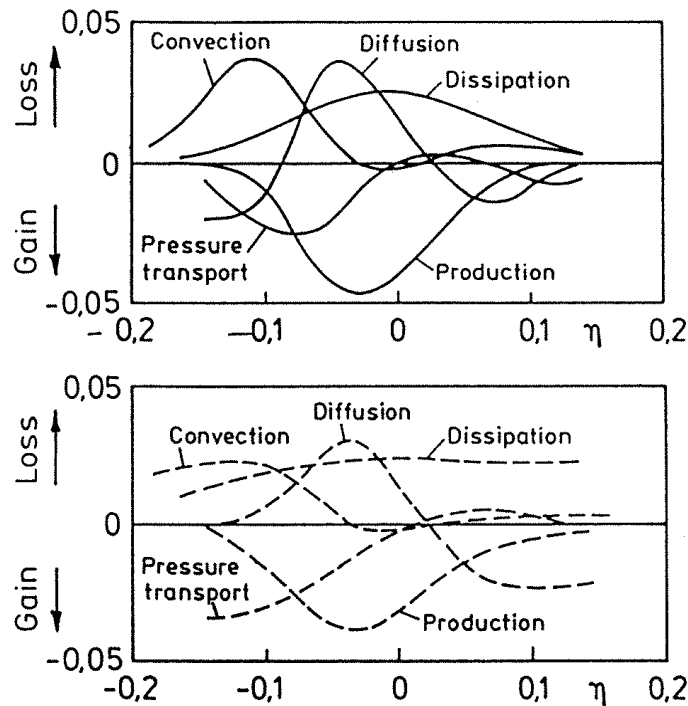


Abbildung 7.46: Energiebilanz der freien Scherschicht: konv.(—) und turb. (- - -)

1. Aus der turbulenten Energiebilanz lässt sich schließen, dass der Energieverlust durch Dissipation über die gesamte Breite des Turbulenzbereiches annähernd konstant ist, d.h., dass die etwa in Strömungsmitte produzierte Energie durch die Transportmechanismen „Diffusion“, „Drucktransport“ und „Konvektion“ so homogenisiert wird, dass die höheren Frequenzanteile gleichmäßig verteilt sind.
2. Der im konventionellen Fall annähernd symmetrische Diffusionsterm ist im Turbulenzbereich asymmetrisch und lässt erkennen, dass in der Tat Turbulenzenergie nur von der Strömungsmitte (aus dem Produktionsgebiet) nach außen zur Niedergeschwindigkeitsseite diffundiert.
3. Die im Außenbereich durch Diffusion erhaltene Energie wird annähernd vollständig dissipiert, da dort alle übrigen Transportmechanismen vernachlässigbar klein sind.
4. Für die Hochgeschwindigkeitsseite entnimmt man der konventionellen Energiebilanz, dass der Energieverlust durch Konvektion gleich ist dem Gewinn durch Diffusion und Drucktransport.

Diese Hälfte der Energiebilanz ist sehr ähnlich der von *Townsend (1956)* für den Nachlauf ermittelten Verteilung.

Die Energiebilanz des turbulenten Bereiches auf der Hochgeschwindigkeitsseite zeigt hingegen, dass der Energieverlust durch Konvektion und Dissipation allein durch einen Gewinn aufgrund des Drucktransports im Gleichgewicht gehalten wird.

5. Allein im Mittelbereich sind die beiden unterschiedlichen Energiebilanzen weitgehend identisch ($\Upsilon \rightarrow 1$). Dort gilt etwa:

Produktion \approx Diffusion + Dissipation

Die Aussagen dieser Untersuchung im turbulenten Bereich sind insbesondere wichtig bezüglich der praktisch sehr bedeutenden Frage nach der Gültigkeit des Konzepts einer allgemeinen Diffusion längs eines Gradienten.

Kapitel 8

Beeinflussung von Strömungen

8.1 Einleitung

In der Technik spielt neben der reinen Kenntnis der Phänomene auch die (aktive) Einflussnahme eine übergeordnete Rolle. In der Strömungsmechanik beispielsweise entsteht aus dem Wissen um die Entwicklung einer turbulenten Grenzschicht zunächst die Möglichkeit eine gewisse Entwicklung vorherzusagen und damit wiederum die Grundlage dafür, eine umströmte Kontur hinsichtlich einer gewünschten Grenzschichtentwicklung auszulegen.

Flatt (1961) definierte einst: „Boundary Layer Control includes any mechanism or process through which the boundary layer of a fluid flow is caused to behave differently than it normally would were the flow developing naturally along a smooth straight surface.“

Diese sehr rigorose Definition hat den Nachteil, dass auch eine Hochauftriebsklappe an einem Profil als „boundary layer control“ angesehen werden müsste, da ja der Strömung künstlich ein geänderter Druckgradient aufgeprägt wird und sie damit gezwungen wird sich anders zu verhalten als sie dies entlang einer glatten, geraden Wand tun würde. Eine geschlossene Definition zur Trennung zwischen reiner Entwurfsarbeit und echter Beeinflussung wird auch von jedem Forscher geringfügig anders interpretiert. I.d.R. kann getrennt werden zwischen passiver und aktiver Beeinflussung. Erstere umfasst Methoden, bei denen rein durch Formgebung die Grenzschicht modifiziert wird (also z.B. Transitionsstreifen oder Riblets) und letztere beschreibt Methoden, bei denen zusätzliche Energie aufgewendet wird.

Aktive Beeinflussung wird bereits während der Erforschung der Grenzschichten durch *Prantl (1904)* eingesetzt, er hat mit tangentialem Einblasen und mit Absaugungen gearbeitet. Bis heute hat sich ein unübersehbares Feld an Mitteln und Möglichkeiten erhalten, von denen es nur wenige zu einer technischen Relevanz gebracht haben und viele aufgrund von mangelnder Effizienz aufgegeben wurden. Hiermit ist auch eine erste, fundamentale Anforderung an ein System zur Beeinflussung definiert: „Der Aufwand zur aktiven Beeinflussung muss geringer sein als der durch die Modifikation erzielte Gewinn“.

8.2 Klassifikation

Zur Einteilung der vielen Verfahren kann man zunächst die Ziele einer Beeinflussung benennen, also ob man Einfluss auf den Widerstand, den Auftrieb, die Durchmischung, die Geräuschemission oder auf eine Kombination hieraus nimmt (*Gad-el Hak (2000)*). Dem gegenüber steht die Art und Weise wie man das Strömungsfeld verändert, also Verzögern oder Erzwingen der Transition, Verzögern oder Erzwingen von Ablösungen sowie Steigerung oder Unterdrückung von Turbulenz.

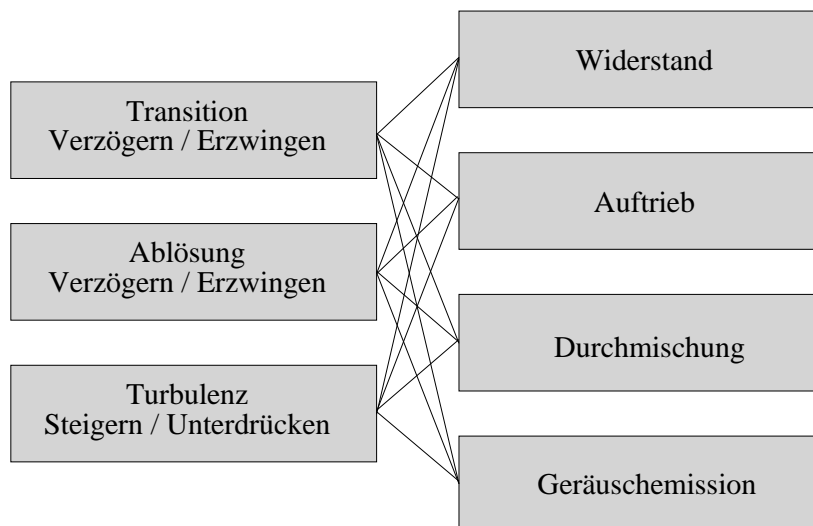


Abbildung 8.1: Ziele aktiver Beeinflussung (rechts) und mögliche Modifikationen im Strömungsfeld (links); *Gad-el Hak (2000)*

In der praktischen Umsetzung wird i.d.R. eine Kombination sowohl der Ziele als auch der Mittel vorliegen. Bezüglich der Ziele kann man beispielsweise bei einem Transportflugzeug durch ein neuartiges Hochauftriebssystem den Auftriebsbeiwert steigern, dies dann nutzen um die Flügelfläche zu verringern und damit den Widerstand im Reiseflug zu verringern. Als Effekte kann man beispielsweise die Turbulenz steigern und damit eine Ablösung verhindern oder Transition erzwingen.

