

**TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN**

**Fachgebiet Hydromechanik**

**Numerische Simulation  
turbulenter Strömungen mit  
Immersed Boundaries**

Nikolaus Peller

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen der  
Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.-Ing. M. Schilcher

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. M. Manhart
2. Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. M. Breuer, Universität Hamburg

Die Dissertation wurde am 27.01.2010 bei der Technischen Universität München eingereicht und  
durch die Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen am 14.06.2010 angenommen.



Für Bruno und seine Mama



# Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden zwei Immersed Boundary (IB) Methoden für die Simulation turbulenter Strömungen vorgestellt. Aufbauend auf einer Methode mit Punktwerten (Tremblay et al. [69]) wird eine Flusskorrektur eingeführt, die einen divergenzfreien IB Rand sicherstellt.

Die Divergenzfreiheit wird am Beispiel einer instationären Kanalströmung bestätigt. Für die IB Methode ohne Flusskorrektur ergibt sich eine Abhängigkeit des Massenfehlers von der Gitterauflösung: Er nimmt mit zunehmend feinem Gitter ab. Weitere Testfälle zeigen, dass sowohl die räumliche Genauigkeit (zweite Ordnung) als auch die zeitliche Genauigkeit (dritte Ordnung) des numerischen Verfahrens für beide IB Methoden erhalten bleiben.

Stabilitätsuntersuchungen zeigen weitere Vorteile der Methode mit Flusskorrektur: Instabile Konfigurationen können durch die Flusskorrektur am IB Rand vermieden werden. Für die IB Methode ohne Flusskorrektur wird die Stabilität unterschiedlicher Randinterpolationen untersucht und es zeigt sich, dass mit der Interpolation nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate Interpolationen höherer Ordnung konstruiert werden können als mit dem Lagrange Interpolationsverfahren. Weiterhin wird festgehalten, dass Konfigurationen mit Interpolation in Hinsicht auf Stabilität problematischer sind, als Konfigurationen mit Extrapolation.

Die IB Methoden werden für die dreidimensionale Kanalströmung mit periodisch angeordneten Hügeln angewendet. Eigene Direkte Numerische Simulationen (DNS) bei den Reynoldszahlen  $Re = 2800$  und  $Re = 5600$  sowie Grobstruktursimulationen bei  $Re = 10595$  zeigen gute Übereinstimmung mit numerischen Ergebnissen von Breuer et al. [5] und Fröhlich et al. [14] sowie experimentellen Ergebnissen von Rapp [52]. Für die Grobstruktursimulation werden neben den beiden IB Methoden drei Turbulenzmodelle untersucht: Das Standard Smagorinsky Modell, das dynamische Smagorinsky Modell und das WALE Modell. Das WALE Turbulenzmodell zeigt in Kombination mit der IB Flusskorrektur die beste Übereinstimmung mit den Ergebnissen aus der Literatur.

Die Arbeit schließt mit einer Demonstration der Anwendbarkeit der IB Methode für eine komplexe Geometrie. Zu diesem Zweck wird die laminare Strömung durch ein poröses Medium vorgestellt.

# Abstract

This thesis presents two Immersed Boundary (IB) methods for the simulation of turbulent flows. Starting from a method using point values (Tremblay et al. [69]), an additional flux correction is introduced, which ensures a divergence free immersed boundary.

The divergence free boundary is confirmed for instationary channel flow. In case of the IB method without flux correction, a dependance of the mass error with respect to the grid resolution is observed: the error reduces in accordance to grid spacing. Further test cases show that the spatial accuracy (second order) as well as the accuracy in time (third order) of the underlying numerical scheme is preserved for both IB methods.

Stability analyses show further advantages of the method with flux correction: configurations which are likely to be unstable can be prevented. For the IB method without flux correction, the stability of various boundary interpolations are investigated and it shows, that with the help of least squares interpolation higher order interpolations can be constructed than with Lagrange interpolation. Further it is observed, that configurations including interpolation are more likely to show problematic behaviour with respect to stability than configurations with extrapolation.

The IB methods are applied to channel flow with periodically arranged hills. Own Direct Numerical Simulations (DNS) at Reynolds numbers  $Re = 2800$  and  $Re = 5600$  and Large Eddy Simulations (LES) at  $Re = 10595$  agree well with numerical results of Breuer et al. [5] and Fröhlich et al. [14] as well as with experimental results of Rapp [52]. In addition to these two IB methods, three turbulence models are investigated for the Large Eddy Simulations: the Standard Smagorinsky model, the dynamic Smagorinsky model and the WALE model. The WALE model in combination with the IB flux correction exhibits the best agreement with results from literature.

The thesis closes with a demonstration of the applicability of the IB method for complex geometries, which presents the laminar flow in a porous medium.

# Vorwort

Es war nicht immer einfach neben meiner neuen Anstellung weiter an der Dissertation zu schreiben. Obwohl schon während der Zeit an der Universität vieles geschafft war, blieb einiges zu tun. Mein größter Dank gebührt daher meiner Frau Lena, die mich auch nach meiner Zeit an der Universität stets unterstützte und mir den Rücken frei hielt, um diese Arbeit abzuschließen.

Meinen Eltern danke ich für die Unterstützung auf dem Weg, den ich gegangen bin. Sie waren stets meine Begleiter und standen immer mit Rat und Tat zur Seite. Auch meinem Bruder danke ich für die schöne Zeit, die wir zusammen in München verbringen durften. Vor allem seine kurzen Besuche am Institut waren für mich immer Aufmunterung und Motivation.

Meinem Doktorvater Prof. Manhart danke ich für das Vertrauen in meine Arbeit und die Unterstützung, die er mir innerhalb der vergangenen Jahre zukommen ließ. Seine Tür stand immer offen und er war stets aufgeschlossen gegenüber neuen Ideen. Auch bin ich ihm für die Freiheit, die er mir in meiner Arbeit ermöglichte, sehr dankbar.

Ebenso möchte ich mich bei Prof. Friedrich für die freundliche Aufnahme am Fachgebiet Strömungsmechanik bedanken.

Johannes Kreuzinger danke ich besonders für die fruchtbare Zusammenarbeit. Es freut mich zu sehen, dass die hier entwickelte Immersed Boundary Methode auch praktische Anwendung findet.

An dieser Stelle möchte ich den Dank an alle Kolleginnen und Kollegen am Fachgebiet für Hydromechanik und am Fachgebiet für Strömungsmechanik ausweiten. Ihr Wissen und ihre Erfahrung haben mit Sicherheit zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen. Von der offenen Arbeitsatmosphäre habe ich oft profitiert. Im Besonderen gilt mein Dank hier Christian Goertt für seine Freundschaft.

Nicht zuletzt danke ich auch der Deutschen Forschungsgesellschaft (DFG), die im Rahmen eines Französisch-Deutschen Forschungsprojektes meine Arbeit erst ermöglichte.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Zusammenfassung</b>	<b>I</b>
<b>Abstract</b>	<b>II</b>
<b>Vorwort</b>	<b>III</b>
<b>Inhaltsverzeichnis</b>	<b>VII</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>X</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>XVI</b>
<b>Nomenklatur</b>	<b>XVII</b>
<b>Publikationen</b>	<b>XXI</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Immersed Boundaries . . . . .	3
1.2 Beitrag der Arbeit . . . . .	7
1.3 Aufbau . . . . .	7
<b>2 Grundlagen der Simulation</b>	<b>9</b>
2.1 Mathematische Beschreibung von Strömungen . . . . .	9
2.1.1 Vorbemerkung . . . . .	9
2.1.2 Differentielle Form der Erhaltungsgleichungen . . . . .	10
2.1.3 Integrale Form der Erhaltungsgleichungen . . . . .	11
2.2 Numerische Diskretisierung . . . . .	13
2.2.1 Räumliche Diskretisierung . . . . .	13
2.2.2 Zeitintegration und Lösungsverfahren: . . . . .	17
2.2.3 Numerisches Verfahren und Immersed Boundaries: . . . . .	22
2.3 Direkte Numerische Simulation (DNS) als numerisches Experiment . . . . .	24
2.4 Large Eddy Turbulenzmodellierung . . . . .	27
2.4.1 Wirbelviskosität und Smagorinsky Modell . . . . .	29
2.4.2 Dynamisches Smagorinsky Modell und Lagrange Mittelung . . . . .	31
2.4.3 WALE Modell für wandangepasste Wirbelviskosität . . . . .	36
2.4.4 Feinstrukturmodell und Immersed Boundaries . . . . .	38

<b>3 Immersed Boundary Methoden</b>	<b>39</b>
3.1 Immersed Boundary Rand mit Punktwerten . . . . .	39
3.1.1 Setzen der Randbedingung . . . . .	39
3.1.2 Algorithmus für das Blocken der Berechnungszellen . . . . .	43
3.1.3 Berechnung geometrischer Größen . . . . .	43
3.1.4 Interpolation am Rand . . . . .	46
3.2 Immersed Boundary Rand mit Flusskorrektur . . . . .	51
3.2.1 Setzen der Randbedingung . . . . .	51
3.2.2 Algorithmus für das Blocken der Berechnungszellen . . . . .	56
3.2.3 Berechnung geometrischer Größen . . . . .	56
3.2.4 Interpolation der Punktwerte . . . . .	63
3.2.5 Integration Massenfluss und Flusskorrektur am Rand . . . . .	67
<b>4 Stabilität der IB Methoden</b>	<b>75</b>
4.1 Lineare eindimensionale Stabilitätsuntersuchung . . . . .	75
4.1.1 Bestimmung der Stabilitätsmatrix . . . . .	75
4.1.2 Ergebnisse für unterschiedliche Interpolationsarten . . . . .	78
4.2 Lineare Stabilitätsuntersuchung in zwei Dimensionen . . . . .	81
4.2.1 Bestimmung der Matrix des Simulationsprogramms . . . . .	81
4.2.2 Stabilität im periodischen Kanal (2D) . . . . .	84
4.3 Erkenntnisse aus der Stabilitätsuntersuchung . . . . .	94
<b>5 Zweidimensionale Testfälle</b>	<b>97</b>
5.1 Räumliche Genauigkeit am Beispiel der Taylor-Couette Strömung . . . . .	97
5.1.1 Testfall Setup . . . . .	97
5.1.2 Numerische und analytische Lösung . . . . .	98
5.1.3 Gitterstudie und räumliche Konvergenz . . . . .	99
5.2 Zeitliche Genauigkeit am Beispiel der Kanalströmung . . . . .	102
5.2.1 Testfall Setup . . . . .	102
5.2.2 Numerische und analytische Lösung . . . . .	103
5.2.3 Konvergenz in Abhängigkeit des Zeitschritts . . . . .	105
5.3 Konservativität am Beispiel Kanalströmung . . . . .	106
5.3.1 Testfall Setup . . . . .	106
5.3.2 Numerische Lösung . . . . .	107
5.3.3 Massendefekt . . . . .	109
5.4 Erkenntnisse aus den zweidimensionalen Testfällen . . . . .	112
<b>6 Dreidimensionale Testfälle</b>	<b>113</b>
6.1 Validierung der Feinstrukturmodelle in turbulenter Kanalströmung . . . . .	113
6.1.1 DNS Ergebnisse . . . . .	114
6.1.2 Grobstruktursimulation . . . . .	118
6.2 DNS der Kanalströmung mit Hügeln ( $Re = 2800$ und $5600$ ) . . . . .	122
6.2.1 Testfall Setup und Topologie der Strömung . . . . .	122
6.2.2 Gitterauslegung für die DNS . . . . .	124
6.2.3 Ergebnisse im Vergleich zu Daten aus der Literatur . . . . .	127

6.3	Grobstruktursimulation der Kanalströmung mit Hügeln ( $Re = 10595$ ) . . . . .	134
6.3.1	Topologie der Strömung . . . . .	134
6.3.2	Gitterauslegung für die Grobstruktursimulation . . . . .	138
6.3.3	Durchgeführte Simulationen . . . . .	143
6.3.4	Ergebnisse im Vergleich zu Daten aus der Literatur . . . . .	144
6.3.5	Gegenüberstellung der Feinstrukturmodelle . . . . .	151
6.3.6	Gittervergleich für die Grobstruktursimulation . . . . .	159
6.3.7	Bewertung der IB Flusskorrektur . . . . .	165
6.4	Strömung durch poröse Medien . . . . .	172
6.5	Erkenntnisse aus den dreidimensionalen Testfällen . . . . .	178
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>181</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>		<b>185</b>
<b>A</b>	<b>Anhang</b>	<b>190</b>
A.1	Hügelgeometrie . . . . .	190
A.2	Indizierung der Gittergrößen und Variablen . . . . .	191
A.3	Illustration der diskreten Impulsgleichung . . . . .	192



# Tabellenverzeichnis

3.1	Zeitschrittalgorithmus für die IB Methode mit Punktwerten. Gezeigt wird der Algorithmus für einen der drei Zwischenzeitschritte im Runge-Kutta Zeitschritt. $\delta T$ , $\delta t$ und $g_1$ entsprechen den Werten des jeweiligen Zwischenschritts (siehe Gleichungen (2.37) bis 2.39 in Abschnitt 2.2). . . . .	41
3.2	Zeitschrittalgorithmus für die IB Methode mit Flusskorrektur. Gezeigt wird der Algorithmus für einen der drei Zwischenzeitschritte im Runge-Kutta Zeitschritt. $\delta T$ , $\delta t$ und $g_1$ entsprechen den Werten des jeweiligen Zwischenschritts (siehe Gleichungen (2.37) bis (2.39) in Abschnitt 2.2). . . . .	55
5.1	Gitterparameter . . . . .	100
5.2	Gitterparameter und Simulationsparameter für den schießen Kanal. . . . .	102
5.3	Berechnete Auflösungen des Kanals mit scharfkantigem Hindernis und rms Wert des Massenfehlers für die konservative IB Methode ( <i>kres01</i> ) und die IB Methode mit Punktwerten ( <i>res02</i> , <i>res03</i> , <i>res04</i> ). . . . .	107
6.1	Gitterparameter für die DNS und LES der turbulenten Kanalströmung, sowie für die DNS von Moser et al. [41]. . . . .	114
6.2	Parameter der durchgeföhrten Simulationen. Dabei ist $N_{tot}$ die Anzahl der Gitterpunkte, $N_{Span}$ die Anzahl der Gitterpunkte in spannweiter Richtung (z) und $T_{avg}$ die Zeit für die Generierung statistischer Mittelwerte für die Simulation von Breuer et al. [5] und der hier vorgestellten Simulationen (MGET). . . . .	127
6.3	Gitterparameter für das feine (1) und das grobe Gitter (2). Die angegebenen Wandeinheiten basieren auf der Wandschubspannung aus der Simulation von Breuer et al. [5]. . . . .	138
6.4	Parameter der Simulationen: Feines (1) und grobes Gitter (2); Immersed Boundary mit oder ohne Flusskorrektur (Flusskorr.); Standard Smagorinsky Modell (Smagorinsky), dynamisches Smagorinsky Modell mit Mittelung entlang Lagrangescher Partikelbahnen (dyn. Smag. Lag.) und WALE Turbulenzmodell. . . . .	143
6.5	Parameter der Simulationen: Feines (1) und grobes Gitter (2); Immersed Boundary mit oder ohne Flusskorrektur (Flusskorr.); Standard Smagorinsky Modell (Smagorinsky), dynamisches Smagorinsky Modell mit Mittelung entlang Lagrangescher Partikelbahnen (dyn. Smag. Lag.) und WALE Turbulenzmodell. Simulationsvergleiche sind durch die Schrift hervorgehoben, grau markierte Simulationen werden in diesem Abschnitt nicht behandelt. . . . .	151

6.6	Parameter der Simulationen: Feines (1) und grobes Gitter (2); Immersed Boundary mit oder ohne Flusskorrektur (Flusskorr.); Standard Smagorinsky Modell (Smagorinsky), dynamisches Smagorinsky Modell mit Mittelung entlang Lagrangescher Partikelbahnen (dyn. Smag. Lag.) und WALE Turbulenzmodell. Simulationsvergleiche sind durch die Schrift hervorgehoben, grau markierte Simulationen werden in diesem Abschnitt nicht behandelt. . . . .	159
6.7	Parameter der Simulationen: Feines (1) und grobes Gitter (2); Immersed Boundary mit oder ohne Flusskorrektur (Flusskorr.); Standard Smagorinsky Modell (Smagorinsky), dynamisches Smagorinsky Modell mit Mittelung entlang Lagrangescher Partikelbahnen (dyn. Smag. Lag.) und WALE Turbulenzmodell. Simulationsvergleiche sind durch die Schrift hervorgehoben, grau markierte Simulationen werden in diesem Abschnitt nicht behandelt. . . . .	165

# Abbildungsverzeichnis

2.1 Aufgelöstes und modelliertes turbulentes Energiespektrum. Turbulente kinetische Energie $E(k)$ aufgetragen über der Wellenzahl $k$ . Das Spektrum wird bei der (cutoff) Wellenzahl $k_c$ abgeschnitten.	24
3.1 Typische 1D stencil Konfiguration für die Interpolation in x-Richtung. Gezeigt werden die blockierten Zellen im Körper, Zellen in der Strömung und die Zellen am Interface zwischen Fluid und Körper. $x_r$ ist die Position der Wandrandbedingung $\phi_r$ . $\phi_{1..3}$ sind die für die Interpolation verwendeten Werte der Nachbarzellen.	40
3.2 Definition der Punkte, die ein Dreieck definieren, in kartesischen Koordinaten (a) und Veranschaulichung möglicher Schnittpunkte eines Dreiecks mit den drei Koordinatenlinien durch den Zellmittelpunkt (b).	45
3.3 Darstellung der Vektoren, die für die Bestimmung des Schnittpunktes eines Dreiecks mit den Koordinatenachsen berechnet werden. Damit wird überprüft, ob der Schnittpunkt innerhalb des Dreiecks liegt.	46
3.4 2D Stencil Konfiguration für die Interpolationen in zwei Raumrichtungen. Gezeigt werden die blockierten Zellen im Körper, Zellen in der Strömung und die Zellen am Interface zwischen Fluid und Körper. $\phi_0$ ist der zu interpolierende Wert, $\phi_{i1..i3}$ und $\phi_{j1..j3}$ sind die für die Interpolation verwendeten Werte der Nachbarzellen.	49
3.5 Konfiguration der linearen Interpolation in 2D für die Bestimmung der Punkt-werte. Interpolationsrichtung ist entlang des Normalenvektors $\vec{n}$ der Ebene. $\phi_0$ ist der zu interpolierende Wert und $\phi_{1..6}$ die für die Interpolation verwendeten Werte der Nachbarzellen.	52
3.6 Konfiguration der Integration der Flusswerte in 2D. Integriert wird über den Teil der angeschnittenen Fläche, der im Fluid liegt. $\phi_{F0}$ ist der zu interpolierende Flusswert und $\phi_{1..6}$ die für die Integration verwendeten Werte der Nachbarzellen.	53
3.7 (a) Zwei Dreiecke mit den angeschnittenen Flächen (strichliert) innerhalb einer kartesischen Druckzelle. und (b) daraus resultierende vereinfachte Schnittfläche (strichliert). Dicke Punkte kennzeichnen die Fluidseite.	58
3.8 Zwei mögliche Zerlegungen der Flächen in einzelne Dreiecke (Variante (a) oder (b)) sowie daraus bestimmte gemittelte Ebene (c). In (c) wird gezeigt, dass die gemittelte Fläche (strichlierte Fläche) von dem ursprünglichen Linienzug der Kantschnittpunkte (strichlierte Linie) abweichen kann. Dicke Punkte kennzeichnen die Fluidseite.	59