Hier wird im Wesentlichen auf Konzepte zur Beeinflussung von Auftrieb und Widerstand eingegangen. Ein Beispiel zur Beeinflussung der Durchmischung ist beispielsweise an Turbinenschaufeln in Triebwerken zu finden: Es soll die Schaufeloberfläche vor dem heißen Fluid geschützt werden, indem Kühlluft durch Bohrungen in die Grenzschicht eingebracht wird und hier einen „Puffer“ zwischen Heißluft und Oberfläche bildet. Dabei ist es jedoch wichtig, dass die Kühlluft mit geringer Relativgeschwindigkeit aus den Löchern austritt, damit nicht zusätzliche Turbulenz eingebracht wird, die zu einem stärkeren Impuls- und Wärmeaustausch quer zur Strömungsrichtung führt und damit der Kühlung entgegen wirkt. Demgegenüber bringt man in Wärmetauschern bewusst Rauigkeitselemente an, um durch die größere Durchmi-

sung einen höheren Wärmeübergang zu erzielen. Die Kontrolle von Geräuschemissionen kann beispielsweise dadurch geschehen, dass Ablösung (die eine Hauptemissionsquelle ist) verhindert wird.

8.3 Verzögern der Transition

Wie bereits in Kapitel 2 dargestellt, ist das Phänomen der Transition ein Stabilitätsproblem. Demzufolge liegt die offensichtliche Möglichkeit die Transition zu verzögern darin, die Stabilität der laminaren Grenzschicht zu erhöhen. Erlaubt man Geschwindigkeitskomponenten an der Wand quer zur Strömungsrichtung (v_W), so lautet die Impulsgleichung für ein kompressibles Medium in einem Punkt an der Wand (W); (vgl. auch Gl. 2.6):

$$\rho \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_W + \rho v_W \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_W + \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_W - \left. \frac{\partial \mu}{\partial y} \right|_W \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_W = \mu \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_W \quad (8.1)$$

wobei auch die Dichte ρ und die Viskosität μ als Variablen betrachtet werden. Betrachtet man eine zweidimensionale Grenzschicht, so kann wegen der starken Dämpfung der wandnormalen Geschwindigkeit in Wandnähe Rotation nur durch die Längsgeschwindigkeit hervorgerufen werden, demnach ist

$$\omega_z = - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (8.2)$$

Die rechte Seite von Gl. 8.1 ist die Krümmung des Geschwindigkeitsprofils an der Wand. Jeder Term auf der linken Seite kann einen Einfluss auf die Änderung der Krümmung und damit die Stabilitätseigenschaften der Grenzschicht ausüben. Um also eine kleine Krümmung $\partial^2 u / \partial y^2$ zu erreichen, können gemäß obiger Gleichung folgende Terme modifiziert werden:

- $\partial p / \partial x < 0$, Druckabfall
- $v_W < 0$, Absaugung
- $\partial \mu / \partial y > 0$, Viskositätsgradient

In der praktischen Umsetzung ist die erstgenannte Möglichkeit von überragender Bedeutung. Die Kontrolle des Transitionsgebietes durch ein geeignetes Design der Druckverteilung ist die Grundlage für den Entwurf von Laminarprofilen. Hierbei handelt es sich weniger um eine Art der Beeinflussung, sondern vielmehr um eine Entwurfsaufgabe, die als „natural laminar flow“ (NLF) bezeichnet wird. Demgegenüber wird die Absaugung als „laminar flow control“ bezeichnet. Durch die steigenden Kraftstoffpreise ist derzeit eine Kombination beider Möglichkeiten für die Anwendung an Verkehrsflugzeugen wieder von gewissem Interesse, diese Kombination wird als „hybrid laminar flow“ bezeichnet. Einen sehr guten Überblick gibt *Joslin (1998)*.

8.3.1 Laminare Grenzschichten mit Absaugung

Wie oben gezeigt, kann durch Einführung einer Vertikalgeschwindigkeit an der Wand die Stabilität der laminaren Grenzschicht erhöht werden, das Geschwindigkeitsprofil wird gegenüber dem Blasius'schen Profil fülliger. Zudem wird durch eine Absaugung das Grenzschichtwachstum verringert und so eine zusätzliche Stabilisierung eingeführt. Mit Absaugung können daher auch bei sehr großen Reynoldszahlen laminare Grenzschichten erhalten werden, sofern genug Fluid abgesaugt wird.

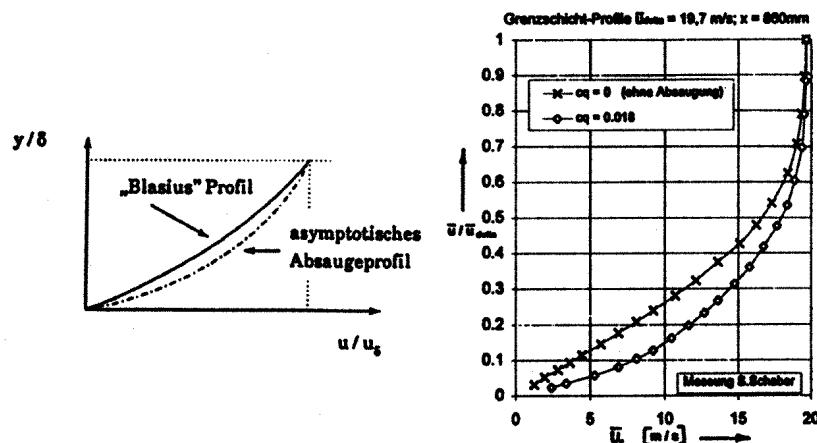


Abbildung 8.2: Laminare Grenzschichtprofil mit Absaugung

Dem Vorteil der Stabilisierung steht die Tatsache entgegen, dass die örtliche Wandschubspannung (der laminaren Grenzschicht) größer wird als ohne Absaugung – i.d.R. jedoch kleiner ist als sie es bei turbulenter Grenzschicht wäre. Die Auslegungsaufgabe ist es daher, immer nur die minimal notwendige Menge an Material abzusaugen um eine Laminarhaltung zu erreichen. Dies ist schon deswegen sinnvoll, da die Absaugeanlagen in Form von Pumpen Energie verbrauchen, die im Gesamtsystem erzeugt werden muss.

Da sich an einem Profil der Druckgradient und damit das Stabilitätsverhalten über die Grenzschichtlauflänge ändert, muss die Absaugung in der Lage sein, örtlich unterschiedliche Mengen an Fluid abzusaugen. Dies erkannten bereits *Betz & Ackeret (1923)*, die eine Reihe von Patentschriften anmeldeten. Hier war das Profil in unterschiedliche Sektionen eingeteilt, die einzeln gesteuert werden konnten.

Das amerikanische Experimentalflugzeug X-21 flog bereits 1963 mit Laminarhaltung durch Absaugung. Es wurde durch spannweitig angeordnete, eng gestaffelte Schlitze abgesaugt, die Grenzschicht konnte so bis zu Reynoldszahlen von etwa $Re = 4,7 \cdot 10^6$ laminar gehalten werden und es wurde eine Gesamtwiderstandsreduktion von etwa 20 % erzielt. Später wurden elegantere Systeme entwickelt, bei denen die Luft zunächst durch eine poröse Oberfläche in eine in Kammern geteilte Zwischenschicht strömt, die durch Reduzierbohrungen mit dem hohl gestalteten Innenraum des Flügels verbunden ist. Durch eine entsprechende Gestaltung der Reduzierbohrungen lässt sich so mit nur einer Antriebspumpe eine verteilte Absaugung realisieren. (vgl. *Boermans (2008)*, *Schrauf und Horstmann (2004)*).

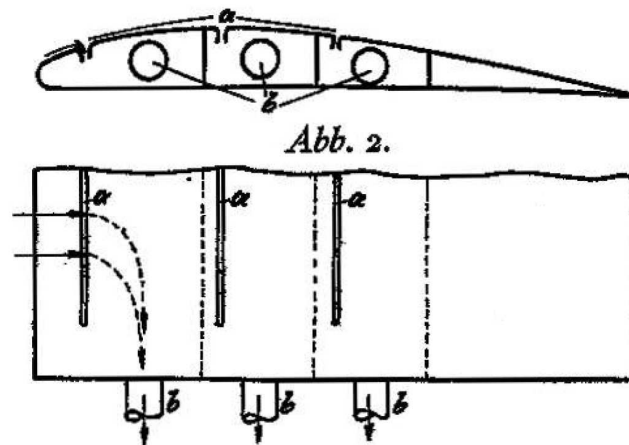


Abbildung 8.3: Skizze aus der Patentschrift von *Betz und Ackeret (1923)* mit in der Profiltiefe gestaffelten Absaugekammern

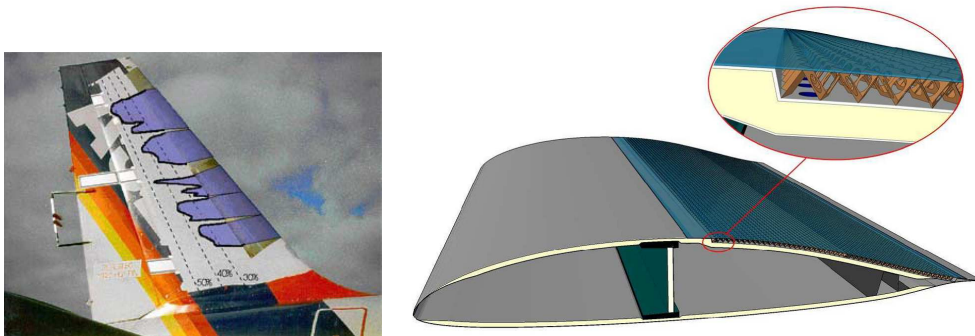


Abbildung 8.4: Links: Leitwerk des HLF-A 320, innerhalb der grau schattierten Areale ist die Grenzschicht laminar; Rechts: der von *Boermans* vorgeschlagene innere Aufbau eines Absaugprofils mit Zwischenkammer und Reduzierbohrungen

Bei großen Transportflugzeugen wurden erfolgreiche Versuche mit hybrider Laminarhaltung durchgeführt, so fanden 1998 Flugversuche mit einer A 320 statt, an die ein Seitenleitwerk mit Grenzschichtabsaugung angebracht war. Obwohl aus diesen Experimenten auf eine potentielle Treibstoffersparnis in der Größenordnung 6 % bis etwa 10 % geschlossen wurde, wurden die Forschungsprogramme nicht weiter verfolgt: Um hohe Unterschallgeschwindigkeiten zu erreichen, haben große Verkehrsflugzeuge gepfeilte Flügel. Die Pfeilung führt zu einer Verdrehung der Grenzschichtprofile und die dominante Instabilität sind nicht mehr die Tollmien-Schichting-Wellen, sondern eine Querströmungsinstabilität. Demzufolge müssten an derartige Flugzeuge weniger stark gepfeilte Flügel angebracht werden, was wiederum die maximale Reisegeschwindigkeit senken würde. Die Betreiber der Flugzeuge scheinen mit der Reisegeschwindigkeit größeren Gewinn zu erzielen als durch die Kraftstoffkosten zu sparen wäre. Eine potentielle Lösung wären Verkehrsflugzeuge mit vorwärts gepfeilten Flügeln, die sich jedoch aus strukturdynamischen Gründen bisher nicht etablieren konn-

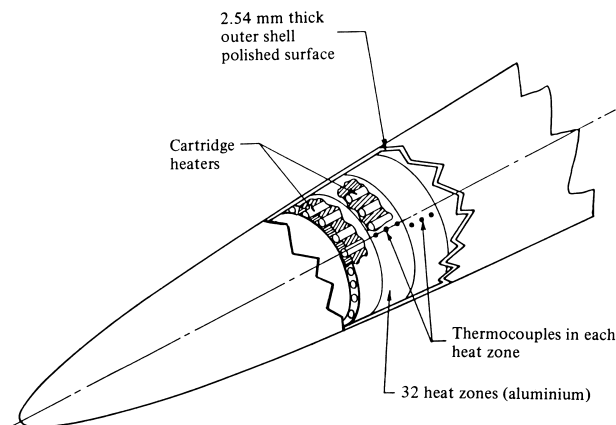


Abbildung 8.5: Beheizter Rotationskörper für Transitionsuntersuchungen in einem Wasserkanal; *Lauchle & Gurney (1984)*

ten und daher den Herstellern ein großes Maß an Innovationswillen (und -risiko) abverlangen.

In der praktischen Umsetzung von Absaugesystemen kommt der porösen Oberfläche größte Bedeutung zu. Um in guter Näherung eine homogene Vertikalgeschwindigkeit v_W zu erzeugen, müssen die Absaugeöffnungen etwa eine Größenordnung kleiner sein als die Grenzschichtdicke, was zu erheblichen Fertigungsproblemen führt. Bei dem oben beschriebenen Seitenleitwerk wurden lasergebohrte Titanbleche verwendet, die pro Quadratmeter mit etwa 4 Millionen lasergebohrten Absaugeöffnungen von etwa 0,05 mm Durchmesser versehen waren. Dennoch kann die Oberfläche nicht als homogene Absaugung angesehen werden, durch die virtuelle Rauigkeit ist die laminare Grenzschicht etwas instabiler und zur vollständigen Laminarhaltung muss stärker abgesaugt werden. Hinzu kommen derzeit immer noch nicht gelöste Probleme mit Verschmutzung und Vereisung.

8.3.2 Viskositätsgradienten

Viskositätsgradienten entstehen i.d.R. durch eine Modifikation der Temperatur des Mediums. Wie oben diskutiert, bewirkt $\partial\mu/\partial y > 0$ eine Stabilisierung, also dann wenn die Viskosität in Wandnähe kleiner ist als in der Potentialströmung. Physikalisch wird dies dem Effekt zugeschrieben, dass durch die kleinere Viskosität nahe der Wand größere Längsgeschwindigkeitskomponenten begünstigt werden und damit das Geschwindigkeitsprofil „fülliger“ und stabiler wird. Da für Luft die Viskosität mit steigender Temperatur zunimmt kann durch eine Kühlung der Wand ein positiver Gradient erzeugt werden. In Wasser hingegen sinkt die Viskosität mit *steigender* Temperatur, d.h. die Wand muss für eine stabilisierende Wirkung geheizt werden.