3.9	Zerlegung einer Druckzelle in kleine Zellen für die numerische Berechnung der angeschnittenen Flächen und Volumina. $\vec{n}$ ist der Normalenvektor der repräsentativen Ebene und $\vec{o}$ ist der Vektor, mit dessen Hilfe die Fluidseite der Ebene identifiziert wird. . . . .	62
3.10	Möglichkeiten der Bestimmung der Punktwerte bzw. Flusswerte basierend auf den beiden Normalenvektoren $\vec{n}_1$ oder $\vec{n}_2$ der benachbarten Druckzellen. . . . .	66
3.11	Flussintegration mit interpolierten Geschwindigkeiten; die interpolierten Geschwindigkeiten sind mit Pfeilen angedeutet und die entsprechenden Flächen mit grau; Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird in der oberen Abbildung nur ein repräsentativer Pfeil gezeigt. $d_f$ ist der Abstand einer der Geschwindigkeiten $\phi_f$ von der Fläche. . . . .	69
3.12	3D und 2D Darstellung einer angeschnittenen Zelle mit den offenen Flächen $A_E, A_T, A_S, A_W$ und den entsprechenden Flüssen $\phi_E, \phi_T, \phi_S, \phi_W$ . Die Positionen der Flusswerte wurden nur zur Veranschaulichung verschoben. Sie sind im Programm weiterhin an den Positionen der Punktwerte abgespeichert. . . . .	72
4.1	Eigenwerte der Matrix für $x_r = 0.0$ . . . . .	79
4.2	Eigenwerte der Matrix für $x_r = 0.2\Delta x$ (links) und $x_r = 0.5\Delta x$ (rechts). . . . .	79
4.3	Eigenwerte der Matrix M für $x_r = -0.2\Delta x$ (links) und $x_r = -0.5\Delta x$ (rechts). . . . .	79
4.4	Darstellung einer Wandpositionen $x_r$ , die weit von dem zu interpolierenden Punkt $\phi_0$ entfernt ist. Die Annäherung des Verlaufs des Interpolationspolynoms an eine Null-Gradienten Randbedingung (waagerechte, strichlierte Linie) ist zu erkennen. . . . .	80
4.5	Testfall periodischer Kanal mit variabler unterer Wand. Links ist exemplarisch ein laminares Strömungsfeld zu sehen. Rechts wird die Position der verschiebbaren Wand mit zwei Geschwindigkeitskomponenten exemplarisch gezeigt. . . . .	84
4.6	Test der Matrix A als Simulationsprogramm. Randome Anfangsbelegung (a) Entwicklung nach 10 Zeitschritten (b) und Endergebnis (c) nach 1000 Zeitschritten. Feld (c) ist sehr stark skaliert, da es fast identisch Null ist. . . . .	86
4.7	Eigenwerte für Wandposition $y/\Delta y = 0, 9$ . Von links nach rechts: Lagrange Int. 4ter Ordnung, Lagrange Int. 3ter Ordnung und Int. mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate (3ter Ordnung). Alle Eigenwerte konj. komplex und in der rechten Halbebene. . . . .	88
4.8	Eigenwerte für Wandposition $y/\Delta y = 0.5$ . Von links nach rechts: Lagrange Int. 4ter Ordnung, Lagrange Int. 3ter Ordnung und Int. mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate (3ter Ordnung). Alle Eigenwerte konj. komplex und in der rechten Halbebene. . . . .	88
4.9	Eigenwerte für Wandposition $y/\Delta y = 0.1$ . Von links nach rechts: Lagrange Int. 4ter Ordnung, Lagrange Int. 3ter Ordnung und Int. mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate (3ter Ordnung). Alle Eigenwerte konj. komplex und in der rechten Halbebene. . . . .	88
4.10	IB Methode mit Lagrange Interpolation (4ter Ordnung) ohne Flusskorrektur: Instabile Eigenwerte (a) und erste rein reelle (instabile) Eigenform (b). . . . .	90
4.11	IB Methode mit Interpolation nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate (3ter Ordnung) ohne Flusskorrektur: Instabile Eigenwerte (a) und erste rein reelle (instabile) Eigenform (b). . . . .	90

4.12	IB Methode mit linearer Lagrange Interpolation (2ter Ordnung) ohne Flusskorrektur: Instabile Eigenwerte (a) und erste rein reelle (instabile) Eigenform (b). . . . .	91
4.13	IB Methode mit linearer Interpolation (2ter Ordnung) und Flusskorrektur: Stabile Eigenwerte und erste rein reelle (gedämpfte) Eigenform (b). . . . .	91
5.1	Draufsicht auf die zylindrische Taylor-Couette Strömung. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird nur ein Viertel des Zylinders gezeigt. Der äußere Zylinder ist starr, während der innere Zylinder mit $U_\phi$ rotiert. . . . .	98
5.2	Analytische und numerische Lösung im Vergleich für Gitter #1 und Gitter #2 mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate als IB Randberechnung. Oben: Verlauf des Geschwindigkeitsprofils. Unten: Druckverlauf. . . . .	99
5.3	Absoluter Fehler der tangentialen Geschwindigkeit im Vergleich zur analytischen Lösung an einem Punkt für die unterschiedlichen Interpolationsverfahren. . . . .	100
5.4	Absoluter Fehler der tangentialen Geschwindigkeit im Vergleich zur analytischen Lösung an einem Punkt für die konservative IB Methode und die IB Methode mit Punktwerten (Lagrange Interpolation 4ter Ordnung). . . . .	101
5.5	Schiefer Kanal für die Bestimmung der zeitlichen Konvergenzordnung. Abbildung a) zeigt den schematischen Aufbau der numerischen Lösung mit periodischen Randbedingungen und (b) zeigt die numerische Lösung mit $ \vec{u}/u_{max} _{min} = 0$ (blau) und $ \vec{u}/u_{max} _{max} = 1$ (rot). . . . .	103
5.6	Numerische und analytische Lösung der laminaren Kanalströmung. . . . .	104
5.7	Absoluter Fehler der Geschwindigkeit in x-Richtung im Vergleich zur Referenzlösung für beide IB Methoden. Für die IB Methode mit Punktwerten wird die Interpolation mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate verwendet. . . . .	105
5.8	Konfiguration der zweidimensionalen Kanalströmung mit scharfkantigem Hindernis (a). Die Abmessungen sind $d_1 = 24h$ , $d_2 = 2h$ , $d_3 = 2.66h$ , $d_4 = 3.33h$ , $\alpha = 45^\circ$ . Momentanaufnahme der instationären Strömung anhand der u Geschwindigkeitskomponente (b) für die Simulation res03. Vergleiche hierzu Tabelle 5.3. . . . .	106
5.9	Gitterlinien der Simulationen res01 (a), res02 (b) und res03 (c) nach Tabelle 5.3. Gezeichnet ist jede zehnte Gitterlinie. . . . .	108
5.10	Stromlinien der zweidimensionalen Kanalströmung mit scharfkantigem Hindernis für Simulation res03. . . . .	108
5.11	Übersicht der Geschwindigkeitsprofile in Hauptströmungsrichtung für die zweidimensionalen Kanalströmung (res03). Der Beginn der Geschwindigkeitsprofile wurde an die jeweilige x/h Position ( $x/h=0, 4, 10, 16, 22$ ) gesetzt und mit dem Faktor 0.8 skaliert. . . . .	108
5.12	Massenabweichung zwischen den Querschnitten $Q_1$ und $Q_2$ über der Zeit für die Simulation res01 (siehe Abbildung 5.8 für die Position der Querschnitte). . . . .	110
5.13	Geschwindigkeitsprofil (a) und turbulente Spannung $\langle u'u' \rangle$ (b) an Position $x/h = 10$ für die Simulationen res02 und kres02. . . . .	111
5.14	Geschwindigkeitsprofil (a) und turbulente Spannung $\langle u'u' \rangle$ (b) an Position $x/h = 22$ für die Simulationen res02 und kres02. . . . .	111

6.1	Geschwindigkeit in Strömungsrichtung und Reynoldsspannung $\langle u'v' \rangle$ für die Kanalströmung bei $Re_\tau = 180$ . MKM bezeichnet die Simulation von Moser et al. [41] und MGLET die hier vorgestellte Simulation. . . . .	115
6.2	Reynoldsspannungen $\langle u'u' \rangle$ , $\langle v'v' \rangle$ , $\langle w'w' \rangle$ für die Kanalströmung bei $Re_\tau = 180$ . MKM bezeichnet die Simulation von Moser et al. [41] und MGLET die hier vorgestellte Simulation. . . . .	117
6.3	Mittleres Geschwindigkeitsprofil und mittlere Wirbelviskosität für die Kanalströmung bei $Re_\tau = 180$ . MKM bezeichnet die Simulation von Moser et al. [41]. Gezeigt werden die LES Simulation mit Standard Smagorinsky Modell (SMAG), dynamischem Smagorinsky Modell (LAG) und dem WALE Modell. Die Simulation ohne Turbulenzmodell wird als grob aufgelöste DNS (GDNS) bezeichnet. . . . .	119
6.4	Reynoldsspannungen $\langle u'u' \rangle$ für die Kanalströmung bei $Re_\tau = 180$ . MKM bezeichnet die Simulation von Moser et al. [41]. Gezeigt werden die LES Simulation mit Standard Smagorinsky Modell (SMAG), dynamischem Smagorinsky Modell (LAG) und dem WALE Modell. . . . .	120
6.5	Instantane Geschwindigkeit in Strömungsrichtung bei $Re = 5600$ . . . . .	123
6.6	Stromlinien für das zeitlich gemittelte Strömungsfeld bei $Re = 5600$ . . . . .	123
6.7	Berechnungsgitter der turbulenten Kanalströmung mit Hügeln bei $Re = 5600$ ; dargestellt ist jede 15te Gitterlinie. . . . .	125
6.8	Quotient aus Filterweite des Gitters und Kolmogorov Längenskala für das DNS Gitter bei $Re = 5600$ . Gezeigt werden die Positionen $x/h = 0.5, 1.0$ und $6.0$ . . . . .	125
6.9	Gitterparameter: Gitterweiten $\Delta x^+$ und $\Delta y^+$ an der IB Wand sowie der Abstand des Druckpunktes $d^+$ von der IB Wand in viskosen Einheiten sowie das Seitenverhältnis (SV) der Zellen an der Wand ( $Re = 5600$ ). . . . .	126
6.10	Wandschubspannung (a) und Druckverlauf (b) der DNS bei $Re = 2800$ und $Re = 5600$ (MGLET) im Vergleich zu den Simulationsergebnissen von Breuer et al. [5] (LESOCC). . . . .	128
6.11	Geschwindigkeit in Strömungsrichtung der DNS bei $Re = 2800$ und $Re = 5600$ (MGLET) im Vergleich zu den Simulationsergebnissen von Breuer et al. [5] (LESOCC). . . . .	129
6.12	Wandnormale Geschwindigkeit und Reynoldsspannung $\langle u'u' \rangle$ der DNS bei $Re = 2800$ und $Re = 5600$ (MGLET) im Vergleich zu den Simulationsergebnissen von Breuer et al. [5] (LESOCC). . . . .	130
6.13	Instantanes Geschwindigkeitsfeld aus der Simulation für zwei hintereinander angeordnete Hügel. . . . .	131
6.14	Vergleich der DNS Simulation bei $Re = 5600$ (MGLET) mit experimentellen Daten von Rapp [52] (Exp.) an unterschiedlichen Positionen für die Geschwindigkeit in Hauptströmungsrichtung und die vertikale Geschwindigkeit. . . . .	132
6.15	Instantanes Geschwindigkeitsfeld mit Isolinie bei $U = 0$ der Grobstruktursimulation bei $Re = 10595$ für die Simulation $4mWaleF$ . . . . .	135
6.16	Stromlinien der Grobstruktursimulation für die zeitlich gemittelte Strömung bei $Re = 10595$ für die Simulation $4mWaleF$ . . . . .	135
6.17	Wandschubspannung (a) und Druckverlauf (b) bei $Re = 5600$ für die DNS und bei $Re = 10595$ für die Grobstruktursimulation von Breuer et al. [5]. . . . .	136

6.18 Ablöse- und Wiederanlegepunkte in Abhängigkeit von der Reynoldszahl mit den DNS Simulationen aus dieser Arbeit (MGET) im Vergleich zu Simulationen von Breuer et al. [5] (LESOC). . . . .	137
6.19 Gitterlinien des feinen Gitters (a) und des groben Gitters (a). Gezeichnet ist jede dritte Gitterlinie. . . . .	139
6.20 Quotient aus Filterweite des Gitters und Kolmogorov Längenskala für die Simulation $4mWaleF$ auf dem feinen Gitter (a) und $1mWaleF$ auf dem groben Gitter (b) bei $Re = 10595$ . Gezeigt werden die Positionen $x/h = 0.5, 1.0$ und $6.0$ . . . . .	140
6.21 Gitterparameter: Gitterweiten $\Delta x^+$ und $\Delta y^+$ an der IB Wand sowie der Abstand des Druckpunktes $d^+$ von der IB Wand in viskosen Einheiten sowie das Seitenverhältnis (SV) der Zellen an der Wand für das feine Gitter (a) und das grobe Gitter (b). Für die Berechnung wurde die Wandschubspannung aus Breuer et al. [5] verwendet. . . . .	141
6.22 Geschwindigkeit in Strömungsrichtung bei $Re = 10595$ für die Simulationen von Breuer et al. [5] und Fröhlich et al. [14] im Vergleich zu Simulation $4mWaleF$ . . . . .	145
6.23 Wandnormale Geschwindigkeit und Reynoldsspannung $\langle u'u' \rangle$ bei $Re = 10595$ für die Simulationen von Breuer et al. [5] und Fröhlich et al. [14] im Vergleich zu Simulation $4mWaleF$ . . . . .	146
6.24 Vergleich der Simulation $4mWaleF$ bei $Re = 10595$ mit experimentellen Daten von Rapp [52] (Exp.) an unterschiedlichen Positionen für die Geschwindigkeit in Hauptströmungsrichtung und die vertikale Geschwindigkeit . . . . .	148
6.25 Vergleich der Simulation $4mWaleF$ bei $Re = 10595$ mit Experiment von Rapp [52] (Exp.) und Simulation von Breuer et al. [5] an unterschiedlichen Positionen für die Reynoldsspannungen $\langle u'u' \rangle$ und $\langle u'v' \rangle$ . . . . .	149
6.26 Geschwindigkeit $\langle u \rangle$ in Strömungsrichtung und $\langle v \rangle$ in vertikaler Richtung an den Positionen $x/h = 0.05$ und $x/h = 6$ für die Simulationen $4mSmagF$ und $4mWaleF$ bei $Re = 10595$ . . . . .	152
6.27 Reynoldsspannungen $\langle u'u' \rangle$ und $\langle u'v' \rangle$ an den Positionen $x/h = 0.5$ und $x/h = 6$ für die Simulationen $4mSmagF$ und $4mWaleF$ bei $Re = 10595$ . . . . .	153
6.28 Geschwindigkeit $\langle u \rangle$ in Strömungsrichtung und $\langle v \rangle$ in vertikaler Richtung an den Positionen $x/h = 0.05$ und $x/h = 6$ für die Simulationen $1mSmagF$ , $1mWaleF$ und $1mLagF$ bei $Re = 10595$ . . . . .	156
6.29 Reynoldsspannungen $\langle u'u' \rangle$ und $\langle u'v' \rangle$ an den Positionen $x/h = 0.5$ und $x/h = 6$ für die Simulationen $1mSmagF$ , $1mWaleF$ und $1mLagF$ bei $Re = 10595$ . . . . .	157
6.30 Wandschubspannung für die Simulationen $4mWale$ und $1mSmag$ auf dem feinen und groben Gitter ( $Re = 10595$ ). . . . .	160
6.31 Reynoldsspannungen im Vergleich für das feine und das grobe Gitter aus den Simulationen $4mWaleF$ und $1mSmagF$ . Abbildung (b) zeigt einen vergrößerten Ausschnitt aus (a). Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurden die turbulenten Spannungen $\langle u'v' \rangle$ mit $(-1)$ multipliziert. . . . .	162
6.32 Normierte Wirbelviskosität $\langle \nu_t \rangle / \nu$ nahe der Wand für die Grobstruktursimulationen bei $Re = 10595$ an der Position $x/h = 0.05$ für das feine (links) und das grobe Gitter (rechts). . . . .	163

6.33	Normierte Wirbelviskosität $\langle \nu_t \rangle / \nu$ nahe der Wand für die Grobstruktursimulationen bei $Re = 10595$ an der Position $x/h = 2$ für das feine (links) und das grobe Gitter (rechts). . . . .	164
6.34	Geschwindigkeit $\langle u \rangle$ in Strömungsrichtung und $\langle v \rangle$ in vertikaler Richtung an den Positionen $x/h = 0.05$ und $x/h = 6$ für die Simulationen $4mWaleF$ und $4mWale$ bei $Re = 10595$ . . . . .	167
6.35	Reynoldsspannungen $\langle u'u' \rangle$ an den Positionen $x/h = 2$ und $x/h = 6$ für die Simulationen $4mWaleF$ , $4mWale$ (a) sowie $4mSmagF$ und $4mSmag$ (b) bei $Re = 10595$ . . . . .	168
6.36	Geschwindigkeit $\langle u \rangle$ in Strömungsrichtung (a) und $\langle v \rangle$ in vertikaler Richtung (b) an den Positionen $x/h = 0.05$ und $x/h = 6$ für die Simulationen $1mSmagF$ und $1mSmag$ bei $Re = 10595$ . . . . .	170
6.37	Reynoldsspannungen $\langle u'u' \rangle$ an den Positionen $x/h = 2$ und $x/h = 6$ für die Simulationen $1mSmagF$ , $1mSmag$ (a) sowie $1mWaleF$ und $1mWale$ (b) bei $Re = 10595$ . . . . .	171
6.38	Konfiguration der Simulation mit Angabe der Randbedingungen: Druckrandbedingung oben und unten sowie Haftbedingung an den Seiten (a). Geometrie aus CT Abtastung der Asphaltprobe (b) (Die Geometrie wurde hier bereits vernetzt). . . . .	172
6.39	2D Schnitt durch das numerische Berechnungsnetz (a). Die kartesischen Berechnungszellen sind durch Punkte angedeutet. Blaue Punkte sind Berechnungszellen innerhalb der Geometrie, rote innerhalb einer Pore. Im Hintergrund wird die Asphalt Geometrie gezeigt. Im Ausschnitt (b) ist die Auflösung einer Pore zu sehen. . . . .	173
6.40	Schnitte durch die Mitte des Asphaltblocks. Abbildungen (a) und (b) zeigen einen xy-Schnitt (Draufsicht) und Abbildungen (c) und (d) zeigen einen xz-Schnitt (Seitenansicht) jeweils für die w Geschwindigkeitskomponente in z-Richtung und den Druck $P$ . $w_{min} = -80mm/s$ (blau) und $w_{max} = 12mm/s$ (rot); $p_{min} = 0Pa$ (blau) und $p_{max} = 10Pa$ (rot). . . . .	175
6.41	Stromlinien der laminaren Durchströmung. Die Farbe der Stromlinien ist durch den Betrag des Geschwindigkeitsvektors vorgegeben. Hohe Geschwindigkeiten entlang einer Stromlinie sind rot. $ \vec{u} _{min} = 0mm/s$ (blau) und $ \vec{u} _{max} = 20mm/s$ (rot). . . . .	176
6.42	Qualitative Darstellung der gefilterten Wandschubspannung. Bereiche mit hoher Wandschubspannung sind rot. Darstellung mit ausgefülltem Körpervolumen (a) und ausschließlich mit benetzter Oberflächengeometrie (b). . . . .	176
A.1	Indizierung der Gittergrößen und Zellgrößen in der Umgebung einer Basiszelle (Druckzelle mit Variable $\phi$ ) mit zugehörigen versetzten Impulszellen (U,V,W) nach Werner [75] und Baetke [2]. . . . .	191
A.2	Illustration der diskreten Impulsgleichung am Beispiel der u-Komponente nach Werner [75] . . . . .	192

# Nomenklatur

Die hier aufgeführten Bezeichnungen treten häufiger im Text auf. Bezeichnungen, die hier nicht aufgeführt sind, werden im Text erklärt.