Die stabilisierende und/oder destabilisierende Wirkung lässt sich auch im Experiment nach-

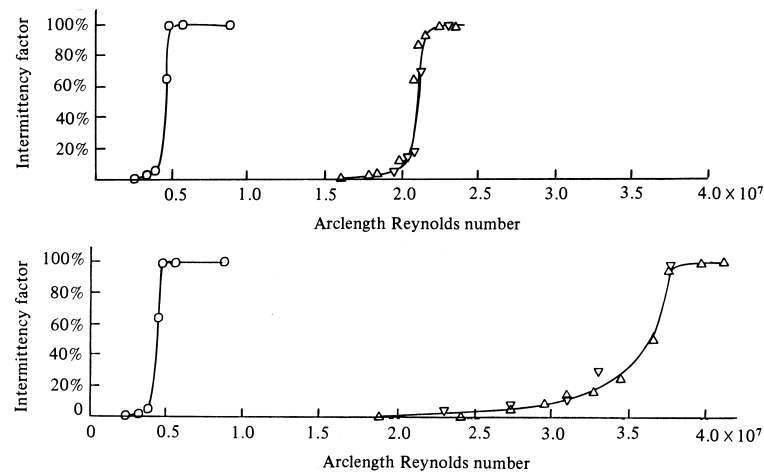


Abbildung 8.6: Ergebnisse der Untersuchungen von *Lauchle & Gurney*, Symbole: \circ kalter Körper; Δ , ∇ geheizter Körper; oben: $T = 25,6^\circ\text{C}$, $Q_T = 26,6\text{ kW}$; unten: $T = 28,3^\circ\text{C}$, $Q_T = 93,3\text{ kW}$

weisen. Die größere Wirkung kommt wegen der großen Prandtl-Zahl (sehr gute Wärmeübertragung) und der stärkeren Abhängigkeit der Viskosität von der Temperatur in Wasser zustande. *Lauchle und Gurney (1984)* konnten an einem Rotationskörper mit einer Überhitzung von nur 25°C die Reynoldszahl der Transition von $4,5 \cdot 10^6$ auf $3,6 \cdot 10^7$ steigern.

8.3.3 Aktive Dämpfung von Tollmien-Schlichting-Wellen

In zweidimensionalen Grenzschichten ist die primäre Instabilität durch die Tollmien-Schlichting-Wellen gegeben. Dies sind Wellen mit dezidierte Frequenz und Amplitude, die der stationären laminaren Grenzschicht überlagert sind und unter der Wirkung von Druckgradienten mit der Lauflänge in der Amplitude zunehmen. Überschreitet die Amplitude einen gewissen Wert, so erfolgt der Umschlag in das instabil-turbulente Stadium (vgl. Kapitel 2). Dabei schwingt die T-S-Welle mit der Hauptströmungsrichtung, stellt also eine u' -Komponente dar.

Die Grundidee der aktiven Dämpfung ist, den lokalen Zustand der T-S-Welle zu erfassen und mit einem geeigneten Mittel eine Gegenwelle aufzubauen. Die Frequenz von T-S-Wellen ist bereits bei kleinen Reynoldszahlen in der Größenordnung einiger Hertz, bei realen technischen Strömungen schnell im kHz-Bereich. Daher kommen als Sensoren nur Oberflächenheißfilme oder Hitzdrähte in Frage, die in der Lage sind, kleine Amplituden bei derartigen Frequenzen zu messen. Das Signal wird geeignet gefiltert und phasenverschoben an einen Aktuator übertragen, der die Gegenwelle aufbaut („wave cancellation“). Das System muss notwendigerweise geregelt sein, da sich T-S-Wellen in diskreten Paketen aufbauen (*Seitz (2007)*), die untereinander weder räumlich noch zeitlich korreliert sind. Sofern nicht eine natürlich T-S-Welle vorliegt, darf aber auch nicht aktuiert werden, da damit die zu terminierende Instabilität künstlich eingebracht würde. Die Bauart des Aktuators ist dabei eher von untergeordnetem Interesse, so wurden Versuche mit Vibratoren,

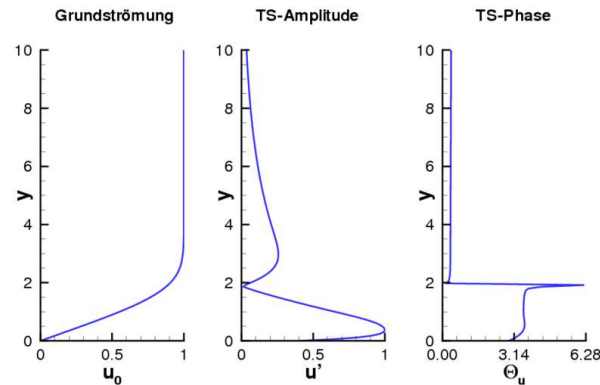


Abbildung 8.7: mittlere Geschwindigkeit einer laminaren Grenzschicht (Links), Amplitudenverlauf der Tollmien-Schlichting-Schwingung (Mitte) und Phasenlage (Rechts)

beweglichen Wänden, Ausblasen und Einsaugen, mit sog. Plasma-Aktuatoren oder auch mit lokalen Hitzequellen veröffentlicht. Zusammenfassend lässt sich für alle Versuche sagen, dass eine aktive Dämpfung grundsätzlich möglich ist. Da jedoch alle verfügbaren Aktoren nur einen Teil der Welle (i.d.R. den wandnächsten Teil) beeinflussen, kann es nicht zu einer vollständigen Auslöschung der T-S-Welle kommen, sondern lediglich zu einer Dämpfung. *Thomas (1983)* vermerkte, dass daher der Begriff „wave cancellation“ unangebracht ist und durch „wave superposition“ ersetzt werden müsse.

Die Methode hat bisher noch keine praktische Anwendung in technisch interessanten Strömungen gefunden, insbesondere da die hochfrequenten T-S-Wellen eine sehr schnelle Sensor- und Regelungselektronik verlangen, die auch heutzutage kaum verfügbar ist. Ferner muss eine nahtlose aktive Oberfläche aufgebaut werden, die aus einer Vielzahl an Sensoren und Aktuatoren besteht, da die T-S-Pakete in ihrer spannweitenigen Erstreckung relativ klein sind. In den letzten Jahren hat sich jedoch für die aktive Beeinflussung ein gewisser Trend zu miniaturisierten Bauteilen, sogenannten „MEMS“ („micro-electro-mechanical systems“) entwickelt. Eine praktische Anwendung rückt daher in den Bereich des technisch prinzipiell Möglichen.

8.4 Modifikation der Turbulenzstruktur

Da sich bei technisch relevanten Strömungen meist eine Transition in den turbulenten Zustand nicht vermeiden lässt, ist es von besonderem Interesse turbulente Strömungen zu beeinflussen. Große Aufmerksamkeit kommt dabei wandgebundenen Strömungsformen zu, weil hier Turbulenz die Wandschubspannung vergrößert und somit direkt ein Widerstand auftritt. Die Beeinflussung turbulenter Wandgrenzschichten mit Blick auf einen geringeren Reibungswiderstand wird allgemein als „turbulent drag reduction“ bezeichnet.

In Kapitel 7.5, Abb. 7.15 wurde die Phänomenologie im inneren Bereich der turbulenten Grenzschicht dargestellt. Es herrscht großes Einvernehmen darüber, dass der Prozess

der Wirbelbildung und die letztlich daraus resultierenden „bursts“ einen großen Anteil an der Produktion und Dissipation von turbulenter Energie haben. Um den turbulenten Reibungswiderstand zu verringern, müssen also diese wandnahen Prozesse beeinflusst werden.

Technisch anwendbare Lösungen hierzu entwickelten sich zunächst im Bereich der Flüssigkeitsströmungen durch das Hinzufügen von Polymeren (*Toms (1948)*, *Virk (1971)*, *Lumley (1973)*). Später wurde eine andere Möglichkeit in Form von kleinen, länglichen Rippen nahe der viskosen Unterschicht, sog. „riblets“ entwickelt (*Liu et al. (1966)*, *Walsh (1983)*, *Bechert und Bartenwerfer (1989)*). Mit der Möglichkeit beliebige Strömungsformen (bei kleinen Reynoldszahlen) durch die direkte numerische Simulation zu berechnen (vgl. Kap. 4.2) sind aber auch generische Varianten untersucht worden, die in der Praxis kaum umsetzbar sind, jedoch interessante Ansätze beschreiben. Beispielfhaft seien hier die Untersuchungen von *Choi et al. (1994)* genannt.