## Lateinische Buchstaben

$C_s$	Smagorinsky-Konstante
$k$	Wellenzahl
$E$	Energie
$\vec{n}$	Normalenvektor
$p$	Druck
$Re$	Reynoldszahl
$Re_t$	Turbulente Reynoldszahl
$Re_\tau$	Reynoldszahl basierend auf der Reibung: $Re_\tau = \delta/\delta_\nu$
$c$	Konvektionsgeschwindigkeit in der eindimensionalen Konvektionsgleichung
$u_\tau$	Schubspannungsgeschwindigkeit $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho}$
$u_i$	Geschwindigkeit in kartesische Richtung $i$
$f_i$	Volumenkraft in kartesische Raumrichtung $i$
$y^+$	Dimensionsloser Wandabstand $y^+ = yu_\tau/\nu$
$u^+$	Dimensionslose Geschwindigkeit $u^+ = u/u_\tau$
$L_{ij}$	Germano Identität
$t$	Zeit
$u, v, w$	Ausgeschriebene kartesische Geschwindigkeitskomponenten $u_i$
$ni, nj, nk$	Anzahl der Gitterpunkte in x,y und z Richtung
$u_b$	Flächengemittelte Geschwindigkeit (engl. bulk velocity)

## Griechische Buchstaben

$\alpha, \beta$	Interpolationskoeffizienten
$\Delta$	Filterweite für das Feinstrukturmodell
$\Delta x, \Delta y, \Delta z$	Maschenweiten einer Druckzelle
$\delta x, \delta y, \delta z$	Abstände der Druckmittelpunkte in einer Maschenzelle
$\Delta t$	Zeitschrittweite
$\epsilon$	Dissipationsrate
$\eta_k$	Kolmogorovsches Mikrolängenmaß
$\mu$	dynamische Viskosität
$\nu$	kinematische Viskosität
$\nu_t$	Wirbelviskosität (turbulente Viskosität)
$\rho$	Dichte
$\tau_\omega$	Wandschubspannung

$\phi$	Platzhaltergröße (z.B. für Druck $p$ oder Geschwindigkeiten $u_i$ )
$\sigma_{ij}$	Spannungstensor
$\delta_{ij}$	Kronecker Delta
$s_{ij}$	Deformationstensor
$\delta$	Grenzschichtdicke
$\delta_\nu$	Viskoses Längenmaß: $\delta_\nu = \nu/u_\tau$
$\lambda_i$	i-ter Eigenwerte

## Mathematische Bezeichnungen

$\phi$	Skalar
$\vec{\phi}$	Vektor
$\phi_i$	Kartesische Komponente des Vektors $\vec{\phi}$
$\phi_{ij}$	Kartesische Komponente des Tensors zweiter Stufe $\Phi$
$\langle \phi \rangle$	Statischer (zeitlicher) Mittelwert der Größe $\phi$
$\bar{\phi}$	Räumlicher oder zeitlicher Mittelwert je nach Angabe im Text
$\overrightarrow{\phi}$	Gefilterte Größe $\phi$ (Grobstrukturwert)
$\phi'$	Fluktuation der Größe $\phi$ (Abweichung vom statischen Mittelwert $\langle \phi \rangle$ )
$\partial/\partial x_i$	Partielle Ableitung in kartesischer Raumrichtung

## Sonstige mathematische Symbole

.	Operationssymbol für das Skalarprodukt (inneres Produkt)
$\times$	Operationssymbol für das Skalarprodukt (äußerer Produkt)
$\nabla$	Nabla Operator
$\prod$	Produktzeichen ( $\prod_{a=1}^n \phi_a = \phi_1\phi_2\dots\phi_n$ )
$\sum$	Summationszeichen ( $\sum_{a=1}^n \phi_a = \phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_n$ )

## Indizes mit besonderer Bedeutung

$rms$	root mean square: $\phi_{rms} = \sqrt{\langle \phi'' \rangle^2}$
$N, S, E, W, P$	North, South, East, West, Point: Position der Zellpunkte
$n$	Zeitschritt

## Abkürzungen

DNS	Direkte Numerische Simulation
LES	Grobstruktursimulation (engl. Large Eddy Simulation)
RANS	Reynolds Averaged Navier Stokes
IB	Immersed Boundary
SGS	Feinstruktur (engl. subgrid-scale)
SIP	<i>Strongly Implicit Procedure</i> (Iteratives Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme)
CFL	Courant Friedrich Lewy (Stabilitätskennzahl): $CFL = U\Delta t/\Delta x$
DIFF	Diffusionskennzahl (Stabilitätskennzahl): $DIFF = \nu\Delta t/\Delta x^2$

CT	Computer Tomographie
CAD	Computer Aided Design
MGLET	In dieser Arbeit verwendetes Simulationsprogramm (Multi Grid Large Eddy Turbulence)
LESOCC	Simulationsprogramm ([5],[14]): (Large Eddy Simulation on Curvilinear Coordinates)
PIV	Messmethode: Particle Image Velocimetry
LDA	Messmethode: Laser Doppler Anemometrie



# Publikationen

Im Folgenden werden Publikationen genannt, die im Rahmen dieser Arbeit entstanden sind und Ergebnisse der hier vorgestellten Arbeit enthalten. Sie wurden mit Genehmigung vorveröffentlicht.

Es folgt eine Auflistung von Publikationen, die Untersuchungen der turbulenten Grenzschicht auf Basis der hier vorgestellten Direkten Numerischen Simulationen (DNS) für die Kanalströmung mit Hügeln beschreiben.

Anschließend folgt eine Auflistung von Publikationen, die weitere Ergebnisse für die Grobstruktursimulation der Kanalströmung mit Hügeln enthalten. Zum Schluss wird eine weitere Literaturstelle angegeben, die eine praktische Anwendung der IB Methode von Tremblay et al. [69, 70] enthält, die auch in dieser Arbeit verwendet wird.

## **Publikationen, die Ergebnisse dieser Arbeit enthalten.**

- N. Peller, A. Le Duc, F. Tremblay, und M. Manhart. High-order stable interpolations for Immersed Boundary Methods. *Int. J. for Num. Meth. Fluids*, 52(11):1175–1193, DOI: 10.1002/fld.1227, 2006.
- M. Breuer, N. Peller, Ch. Rapp, und M. Manhart. Flow over periodic hills - numerical and experimental study over a wide range of Reynolds numbers. *Computers and Fluids*, DOI: 10.1016/j.compfluid.2008.05.002, 2008.
- N. Peller und M. Manhart. Turbulent Channel Flow with Periodic Hill Constrictions. In C.; Heinemann H.-J.; Henke R.; Höninger H. Rath, H.J.; Holze, (Hrsg.), *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*, 92, S. 504–512. Springer, 2006.

## **Publikationen, die Ergebnisse der Direkten Numerischen Simulationen der Kanalströmung mit Hügeln aus dieser Arbeit verwenden um das Verhalten turbulenter Strömungen nahe einer Wand zu untersuchen.**

- M. Manhart, N. Peller, und C. Brun. Near-wall scaling for turbulent boundary layers with adverse pressure gradient. *Theor. Comput. Fluid Dynam.*, 22(3-4):243–260, DOI: 10.1007/s00162-007-0055-0, Mai 2008.
- N. Peller, C. Brun, und M. Manhart. Wall layer investigations of channel flow with periodic hill constrictions. In E. Lamballais, R. Friedrich, B.J. Geurts, und O. Metais, (Hrsg.), *ERCOFTAC Workshop Direct and Large Eddy Simulation (DLES)* 6, S. 389–396, 2005, Springer.
- N. Peller, M. Manhart, M. Petrovan Boiarciuc, und C. Brun. Near-wall scaling for incompressible and compressible flows. In Eric Cancès and Jean-Frédéric Gerbeau, (Hrsg.), *Proceedings of ESAIM*, 16, S. 114–132, DOI: 10.1051/proc:2007015, February 2007.

- N. Peller und M. Manhart. Large Eddy Simulation of a Separating Turbulent Boundary Layer. In *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics (PAMM)*, Bremen, 31. März - 4. April 2008.
- N. Peller, M. Manhart, T. Goossens, M. Petrovan, und C. Brun. Near-wall behaviour of a family of separating turbulent shear flows. In *Euromech Colloquium 469, Large Eddy Simulation of Complex Flows*, Dresden, 16. - 18. Oktober 2005. European Mechanics Society.

**Publikationen, die weitere Ergebnisse der Grobstruktursimulation für die Kanalströmung mit Hügeln zeigen.**

- M. Breuer, B. Jaffrezic, N. Peller, M. Manhart, J. Fröhlich, Ch. Hinterberger, W. Rodi, G. Deng, O. Chikhaoui, S. Saric, und S. Jakirlic. A comparative study of the turbulent flow over a periodic arrangement of smoothly contoured hills. In E. Lamballais, R. Friedrich, B.J. Geurts, und O. Metais, (Hrsg.), *ERCOFTAC Workshop Direct and Large Eddy Simulation (DLES) 6*, Poitiers, 12. - 14. September 2005, Springer.
- S. Šarić, S. Jakirlić, M. Breuer, B. Jaffrézic, G. Deng, O. Chikhaoui, J. Fröhlich, D. von Terzi, M. Manhart, und N. Peller. Evaluation of Detached Eddy Simulations for predicting the flow over periodic hills. In Eric Cancès and Jean-Frédéric Gerbeau, (Hrsg.), *Proceedings of ESAIM*, 16, S. 133–145, DOI: 10.1051/proc:2007016, February 2007.
- M. Breuer, B. Jaffrezic, S. Saric, S. Jakirlic, G. Deng, O. Chikhaoui, J. Fröhlich, D. von Terzi, M. Manhart, und N. Peller. Issues in hybrid les-rans and coarse grid les of separated flows. In *Euromech Colloquium 469, Large Eddy Simulation of Complex Flows*, Dresden, 6. - 8. Oktober 2005.

**Publikationen, die die IB Methode von Tremblay et al. [69, 70] mit der hier untersuchten Interpolation der kleinsten Fehlerquadrate verwenden.**

- A. Le Duc, N. Peller, M. Manhart, und E.-P. Wachsmann. Aerodynamics and acoustic sources of the exhaust jet in a car air-conditioning system. In W. Rodi and M. Mulas, (Hrsg.), *Proceedings of the ERCOFTAC International Symposium on Engineering Turbulence Modelling and Measurements, ETMM6*, S. 709–718, Sardinien, 23. - 25. Mai 2005, Elsevier.

# 1 Einleitung

Alles wird durch Wasser erhalten!  
Ozean, gönn uns dein ewiges Walten.  
Wenn du nicht in Wolken sendetest,  
Nicht reiche Bäche spendetest,  
Hin und her nicht Flüsse wendetest,  
Die Ströme nicht vollendetest,  
Was wären Gebirge, was Ebnen und Welt?  
Du bist's der das frischeste Leben erhält.  
(J. W. von Goethe)

Das Gedicht lässt erahnen, dass schon zu Goethes Zeiten das Bewußtsein für die sensiblen ökologischen Zusammenhänge vorhanden war. Heute wird viel über die künftige Entwicklung des Ökosystems und des Erdklimas spekuliert und z.B. das Thema Erderwärmung sehr kontrovers diskutiert. Auch über die Gefahr, dass der Golfstrom ins Stocken kommt und schwerwiegende Folgen nach sich zieht, wird nachgedacht. Hier sind zuverlässige Aussagen über das Verhalten und die Eigenschaften der Ozeanströmungen oder des gesamten Klimasystems gefragt. Ein Experiment, das die komplexen Interaktionen des Klimasystems abbildet, ist kaum denkbar. Die numerische Strömungsmechanik ist eines der Werkzeuge, die denkbar sind, um in Zukunft verlässliche Prognosen zu erstellen. Leider scheitern verlässliche Aussagen oft noch an den physikalischen Modellen oder an den Rechenressourcen für aufwendige Simulationen. Bekannt ist diese Problematik des Werkzeugs Strömungssimulation unbewußt aus dem Wetterbericht, der seine Vorhersage u.a. auf Simulationsergebnisse stützt. Neben Satellitenaufnahmen sind im Fernsehen Animationen der künftigen Wolkenbewegungen zu sehen und die Prognosen für das Wetter der nächsten Tage zeigen oft große Abweichungen von der Realität. Es wird deutlich, wie komplex und schwierig die Vorhersage bzw. Simulation turbulenter atmosphärischer Strömungen ist. Gleichzeitig wird damit die Notwendigkeit weiterer Forschung und Entwicklung im Bereich der numerischen Simulation offensichtlich. Ein Grund für die Komplexität der numerischen Strömungssimulation ist, dass es sich oft um turbulente Strömungen handelt.

**Turbulenz** Das Phänomen turbulente Strömung ist bekannt seitdem Leonardo da Vinci (1452-1519) Strömungen studierte. Erst drei Jahrhunderte später wurde der mathematische Hintergrund gefunden, um die Bewegung von Strömungen zu beschreiben: Die Navier-Stokes Gleichungen. Sie wurden im 19ten Jahrhundert nach Claude Navier und George Stokes benannt. Bisher ist es der Mathematik weder gelungen zu beweisen, dass es eine Lösung der Navier-Stokes Gleichungen gibt, noch dass eine mögliche Lösung keine Singularitäten oder Unstetigkeiten besitzt. Das Clay Mathematics Institut<sup>1</sup> nennt dies eines der sieben Mil-

---

<sup>1</sup>Clay Mathematics Institute: <http://www.claymath.org/millennium/>

lenium Probleme der Mathematik und hat ein Preisgeld von 1,000,000 *USD* für eine Lösung oder ein Gegenbeispiel ausgeschrieben. Die Navier-Stokes Gleichungen sind nun die Grundlage, um z.B. Ozeanströmungen, atmosphärische Strömungen oder auch Strömungen in Rohren, oder um Tragflügel zu beschreiben. Sie beschreiben sowohl kompressible (z.B. Überschallströmungen mit Schockwellen) und inkompressible Strömungen als auch laminare und turbulente Strömungen. Die Navier-Stokes Gleichungen stellen eine Formulierung für die drei Grundprinzipien der Mechanik dar: Impulserhaltung, Energieerhaltung und Massenerhaltung.

Turbulenz ist dabei keine Fluideigenschaft, sondern ein Strömungszustand und bei Flüssigkeiten und Gasen meist identisch. Die Natur von turbulenten Strömungen ist jedoch nicht einfach zu beschreiben, weil trotz unregelmäßigen und randomen Schwankungsbewegungen kohärente Strukturen vorhanden sind. Ein technisches Beispiel für diese zusammenhängenden Strukturen oder Wirbel ist der "Wing Tip Vortex" bei Flugzeugen. Dieser Wirbel entsteht an den Flügel spitzen und ist so stabil, dass er mehrere Minuten braucht um sich wieder zu zersetzen. Aus diesem Grund starten große Flugzeuge in einem bestimmten zeitlichen Abstand, um nicht durch den Wirbel des vorhergehenden Flugzeugs in Gefahr zu geraten. Oder, um zurück zur Wettervorhersage zu kommen, ein Beispiel aus der Natur: Satellitenaufnahmen der Atmosphäre zeigen oft riesige Wirbelstrukturen, z.B. Orkane, die genauso beeindruckend wie gefürchtet sind. Aber ab wann ist eine Strömung als turbulent zu bezeichnen? Charakteristisch für turbulente Strömungen ist ein voll ausgebildetes Spektrum an Strukturen bzw. Wirbeln und Schwankungen. Dort sieht man bestätigt, dass große Strukturen viel Energie enthalten und diese wie in einer Kaskade durch Dissipation an die kleineren Strukturen weitergegeben werden. In Lehrbüchern wird oft betont, dass Turbulenz vor allem durch Dissipation und Diffusivität gekennzeichnet ist [50]. Dissipation sorgt für den beschriebenen Verlust kinetischer Energie und durch Diffusivität sind beispielsweise Mischvorgänge in turbulenten Strömungen schneller als in laminaren. Aber aufgrund seiner Komplexität gibt es bisher keine allgemein akzeptierte Definition des Phänomens Turbulenz [13].

**Simulation** Turbulente Strömungen sind in ihrer Simulation viel aufwendiger als z.B. laminare Strömungen. Ein naiver Vergleich zwischen turbulenten und laminarer Kanalströmung zeigt: Für die laminare Kanalströmung existiert eine einfache analytische Lösung während für die turbulente Kanalströmung eine Simulation notwendig ist. Ein Grund für den hohen Simulationsaufwand ist die Nichtlinearität der Gleichungen und das Schließungsproblem der Turbulenz. Das Schließungsproblem der Turbulenz resultiert aus der Nichtlinearität der Gleichungen und erschwert die Simulation turbulenten Strömungen. Einen Einblick in die mathematische Beschreibung von turbulenten Strömungen wird in Kapitel 2 gegeben. Nur mit Hilfe der Direkten Numerischen Simulation (DNS), die in Kapitel 2.3 beschrieben wird, kann mit hohem Berechnungsaufwand das Schließungsproblem umgangen werden. Mit der Grobstruktursimulation, die in Kapitel 2.4 beschrieben wird, folgt aus dem Schließungsproblem ein Modell für die turbulenten Schwankungen. Dabei reduziert sich der Berechnungsaufwand im Vergleich zur DNS erheblich, aber ein Turbulenzmodell muss die Physik der Strömung richtig abbilden.

Turbulente Strömungen sind also sehr komplexe Strömungen und zeigen kohärente Wirbelstrukturen sowie ein Spektrum an unterschiedlichen Strukturen bzw. Wirbeln. Neben der

Aufgabe, die Turbulenz in einem Modell abzubilden, kann auch die geometrische Komplexität eines umströmten Körpers oder einer Strömungsführung eine Herausforderung für die Simulation darstellen. Als Beispiel hierfür kann die Strömung durch poröse Medien herangezogen werden, wie sie in Kapitel 6.4 beschrieben wird. Dort wird ein Ausschnitt aus einer porösen Asphaltplatte gezeigt. Die Geometrie ist mit vielen kleinen Kanälen durchzogen, die sich untereinander schneiden und beliebig im Raum gekrümmmt sind. Die Kanäle zeigen eine Struktur ähnlich den Löchern, die ein Holzwurm hinterlässt. Durch diese Löcher fließt die Strömung in einem komplexen Netzwerk. Hier liegt die Schwierigkeit darin, ein Berechnungsgitter für die numerische Lösung der Navier-Stokes Gleichungen zu erstellen. Das Berechnungsgitter beschreibt bei der numerischen Strömungssimulation die Punkte, an denen die Lösung der diskretisierten Navier-Stokes Gleichungen ausgewertet wird. Sehr verbreitet sind hierfür numerische Verfahren, die auf unstrukturierten Gittern und Grundelementen wie Dreiecken (in 2D) oder Tetraedern (in 3D) basieren. Hier werden die Grundelemente an den Verlauf der Geometrie angepasst. Bei komplexen Geometrien wie in dem hier genannten Beispiel kann es sehr aufwendig sein, ein solches Gitter zu erstellen. Alternativ werden im akademischen Bereich gerne Verfahren verwendet, die auf kartesischen Gittern beruhen und sehr genaue und effiziente Algorithmen erlauben. Die Grundlagen für die numerische Lösung der Gleichungen auf einem kartesischen Berechnungsgitter werden in Kapitel 2 vorgestellt. Hier können die Gitterlinien aber nicht an eine komplexe Körpergeometrie angepasst werden. Die Geometrie wird implizit durch Randbedingungen berücksichtigt. Die in dieser Arbeit vorgestellte Immersed Boundary (IB) Simulationsmethode beschreibt ein solches Verfahren.

## 1.1 Immersed Boundaries

Das Immersed Boundary (IB) Verfahren ist ein weit verbreitetes Verfahren zur Beschreibung von komplexen Geometrien in kartesischen Gittern und bietet einige Vorteile [74]. Für kartesische Gitter gibt es effiziente Lösungsalgorithmen und sie benötigen wenig Speicher. Weiterhin ist es oft aufwendig, ein Berechnungsgitter für komplexe Körper zu erstellen, wenn es an die Geometrie angepasst werden muss. In der Immersed Boundary Methode ist es einfach, komplexe Geometrien zu simulieren, da immer das kartesische Gitter bleibt und der Körper nur in das Gitter gelegt wird<sup>2</sup>. Der effiziente Lösungsalgorithmus für das kartesische Gitter wird beibehalten und es muss nur der Effekt der Geometrie auf die Strömung abgebildet werden. Iaccarino und Verzicco [22] sowie Mittal und Iaccarino [36] gehen so weit, dass sie die Grobstruktursimulation in Kombination mit Immersed Boundaries und Wandmodellen neben Reynolds Averaged Navier-Stokes Simulationen (RANS) als mögliches Produktionswerkzeug für die Industrie sehen. Da die Randbedingung nicht mit dem Berechnungsgitter übereinstimmt, werden Interpolationen benötigt, um den Versatz des Geometrierandes zum Berechnungsgitter auszugleichen. Im Folgenden wird ein Überblick über die Arbeiten im Bereich Immersed Boundaries gegeben und es wird auf die unterschiedlichen Randbehandlungen, die Interpolationsrichtung sowie Interpolationsordnung und auf die Massenkonserватivität eingegangen.

<sup>2</sup>Die Körpergeometrie wird anschaulich in das Berechnungsgitter eingetaucht (engl. “immersed”). Die Ränder (engl. “boundaries”) des Körpers werden implizit berücksichtigt. Dadurch erklärt sich der Name Immersed Boundary Methode.

**Direct forcing** Die Idee, eine Randbedingung durch ein Kraftfeld zu modellieren, geht zurück auf Peskin [48]. Er modellierte zweidimensionale biologische Strömungen in elastischen Körpern. In seiner Methode ist der Zeitschritt der Strömung mit der Gleichung für die Position der elastischen Wand gekoppelt. Die ursprüngliche Methode erster Ordnung wurde von Lai und Peskin [27] auf zweite Ordnung erweitert. Die Methode ist aufgrund der Kopplung einer Lagrange Methode für die Ränder und einem Euleransatz für die Strömung numerisch sehr aufwendig.

Goldstein et al. [17] berechnen die Strömung um starre Körper. Der Kraftterm in der Impulsbilanz kann hier durch einen Quellterm ersetzt werden, der die Geschwindigkeit am Rand auf eine feste Geschwindigkeit bringt. Mit diesem feedback-forcing berechnen Goldstein et al. die zweidimensionale Strömung um einen Zylinder und die Strömung in einem Kanal als auch einem Kanal mit Rippen. Saiki und Biringen [55] verwenden das gleiche forcing um die Strömung um einen Zylinder bei  $Re = 400$  zu berechnen. Da sie einen Finite Differenzen Löser an Stelle eines Spektralverfahrens verwenden und das forcing über mehrere Gitterpunkte verteilen, gelang es ihnen die Gibbs Oszillationen nahe des Körpers, die in [17] beobachtet wurden, zu vermindern. Das stabilere Verhalten wird der Verwendung von Finiten Differenzen zugeschrieben. Die Methode von Saiki und Biringen [55] ist höchstens erster Ordnung genau am Rand.

Der große Nachteil des feedback-forcing ist die Existenz zweier, von Fall zu Fall unterschiedlicher Konstanten im Quellterm (forcing). Für Strömungen mit hohen Frequenzen (typischerweise turbulente Strömungen) nehmen diese Konstanten hohe Werte an und die Gleichungen werden steifer. Fadlun et al. [11] bemerken, dass die CFL Zahl bei feedback-forcing um bis zu 4 Größenordnungen im Vergleich zur Hauptströmung abfällt. Mit einem teilweise impliziten Zeitintegrationsverfahren für das forcing können Fadlun et al. die CFL Zahl steigern, aber sie bleibt mindestens eine Ordnung kleiner als ohne forcing.

Mohd-Yusof [38] gelang ein Durchbruch mit der zeitdiskreten Immersed Boundary Methode. Für die zeitlich diskretisierte Navier-Stokes Gleichung zwischen Zeitschritt  $n$  und  $n + 1$  berechnet er eine Kraft, so dass die Randbedingung zum Zeitpunkt  $n + 1$  exakt erfüllt wird. Dieser Kraftterm wird zur Impulsbilanz hinzugefügt. Der Kraftansatz wird direkt genannt, weil kein dynamischer Prozess benötigt wird: Die Randbedingung gilt zu jedem Zeitschritt, unabhängig von den charakteristischen Frequenzen der Strömung. Die Methode ist zeiteffizient, weil die Anforderungen an den Zeitschritt am Rand die gleichen sind wie in der Hauptströmung. Die Ergebnisse mit dieser Methode für einen laminaren Kanal mit Rippen stimmen gut mit den Ergebnissen für ein körperangepasstes Gitter überein. Die Immersed Boundary Methoden, die in dieser Arbeit behandelt werden, basieren ebenfalls auf dem direct-forcing Ansatz. Das für das direct forcing verwendete Zeitschrittverfahren wird detailliert in Kapitel 3 beschrieben und die zeitliche Konvergenzordnung überprüft (Kapitel 5).

**Interpolationsrichtung** Wie zuvor erwähnt muss bei der IB Methode die Geometrie nicht mit dem Berechnungsgitter übereinstimmen. Für die Berücksichtigung der Randbedingung im kartesischen Gitter werden Interpolationen benötigt. Fadlun et al. [11] setzen die Geschwindigkeiten am kartesischen Rand so, dass die Randbedingung mit einer linearen Interpolation erfüllt wird. Mit dieser Interpolation zweiter Ordnung vergleichen die Autoren erfolgreich ihre Simulationen einer Strömung um eine Kugel bei Reynolds-Zahlen  $Re = 100$

bis  $Re = 5000$  mit Ergebnissen eines körperangepassten Gitters. Verzicco et al. [74] simu-lieren die Strömung in einem Zylinder mit Kolben mit der gleichen Interpolation. Es wird darauf hingewiesen, dass die Interpolation entlang dem kürzesten Abstand zwischen kartesischem Kontrollpunkt und Körperrand statt findet. Diese eindimensionale Interpolation führt zu unterschiedlichen Konfigurationen, wenn die Körperoberfläche nicht parallel zum Gitter liegt. Kim et al. [25] hingegen verwenden bilineare Interpolationen für die Berechnung der Strömung um einen 2D Zylinder bis zu  $Re = 100$  und der Strömung um eine Kugel bis  $Re = 300$ . Mit dieser Interpolation ist die Interpolationsrichtung weniger willkürlich. Balaras [3] verwendet lineare Interpolation normal zu der Körperoberfläche. Seine Ergebnisse für die Umströmung eines Zylinders bei  $Re = 300$  und für eine Kanalströmung mit Wellengeometrie stimmen gut mit den Ergebnissen von körperangepassten Gittern überein. Tremblay et al. [69] verwenden eine Gewichtung, um die eindimensionale Lagrange Interpolation höherer Ordnung auf drei Dimensionen zu erweitern. Sie berechnen die turbulente Umströmung um einen Zylinder bei subkritischer Reynoldszahl (DNS bei  $Re = 3900$  [69] und LES bei  $Re = 140000$  [70]) und finden gute Übereinstimmung mit experimentellen Daten. Das Problem einer Vorzugsrichtung bei der Interpolation ist damit gelöst. Auf dem IB Verfahren nach Tremblay et al. [69, 70] wird in dieser Arbeit aufgebaut.

**Interpolationsordnung** Die Ordnung der Interpolation wird im Folgenden beschrieben. Wie Fadlun et al. [11] bemerken, benötigt eine lineare Interpolation starkes Clustering von Gitterpunkten nahe der Wand. Dies ist besonders wichtig, um Werte darstellen zu können, die nicht linear sind [66]. Darunter fällt auch die turbulente Viskosität  $\nu_t$  bei der Grobstruktursimulation. Die turbulente Viskosität muss in manchen Fällen nahe der Wand rekonstruiert werden, weil die Auswertung der Testfilter Operation auf blockierte Zellen innerhalb des Körpers zugreifen würde. Aber eine lineare Rekonstruktion von  $\nu_t$  kann die turbulente Viskosität bei Strömungen im Gleichgewicht überschätzen, da  $\nu_t$  mit der Steigung  $y^3$  nahe der Wand abnimmt [3]. Auch für die korrekte Repräsentation des Geschwindigkeitsverlaufes nahe der Wand kann eine höhere Ordnung sinnvoll sein. Bei laminaren Strömungen oder turbulenten Strömungen im viskosen Bereich ist eine lineare Interpolation ausreichend [36]. Ist das Gitter im turbulenten Fall nicht fein genug aufgelöst, sind Interpolationen höherer Ordnung wünschenswert, die den Verlauf der Geschwindigkeit in wandnormaler Richtung besser abbilden. Sie erhöhen nicht die Ordnung des Strömungslösers insgesamt, da sie durch die räumliche Diskretisierung im Strömungsgebiet vorgegeben ist, aber eine Reduktion der Gitterauflösung in Wandnähe ist damit denkbar. Da Interpolationen höherer Ordnung Instabilitäten hervorrufen können, muss ein Kompromiss zwischen Stabilität und Ordnung gefunden werden. Majumbar et al. [29] und Tseng und Ferziger [73] verwenden bilineare und quadratische (z.B. dritte Ordnung) Randinterpolationen zusammen mit einem kartesischen Strömungslöser global zweiter Ordnung. Beide verwenden “ad hoc” Punkte um Instabilitäten zu vermeiden. Kim et al. [25] bemerken ebenfalls das Problem in ihrer bilinearen Interpolation und führen eine “ad hoc” Verbesserung ein, die einer Interpolation kleinster Fehlerquadrate ähnlich sieht. Auch in der hier vorgestellten Methode wird die Stabilität der Lagrange Interpolation untersucht und die Verwendung der Methode der kleinsten Fehlerquadrate [44] für die Interpolation höherer Ordnung diskutiert.

**Massenerhaltung am IB Rand** Ein weiterer wichtiger Punkt bei der Immersed Boundary Methode ist die Einhaltung der Konservativitätseigenschaften am Rand. Mittal und Iaccarino [36] erklären, dass es nicht offensichtlich ist, welche Einschränkungen in Hinsicht auf Genauigkeit und Konservativitätseigenschaften eine Immersed Boundary Methode mit sich bringt. Die Genauigkeit ist nur zum Teil durch die Ordnung der Interpolation bestimmt. Unzureichende Konservativitätseigenschaften am IB Rand sind eine zusätzliche Fehlerquelle. Ein Ansatz, der die Massenerhaltung und Impulserhaltung erfüllt, ist z.B. der “cut-cell” Ansatz. Clarke et. al [8] verwenden diesen für die Eulergleichungen in 2D. In ihrem Ansatz ist die Geometrie analytisch gegeben und die entstehenden angeschnittenen Zellen können mit vertretbarem Aufwand diskretisiert werden. Auch andere Autoren verfolgen dieses Verfahren. So berechnet z.B. Mittal et al. [37] das Flattern von Objekten im freien Fall in zwei Dimensionen. In drei Dimensionen ergeben sich aber komplizierte Polyederzellen und die Diskretisierung auf solchen Zellen ist kompliziert [36]. Probleme ergeben sich vor allem für sehr kleine Zellen, die eine Einschränkung für Stabilität und Zeitschritt darstellen. Erweiterungen auf drei Dimensionen können aber z.B. auf der “cell-trimming” Vorgehensweise (Berger und Aftosmis [4]) beruhen. Denkbar sind auch “cell-merging” Ansätze wie bei Kirkpatrick et al. [26], wobei angeschnittene, sehr kleine Zellen mit Nachbarzellen verschmolzen (engl. “merged”) werden. Wichtig ist dabei also die Form der Kontrollvolumina. Das Kontrollvolumen wird an die angeschnittenen Zellen angepasst und die Diskretisierung entsprechend modifiziert.

Den umgekehrten Ansatz verfolgen Dröge und Verstappen [10], die aus den mathematischen Gleichungen und der Diskretisierung die Kontrollvolumina ableiten. Sie fordern, dass die Symmetrien, also die Konservativitätseigenschaften, der Navier-Stokes Gleichung erhalten bleiben. Dazu gehen sie von den mathematischen Gleichungen aus und konstruieren die angeschnittenen Kontrollvolumina nahe des Immersed Boundary Randes des Finite Volumenverfahrens in einer Weise, die die Symmetrien erhält. Dieses sehr einfallsreiche Vorgehen hat den Vorteil, dass Konservativitätseigenschaften automatisch erfüllt bleiben. Der Nachteil ist, dass die virtuell konstruierten Finite Volumenzellen im allgemeinen Fall nicht mit dem Rand des Körpers zusammenfallen und damit Schubspannungen auf der Körperoberfläche zum Teil nicht berechnet werden sowie dass die Konstruktion der virtuellen Kontrollvolumina in 3D kompliziert ist. Die Simulation der Umströmung eines Zylinders in 2D [10] lieferte gute Übereinstimmung mit der Literatur. Die Rekonstruktion der Wandschubspannung wurde von Dröge [9] analysiert und das Entstehen von Sprüngen im Verlauf der Wandschubspannung begründet. Diese Sprünge wurden auch in dieser Arbeit beobachtet, sobald grobe Gitter verwendet wurden. Sie sind eine Eigenheit der Immersed Boundary Methode, die u.a. auf die Tatsache zurückgeht, dass Körper und Gitter in beliebiger Position zueinander liegen können.

Das in dieser Arbeit vorgestellte IB Verfahren mit Flusskorrektur für den Erhalt der Konservativität am IB Rand unterscheidet sich von den oben genannten Verfahren. Es verwendet weder modifizierte Berechnungszellen noch ist es mit dem Verfahren von Dröge vergleichbar. Die Korrektur für die Massenerhaltung wird zusätzlich zu dem bestehenden IB Algorithmus eingeführt und erfordert kaum Modifikationen am bestehenden Programm. Die zeitliche und räumliche Konvergenz der konservativen Methode wird in Kapitel 3 überprüft. Der Einfluss der Stabilität wird in Kapitel 4 behandelt.

## 1.2 Beitrag der Arbeit

Der Beitrag der Arbeit ist zweigeteilt. Zum einen werden zwei Immersed Boundary Methoden für die Simulation komplexer turbulenter Strömungen vorgestellt, auf ihre numerischen Eigenschaften untersucht und an komplexen Testfällen erprobt. Zum anderen werden Ergebnisse hoch aufgelöster numerischer Simulationen für die turbulente Kanalströmung mit Hügeln vorgestellt, die als Datenbasis für die Untersuchung der Physik bei abgelösten Strömungen dienen können. Auch diese Simulationen wurden mit der Immersed Boundary Methode durchgeführt.

**Immersed Boundaries** Zielsetzung in Hinsicht auf die Immersed Boundary Methode ist es, Aufschluss über grundlegende numerische Eigenschaften zu geben und die Anwendbarkeit der Methode für komplexe und turbulente Strömungen zu zeigen. Es wird diskutiert welchen Einfluss unterschiedliche Interpolationsverfahren auf die Genauigkeit und Stabilität des numerischen Verfahrens haben. Zusätzlich wird der Einfluss der Massenerhaltung am IB Rand auf die Stabilität untersucht. Es wird gezeigt, dass die IB Methoden die Konvergenz des numerischen Verfahrens erhalten und genaue Ergebnisse für zweidimensionale und dreidimensionale Testfälle liefern. Dabei werden sowohl laminare als auch turbulente Testfälle betrachtet. Für den turbulenten Testfall wird der Einfluss von Turbulenzmodell, wandnahe Auflösung und IB Randbehandlung auf die Ergebnisse herausgestellt. Zusätzlich wird an einem geometrisch komplexen Testfall die hier entwickelte konservative IB Methode für beliebig komplexe dreidimensionale Geometrien angewendet.

**Referenzdaten** Für die Kanalströmung mit Hügeln werden Ergebnisse aus hoch aufgelösten Direkten Numerischen Simulationen (DNS) vorgestellt. Dabei werden zwei unterschiedliche Reynolds-Zahlen ( $Re = 2800$  und  $Re = 5600$ ) betrachtet und die numerische Auflösung diskutiert. Im Speziellen wird auf die Auflösung des Berechnungsgitters nahe der Wand eingegangen. Zur Validierung werden die hier vorgestellten Daten mit Ergebnissen aus der Literatur und aus dem Experiment verglichen. Für den gleichen Testfall werden ebenfalls die Ergebnisse gut aufgelöster Grobstruktursimulationen bei einer höheren Reynolds-Zahl ( $Re = 10595$ ) vorgestellt. Auch hier wird mit Ergebnissen aus der Literatur und dem Experiment verglichen. Die Strömungstopologie des Testfalls wird diskutiert und die vorhandenen Strömungsphänomene in Abhängigkeit von der Reynolds-Zahl betrachtet.

## 1.3 Aufbau

Der Aufbau der Arbeit wird im Folgenden beschrieben.

**Grundlagen der numerischen Strömungssimulation und der IB Methoden** Zuerst werden die Grundlagen der numerischen Strömungssimulation eingeführt (Kapitel 2) und drei unterschiedliche Feinstrukturmodelle für die Simulation turbulenter Strömungen vorgestellt. Anschließend folgt die Beschreibung der Immersed Boundary Methoden (Kapitel 3). Bei der IB Methode wird zwischen zwei numerischen Verfahren unterschieden. Das erste Verfahren behandelt den IB Rand ohne Korrektur des Massenflusses über den IB Rand. Es wird

im Folgenden als Verfahren mit “Punktwerten” bezeichnet. Das zweite Verfahren führt eine zusätzliche Flusskorrektur ein und wird im Folgenden als “konservatives” Verfahren oder Verfahren mit Flusskorrektur bezeichnet.

**Stabilität der IB Methoden** Beide IB Verfahren werden auf Stabilität untersucht (Kapitel 4). Zuerst wird das Verfahren ohne Flusskorrektur für unterschiedliche Randinterpolationen auf Stabilität untersucht. Die Stabilität wird anhand der semidiskreten eindimensionalen Konvektionsgleichung beurteilt. Aufgrund der Flusskorrektur ist eine Stabilitätsanalyse mit der eindimensionalen Konvektionsgleichung für das Verfahren mit Flusskorrektur hier nicht mehr möglich. Es wird eine Stabilitätsanalyse eingeführt, die den linearen Anteil des gesamten Strömungslösers für einen zweidimensionalen Testfall in einem linearen Gleichungssystem abbildet. Hierbei wird qualitativ mit den Ergebnissen der eindimensionalen Stabilitätsuntersuchung verglichen, um Aussagen über den Einfluss der Flusskorrektur zu erhalten.

**Zweidimensionale Testfälle** In Kapitel 5 werden beide IB Verfahren auf Genauigkeit und Konvergenzordnung in Raum und Zeit untersucht. Die Konvergenzordnung im Raum wird durch eine zweidimensionale Taylor-Couette Strömung, für die es eine analytische Referenzlösung gibt, nachgewiesen. Die Konvergenzordnung in der Zeit wird anhand einer zweidimensionalen, laminaren Kanalströmung überprüft. Die Unterschiede zwischen konservativer IB Methode und der IB Methode mit Punktwerten werden am Beispiel einer instationären zweidimensionalen Kanalströmung mit Hindernis aufgezeigt. Hier wird die Massenerhaltung bei unterschiedlichen Gittergrößen untersucht.

**Dreidimensionale Testfälle** Im letzten Kapitel (6) werden komplexe dreidimensionale Testfälle untersucht. Es werden Ergebnisse hoch aufgelöster Direkter Numerischer Simulationen für die Kanalströmung mit Hügeln bei  $Re = 2800$  und  $Re = 5600$  vorgestellt und mit Ergebnissen aus der Literatur verglichen. Weiterhin werden für den gleichen Testfall Simulationsergebnisse für die Grobstruktursimulation bei  $Re = 10595$  vorgestellt (Kapitel 6.3). Die Strömungstopologie der komplexen turbulenten Strömung in diesem Testfall wird für alle Reynoldszahlen diskutiert. Für die Grobstruktursimulation werden unterschiedliche Feinstrukturmodelle und IB Methoden verglichen. Zum Abschluss wird die Strömung durch ein poröses Medium vorgestellt und die Funktionalität der konservativen IB Methode für geometrisch komplexe Testfälle demonstriert.

Die Arbeit schließt mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick auf zukünftige Entwicklungen.

# 2 Grundlagen der Simulation

Die Simulation von Strömungen beruht auf der Lösung von Gleichungen, die ein Modell für das Strömungsverhalten darstellen. Wie einleitend erwähnt, werden Strömungen durch die Navier-Stokes Gleichungen beschrieben. Im Folgenden werden die Gleichungen eingeführt und die numerische Lösung besprochen.

## 2.1 Mathematische Beschreibung von Strömungen

Die theoretische Untersuchung von Strömungen basiert auf den Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie. Oft werden die Gleichungen für die Massenerhaltung und die Impulserhaltung eines Fluids als die Navier-Stokes Gleichungen bezeichnet. Die Energiegleichung (1. Hauptsatz der Thermodynamik) muss bei kompressiblen Strömungen zusätzlich gelöst werden. Bei inkompressiblen Strömungen, die in dieser Arbeit behandelt werden, wird keine Energiegleichung benötigt. Die Dichte des Fluids wird als konstant angenommen und das Gleichungssystem ist bereits durch die Impulserhaltung und die Massenerhaltung eindeutig bestimmt. Es wird hier zusätzlich die Bilanzgleichung für die kinetische Energie angegeben, da sie bei turbulenten Strömungen eine wichtige Rolle spielt und für die Stabilität der numerischen Lösung von Bedeutung ist. Sie ist aber für inkompressible Strömungen keine eigenständige Transportgleichung, sondern abgeleitet aus der Impulsgleichung.

### 2.1.1 Vorbemerkung

Die Gleichungen für die Fluidmechanik werden aus kontinuumsmechanischen Betrachtungen abgeleitet. Dass die Annahme eines Kontinuums gilt, kann aus der Betrachtung charakteristischer Längen abgeleitet werden. Die mittlere freie Weglänge zwischen zwei Molekühlstößen (molekulare Längenskala) ist um Größenordnungen kleiner als die kleinsten Längenskalen der turbulenten Schwankungsbewegungen. Die turbulenten Schwankungsbewegungen können aus dem Kolmogorovschen Mikromäßen berechnet werden (vergleiche hierzu auch Tennekes und Lumley [65]).

Die Gleichungen werden hier in Euler'scher Betrachtungsweise für ein kartesisches Koordinatensystem eingeführt. Es wird dabei von einem einphasigem Fluid ausgegangen und die Vereinfachungen für ein dichtebeständiges Fluid eingeführt. Hier wird zuerst die differentielle Form der Erhaltungsgleichungen angegeben. Dann folgt die integrale Form (schwache Formulierung) und später die numerische Diskretisierung der Gleichungen.

### 2.1.2 Differentielle Form der Erhaltungsgleichungen

Es werden die Massen- und Impulserhaltung sowie die Energieerhaltung in der differentiellen Form für ein inkompressibles Fluid vorgestellt.

**Massen- und Impulserhaltung:** Für die Notation in kartesischen Koordinaten wird die Einstein'sche Summenkonvention verwendet. Für tief gestellte und doppelt auftretende Indizes wird summiert. Es lässt sich die Gleichung für die Massenerhaltung bei konstanter Dichte schreiben:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0. \quad (2.1)$$

Dabei sind  $u_i$  die Geschwindigkeitskomponenten in den drei Raumrichtungen  $x_i$ . Sie ergeben zusammen den Geschwindigkeitsvektor  $\vec{u}$ . Die Raumrichtungen  $x_i$  spannen das kartesische (rechtwinklige) Koordinatensystem auf. Die Impulserhaltung ergibt sich zu:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i \quad (2.2)$$

wobei  $f$  eine Volumenkraft wie z.B. die Schwerkraft ist. Der auftretende Spannungstensor  $\sigma_{ij}$  kann in einen Anteil mit Normalspannungen und Tangentialspannungen aufgespalten werden. Hier bezeichnet der erste Index den Normalenvektor der Ebene und der zweite die Richtung der Spannung, die an der Ebene angreift.