8.4.1 Turbulente Grenzschichten mit Additiven

Der Einfluss von polymeren Additiven in Flüssigkeitsströmungen wurde von *Toms (1948)* gefunden, jedoch ohne dass dieser das eigentliche Potential erkannte. Der widerstandsverringende Effekt wurde erst in Wasserscheppkanälen beobachtet (nach *Lumley (1973)*), in denen die damaligen Forscher nicht einmal an identischen Modellen in der Lage waren Widerstandsmessungen zu reproduzieren. Wie man später herausfand sondern einige Algenarten Polysaccharide ab, die recht effiziente Widerstandsverminderer sind. Der Effekt kann bei stärkerer Konzentration zu erheblicher Verminderung des Reibungsbeiwertes führen, dies ist durch eine umfangreiche Zahl an Nachmessungen bestätigt. Technisch wird dies in großem Umfang genutzt - in allen Überland-Pipelines werden dem Medium Polymere beigesetzt, um so mit der vorhandenen Pumpleistung einen längeren Abschnitt bedienen zu können.

Polymere sind lange, verzweigte Strukturen, die oft helixartig „gerollt“ sind und sich unter äußerer Belastung elastisch dehnen können (und damit Energie speichern und wieder abgeben). Trotz umfangreicher Forschung ist man dem Kern des Effektes noch nicht auf die Spur gekommen. Messungen in einer Rohrströmung zeigen, dass der Effekt im Wesentlichen im Bereich der Übergangsschicht und dem Bereich der logarithmischen Wandgesetzes ansetzt: $5 < y^+ < 100$. Das Geschwindigkeitsprofil der viskosen Unterschicht $u^+ = y^+$ wird nicht modifiziert, jedoch werden in der Übergangsschicht Normal- (v') und Transversal-Fluktuationen (w') gedämpft, während Longitudinalfluktuationen (u') verstärkt werden, vgl. hierzu Abb. 8.8.

Dass mit einem Dämpfen von v' und w' bei gleichzeitigem Vergrößern von u' eine Verringerung der Wandschubspannung verbunden ist, ist in gewisser Weise verwunderlich, wenn man das Konzeptmodell von *Hinze (1975)* im inneren Bereich der Grenzschicht gemäß Abb. 7.15 betrachtet. Offensichtlich haben (in diesem Konzept nur in Form von Hairpin-Wirbeln auftretende) Längswirbel einen sehr starken Anteil am Impulstransport. Polymere dämpfen diese Längswirbel und transformieren die in ihnen enthaltene kinetische Energie in eine Längsfluktuation. Dies ergibt nur dann Sinn, wenn Längsfluktuationen am Austausch

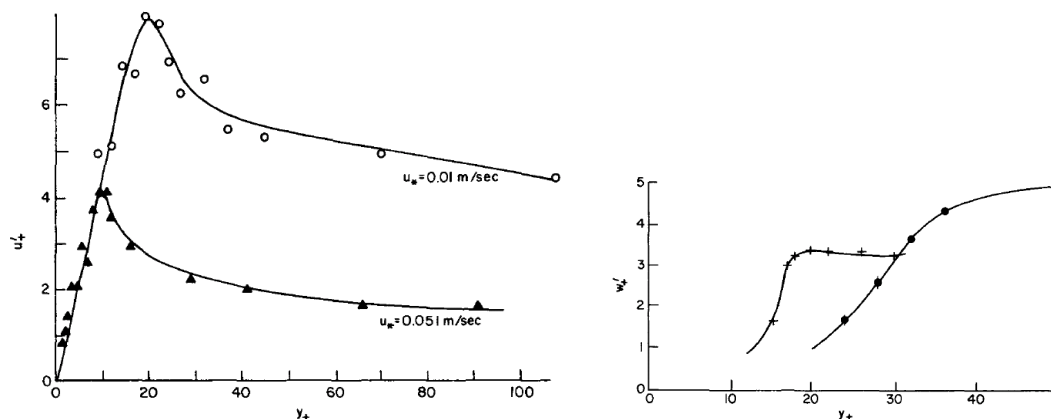


Abbildung 8.8: Modifikation der Longitudinal- (links) und der Transversal-Fluktuationen (rechts) durch die Beigabe von Polymeren

turbulenter kinetischer Energie nicht so stark beteiligt sind wie Längswirbel.

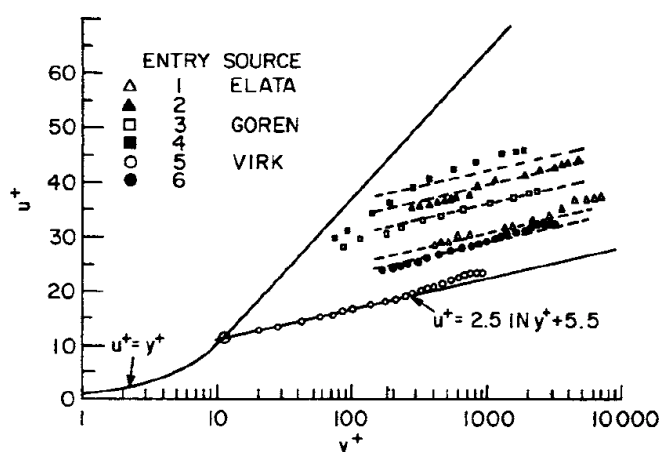


Abbildung 8.9: Modifikation des mittleren Geschwindigkeitsprofils durch die Zugabe von Polymeren

Man geht davon aus (*Lumley (1973)*), dass die Polymere die Struktur der kleinen kohärenten Strukturen modifizieren. Große Strukturen von der Größe der Grenzschicht selber sind größer als die Fadenlänge der Polymere und werden somit durch diese kaum beeinflusst. Im Dissipationsbereich jedoch wirken starke Scherkräfte auf die Polymere, die dazu führen, dass diese sich elastisch dehnen („expanded molecules“) und damit die Dissipationsenergie aufnehmen. Somit wird der Dissipationsprozess zu kleineren Wellenzahlen (größere Wirbel) verschoben, findet nun aber elastisch statt, d.h. mit einer gewissen Menge an Energie-Rückgewinn wenn sich die Polymere im wandfernen Bereich wieder zusammenziehen. Da der Dissipationsbereich gemäß der Kolmogoroff'schen Hypothesen nur von der Viskosität abhängig ist, kommt die Wirkung damit einer Vergrößerung der Viskosität gleich. Die viskose Unterschicht wird - bei sonst gleichen Randbedingungen - dicker, die Wandschubspannung

nimmt ab.

Die Effektivität der o.g. Vorgänge ist makroskopisch abhängig von der Konzentration der Polymere und von deren genauen chemischen (molekularen) Eigenschaften. Wie Abb. 8.10 zeigt, kann teilweise eine erhebliche Reduktion bis zu 65 % erreicht werden. Dabei ist die Effektivität zunächst linear mit der Konzentration, geht dann aber in eine Sättigung über. *Virk (1971)* hat gezeigt, dass dieses Verhalten nahezu universell ist und die erzielbare Widerstandsreduktion nur von der Reynoldszahl abhängt. Dabei entspricht die maximale Reduktion gerade dem Fall, dass die viskose Unterschicht bis in die Rohrmitte reicht. Es sei dabei erwähnt dass dies nicht einer Relaminarisierung entspricht, da dies immer noch eine größere Wandschubspannung darstellt als eine laminare Rohrströmung erzeugen würde.