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}. \quad (2.3)$$

Die Spur des Tensors beschreibt die Normalspannungen und die Außerdiagonalelemente die Tangentialspannungen. Der Druck gehört schon phenomenologisch zu den Normalspannungen, da er immer nur in Richtung der Normalen wirken kann. Für die Tangentialspannungen spielt die Viskosität des Fluids eine wichtige Rolle. Nach dem Newton'schen Ansatz sind die Schubspannungen linear vom Deformationstensor  $s_{ij}$  abhängig.

$$\tau_{ij} = 2\mu s_{ij} + \mu_\nu s_{kk} \delta_{ij} \quad (2.4)$$

$$s_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.5)$$

Bei inkompressiblen Strömungen ist die Spur des Tensors  $s_{kk}$  aufgrund der Massenerhaltung Null und die so genannte Volumenviskosität  $\mu_\nu$  wird bedeutungslos. Bei kompressiblen Strömungen wird sie aber oft über die Stokes'sche Hypothese  $\mu_\nu = \frac{2}{3}\mu$  in Beziehung zur Scherviskosität gebracht. (vgl. Jischa [24]). Da die Spur des Tensors  $s_{ij}$  Null ist ergibt sich auch die Spur des Tensors  $\tau_{ij}$  zu Null. Damit entspricht  $p$  dem mittleren Druck gebildet aus

der Spur des Tensors  $\sigma_{ij}$  (vgl. z.B. Schade [56]):

$$\bar{p} = -1/3 \sigma_{jj} . \quad (2.6)$$

Nimmt man weiterhin an, dass die Viskosität  $\mu$  konstant ist und nicht von dem thermodynamischen Zustand abhängt, ergibt sich unter Berücksichtigung der oben genannten Annahmen für inkompressible Strömungen folgende vereinfachte Impulsbilanz:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + f_i. \quad (2.7)$$

Die molekulare Viskosität  $\mu$  wurde hier durch die kinematische Viskosität  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  ersetzt. Die hier eingeführten Annahmen für inkompressible Strömungen sollen auch im Folgenden gelten.

**Kinetische Energie:** Die Bilanzgleichung für die kinetische Energie folgt aus der Impulsgleichung (2.2) indem die i-te Komponente jeweils mit  $u_i$  multipliziert wird:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u_i u_i}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_i u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_i \sigma_{ji}}{\partial x_j} - \sigma_{ji} s_{ij} + u_i f_i. \quad (2.8)$$

In vereinfachter Form für ein inkompressibles Fluid ergibt sich, wenn man mit der Dichte  $\rho$  multipliziert:

$$\frac{1}{2} \rho \frac{\partial u_i u_i}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho \frac{\partial u_i u_i u_j}{\partial x_j} = -u \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu u_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \rho u_i f_i. \quad (2.9)$$

Unter Berücksichtigung der Indexnotation wird jetzt für die Geschwindigkeiten  $u_i$  summiert und der skalare Wert der kinetischen Energie erhalten. Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass die Einheit der Energiegleichung Watt pro Volumen ist und Gleichung (2.9) eine Form der Leistungsbilanz darstellt.

### 2.1.3 Integrale Form der Erhaltungsgleichungen

Für die integrale Form der Erhaltungsgleichungen werden die differentiellen Gleichungen über ein endliches, raumfestes Kontrollvolumen  $V$  mit der Oberfläche  $A$  integriert. Für die Umformung einiger Volumenintegrale in Oberflächenintegrale wird der Gauß'sche Integralsatz verwendet (vgl. Schade [56]). Damit ergibt sich die Änderung einer Strömungsgröße innerhalb des Kontrollvolumens  $V$  durch die Differenz von Flüssen über die Oberfläche  $A$ . Sehr anschaulich kann man sich damit die Massenerhaltung erklären. Wenn Fluid an einer Stelle in das Kontrollvolumen eintritt, muss es an anderer Stelle wieder austreten. Die Summe der Massenflüsse über die Oberfläche müssen bei inkompressiblen Strömungen immer Null ergeben, da sich die Dichte im Kontrollvolumen  $V$  nicht ändert. Die integra-

le Form der Navier-Stokes Gleichungen ist in dieser Arbeit die Basis für die numerische Lösung.

**Massen- und Impulserhaltung:** Die integrale Form der Erhaltungsgleichungen für Masse (2.1) und Impuls (2.2) unter der Annahme konstanter Viskosität ergibt sich zu:

$$\oint_A u_i dA_i = 0 \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho \int_V u_i dV] + \rho \oint_A u_i u_j dA_j = - \oint_A p dA_i + \mu \oint_A \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dA_j. \quad (2.11)$$

Wie zuvor erwähnt ergibt sich für die Massenbilanz, dass die Summe der Massenflüsse über die Oberfläche Null sein muss. Im Fall der Impulsgleichung ergibt sich die zeitliche Änderung der Strömungsgröße  $u_i$  innerhalb des Kontrollvolumens durch die an der Oberfläche des Kontrollvolumens angreifenden Impulsflüsse.

**Kinetische Energie:** Die integrale Form der Erhaltungsgleichung für die kinetische Energie (2.8) ergibt sich zu:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho \int_V \frac{1}{2} u_i u_i] + \rho \oint_A \frac{1}{2} u_i u_i u_j dA_j = \oint_A u_i p dA_i + \mu \oint_A u_i u_i dA_j. \quad (2.12)$$

Auch hier wird angemerkt, dass die Gleichung eine Bilanzgleichung für die Strömungsleistung darstellt.

## 2.2 Numerische Diskretisierung

Die zuvor eingeführten Navier-Stokes Gleichungen stellen ein Gleichungssystem dar, das nur in Spezialfällen analytisch lösbar ist. Im allgemeinen Fall, z.B. für turbulente Strömungen, ist das Gleichungssystem nicht mehr analytisch lösbar. Mit Hilfe der Numerik wird auch die Berechnung dieser Strömungen möglich. Dabei gibt es eine Vielzahl unterschiedlicher Ansätze (siehe z.B. Werner [75] oder Ferziger und Peric [12]). Die Navier Stokes Gleichungen werden in dieser Arbeit in ihrer zuvor vorgestellten integralen Form für ein Finite-Volumen-Verfahren diskretisiert. Dabei wird ein kartesisches Gitter mit versetzt angeordneten Variablen wie in Abbildung A.1 im Anhang skizziert verwendet. Die primitiven Variablen  $u_i$  und  $p$  werden im numerischen Verfahren für jede Zelle im Berechnungsgitter berechnet und abgespeichert. Eine ausführliche Beschreibung der Eigenschaften des hier verwendeten Verfahrens findet sich u.a. in Ferziger und Peric [12]. Die diskrete Form der Gleichungen und das numerische Lösungsverfahren werden im Folgenden vorgestellt. Zuerst wird auf die Diskretisierung im Raum und Zeit eingegangen und anschließend das Lösungsverfahren und die wichtigsten Eigenschaften eines numerischen Verfahrens besprochen.

### 2.2.1 Räumliche Diskretisierung

Die diskreten Werte der primitiven Variablen sind nun an den Gitterpunkten bekannt. Alle partiellen Ableitungen im Raum werden in der diskreten Gleichung durch Differenzen der diskreten Werte ersetzt. Abbildungen A.1 und A.2 im Anhang zeigen die Indizierung der Gittergrößen im versetzten Gitter und die Positionen der Variablen. Dabei werden die Abkürzungen  $N, S, E, W, P$  für *North, South, East, West* und *Point* verwendet, um die jeweilige relative Position der Variablen zu kennzeichnen. Im Folgenden werden die diskreten Gleichungen für die Massenerhaltung und die Impulserhaltung angegeben. Bei der Impulserhaltung werden Abkürzungen für die einzelnen Terme eingeführt, um später beim Zeitschrittverfahren eine übersichtliche Schreibweise zu erhalten.

#### Massenerhaltung:

Aus der integralen Form der Massenerhaltung (Gleichung (2.10)) wird die diskrete Gleichung abgeleitet. Abbildung A.1 zeigt eine Basiszelle mit dem Mittelpunkt  $P$ , an dessen Position der Druckwert abgespeichert ist. Die Basiszelle gilt für die Massenerhaltung als Kontrollvolumen und die hinein fließenden und heraus fließenden Massenströme müssen bestimmt werden. Unter Verwendung einer Approximation zweiter Ordnung mit zentralen Differenzen erhält man für die sechs Oberflächen:

$$\oint_A u_i dA_i / V = \frac{\overline{u}_P - \overline{u}_W}{\Delta x_P} + \frac{\overline{v}_P - \overline{v}_S}{\Delta y_P} + \frac{\overline{w}_P - \overline{w}_B}{\Delta z_P} \quad (2.13)$$

mit:

$$V = \Delta x_P \Delta y_P \Delta z_P. \quad (2.14)$$

Dabei entspricht  $V$  dem Volumen der Basiszelle bzw. Druckzelle und die Geschwindigkeitswerte sind als Mittelwerte über die Oberfläche definiert, siehe wieder Abbildung A.1 bzw. A.2 für die Definition bzw. Lage der Gittergrößen wie z.B.  $\Delta x_P$ ,  $\Delta y_P$  und  $\Delta z_P$ . Im Folgenden wird zur Vereinfachung der Schreibweise auf die Mittelstriche bei den Geschwindigkeiten verzichtet, da eine eindeutige Unterscheidung zwischen Flächen- und Volumenmittelwert nicht möglich ist, wie sich bei der Impulsgleichung im folgenden Abschnitt zeigen wird (vgl. dazu auch Werner [75]).

### Impulserhaltung

Die diskrete Form der Gleichungen für die Impulserhaltung werden aus Gleichung (2.11) für eine Approximation zweiter Ordnung mit zentralen Differenzen abgeleitet. Die Terme in der Impulsbilanz in ihrer diskreten Form werden der Übersichtlichkeit wegen separat und nur für die  $u$ -Komponente angegeben. Die Diskretisierung für die übrigen Geschwindigkeitskomponenten erfolgt analog. Abschließend werden Abkürzungen für die einzelnen Terme eingeführt.

**Zeitableitung:** Abbildung A.2 zeigt das in positive x-Richtung versetzte Kontrollvolumen  $\Delta V = \delta x_e \Delta y_P \Delta z_P$  für die  $u$ -Geschwindigkeitskomponente. Dabei wird angenommen, dass  $u_P$  einen Volumenmittelwert über das Kontrollvolumen darstellt, obwohl das im Widerspruch zur Massenerhaltung steht, in der  $u_P$  ausdrücklich als Flächenmittelwert angenommen wird. Nur für einen Volumenmittelwert ergibt sich bei der Diskretisierung von  $u_P$  ein plausibler Wert. Leider gibt es für dieses Problem keine Lösung (siehe Werner [75]), da das Gleichungssystem bereits eindeutig bestimmt ist. Für die zeitliche Ableitung in der Impulsgleichung 2.11 ist keine räumliche Diskretisierung notwendig und es ergibt sich unter Annahme eines konstanten Volumenmittelwertes für die Geschwindigkeit im Mittelpunkt der Impulszelle:

$$\frac{\partial u_P}{\partial t} \rho \delta x_e \Delta y_P \Delta z_P. \quad (2.15)$$

**Konvektiver Term:** Aus der Impulsgleichung für die  $u$  Komponente (Gleichung (2.11)) ergibt sich die diskrete Gleichung:

$$\begin{aligned} \rho \oint_A u u_i dA_i &= -\rho \vec{u}_e u_e A_{ue} - \rho \vec{u}_w u_w (-A_{uw}) \\ &\quad - \rho \vec{u}_n v_n A_{un} - \rho \vec{u}_s v_s (-A_{us}) \\ &\quad - \rho \vec{u}_t w_t A_{ut} - \rho \vec{u}_b w_b (-A_{ub}) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Die Lage der Geschwindigkeiten im kartesischen Gitter können in Abbildung A.2 nachvollzogen werden. Alle Geschwindigkeiten in obiger Gleichung müssen aus den gespeicherten Geschwindigkeitswerten durch geeignete Interpolation berechnet werden. Die abgespeicherten Variablen sind in Abbildung A.2 durch große Indizes gekennzeichnet. Die Indizierung der Flächennormalenvektoren, z.B.  $A_{ue}$ , besteht aus der transportierten Geschwindigkeitskomponente und der Himmelsrichtung. Es muss hierbei insbesondere zwischen den transportierten

und transportierenden Geschwindigkeitskomponenten unterschieden werden. Die transportierten Geschwindigkeitskomponenten sind in Abbildung A.2 durch einen Doppelpfeil markiert ( $\vec{\vec{u}}$ ) und die transportierende Geschwindigkeitskomponente durch einen strichlierten Pfeil. Für die transportierende Geschwindigkeitskomponente kann immer eine einfache lineare Interpolation angesetzt werden. Hier wird sie am Beispiel der Ostfläche (engl. east) und Top-Fläche gezeigt:

$$\rho u_e A_{ue} = \rho [u_P + \frac{(u_E - u_P) \delta x_e}{\Delta x_E} \frac{\delta x_e}{2}] \Delta y_P \Delta z_P \quad (2.17)$$

$$\rho w_t A_{ut} = \rho \frac{1}{2} (w_P + w_E) \delta x_e \Delta y_P. \quad (2.18)$$

Die Wahl der obigen Interpolation gewährleistet die Erfüllung der Massenerhaltung auch in den versetzten  $u_i$  Kontrollvolumina. Die transportierte Geschwindigkeitskomponente wird mit zentralen Differenzen sehr einfach bestimmt. Hier wird sie am Beispiel der Geschwindigkeit  $\vec{\vec{u}}_b$  demonstriert:

$$\vec{\vec{u}}_b = \frac{1}{2} (u_P + u_B). \quad (2.19)$$

**Diffusiver Term:** Für den diffusiven Term wird die diskrete Form ebenfalls aus der Gleichung (2.11) hergeleitet. Dabei wird ein konstanter Geschwindigkeitsgradient an den Oberflächen der Kontrollvolumen angenommen.

$$\oint_A \mu \frac{\partial u}{\partial x_i} dA_i = \mu_{ue} \frac{\partial u}{\partial x}|_e A_{ue} + \mu_{uw} \frac{\partial u}{\partial x}|_w (-A_{uw}) \\ \mu_{un} \frac{\partial u}{\partial y}|_n A_{un} + \mu_{us} \frac{\partial u}{\partial y}|_s (-A_{us}) \\ \mu_{ut} \frac{\partial u}{\partial z}|_t A_{ut} + \mu_{ub} \frac{\partial u}{\partial z}|_b (-A_{ub}) \quad (2.20)$$

mit folgender Diskretisierung für die Ableitungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x}|_e = \frac{u_E - u_P}{\Delta x_E} \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}|_n = \frac{u_N - u_P}{\delta y_n} \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}|_t = \frac{u_T - u_P}{\delta z_t}. \quad (2.23)$$

Die Indizierung der dynamischen Viskosität entspricht derjenigen der Flächennormalenvektoren und der Flüsse. Hier wurde bereits berücksichtigt, dass sich die effektive dynamische

Viskosität aus der molekularen und der Wirbelviskosität zusammensetzt und damit im Raum nicht konstant ist. Sie ist an den Basiszelpunkten, respektive Druckpunkten, abgespeichert und muss durch Interpolation an den versetzten Gitterpunkten bestimmt werden. Hier wird eine harmonische Mittelung der Viskosität verwendet. Die Wahl dieser Interpolationsart liegt in den Vorteilen begründet, die diese im Vergleich zur arithmetischen Mittelung aufweist, vgl. Patankar [43] bzw. Werner [75]. In Werner [75] wird weiterhin angeführt, dass sich mit der hier verwendeten Interpolationsmethode Randbedingungen an reibungsbehafteten Flächen sehr elegant formulieren lassen. Die Mittelungsoperation wird hier am Beispiel von  $\mu_{un}$  gezeigt. Vergleiche hierzu Abbildung A.2:

$$\mu_{un} = \frac{1}{2} \left( \frac{2\mu_N\mu_P}{\mu_N + \mu_P} + \frac{2\mu_{EN}\mu_E}{\mu_{EN} + \mu_E} \right). \quad (2.24)$$

Die harmonische Mittelung wird nur in Richtung des diffusiven Fluxes angewendet. In Richtung normal zum diffusiven Flux wird eine arithmetische Mittelung verwendet, vgl. Werner [75].

**Druckterm:** Die Diskretisierung des Druckterms im versetzten Berechnungsgitter ist besonders einfach. Aus Gleichung (2.11) ergibt sich unmittelbar die diskrete Form:

$$-\oint p dA_x = -p_E A_{ue} - p_P (-A_{uw}). \quad (2.25)$$

**Impulsgleichung** Durch die Diskretisierung wird aus der partiellen Differentialgleichung eine gewöhnliche Differentialgleichung, die keine räumlichen Ableitungen mehr enthält. In dem diskreten Gleichungssystem ist allerdings weiterhin der nichlineare Term vorhanden, der das Schließungsproblem der Turbulenz verursacht (siehe Kapitel 2.3 und 2.4). Die diskreten Terme aus der Impulsgleichung werden zur Erreichung einer einfacheren Schreibweise nun abgekürzt. Zusätzlich werden alle diskretisierten Terme aus der Impulsgleichung durch das Kontrollvolumen und die Dichte ( $\rho \delta x_e \Delta y_P \Delta z_P$ ) geteilt. Das Vorgehen ist vergleichbar mit der Diskretisierung der Massenerhaltung, wobei ebenfalls durch das Kontrollvolumen geteilt wurde. Die Impulsgleichung mit den räumlich diskretisierten Termen für die Geschwindigkeitskomponente  $u$  lässt sich dann als semidiskrete Differentialgleichung schreiben:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D(u) + C(u) + G(p) \quad (2.26)$$

mit dem diffusiven Term  $D(u)$ , dem konvektiven Term  $C(u)$  und dem Druckterm  $G(p)$ . Hierbei wird angemerkt, dass die semidiskrete Gleichung für die  $u$  Geschwindigkeitskomponente analog für die übrigen Geschwindigkeitskomponenten  $u_i$  erweitert werden kann. Zur Vereinfachung der Schreibweise wird in obiger Gleichung die Bezeichnung  $u$  an Stelle  $u_i$  beibehalten und Gleichung (2.26) soll für alle drei Impulsbilanzen gelten. Für die diskreten Terme in obiger Gleichung ergeben sich schließlich die Abkürzungen:

Konvektiver Term:

$$\oint_A u_i u_j dA_j / V \rightarrow C(u). \quad (2.27)$$

Druckterm:

$$-\frac{1}{\rho} \oint_A p dA / V \rightarrow G(p). \quad (2.28)$$

Viskoser Term:

$$\nu \oint_A \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dA_j / V \rightarrow D(u). \quad (2.29)$$

Der Pfeil repräsentiert die Diskretisierung nach der Vorgehensweise, die beispielhaft für die  $u$  Geschwindigkeitskomponente eingeführt wurde. Vergleiche hierzu auch die analytische Impulsgleichung (Gleichung (2.11)). Die Genauigkeit der verwendeten Diskretisierung ist zweiter Ordnung und basiert auf zentralen Differenzen für die Interpolation und Differentiation der Geschwindigkeitswerte. Für weitere Details zur Herleitung der räumlichen Diskretisierung sei an dieser Stelle nochmals auf Werner [75] bzw. Ferziger und Peric [12] verwiesen, siehe auch Kapitel 5 für die Überprüfung der räumlichen Fehlerordnung des numerischen Verfahrens.

## 2.2.2 Zeitintegration und Lösungsverfahren:

Im vorhergehenden Abschnitt wurde die Impulsgleichung im Raum diskretisiert. Es ergibt sich daraus die semidiskrete Differentialgleichung erster Ordnung, die hier nochmals ange schrieben wird:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D(u) + C(u) + G(p) = f(u, p) \quad (2.30)$$

mit dem diffusiven Term  $D(u)$ , dem konvektiven Term  $C(u)$  und dem Druckterm  $G(p)$ . Dabei steht  $u$  für den Geschwindigkeitsvektor mit den Komponenten  $u_i$  und  $p$  für den Druck. Die räumlich diskretisierten Terme bilden eine Funktion  $f(u, p)$ , die die zeitliche Ableitung beschreiben. Im Folgenden wird das Vorgehen der numerischen Diskretisierung in der Zeit beispielhaft für einen einfachen expliziten Euler Zeitschritt aufgezeigt. Anschließend wird auf das in dieser Arbeit verwendete Runge-Kutta Verfahren eingegangen, das als Erweiterung des einfachen Euler Verfahrens gesehen werden kann, da es durch die Kombination von mehreren Euler-Zeitschritten zu unterschiedlichen Zwischenzeitniveaus deutlich bessere numerische Eigenschaften erlangt. Als letztes wird in diesem Abschnitt das Lösungsverfahren für das System der vollständig diskretisierten Gleichungen vorgestellt.

**Expliziter Euler-Zeitschritt** Für einen einfachen expliziten Euler-Zeitschritt lässt sich die in der Zeit diskretisierte Gleichung schreiben:

$$\tilde{u}^{n+1} = u^n + \Delta t f(u^n, p^n). \quad (2.31)$$

Dabei entspricht der Index  $n$  dem momentanen Zeitniveau und  $n + 1$  dem Zeitniveau nach dem Zeitschritt. Das Geschwindigkeitsfeld  $\tilde{u}^{n+1}$  zum neuen Zeitschritt ist mit Tilde gekennzeichnet, weil es noch ein vorläufiges Geschwindigkeitsfeld darstellt und im allgemeinen Fall die Massen-erhaltung nicht erfüllt. Bisher wurde für die Berechnung nur die Impulsgleichung herangezogen. In einem weiteren Schritt müssen nun der Druck und die Geschwindigkeit so korrigiert werden, dass zum Zeitpunkt  $t^{n+1}$  ein divergenzfreies Geschwindigkeitsfeld  $u^{n+1}$  mit dem Druck  $p^{n+1}$  vorliegt. Hierfür wird folgende Vorgehensweise gewählt: Es wird angenommen, dass mit dem Druckfeld  $p^{n+1}$  zum neuen Zeitpunkt ein divergenzfreies Geschwindigkeitsfeld erhalten wird. Damit kann man analog zu Gleichung (2.32) für ein divergenzfreies Geschwindigkeitsfeld  $u^{n+1}$  schreiben:

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t f(u^n, p^{n+1}). \quad (2.32)$$

Der Druckunterschied  $\delta p = p^{n+1} - p^n$  ist hier noch eine Unbekannte. Um die Bestimmungs-gleichung für den Druck zu erhalten wird Gleichung (2.32) von Gleichung (2.31) abgezogen und man erhält nach dem Einsetzen der diskreten Terme der Impulsbilanz:

$$\tilde{u}^{n+1} - u^{n+1} = -\Delta t G(\delta p). \quad (2.33)$$

Dabei kürzen sich die diffusiven  $D(u^n)$  und konvektiven Terme  $C(u^n)$ , da sie identisch sind. Die Differenz der Druckoperatoren zu den unterschiedlichen Zeitpunkten  $G(p^n) - G(p^{n+1})$  ist linear und kann deshalb vereinfacht als  $G(\delta p)$  geschrieben werden. In Gleichung (2.33) ist noch das unbekannte, divergenzfreie Geschwindigkeitsfeld enthalten. Deshalb wir im nächs-ten Schritt die Divergenz der Gleichung (2.33) gebildet und es ergibt sich, weil  $\operatorname{div}(u^{n+1}) = 0$  gilt:

$$\operatorname{div}[G(\delta p)\Delta t] = -\operatorname{div}(\tilde{u}). \quad (2.34)$$

Diese Gleichung wird als das diskrete Analogon der Poissongleichung bezeichnet. Der Druck in der Poissongleichung ist die einzige Unbekannte und man hat somit eine Bestimmungs-gleichung für den Druck erhalten, siehe auch Ferziger und Peric [12] für die Herleitung der analytischen Poissongleichung. Die Korrekturgleichung für die Geschwindigkeit ergibt sich sofort aus Gleichung (2.33):

$$u^{n+1} = \tilde{u}^{n+1} + \Delta t G(\delta p). \quad (2.35)$$

Auf diese Art kann man mit der Druckdifferenz  $\delta p$  das divergenzfreie Geschwindigkeitsfeld

zum Zeitpunkt  $t^{n+1}$  berechnen, das sowohl Impulsgleichung als auch Massenerhaltung erfüllt. Dieses Korrekturverfahren ist möglich, da der Druck bei inkompressiblen Verfahren eine besondere Rolle spielt. Nach Sommerfeld [60] kann der Druck als Lagrangescher Multiplikator gesehen werden, der notwendig ist, um die Zwangsbedingung der Divergenzfreiheit zu erfüllen. Weiterhin wird hier die Eigenschaft von Vektorfeldern ausgenutzt, die in einen divergenzfreien und rotationsfreien Anteil zerlegt werden können. Hierfür wird nochmal die Geschwindigkeitskorrektur vereinfacht angeschrieben:

$$u^{n+1} = \tilde{u}^{n+1} + \Delta u. \quad (2.36)$$

Wie man aus dem Vergleich mit Gleichung (2.35) erkennen kann, ist  $\Delta u$  aus dem Operator  $G(\delta p)$  des skalaren Druckwertes bestimmt. Das ist vergleichbar mit dem Gradienten eines Potentialfeldes und somit ist offensichtlich  $\Delta u$  der rotationsfreie Anteil des Vektorfeldes. Bildet man dann die Rotation von Gleichung (2.36) wird ersichtlich, dass die Drehung des temporären Geschwindigkeitsfeldes  $\tilde{u}^n$  identisch ist mit der Drehung des divergenzfreien Geschwindigkeitsfeldes, da  $\text{rot}(\Delta u) = 0$  gilt. Die Drehung des Geschwindigkeitsfeldes darf also im Korrekturschritt, respektive der Druckkorrektur, nicht modifiziert werden. Während der Druckkorrektur wird nur der divergenzbehaftete Anteil des Geschwindigkeitsfeldes korrigiert, vergleiche hierzu auch Werner [75].

Das hier vorgestellte, einfache explizite Verfahren für den diskreten Zeitschritt ist für komplexe turbulente Strömungen nicht anwendbar, da es zwei Nachteile besitzt: Das Verfahren ist nur erster Ordnung genau und scheidet aus Stabilitätsgründen aus. Im Folgenden wird auf das in dieser Arbeit verwendete Runge-Kutta Zeitschrittverfahren eingegangen.

**Runge-Kutta Zeitschrittverfahren** Für die zeitliche Diskretisierung in dieser Arbeit wird ein Runge-Kutta Zeitschrittverfahren nach Williamson [78] verwendet. Das Runge-Kutta Verfahren gehört zu den Einschrittverfahren. Für die Erreichung höherer Ordnung berücksichtigt es bei der Herleitung aus der Taylor-Reihe mehrere Zwischenzeitniveaus, die dem expliziten Euler-Verfahren sehr ähnlich sind. Es verändern sich dabei die Zeitschrittweiten, die für die Zwischenzeitniveaus benötigt werden. Ein Vorteil des Einschrittverfahrens ist, dass nur Anfangsbedingungen vorgegeben werden müssen. Das Vorhandensein von Geschwindigkeits- und Druckfeldern aus vorhergegangenen Zeitschritten ist im Gegensatz zu Mehrschrittverfahren nicht notwendig. Im Folgenden wird der Algorithmus für eine “low-storage” Version des Runge-Kutta Zeitschrittverfahrens dritter Ordnung eingeführt. Es werden hierfür nur zwei temporäre Geschwindigkeitsfelder  $g_1$  und  $g_2$  benötigt. Damit lässt sich der Algorithmus für die drei Zwischenschritte im Folgenden angeben. Begonnen wird mit dem Geschwindigkeits-

feld  $u$ , das dem Geschwindigkeitsfeld  $u = u^n$  zum Zeitpunkt  $n$  entspricht:

$$\begin{aligned}
 1. \text{ Zwischenschritt :} \quad g_1 &= f(u) = f(u^n) \\
 \tilde{u} &= u + \frac{\Delta t}{3} g_1 \\
 \operatorname{div}[G(\delta\tilde{p})] \frac{1}{3} \Delta t &= -\operatorname{div}(\tilde{u}) \\
 p &= p + \tilde{\delta p} \\
 u &= \tilde{u} + \frac{1}{3} \Delta t G(\delta\tilde{p}) .
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

Das Ergebnis der Auswertung der rechten Seite der Impulsgleichung wird in dem temporären Feld  $g_1$  zwischengespeichert. Anschließend wird die temporäre Geschwindigkeit berechnet und eine Druckkorrektur durchgeführt. Nach dem Abschluss des ersten Zwischenschritts ist die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt  $\frac{1}{3}\Delta t$  bekannt.

$$\begin{aligned}
 2. \text{ Zwischenschritt :} \quad g_2 &= f(u) \\
 g_1 &= -\frac{5}{9}g_1 + g_2 \\
 \tilde{u} &= u + \frac{15\Delta t}{16} g_1 \\
 \operatorname{div}[G(\delta\tilde{p})] \frac{3}{4} \Delta t &= -\operatorname{div}(\tilde{u}) \\
 p &= p + \tilde{\delta p} \\
 u &= \tilde{u} + \frac{1}{3} \Delta t G(\delta\tilde{p}) .
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Bei dem zweiten Zwischenzeitschritt wird wieder die rechte Seite der Impulsgleichung ausgewertet und in dem Feld  $g_2$  gespeichert. Das Geschwindigkeitsfeld wird unter Zuhilfenahme der beiden temporären Felder  $g_1$  und  $g_2$  ausgewertet und wiederum im Feld  $g_1$  zwischengespeichert. Der alte Wert wird dabei überschrieben.

$$\begin{aligned}
3. \text{ Zwischenschritt :} \quad g_2 &= f(u) \\
g_1 &= g_2 - \frac{153}{128} g_1 \\
u &= u + \frac{8\Delta t}{15} g_1 \\
\operatorname{div}[G(\delta \tilde{p})] \Delta t &= -\operatorname{div}(\tilde{u}) \tag{2.39} \\
p &= p + \tilde{\delta p} \\
u &= \tilde{u} + \Delta t G(\delta \tilde{p}) \\
u^{n+1} &= u .
\end{aligned}$$

Für den dritten Zwischenschritt wird ebenfalls wieder die rechte Seite ausgewertet und damit das Feld  $g_2$  überschrieben. Anschließend werden wieder die beiden Hilfsfelder  $g_1$  und  $g_2$  für die Berechnung der Geschwindigkeit verwendet und in Feld  $g_1$  abgespeichert. Damit wird wiederum die Geschwindigkeit berechnet und die Druckkorrektur durchgeführt. Das Ergebnis ist das divergenzfreie Geschwindigkeitsfeld für den neuen Zeitschritt  $u^{n+1}$ . Es wird betont, dass bei jedem Zwischenschritt die rechte Seite der Impulsbilanz ausgewertet wird und eine Druckkorrektur durchgeführt wird. Das ist ein gewisser Nachteil im Vergleich zu Mehrschrittverfahren, welche Geschwindigkeits- und Druckfelder aus vergangenen Zeitschritten kombinieren. Da diese Zeitschritte bereits abgeschlossen sind, werden keine zusätzlichen Druckkorrekturen benötigt. Das kann einen Vorteil darstellen, da die Druckkorrektur der rechenintensivste Teil im Programm ist.

**Lösungsverfahren** Die Berechnung der rechten Seite der Impulsgleichung ist explizit möglich. Damit ist es einfach das temporäre Geschwindigkeitsfeld  $\tilde{u}^{n+1}$  zu berechnen, das noch nicht divergenzfrei ist. Aufwendiger wird es beim Korrekturschritt, um das divergenzfreie Geschwindigkeitsfeld zu erhalten. Hierfür muss der Druck aus der diskreten Poisongleichung (Gleichung (2.34)) bestimmt werden:

$$\operatorname{div}[G(\delta p)] \Delta t = -\operatorname{div}(\tilde{u}). \tag{2.40}$$

Die Gleichung ergibt sich ausgeschrieben für eine Zelle nach Abbildung A.1 zu:

$$\begin{aligned}
[-\frac{1}{\Delta x_P}(\frac{\delta p_E - \delta p_P}{\delta x_e} - \frac{\delta p_P - \delta p_W}{\delta x_w}) - \frac{1}{\Delta y_P}(\frac{\delta p_N - \delta p_P}{\delta y_n} - \frac{\delta p_P - \delta p_S}{\delta y_s}) \\
- \frac{1}{\Delta z_P}(\frac{\delta p_T - \delta p_P}{\delta z_t} - \frac{\delta p_P - \delta p_B}{\delta z_b})] \frac{\Delta t}{\rho} = \\
-(\frac{\tilde{u}_P - \tilde{u}_W}{\Delta x_P} + \frac{\tilde{u}_P - \tilde{u}_S}{\Delta y_P} + \frac{\tilde{u}_P - \tilde{u}_B}{\Delta z_P}).
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Diese Gleichung wird für jeden Gitterpunkt aufgestellt. Daraus resultiert ein lineares Gleichungssystem, das wie folgt für den Lösungsvektor aller Drücke  $\vec{\delta p}$  aufgestellt werden kann:

$$M_{\delta P} \vec{\delta p} = \overrightarrow{DIV}.$$

Der Vektor  $\vec{\delta p}$  hat die Länge  $ni \times nj \times nk$ , da er alle Berechnungspunkte enthält. Dabei sind ni, nj und nk die Anzahl der Gitterpunkte in x,y und z-Richtung. Die Matrix  $M_{\delta P}$  besitzt  $(ni \times nj \times nk)^2$  Einträge, die sich aus Gleichung (2.41) bestimmen lassen. Die rechte Seite ist der Vektor  $\overrightarrow{DIV}$  mit den aus Gleichung (2.41) berechneten Werten für die Divergenz im Geschwindigkeitsfeld an allen Berechnungspunkten. Es ist offensichtlich, dass damit eine sehr große Matrix entsteht, die die Lösung des Gleichungssystems erschwert. Zwar ist es prinzipiell möglich, die Matrix direkt zu invertieren, aber in der Praxis ist die Anforderung an Speicherplatz und Rechenleistung zu hoch und es muss ein iteratives Verfahren angewendet werden. Effiziente iterative Verfahren sind hierbei möglich, da die Matrix dünn besetzt ist. In dieser Arbeit wird die Poissongleichung für den Druckunterschied  $\tilde{\delta p}$  mit Stone's Strongly Implicit Procedure (SIP) [61] gelöst, siehe auch Ferziger und Peric [12] für die Behandlung der numerischen Lösung der Poissongleichung.

### 2.2.3 Numerisches Verfahren und Immersed Boundaries:

Die im vorausgegangenen Abschnitt hergeleiteten diskreten Gleichungen stellen eine Approximation der analytischen Lösung dar. Neben den hier vorgestellten Verfahren gibt es eine Vielzahl unterschiedlicher Methoden, die sich z.B. durch die Genauigkeit oder den Stabilitätsbereich unterscheiden. Nach Ferziger und Peric [12] werden an ein numerisches Verfahren drei Anforderungen gestellt:

- Konsistenz: Die Lösung der diskretisierten Gleichungen muss für unendlich feine Gitterabstände  $\Delta t$  und  $\Delta x$  in Raum bzw. Zeit in die analytische Lösung übergehen.
- Stabilität: Der numerische Fehler darf sich in der Zeit nicht verstärken. Die Lösung muss beschränkt sein.
- Konvergenz: Erst aus Konsistenz und Stabilität einer Lösung folgt Konvergenz. Eine konsistente Lösung, die nicht stabil ist, kann nicht in der Zeit integriert werden.

Ein konsistentes Verfahren kann also nur unter der Bedingung Stabilität zur Simulation verwendet werden. In dieser Arbeit wird die Stabilität eines Verfahrens für unendlich viele Zeitschritte bei konstanten Parametern  $\Delta t$  und  $\Delta x$  untersucht (siehe auch Kapitel 4.2). Dieser Stabilitätsbegriff wird meistens verwendet und ist für die praktische Anwendung eines numerischen Verfahrens wichtig.

Ein Verfahren ohne molekulare Diffusion ist dann stabil, wenn die Energie erhalten bleibt. Vergleiche hierzu auch die Energiegleichung (Gleichung (2.8)). Instabiles Verhalten eines Verfahrens tritt erst auf, wenn die Energie innerhalb des numerischen Systems zunimmt. Dass Diffusion damit stabilisierend wirkt, ist anschaulich klar. Hier wird Energie dissipiert. Die Stabilität eines numerischen Verfahrens wird durch unterschiedliche Faktoren bestimmt. Eine Quelle für Instabilitäten kann u.a. in den Randbedingungen liegen.

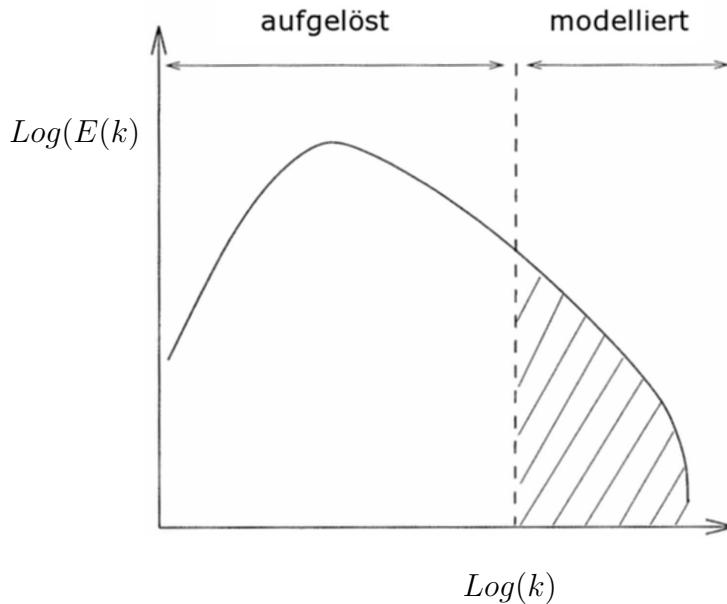
**Randbedingungen:** Die oben genannten Bedingungen für ein numerisches Verfahren gelten auch für die Randbedingungen, die auf dem Berechnungsgitter vorgegeben werden müssen,

um die diskreten Gleichungen zu lösen. Werner [75] bespricht beispielsweise die Randbehandlung von Wänden, periodischen Randbedingungen und Einström- sowie Ausströmrandbedingungen. Auch in Ferziger und Peric [12] werden die Standardfälle für Randbedingungen beschrieben. Randbedingungen sind in der numerischen Simulation ein wichtiger Aspekt. Neben festen Wänden, die sehr einfach durch eine Haftbedingung beschrieben werden können, ist es oft schwierig, passende Einström- bzw. Ausströmrandbedingungen zu wählen. Bei Einströmrandbedingungen liegt die Schwierigkeit in der Vorgabe eines instationären Geschwindigkeitsprofils, welches a priori nicht bekannt ist. Bei Ausströmrandbedingungen kann die Schwierigkeit z.B. an auftretenden Instabilitäten liegen.

**Immersed Boundaries:** Ränder bzw. die Haftbedingung bei Geometrien sind Thema dieser Arbeit und werden mit der Immersed Boundary Methode behandelt. In Kapitel 3 werden die hier entwickelten IB Methoden vorgestellt. Ein Schwerpunkt wird dabei auf die Integration der IB Randbedingung in den Runge-Kutta Zeitschrittalgorithmus gelegt. In Kapitel 4 werden einige Stabilitätseigenschaften der IB Verfahren gegenübergestellt. Dabei wird der Einfluss der Rand-interpolation als auch der Einfluss der Massenerhaltung am IB Rand auf die Stabilität untersucht. In Kapitel 5 wird für die beiden in dieser Arbeit vorgestellten IB Methoden die Konvergenz in Raum und Zeit als auch die Massenerhaltung am IB Rand an einem Testfall untersucht.

## 2.3 Direkte Numerische Simulation (DNS) als numerisches Experiment

Wie bereits in der Einleitung angedeutet ist vor allem die Simulation turbulenter Strömungen anspruchsvoll. Es gibt ein Spektrum an turbulenten Skalen oder Wirbeln, die in der Berechnung simuliert werden müssen. Ein Beispiel für ein turbulentes Energiespektrum ist in Abbildung 2.1 zu sehen. Der Abfall des Energiespektrums  $E(k)$  folgt dabei für die Wellenzahl  $k$  in weiten Bereichen dem Verlauf  $k^{-\frac{5}{3}}$ . Dabei bestimmen die kleinsten Skalen die notwendige Auflösung des Berechnungsgitters. Bei der Direkten Numerischen Simulation (DNS) werden alle turbulenten Skalen vom Berechnungsgitter aufgelöst. Sie wird deshalb häufig als “numerisches Experiment” bezeichnet, weil kein Turbulenzmodell benötigt wird. Das Gitter ist so fein, dass alle Wirbel bzw. turbulenten Skalen aufgelöst werden und sie nicht modelliert werden müssen. Für weitere Literatur zum Thema DNS wird auf Fröhlich [13] verwiesen. Für die Auslegung eines DNS Berechnungsgitters werden hier zwei Kriterien verwendet: Das Kolmogorovsche Mikromaaß und das viskose Längenmaß in Wandnähe.