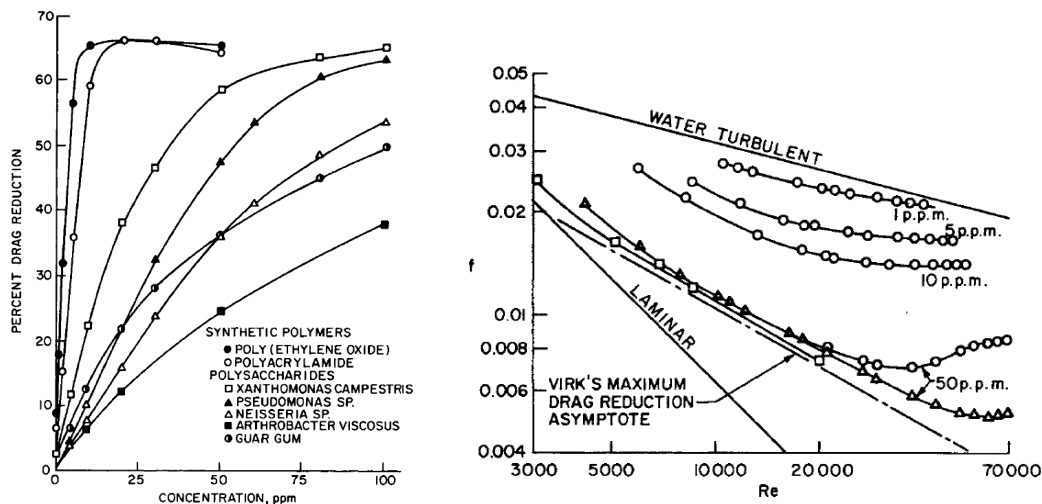


Abbildung 8.10: Links: Effektivität der Widerstandsreduktion für verschiedene Polymere; Rechts: Plattendiagramm für Rohrströmungen mit und ohne Polymere

8.4.2 Riblets

Ein den Polymeren ähnlicher Effekt ergibt sich, wenn die überströmte Oberfläche mit länglichen Rippen überzogen ist, die in Strömungsrichtung ausgerichtet sind. Die grundlegende Vorstellung war anfangs – beruhend auf den Erfahrungen mit Polymeren – dass Querfluktuationen gedämpft und in Wandnähe in Längsfluktuationen umgewandelt werden. Betrachtet man jedoch das Profil der Längsfluktuationen in Abb. 8.11, so stellt man fest, dass anders als bei Polymeren die Riblets über einen weiten Bereich die u' -Komponente verkleinern. Dennoch führt dies zu einem ähnlichen Effekt auf das Geschwindigkeitsprofil in viskosen Einheiten: Die viskose Unterschicht wird nicht in ihrer Eigenart modifiziert (im Speziellen bleibt κ erhalten), sie wird jedoch dicker, so dass die Integrationskonstante C aus Gl. 7.55 um etwa eine viskose Einheit größer wird.

Wie vielfach in der Turbulenzforschung ist auch der Riblet-Effekt mitnichten abschließend erklärt. Einen interessanten Hinweis gibt jedoch die Verteilung der spektralen Energien gemäß Abb. 8.12, die in der Grenzschicht einer Riblet-Oberfläche mit einem Heißfilm gemessen

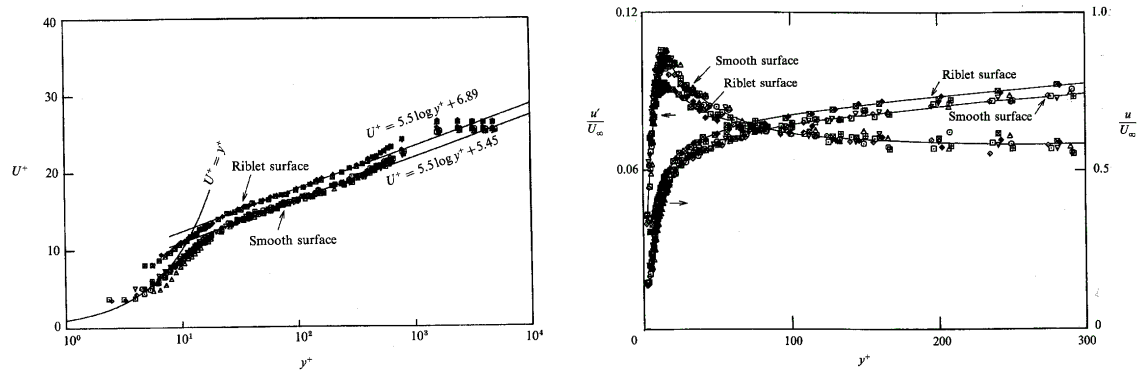


Abbildung 8.11: mittleres Geschwindigkeitsprofil und Längsfluktuationsprofil einer Grenzschicht über einer Riblet-Oberfläche

wurde. Anders als bei Polymeren, wo man Einfluss auf die dissipierenden Skalen nimmt, enthalten mit Riblets die niederfrequenten Skalen weniger turbulente Energie, werden also gedämpft. Ein Konzeptmodell wird von *Choi (1989)* aufgezeigt:

Das in Abb. 7.15 bereits dargestellte Modell von *Hinze (1975)* zeigt, dass die sog. „bursts“, bzw. die „ejection“, eine Folge der Auffaltung von Querspiralen sind. Erweitert man dieses Bild auf zwei nebeneinander liegende Hairpin-Strukturen, wie in Abb. 8.12 dargestellt, so

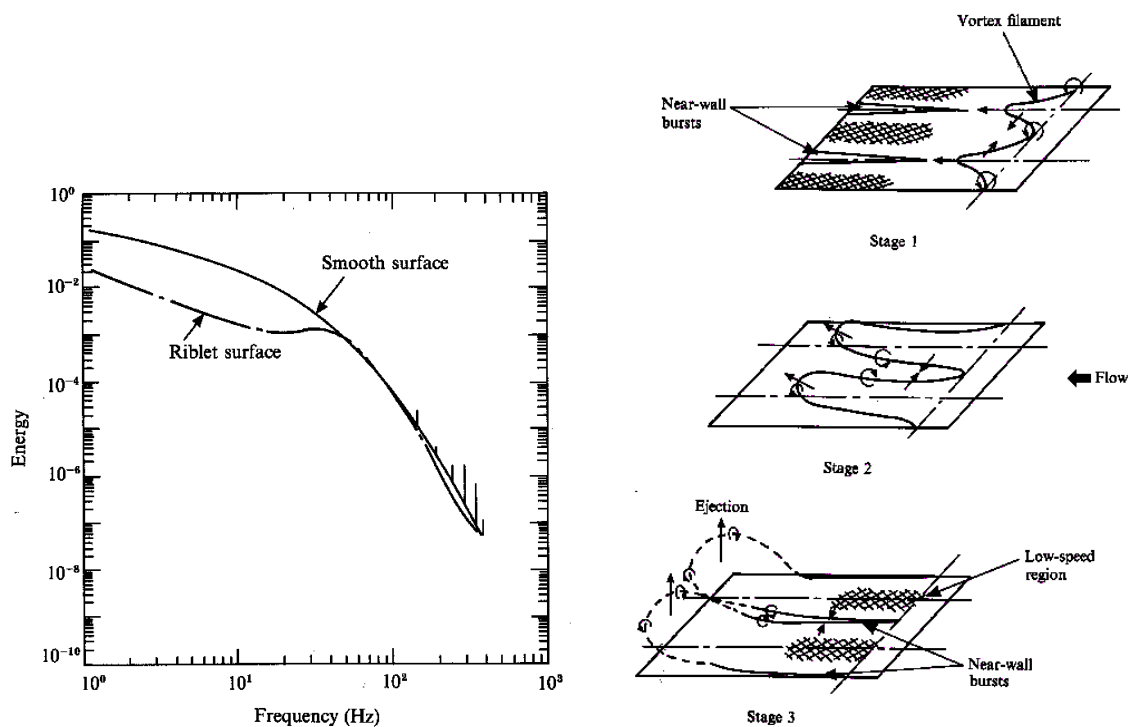


Abbildung 8.12: Spektrale Verteilung der Energien (links) und Konzeptmodell zum Einfluss von Riblets auf die Hairpin-Strukturen (*Choi (1989)*)

ergibt sich auch ein treibendes Argument *warum* die Wirbel in Form eines bursts zerfallen: Sie tun dies als Folge des Kontakts zweier wandnah gegeneinander drehenden Wirbel. *Choi* zufolge geht dies zusätzlich einher mit einem Phänomen, dass er „near-wall burst“ nennt.

Nun liegt die Vorstellung nahe, dass die Anzahl an bursts und die mit ihnen verbundene Turbulenzproduktion abnimmt, wenn man verhindert, dass sich die zu Längswirbeln mutierten Hairpins spannteitig aufeinander zu bewegen – und dies geschieht durch die Riblets.

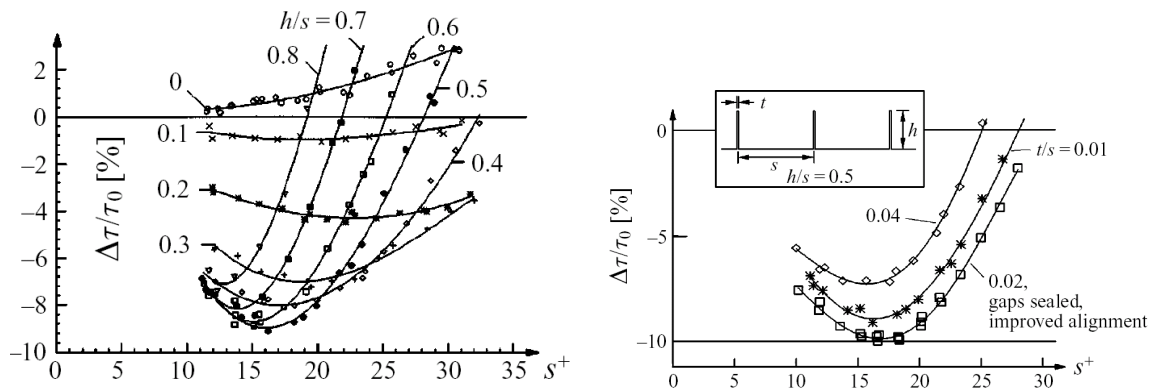


Abbildung 8.13: Verringerung der Wandschubspannung durch Riblets - optimale Geometrie

Da gemäß der Untersuchungen von *Hinze (1975)* der seitliche Abstand zweier Hairpins $\Delta z^+ \approx 100$ viskose Einheiten beträgt, würde man einen optimalen seitlichen Abstand zweier Riblets der Größenordnung $s^+ \approx 50$ vermuten. In der Tat aber gibt *Bechert et al. (1997)* – und dies wurde von vielen Forschern als weitgehend unabhängig von den Randbedingungen der Strömung bestätigt – einen optimalen Abstand von $s^+ \approx 17$ bei einer optimalen Höhe von etwa der Hälfte: $h/s \approx 0,5$ an. Riblets sind also besser, wenn sie etwas kleiner als die charakteristischen Skalen der Hairpins sind. Vermutlich wird bei größeren Riblets der durch die Turbulenzmodifikation gewonnene Vorteil durch die größere überströmte Oberfläche aufgehoben und das Optimum so zu kleineren Abständen verschoben.

In der Praxis bestehen oft Einschränkungen, weil die Riblets sehr genau in Strömungsrichtung angeordnet sein müssen – vgl. hierzu auch Abb. 8.13, wo u.a. durch eine verbesserte Ausrichtung die Wandschubspannungsänderung von etwa 7 % auf 10 % verbessert wurde! Dies ist insbesondere in Bereichen mit starker Dreidimensionalität (Flügel-Rumpf-Übergänge, 3D-Körper, o.ä.) nur für einen einzigen Betriebspunkt zu gewährleisten. Ebenso ändern sich integralen Eigenschaften der Grenzschicht mit der Anströmgeschwindigkeit, auch eine optimale Größe relativ zu den viskosen Größen kann daher nur in einem Betriebspunkt eingehalten werden. Das offensichtlichste Praxisproblem ist jedoch die Fertigung von Mikrostrukturen, die sich zudem über große Flächen erstrecken müssen.

8.4.3 Generische Methoden

siehe hierzu den Artikel von *Choi et al. (1994)*.

Literaturverzeichnis

- ABRAMOVICH G und SCHINDEL L (1963). *The Theory of Turbulent Jets*. MIT Press Cambridge, MA.
- ARNAL D (1994). *Boundary layer transition: Predictions based on linear theory*. AGARD-VKI Special Course on "Progress in Transition Modelling". Technischer Bericht AGARD Report 793, AGARD.
- ARNAL D und CASALIS G (2000). *Laminar-turbulent transition prediction in three-dimensional flows*. Progress in Aerospace Sciences, 36:173–191.
- BATCHELOR GK und TOWNSEND AA (1948). *Decay of Turbulence in the Final Period*. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, 194:527–543.
- BECHERT DW und BARTENWERFER M (1989). *The viscous flow on surfaces with longitudinal ribs*. Journal of Fluid Mechanics, 206(-1):105–129.
- BECHERT DW, BRUSE M, HAGE W, VAN DER HOEVE JGT und HOPPE G (1997). *Experiments on drag-reducing surfaces and their optimization with an adjustable geometry*. Journal of Fluid Mechanics, 338:59–87.
- BETZ A und ACKERET J (1923). *Einrichtung der verhinderung der ablösung und wirbelbildung von strömenden medien in kanälen, leitungen u. dgl.*. Patentschrift DE-472039.
- BOERMANS LMM (2008). *Practical Implementation of Boundary Layer Suction for Drag Reduction and Lift Enhancement at Low Speed*. KATNet II Workshop, Ascot, UKI.
- BRADSHAW P (1967a). *Inactive Motion and Pressure Fluctuations in Turbulent Mixing Layers*. J. Fluid Mech, 30:241–258.
- BRADSHAW P (1967b). *The turbulent structure of equilibrium turbulent boundary layers*. Journal of Fluid Mechanics, 29:625–645.
- BRADSHAW PE (1976). *Turbulence*. Springer Verlag.
- BRONSTEIN I und SEMENDJAJEW K (1989). *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt.
- BURGERS J (1939). *Mathematical Example Illustrating Relations Occurring in Turbulent Fluid Mechanics*. Trans. Royal Neth. Acad. Sci. Amsterdam, 17:1–53.

- CHOI H, MOIN P und KIM J (1994). *Active turbulence control for drag reduction in wall-bounded flows*. Journal of Fluid Mechanics, 262(-1):75–110.
- CHOI KS (1989). *Near-wall structure of a turbulent boundary layer with riblets*. Journal of Fluid Mechanics, 208:417–458.
- COLES D (1956). *The law of the wake in the turbulent boundary layer*. J. Fluid Mech, 1:191–226.
- DE KARMAN T und HOWARTH L (1938). *On the Statistical Theorie of Isotropic Turbulence*. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, 164(917):192–215.
- DHAWAN S und NARASIMHA R (1958). *Some properties of boundary layer flow during the transition from laminar to turbulent motion*. J. Fluid Mech., 3:418–436.
- DRELA M und GILES M (1987). *Viscous-inviscid analysis of transonic and low Reynolds number airfoils*. AIAA Journal, 25(10):1347–1355.
- DURST F, BRENNER G, BREUER M, HANJALIC K, VOLKERT R, JOVANOVIĆ J, KESSLER R, KLOKER M, OBERLACK M, SCHÄFER M und MENTER F (2003). *Turbulenz - Kurzlehrgang am LSTM Erlangen*. LSTM Erlangen.
- ESCUDIER MP (1966). *The distribution of mixing-length in turbulent flows near walls*. Technischer Bericht Heat Transfer Section Report TWF/TN/12, Imperial College.
- FLATT J (1961). *Boundary Layer and Flow Control. Its Principles and Application*, Kapitel The history of boundary layer control research in the United States of America, 122–143. Pergamon Press, New York.
- FRÖHLICH J und VON TERZI D (2008). *Hybrid les/rans methods for the simulation of turbulent flows*. Progress in Aerospace Sciences, 44(5):349 – 377. ISSN 0376-0421. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6V3V-4T0NT9D-2/2/270c78bae9992a4f06d9db770c746>
- FUNAZAKI K (1996). *Unsteady boundary layers on a flat plate disturbed by periodic wakes: Part I — Measurement of wake-affected heat transfer and wake-induced transition model*. J. Turbomach., 118(2):327–336.
- GAD-EL HAK M (2000). *Flow Control: Passive, Active, and Reactive Flow Management*. Cambridge University Press.
- GOLDSTEIN RJ (1983). *Fluid Mechanics Measurements*. Springer.
- GÖRTLER H (1955). *Dreidimensionales zur Stabilitätstheorie laminarer Grenzschichten*. Z. angew. Math. Mech., 35:362–364.
- GROTE KH und FELDHOUSEN J, Herausgeber (2007). *Dubbel - Taschenbuch für den Maschinenbau*. Springer-Verlag.
- HEAD MR (1958). *Entrainment in the turbulent boundary layer*. Aeronautical Research Council, London, R & M No. 3152.