**Abbildung 2.1:** Aufgelöstes und modelliertes turbulentes Energiespektrum. Turbulente kinetische Energie  $E(k)$  aufgetragen über der Wellenzahl  $k$ . Das Spektrum wird bei der (cutoff) Wellenzahl  $k_c$  abgeschnitten.

**Kolmogorovsches Mikromaaß** Das Kolmogorovsche Mikromaaß wird wie folgt gebildet (siehe auch Pope [50]):

$$\eta_k = \left( \frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4} . \quad (2.42)$$

Es wird aus der kinematischen Viskosität und der Dissipation gebildet und gibt die Län-

ge  $\eta_k$  der kleinsten turbulenten Schwankungsbewegung an. Damit kann die Gitterweite für die Simulation abgeschätzt werden. Wie genau dabei  $\eta_k$  eingehalten werden muss, ist in der Literatur umstritten [28, 39, 19]. Leonard [28] fordert aufgrund der Lage des Maximums des Dissipationsspektrums  $3\eta_k$  als ausschlaggebendes Längenmaß. Nach Pope [50] müssen Strukturen bis zu  $24\eta_k$  aufgelöst sein. Einigkeit herrscht aber darüber, dass der Gitterabstand zumindest in der gleichen Größenordnung wie  $\eta_k$  liegen muss. Manhart [30] weist darauf hin, dass die Längenskala nicht nur bei den großen Skalen anistrop sein kann - sondern auch bei den kleinen Skalen. Er führt damit ein Kriterium ein, das dem Rechnung trägt und Längenskalen für alle Raumrichtungen angibt. Damit ist es möglich Gitterauflösung und Rechenaufwand zu sparen. Ein gutes Beispiel für anistrope Turbulenz ist wandgebundene Turbulenz. Dort werden die Schwankungsbewegungen in Richtung normal zur Wand gedämpft. Durch starke Geschwindigkeitsgradienten dominieren viskose Effekte nahe der Wand. Es sei hier angemerkt, dass auch in freien Scherschichten hohe Geschwindigkeitsgradienten auftreten. Dort sind aber nach Pope [50] die viskosen Spannungen im Vergleich zu den Reynoldsspannungen klein. Im Folgenden werden die viskosen Wandeinheiten eingeführt.

**Viskoses Längenmaß** Die viskosen Wandeinheiten leiten sich aus der Wandschubspannung ab. Die Wandschubspannung  $\tau_w$  wird wie folgt gebildet.

$$\tau_w = \rho\nu \left( \frac{\partial U_T}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} . \quad (2.43)$$

Dabei ist  $\nu$  die kinematische Viskosität und  $U_T$  die Tangentialgeschwindigkeit parallel zur Wand. Mit der Wandschubspannung kann eine Schubspannungsgeschwindigkeit

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (2.44)$$

und ein viskoses Längenmaß

$$\delta_\nu = \nu \sqrt{\frac{\rho}{\tau_w}} = \frac{\nu}{u_\tau} \quad (2.45)$$

gebildet werden. Mit diesem Längenmaß  $\delta_\nu$  kann der Wandabstand dimensionslos in den sog. Wandeinheiten angegeben werden

$$y^+ = \frac{y}{\delta_\nu} = \frac{u_\tau y}{\nu} . \quad (2.46)$$

An der Wand wird bei einer DNS gefordert, dass die Gitterauflösung in der Größenordnung von  $\delta_\nu$  liegt bzw.  $y^+ \approx 1$  gilt.

**Bestimmung der Längenmaße und numerischer Aufwand** Die Schwierigkeit bei beiden Kriterien ist, dass sie auf Größen beruhen, die erst durch Messung oder Simulation bestimmt werden müssen. So ist z.B. die Dissipation oder die Wandschubspannung a priori nicht bekannt. U.a. ist auch das Messen der Dissipation aufwendig oder nicht möglich. Sind also keine Messwerte vorhanden, bietet sich eine Gitterstudie an. Es wird zuerst ein Gitter nach Erfahrungswerten erzeugt und anschließend sukzessive verfeinert. Ändern sich die mittleren Strömungsgrößen nicht mehr, wie in diesem Fall z.B. die Dissipation, ist das Gitter fein genug. Da eine Gitterstudie sehr aufwendig ist, kann meistens nicht beliebig verfeinert werden und es ist oft unmöglich eine DNS durchzuführen. Sie bleibt trotz Zugriff auf Hochleistungsrechner und rapider Weiterentwicklung der Rechenleistung noch akademischen Anwendungen vorbehalten. Als Alternative zur Simulation turbulenter Strömungen bleiben unter anderem die Reynolds gemittelten Navier-Stokes Gleichungen (RANS) oder die Grobstruktursimulation bzw. Large Eddy Simulation (LES). Letzteres Verfahren wird im folgenden Abschnitt besprochen.

## 2.4 Large Eddy Turbulenzmodellierung

Die Simulation turbulenter Strömung mit der Direkten Numerischen Simulation ist rechnerisch aufwendig. Geringerer numerischer Aufwand wird bei der Grobstruktursimulation bzw. Large Eddy Simulation (LES) benötigt.

Für eine weiterführende Beschreibung der Grobstruktursimulation wird hier auf Fröhlich [13] und Sagaut [54] verwiesen. Die Theorie für die Grobstruktursimulation wird im Folgenden vorgestellt.

**Vorbemerkung** Die Theorie der Grobstruktursimulation wird aus den Eigenschaften turbulenter Strömungen abgeleitet: Bei voll turbulenten Strömung bildet sich ein charakteristisches Energiespektrum aus, das in Abbildung 2.1 gezeigt wird. Bei der Grobstruktursimulation werden die großen Wirbel auf dem Berechnungsgitter dargestellt und die kleinen modelliert. Das bedeutet, dass das turbulente Energiespektrum in Abbildung 2.1 bei der Wellenlänge abgeschnitten wird, welche nicht mehr durch das numerische Verfahren aufgelöst werden kann. Durch das Turbulenzmodell muss also der Effekt der nicht aufgelösten turbulenten Schwankungsbewegungen modelliert werden. Ohne Turbulenzmodell wird die Energiekaskade in turbulenten Strömungen nicht richtig dargestellt. Der Energieübergang von den großkaligen Wirbeln und Schwankungsbewegungen auf die kleinskaligen Wirbel ist ohne Modell nicht gewährleistet. Bei einem energieerhaltenden numerischen Verfahren würde die Simulation ohne Modell einen Energieaufstau bei den aufgelösten Wirbeln kurz vor der nicht mehr aufgelösten Wellenlänge erzeugen. Im Folgenden wird der mathematische Hintergrund der Grobstruktursimulation erklärt und drei Turbulenzmodelle vorgestellt.

**Mathematischer Hintergrund** Für die mathematische Behandlung turbulenter Strömungen wird zuerst die Aufspaltung eingeführt:

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i.$$

Dabei ist  $\bar{u}_i$  eine gemittelte Geschwindigkeit. Die Art der Mittelung kann entweder räumlich, zeitlich oder eine Ensemble Mittelung über mehrere Stichproben sein. Für die LES Betrachtung stellt  $\bar{u}_i$  eine räumlich, über die Zellbreite, gemittelte Geschwindigkeit dar. Die Geschwindigkeit  $u'_i$  ist dann der Anteil der turbulenten Schwankungsbewegung, der nicht mehr vom Gitter aufgelöst wird. Schreibt man die räumlich gemittelten Navier-Stokes Gleichung in ihrer differentiellen Form (siehe auch Gleichung (2.7)) auf, ergibt sich:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + 2\nu \frac{\partial \bar{s}_{ij}}{\partial x_j}. \quad (2.47)$$

Dabei wird wieder der Mittelungsoperator durch den Querstrich dargestellt. Problematisch ist bei der Turbulenzsimulation der nichtlineare Term  $\bar{u}_i \bar{u}_j$ . Setzt man hier die Geschwindig-

keitsaufspaltung ein, ergibt sich:

$$\overline{(\bar{u}_i + u'_i)(\bar{u}_j + u'_j)} = \overline{\bar{u}_i} \overline{\bar{u}_j} + u'_i \bar{u}'_j + \overline{\bar{u}_i} u'_j + u'_i \overline{\bar{u}_j}. \quad (2.48)$$

Ist, wie bei der Direkten Numerischen Simulation, das Gitter fein genug, so dass  $u'_i = 0$  gilt und auch die Interaktion zwischen den beiden Geschwindigkeiten  $\overline{\bar{u}_i} \overline{\bar{u}_j}$  aufgelöst ist, vereinfacht sich der Ausdruck zu:

$$\overline{\bar{u}_i} \overline{\bar{u}_j} = \overline{\bar{u}_i} \overline{\bar{u}_j} \quad (2.49)$$

und die Gleichungen können ohne Feinstrukturmodell gelöst werden. Bei der LES ist dies nicht möglich und der nichtlineare Term muss gesondert behandelt werden. Die Problematik, die aus der Mittelung der Navier-Stokes Gleichungen für den nichtlinearen Term entsteht, ist auch als Schließungsproblem der Turbulenz bekannt.

Die vier unbekannten Terme in Gleichung (2.48) haben folgende Bedeutung. Die Interaktion zwischen großen und kleinen Skalen beschreibt der Tensor  $C_{ij}$  (Cross stress tensor) und die Interaktion unter den kleinen Skalen der Reynolds Tensor  $R_{ij}$ . Sie sind wie folgt definiert (siehe auch Sagaut [54]):

$$C_{ij} = \overline{\bar{u}_i} \overline{u'_j} + \overline{\bar{u}_j} \overline{u'_i} \quad (2.50)$$

$$R_{ij} = \overline{u'_i} \overline{u'_j} \quad . \quad (2.51)$$

Der verbleibende Term  $\overline{\bar{u}_i} \overline{\bar{u}_j}$  könnte durch eine weitere Filterung der Werte berechnet werden. Um diese zweite Filterung zu umgehen, hat Leonard folgende Aufspaltung des Terms vorgeschlagen:

$$\overline{\bar{u}_i} \overline{\bar{u}_j} = (\overline{\bar{u}_i} \overline{\bar{u}_j} - \overline{\bar{u}_i} \overline{\bar{u}_j}) + \overline{\bar{u}_i} \overline{\bar{u}_j} \quad (2.52)$$

$$\overline{\bar{u}_i} \overline{\bar{u}_j} = L_{ij} + \overline{\bar{u}_i} \overline{\bar{u}_j}. \quad (2.53)$$

Mit dem Leonard Tensor  $L_{ij}$  kann jetzt die gefilterte Gleichung umgeschrieben werden

$$\frac{\partial \overline{\bar{u}_i}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\bar{u}_i} \overline{\bar{u}_j}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p_i}}{\partial x_i} + 2\nu \frac{\partial \overline{s_{ij}}}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (2.54)$$

und der Spannungstensor  $\tau_{ij}$  ergibt sich zu

$$\tau_{ij} = L_{ij} + C_{ij} + R_{ij} = \overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j} . \quad (2.55)$$

Es wird angemerkt, dass die Spannung  $\tau_{ij}$  hier wie in Saugaut [54] mit der Dichte  $\rho$  normiert wurde. Es muss weiterhin erwähnt werden, dass der Term  $\overline{u_i} \overline{u_j}$  theoretisch höhere Frequenzen enthält als die einzelnen Geschwindigkeiten. Deshalb werden in Wirklichkeit mehr Freiheitsgrade benötigt, um den Produktterm darzustellen als die einzelnen Terme, siehe auch Sagaut [54] für die Beschreibung der Triadeninteraktion.

**Turbulenzmodell** Aus der mathematischen Herleitung ist klar, dass das Turbulenzmodell ein Modell für den unbekannten Term  $\tau_{ij}$  darstellt, der die Feinstrukturspannungen und die Interaktion zwischen Fein- und Grobstruktur repräsentiert. Im Folgenden Abschnitt werden drei Modelle eingeführt, die alle auf dem Ansatz der Wirbelviskosität beruhen. Das Standard Modell ist das Smagorinsky Modell. Es ist allerdings nur mit Einschränkungen für die Anwendung nahe der Wand geeignet. Dort benötigt es eine Sonderbehandlung wie z.B. Van Driest Dämpfung. Auf die Problematik wird später eingegangen. Die zwei anderen Modelle kommen ohne Sonderbehandlung nahe der Wand aus. Das vorgestellte dynamische Smagorinsky Modell ist eine Erweiterung des Standard Smagorinsky Modells. Das WALE Modell ist ein eigenständiges Modell, das aber ebenfalls auf dem Ansatz einer Wirbelviskosität beruht.

## 2.4.1 Wirbelviskosität und Smagorinsky Modell

Das Konzept der Wirbelviskosität beruht auf der Hypothese, dass der Energietransfer von den aufgelösten Skalen auf die unaufgelösten Skalen (siehe turbulentes Energiespektrum in Abbildung 2.1) analog zu dem Mechanismus der Dissipation stattfindet [54]. Damit wird die Energiekaskade durch den gleichen mathematischen Ansatz wie die Dissipation beschrieben. Im Folgenden wird das Konzept der Wirbelviskosität vorgestellt und das Smagorinsky Modell beschrieben. Auf die Anwendbarkeit des Smagorinsky Modells nahe der Wand wird kurz eingegangen.

**Wirbelviskosität und Smagorinsky Modell** Die molekulare Viskosität wird durch eine Wirbelviskosität ersetzt und es lässt sich mit dem Boussinesq-Ansatz schreiben:

$$\tau_{ij}^{a,mod} = -\nu_t 2\overline{s_{ij}}. \quad (2.56)$$

Es wird angemerkt, dass die Spannung  $\tau_{ij}^{a,mod}$  hier wie in Saugaut [54] mit der Dichte  $\rho$  normiert wurde. Der anisotrope Anteil des Feinstruktur-Terms wird durch  $\tau_{ij}^a = \tau_{ij} - \delta_{ij}\tau_{kk}/3$  ausgedrückt. Da der isotrope Anteil von  $\tau_{ij}$ , also die Spur  $\tau_{kk} = -\nu_t 2\overline{s_{kk}}$ , auf den Deformationstensor  $s_{ij}$  zurückgeht, gilt  $\tau_{kk} = 0$  aufgrund der Massenerhaltung bei inkompressiblen Strömungen. Nun bleibt noch die Bestimmung der turbulenten Wirbelviskosität  $\nu_t$ , um den Ansatz zu schließen. Prandtl [51] weist darauf hin, dass aus Dimensionsgründen für die Wirbelviskosität das Produkt aus einer Längenskala  $l$  und einer Geschwindigkeit  $q$  angesetzt

werden kann

$$\nu_t = l q . \quad (2.57)$$

Dabei stellen  $l$  und  $q$  eine charakteristische Länge bzw. Geschwindigkeit der Feinstruktur dar. Da mit der Gitterweite bzw. Filterweite schon eine Längenskala vorhanden ist, bietet sich diese hierfür an. Mit einer zusätzlichen Modellkonstanten  $C_s$  ergibt sich:  $l = C_s \Delta$ . Die Filterweite  $\Delta$  entspricht nach der Schumannschen Filtertechnik [58] gerade der Maschenweite  $\Delta x_i$ . Für anisotrope Gitter muss ein Mittelwert gebildet werden. Hier wird das geometrische Mittel

$$\Delta = (\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3)^{1/3} \quad (2.58)$$

verwendet. Für die Geschwindigkeit kann ein Produkt aus Längemaß und Deformationstensor,  $q = l |\bar{s}|$ , geschrieben werden. Die Norm des Deformationstensors ist definiert als  $|\bar{s}| = \sqrt{2\bar{s}_{ij} \bar{s}_{ij}}$ . Die turbulente Viskosität ergibt sich damit zu:

$$\nu_t = (C_s \Delta)^2 |\bar{s}| \quad (2.59)$$

und man erhält den Ausdruck für die Feinstrukturspannungen des Smagorinsky Modells [59]:

$$\tau_{ij}^{a,mod} = -2(C_s \Delta)^2 |\bar{s}| \bar{s}_{ij} . \quad (2.60)$$

Es lässt sich die Impulsbilanz mit dem Modellansatz schreiben:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}_i}{\partial x_i} + 2(\nu + \nu_t) \frac{\partial \bar{s}_{ij}}{\partial x_j} . \quad (2.61)$$

Die Bestimmung der Modellkonstanten  $C_s$  ist durch theoretische Überlegungen möglich, wie in Sagaut [54] beschrieben. In vielen Fällen wird aber der Wert der Modellkonstanten leicht angepasst, um bessere Ergebnisse zu erhalten.

**Wandbehandlung** Wie es bei vielen Turbulenzmodellen der Fall ist geht auch das Smagorinsky Modell von hohen Reynolds-Zahlen aus. Nahe einer festen Wand werden jedoch Fluktuationen stark gedämpft und sind an der Wand selbst Null. Deshalb kann man dort nicht mehr von hohen Reynolds-Zahlen ausgehen. Will man die Turbulenz unter solchen Verhältnissen modellieren werden so genannte "Low Reynolds Number" Modelle benötigt, die auch bei kleinen turbulenten Reynolds-Zahlen  $Re_t$  angewendet werden können (siehe auch Fröhlich [13]). Auch das Smagorinsky Modell nahe der Wand benötigt eine Korrekturfunktion. Die Wirbelviskosität erreicht aufgrund Ihrer Definition basierend auf  $s_{ij}$  an der Wand nicht den Wert Null ( $s_{ij} \neq 0$  bei Scherschichten an der Wand). Gefordert wird aber, dass die

turbulente Viskosität proportional zum dimensionslosen Wandabstand abnimmt:  $\nu_t \sim y^{+3}$ . Dieses Verhalten geht zurück auf das Verhalten der Reynoldsspannungen und wird in Kapitel 6.1 näher untersucht. Um eine Korrekturfunktion einzuführen gibt es zwei einfache Möglichkeiten beim Smagorinsky Modell. (i) Die Modellkonstante  $C_s$  kann angepasst werden. Im dynamischen Smagorinsky Modell wird genau diese Konstante dynamisch bestimmt und ermöglicht so ein korrektes Verhalten nahe der Wand. (ii) Die charakteristische Länge  $l$  wird reduziert. Piomelli und Balaras [49] schlägt hierfür eine Dämpfungsfunktion nach Van Driest vor:

$$l = C_s \Delta \sqrt{1 - \exp\left(\left(\frac{-d^+}{25}\right)^3\right)} . \quad (2.62)$$

Dabei ist  $d^+ = d \frac{u_\tau}{\nu}$  der dimensionslose Wandabstand gebildet mit der Schubspannungsgeschwindigkeit  $u_\tau$ , der kinematischen Viskosität  $\nu$  und dem Wandabstand  $d$ . Es soll hier erwähnt werden, dass die Dämpfungsfunktion mit der Annahme einer zweidimensionalen Grenzschicht ohne Druckgradient hergeleitet wird. Bei Strömungen mit Ablösung, die durch gegenläufige Druckgradienten verursacht wird, verliert diese Formel an Gültigkeit und kann das physikalisch richtige Wandverhalten nicht mehr vorhersagen.

## 2.4.2 Dynamisches Smagorinsky Modell und Lagrange Mittelung

Wie zuvor beschrieben zeigt das Smagorinsky Modell in Wandnähe ein unphysikalisches Verhalten und die Modellkonstante  $C_s$  muss verändert werden, um das gewünschte Verhalten zu erzwingen. Das dynamische Modell setzt auf dem Standard Smagorinsky Modell auf und berechnet die Modellkonstante in jedem Berechnungsschritt aus dem Geschwindigkeitsfeld. Damit wird nach Germano et al. [15] eine Prozedur eingeführt, die das richtige Verhalten nahe der Wand ermöglicht. Das Modell wird im Folgenden beschrieben. Es ist allerdings zu beachten, dass die durch das dynamische Modell berechnete Konstante räumlich oder zeitlich gemittelt werden muss, da sonst hohe lokale Schwankungen auftreten. Hierbei gibt es unterschiedliche Möglichkeiten, eine Mittelungsoperation durchzuführen. Die Mittelung der Smagorinsky Konstante über eine homogene Richtung ist die einfachste Möglichkeit. In dieser Arbeit wird die Mittelung der Konstanten entlang von Lagrangeschen Partikelbahnen behandelt und das Vorgehen im Anschluss an das Modell beschrieben.

### Dynamisches Modell

Das dynamische Modell beruht auf der Idee, dass die Smagorinsky Konstante aus dem Energieinhalt der kleinsten aufgelösten Strukturen berechnet werden kann. Das dynamische Modell, oder auch Germano Modell [15], benötigt hierfür zwei dreidimensionale Filter mit unterschiedlichen Filterweiten. Durch den Vergleich der Filteroperationen auf den unterschiedlichen Filterleveln wird die Smagorinsky Konstante ermittelt. Das Verfahren wird im Folgenden erklärt.