- HEISENBERG W (1948). *Zur statistischen Theorie der Turbulenz*. Zeitung für Physik, 124:628–657.
- HINZE J (1975). *Turbulence*. McGraw-Hill New York.
- HIRSCHEL EH (1979). *Vorlesungsmanuskript: Entstehung der Turbulenz in Grenzschichten - eine Einführung*.
- HOURLMOUZADIS J (1989). In *Aerodynamic design of low pressure turbines* AGARD.
- JOSLIN R (1998). *Aircraft laminar flow control*. Annual Reviews in Fluid Mechanics, 30(1):1–29.
- JOVANOVIĆ J (2004). *The Statistical Dynamics of Turbulence*. Springer Verlag.
- JOVANOVIĆ J und HILLERBRAND R (2005). *On the chief peculiarity of the velocity fluctuations in wall-bounded flows*. Thermal Science, 1:3–12.
- KÄHLER CJ (2004). *The significance of coherent flow structures for the turbulent mixing in wall-bounded flows*. Dissertation, Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt, Göttingen.
- KOK JC und VAN DER VEN H (2010). In *Destabilizing Free Shear Layers in X-LES Using a Stochastic Subgrid-Scale Model* Band 111, 179–189.
- KOLMOGOROV AN (1942). *Equations of turbulent motion of an incompressible fluid*. Izvestiya Akademii Nauk SSSR, 6:56–58.
- KRAICHNAN RH (1959). *The structure of isotropic turbulence at high Reynolds numbers*. Journal of Fluid Mechanics, 5:497–543.
- KUMAR V, FROHNAPFEL B, JOVANOVIĆ J, BREUER M, ZUO W, HADŽIĆ I und LECHNER R (2009). *Anisotropy Invariant Reynolds Stress Model of Turbulence (AIRSM) and its Application to Attached and Separated Wall-Bounded Flows*. Flow, Turbulence and Combustion, 83(1):81–103.
- LAUCHLE GC und GURNEY GB (1984). *Laminar boundary-layer transition on a heated underwater body*. Journal of Fluid Mechanics, 144:79–101.
- LIU CK, KLEIN SJ und JOHNSTON JP (1966). *An experimental study of turbulent boundary layer on rough walls*. Technischer Bericht, Stanford Univ. Calif. Thermosciences Div.
- LORD RAYLEIGH (1880). *On the stability of certain fluid motions*. Proc. London Math. Soc. 11, 57.
- LUMLEY JL (1973). *Drag reduction in turbulent flow by polymer additives*. Journal of Polymer Science Macromolecular Reviews, 7(1):263–290.
- LUMLEY JL (1978). *Computational modeling of turbulent flows*. Advances in Applied Mechanics, 18:123–176.

- LUMLEY JL und NEWMAN GR (1977). *The return to isotropy of homogeneous turbulence*. Journal of Fluid Mechanics, 82:161–178.
- MCMASTERS JH und HENDERSON ML (1980). *Low speed single element airfoil synthesis*. Tech. Soaring, 2(2):1–21.
- OERTEL HJ und DELFS J (1996). *Strömungsmechanische Instabilitäten*. Springer.
- ORR WMF (1907). *The stability or instability of the steady motions of a perfect liquid and of viscous liquid*. Proc. Royal Irish Acad., 27:9–138.
- PRATURI AK und BRODKEY RS (1978). *A stereoscopic visual study of coherent structures in turbulent shear flow*. Journal of Fluid Mechanics, 89:251–272.
- RADESPIEL R (2008). *Manuskript of lecture „airfoil aerodynamics“*. Institut für Strömungsmechanik, TU Braunschweig.
- ROBINSON SK (1991). *Coherent motions in the turbulent boundary layer*. Annual Reviews in Fluid Mechanics, 23(1):601–639.
- RODI W (1976). *A new algebraic relation for calculating reynolds stresses*. ZAMM, 56:219.
- ROTTA J (1951). *Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz*. Zeitschrift für Physik, 129(6):547–572.
- ROTTA J (1972). *Turbulente Strömungen*. Teubner.
- SARIC WS (1994). *Goertler vortices*. Annual Rev. Fluid Mech., 26:379–409.
- SCHLICHTING H und GERSTEN K (1997). *Grenzschicht-Theorie*. Springer, 9. Auflage.
- SCHRAUF GH und HORSTMANN KH (2004). In *Simplified hybrid laminar flow control*.
- SCHUBAUER GB und KLEBANOFF PS (1955). *Contributions on the mechanics of boundary layer transition*. Technischer Bericht NACA-TN-3489, NASA.
- SHUR M, SPALART PR, STRELETS M und TRAVIN A (2008). *A hybrid RANS-LES approach with delayed-DES and wall-modelled LES capabilities*. International Journal of Heat and Fluid Flow, 29:1638–1649.
- SOMMERFELD A (1908). In *Ein Beitrag zur hydrodynamischen Erklärung der turbulenten Flüssigkeitsbewegung*.
- SPALART P, JOU WH, STRELETS M und ALLMARAS S (1997). In *Comments on the Feasibility of LES for Wings, and on a Hybrid RANS/LES Approach* Greyden Press, Columbus Oh.
- SPALART PR und ALLMARAS SR (1992). *A one-equation turbulence model for aerodynamic flows*. La Recherche Aerospatiale, 1:5–21.

- SQUIRE H (1933). *On the stability for three-dimensional disturbances of viscous fluid flow between parallel walls*. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, 142(847):621–628.
- STEWART RW (1951). *Triple velocity correlations in isotropic turbulence*. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 47:158–176.
- STOCK HW und SEITZ A (2004). *Crossflow-induced transition prediction using coupled Navier-Stokes and e^N method computations*. AIAA Journal, 42(9):1746–1754.
- TAYLOR GI (1935). *The statistical theory of turbulence*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, A, 151:421–511.
- TOLLMIEH W (1935). *Ein allgemeines kriterium der instabilität laminarer geschwindigkeitsverteilungen*. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Klasse, Fachgruppe I, 1:79–114.
- TOMS BA (1948). In *Some observations on the flow of linear polymer solutions through straight tubes at large reynolds numbers* Band 2, 135–141.
- TOWNSEND AA (1956). *The Structure of Turbulent Shear Flow*. Cambridge University Press.
- VAN DRIEST ER (1956). *On turbulent flow near a wall*. Journal of the Aeronautical Sciences, 23:1007.
- VIRK PS (1971). *An elastic sublayer model for drag reduction by dilute solutions of linear macromolecules*. Journal of Fluid Mechanics, 45(03):417–440.
- WALSH MJ (1983). *Riblets as a viscous drag reduction technique*. AIAA Journal, 21:485–486.
- WILCOX DC (2006). *Turbulence Modeling for CFD*. DCW Industries, 3. Auflage.