**Filterung und Germano Identität** Der erste Filter,  $G_f$ , ist gleichzusetzen mit der Gitterauflösung und hat die Filterweite  $\Delta_f$ . Damit entspricht dieser Filter auch der Schumannschen

Filtermethode [58]. Das Filter  $G_f$  wird auch als Simulationsfilter bezeichnet und bestimmt die Grenze zwischen Grob- und Feinstruktur. Der andere Filteroperator  $G_F$  ist der so genannte Testfilter mit einer größeren Filterweite  $\Delta_F > \Delta_f$ . Damit ergeben sich die gefilterten Geschwindigkeiten:

$$\bar{u}_i(\vec{x}, t) = \int_{V_f} G_f(\vec{x}, \vec{\tilde{x}}, \Delta_f) u_i(\vec{\tilde{x}}, t) d\vec{\tilde{x}} \quad (2.63)$$

$$\hat{u}_i(\vec{x}, t) = \int_{V_F} G_F(\vec{x}, \vec{\tilde{x}}, \Delta_F) u_i(\vec{\tilde{x}}, t) d\vec{\tilde{x}} \quad . \quad (2.64)$$

Wie schon zuvor hergeleitet erhält man mit dem Simulationsfilter die Feinstrukturspannungen  $\tau_{ij}$ . Erneutes Filtern der Feinstrukturspannungen mit dem Testfilter ergibt den Feinstrukturtensor auf Filterebene F

$$T_{ij} = \widehat{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \widehat{\bar{u}_i} \widehat{\bar{u}_j} \quad . \quad (2.65)$$

Nach Meneveau et al. [35] kann  $T_{ij}$  auch als Tensor der Feinstrukturspannungen einer hypothetischen Simulation auf einem größeren Gitter verstanden werden. Die Tensoren  $T_{ij}$  und  $\tau_{ij}$  sind durch die Germano Identität  $L_{ij}$  miteinander verbunden

$$L_{ij} = T_{ij} - \widehat{\tau_{ij}}. \quad (2.66)$$

Die Germano Identität kann damit direkt aus dem aufgelösten Strömungsfeld durch Filterung berechnet werden:

$$L_{ij} = \widehat{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \widehat{\bar{u}_i} \widehat{\bar{u}_j}. \quad (2.67)$$

Andererseits kann  $L_{ij}$  aus dem Smagorinsky Modell auf beiden Filterebenen berechnet werden. Damit erhält man einen Ausdruck  $L_{ij}^{mod}$  der modellierten Spannungen.

$$L_{ij}^{mod} = T_{ij}^{mod} - \widehat{\tau_{ij}^{mod}} \quad (2.68)$$

mit doppelter Filterweite  $2\Delta$  für den Testfilter erhält man

$$\widehat{\tau_{ij}^{mod}} = -2(C_s \Delta)^2 |\bar{s}| \widehat{\bar{s}_{ij}} \quad (2.69)$$

$$T_{ij}^{mod} = -2(C_s 2\Delta)^2 |\widehat{\bar{s}}| \widehat{\bar{s}_{ij}}. \quad (2.70)$$

Damit kann eine Bestimmungsgleichung für die Smagorinsky Konstante abgeleitet werden. Hierfür wird gefordert, dass der Fehler zwischen modellierter Germano Identität und berechneter Germano Identität Null ist:

$$e_{ij} = L_{ij} - L_{ij}^{mod} = 0 \quad . \quad (2.71)$$

Die entstandene Gleichung ist überbestimmt und kann nur in einem mittleren Sinn erfüllt werden. Hierfür schlägt Ghosal und Moin [16] die Minimierung des Fehlers mit Hilfe der Methode der kleinsten Fehlerquadrate vor. Die Smagorinsky Konstante wird dabei über die Filterweite als konstant angenommen. Mit der Abkürzung

$$M_{ij} = 2\Delta(\widehat{|\bar{s}|s_{ij}} - 4\widehat{|\bar{s}|}\widehat{s_{ij}}) \quad (2.72)$$

ergibt sich die Bestimmungsgleichung für  $C_s$ :

$$C_s = \frac{\langle L_{mn}M_{mn} \rangle}{\langle M_{pq}M_{pq} \rangle} \quad . \quad (2.73)$$

**Mittelung der Smagorinsky Konstante** Die Mittelungsoperation in Gleichung (2.73) ist nicht zwingend erforderlich, da man generell positive Werte für  $C_s$  erwarten kann. Es können aber auch momentan oder lokal negative Werte auftreten. Somit würde auch Backscatter, also Energietransport rückwärts von den kleinen Skalen auf die großen Skalen, erfasst werden. Negative Werte können aber eine instabile Simulation zur Folge haben. Dabei hängt die Toleranz negativer  $C_s$  Werte von dem zu Grunde liegenden numerischen Verfahren ab. Oft werden zwei Wege eingeschlagen, um die Gefahr einer instabilen Simulation zu bannen. (i) Eine Schranke  $\nu_t > 0$  oder  $\nu + \nu_t > 0$  wird für die turbulente Viskosität eingeführt und der Wertebereich von  $\nu_t$  limitiert. Das birgt den offensichtlichen Nachteil, dass eine willkürliche Bedingung eingeführt wird, für die es keine physikalische Begründung gibt. (ii) Oder eine Mittelungsoperation wie in Gleichung (2.73) wird eingeführt. Eine gern gewählte Mittelungsoperation ist es, den Wert von  $C_s$  entlang homogener Richtungen zu mitteln. Das ist bei vielen einfachen Testfällen wie z.B. isotrope Turbulenz oder Kanalströmung eine gute Alternative. Bei komplexen Strömungen aber braucht es einen anderen Ansatz für die Mittelung, der ohne homogene Richtungen auskommt. Hierfür wird die Mittelung entlang momentaner Bahnlinien im Folgenden vorgestellt.

### Mittelung entlang momentaner Bahnlinien

Meneveau et al. [35] schlagen für die Mittelung der dynamisch berechneten Konstante die Mittelung entlang von Bahnlinien vor. Damit wird die Behandlung von komplexen Strömungen ohne homogene Richtungen möglich. Einen Grund für die Verwendung von Lagrangeschen Bahnlinien geben Meneveau und Lund in [34]: Da sich Wirbel entlang von Lagrangeschen Bahnlinien entwickeln, soll auch das Konzept der turbulenten Energiekaskade hier am besten zur Geltung kommen. Sie zeigen, dass sich die Korrelation der Werte für  $C_s^2$  auf beiden Filterebenen entlang von Bahnlinien verbessert.

**Bahnlinie** Die Bahnlinie für ein Fluidpartikel lässt sich durch die Änderung seiner Position von  $\vec{z}'(t')$  nach  $\vec{z}(t)$  beschreiben:

$$\vec{z}'(t') = \vec{x} - \int_{-\infty}^t \vec{u}[\vec{z}(t''), t''] dt''. \quad (2.74)$$

Dabei ist  $\vec{x}$  die Startposition zum Zeitpunkt  $t$ . Der Fehler

$$e_{ij}(\vec{z}, t') = L_{ij}(\vec{z}, t') - C_s^2(\vec{x}, t) M_{ij}(\vec{z}, t') \quad (2.75)$$

aus modellierter und berechneter Germano-Identität muss minimiert werden, um den Modellkoeffizienten für den momentanen Zeitpunkt  $t$  zu bestimmten. Dabei wird der integrale Fehler  $E$  gebildet

$$E = \int_{-\infty}^t e_{ij}(\vec{z}(t'), t') e_{ij}(\vec{z}(t'), t') W(t - t') dt' \quad (2.76)$$

mit der Gewichtungsfunktion

$$W(t - t') = \frac{1}{T \exp\left(\frac{t-t'}{T}\right)} \quad . \quad (2.77)$$

Die Gewichtungsfunktion sorgt dafür, dass zurückliegende Zeitpunkte weniger gewichtet werden. Die Gewichtungsfunktion ist ein freier Parameter in diesem Modell und legt fest wie weit zurück die Bahnlinie reicht, die für die Minimierung des Fehlers verwendet wird. Das Minimum des Fehlers erhält man durch Ableiten nach der gesuchten Größe  $C_s$ , der Smagorinsky Konstante. Die Ableitung des Fehlers muss beim Minimum Null sein

$$\frac{\partial E}{\partial C_s^2} = \int_{-\infty}^t 2e_{ij} \frac{\partial e_{ij}}{\partial C_s^2} W(t - t') dt' = 0 \quad . \quad (2.78)$$

Auflösen nach  $C_s$  führt auf

$$C_s^2(\vec{x}, t) = \frac{\zeta_{LM}}{\zeta_{MM}} \quad (2.79)$$

mit

$$\zeta_{LM}(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^t L_{ij} M_{ij}(\vec{z}(t'), t') W(t - t') dt' \quad , \quad (2.80)$$

$$\zeta_{MM}(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^t M_{ij} M_{ij}(\vec{z}(t'), t') W(t - t') dt' \quad . \quad (2.81)$$

Durch die geschickte Wahl der Gewichtungsfunktion sind die Integrale  $\zeta_{LM}$  und  $\zeta_{MM}$  Lösungen der folgenden Relaxations-Transportgleichungen

$$\frac{d\zeta_{LM}}{dt} = \frac{\partial \zeta_{LM}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \zeta_{LM} = \frac{1}{T} (L_{ij} M_{ij} - \zeta_{LM}) \quad , \quad (2.82)$$

$$\frac{d\zeta_{MM}}{dt} = \frac{\partial \zeta_{MM}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \zeta_{MM} = \frac{1}{T} (M_{ij} M_{ij} - \zeta_{MM}) \quad . \quad (2.83)$$

Zur Bestimmung der Relaxationszeit T wird der Ansatz

$$T = \frac{\theta \Delta}{(\zeta_{LM} \zeta_{MM})^{1/8}} \quad \text{mit} \quad \theta = 1.5 \quad (2.84)$$

verwendet.  $\theta$  ist der einzige freie Parameter der Mittelung. Sein Wert wurde aus Direkten Numerischen Simulationen isotroper Turbulenz und Kanalströmungen bestimmt.

**Numerische Diskretisierung** Die numerische Lösung der beiden Transportgleichungen erhöht den Aufwand der Berechnung. Dabei wird erwähnt, dass Meneveau et al. [35] Zweifel an der Notwendigkeit einer Diskretisierung hoher Ordnung äußert und eine besonders einfache Diskretisierung wählt, um den numerischen Aufwand gering zu halten:

$$\frac{\zeta_{LM}^{(n+1)}(\vec{x}) - \zeta_{LM}^{(n)}(\vec{x} - \vec{u}^{(n)} \Delta t)}{\Delta t} = \frac{1}{T^{(n)}} ([L_{ij} M_{ij}]^{(n+1)}(\vec{x}) - \zeta_{LM}^{(n+1)}(\vec{x})) \quad , \quad (2.85)$$

$$\frac{\zeta_{MM}^{(n+1)}(\vec{x}) - \zeta_{MM}^{(n)}(\vec{x} - \vec{u}^{(n)} \Delta t)}{\Delta t} = \frac{1}{T^{(n)}} ([M_{ij} M_{ij}]^{(n+1)}(\vec{x}) - \zeta_{MM}^{(n+1)}(\vec{x})) \quad . \quad (2.86)$$

Die Gleichungen werden an den Zellmittelpunkten ausgewertet, wozu die Terme  $L_{ij}$  und  $M_{ij}$  an den Positionen auf der durch den Zellmittelpunkt gehenden Bahnlinie aus dem vorherigen Zeitschritt  $\vec{x} - \vec{u} \Delta t$  benötigt werden. Sie werden durch Interpolation auf den Zellmittelpunkt berechnet. Mit dem Relaxationsfaktor

$$\epsilon = \frac{\Delta t}{T^n + \Delta t} \quad , \quad (2.87)$$

und

$$T^n = 1.5 \Delta (\zeta_{LM}^n \zeta_{MM}^n)^{-1/8} \quad (2.88)$$

erhält man für die Werte  $\zeta_{LM}^{(n+1)}$  und  $\zeta_{MM}^{(n+1)}$  zum neuen Zeitpunkt

$$\zeta_{LM}^{(n+1)}(\vec{x}) = H\{\epsilon[L_{ij}M_{ij}]^{(n+1)}(\vec{x}) + (1-\epsilon)\zeta_{LM}^{(n)}(\vec{x} - \vec{u}^{(n)}\Delta t)\} \quad , \quad (2.89)$$

$$\zeta_{MM}^{(n+1)}(\vec{x}) = H\{\epsilon[M_{ij}M_{ij}]^{(n+1)}(\vec{x}) + (1-\epsilon)\zeta_{MM}^{(n)}(\vec{x} - \vec{u}^{(n)}\Delta t)\} \quad . \quad (2.90)$$

Um komplexe Lösungen für  $C_s^2$  zu unterdrücken, wurde die Rampenfunktion eingeführt

$$H(\phi) = \begin{cases} \phi & \text{für } \phi \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \quad (2.91)$$

**Anfangswerte und Randbedingungen** Als Anfangswerte werden gesetzt:

$$\zeta_{LM}(\vec{x}, 0) = C_s^2(0)M_{ij}M_{ij} \quad \text{mit} \quad C_s^2 = 0.01 \quad (2.92)$$

$$\zeta_{MM}(\vec{x}, 0) = M_{ij}M_{ij}(\vec{x}, 0). \quad (2.93)$$

Damit ergibt sich für den ersten Zeitschritt das klassische Smagorinsky Modell. Als Randbedingung an den Wänden wird nach Meneveau  $\zeta_{LM} = 0$  und  $\partial/\partial\vec{n}(\zeta_{MM}) = 0$  gesetzt. An periodischen Rändern werden die entsprechenden Werte des jeweils anderen Gitterrandes verwendet. Für Ein- und Ausströmränder wird eine Gradient Null Randbedingung verwendet.

### 2.4.3 WALE Modell für wandangepasste Wirbelviskosität

Neben dem Smagorinsky Modell und dessen Erweiterung zum dynamischen Smagorinsky Modell wird hier das WALE (Wall Adapted Eddy Viscosity) Modell vorgestellt [42]. Wie in den vorausgegangenen Abschnitten erwähnt wurde, ist das klassische Smagorinsky Modell ohne die dynamische Prozedur oder Korrekturverfahren wie die van Driest Dämpfung nur eingeschränkt für die Anwendung bei wandgebundenen Strömungen geeignet. Um ein Feinstrukturmodell bei komplexen wandgebundenen Strömungen anwenden zu können, muss das Verhalten der turbulenten Viskosität nahe der Wand richtig abgebildet werden. Das dynamische Modell mit Mittelung entlang von Bahnlinien besitzt diese Eigenschaft. Der Nachteil des dynamischen Modells ist, dass sich durch die dynamische Prozedur auch der Rechenaufwand erhöht. Das WALE Modell wurde im Rahmen dieser Arbeit imple-

mentiert, da es ein selektives Modell darstellt, das vergleichbaren Rechenaufwand benötigt wie das Standard Smagorinsky Modell und trotzdem für komplexe Strömungen anwendbar ist.

**Mathematischer Hintergrund** Das WALE Modell benutzt die gleiche Beziehung zwischen modellierter Spannung  $\tau_{ij}^{mod}$  und Deformationstensor  $\bar{s}_{ij}$  wie das Smagorinsky Modell (siehe Gleichung (2.56)). Der Unterschied liegt in der Bestimmung der Wirbelviskosität auf Grundlage eines anderen Tensors. Mit dem Tensor der Geschwindigkeitsgradienten  $\bar{g}_{ij} = \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}$  wird anstelle des Deformationstensors  $s_{ij} = \frac{1}{2}(\bar{g}_{ij} + \bar{g}_{ji})$  der symmetrische Anteil des Quadrats von  $\bar{g}_{ij}$  verwendet und der Tensor  $\bar{G}_{ij}$  definiert:

$$\bar{G}_{ij} = \frac{1}{2}(\bar{g}_{ik} \bar{g}_{kj} + \bar{g}_{jk} \bar{g}_{ki}). \quad (2.94)$$

Mit dem spurfreien Anteil

$$\bar{G}_{ij}^a = \frac{1}{2}(\bar{g}_{ik} \bar{g}_{kj} + \bar{g}_{jk} \bar{g}_{ik}) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\frac{1}{2}(\bar{g}_{mk} \bar{g}_{km} + \bar{g}_{mk} \bar{g}_{km}) \quad (2.95)$$

wird die Wirbelviskosität berechnet:

$$\nu_t = C_w \Delta^2 \frac{\sqrt{|\bar{G}^a|^6}}{|\bar{s}|^5 + \sqrt{|\bar{G}^a|^5}}. \quad (2.96)$$

Dabei ist die Norm des spurfreien Tensors  $\bar{G}^a$  definiert:

$$|\bar{G}^a| = \sqrt{\bar{G}_{ij}^a \bar{G}_{ij}^a}. \quad (2.97)$$

**Wandnahes Verhalten und Transition** Diese Formulierung der Wirbelviskosität  $\nu_t$  erzeugt das gewünschte Verhalten in Abhängigkeit vom dimensionslosen Wandabstand:  $\nu_t \sim y^{+3}$ . Nicoud und Ducros [42] zeigt, dass  $|\bar{G}^a| = 0$  für den Fall reiner Scherung gilt und damit nach Gleichung (2.96)  $\nu_t = 0$ . Damit wird die Wirbelviskosität in Wandnähe automatisch reduziert und es wird keine dynamische Prozedur oder Dämpfungsfunktion benötigt. Weiterhin gibt der Autor an, dass durch  $\nu_t = 0$  in reinen Scherschichten der Übergang von laminarer zu turbulenter Strömung simuliert werden kann, da das Wachstum von linearen instabilen Moden möglich ist. Ein weiterer interessanter Gesichtspunkt ist, dass die Reduktion der Wirbelviskosität hier nicht von der Glattheit der Lösung im Vergleich zur Gitterschrittweite beeinflusst wird, wie es bei dem dynamischen Modell der Fall ist (siehe auch Fröhlich [13]). In den Rechnungen in dieser Arbeit wird analog zu Nicoud und Ducros [42]  $C_w = 0.1$  verwendet.

#### 2.4.4 Feinstrukturmodell und Immersed Boundaries

Wie zuvor beschrieben, ist nicht jedes Feinstrukturmodell automatisch für wandgebundene Strömungen anwendbar. Im Kontext eines kartesischen Koordinatensystems kann aber z.B. für das Smagorinsky Modell sehr einfach die besprochene van Driest Dämpfungsfunktion implementiert werden. Bei Immersed Boundaries verhält es sich anders. Die Geometrie stimmt nicht mehr mit dem kartesischen Gitter überein und es ist aufwändiger, eine Dämpfungsfunktion zu implementieren. Einfacher ist es ein Modell zu verwenden, das automatisch die Wirbelviskosität an dem Immersed Boundary Rand reduziert. Das dynamische Modell und das WALE Modell erfüllen diese Eigenschaft.

Es wird hier erwähnt, dass die Randbedingung für die turbulente Viskosität im Programm an der Wand immer Null ist. Das gilt auch für die IB Ränder. Weiterhin wird das Standard Smagorinsky Modell ohne Dämpfungsfunktion nahe der Wand angewendet. Damit wird der Fehler untersucht, der durch das physikalisch falsche Verhalten der turbulenten Viskosität nahe der Wand entsteht. Ein Vorteil des dynamischen Modells und des WALE Modells bei wandaufgelösten Strömungen wird erwartet.

In Kapitel 6.1 werden die Feinstrukturmodelle anhand einer turbulenten Kanalströmung validiert und verglichen. In Kapitel 6.3.5 werden die unterschiedlichen Turbulenzmodelle am Beispiel einer Kanalströmung mit periodisch angeordneten Hügeln für die Verwendung mit Immersed Boundaries untersucht. Dabei wird das wandnahe Verhalten der unterschiedlichen Modelle zusammen mit dem IB Verfahren untersucht.

# 3 Immersed Boundary Methoden

In diesem Kapitel werden die Immersed Boundary Methode mit Punktwerten [70] und die Immersed Boundary Methode mit Flusskorrektur vorgestellt. Bei der ersten Methode werden Geschwindigkeitswerte am Rand punktuell interpoliert und dann als Randbedingung für die Strömungslösung verwendet. Die Methode wurde von Tremblay et al. [70] eingeführt und von Peller [44] um die Interpolation mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate erweitert. Bei der zweiten Methode werden neben der punktweisen Interpolation von Geschwindigkeiten zusätzlich die Massenflüsse am IB Rand interpoliert und eine Korrektur für die Massenerhaltung am Immersed Boundary Rand eingeführt. Ein weiterer Unterschied zwischen den beiden IB Methoden liegt in der Interpolation selbst. Bei der konservativen Methode wird die Interpolation der Geschwindigkeits- und Flusswerte nicht mehr entlang der kartesischen Achsen vorgenommen. Dort wird entlang der Wandnormalen interpoliert.

Die Interpolation am IB Rand wird in dieser Arbeit für die Geschwindigkeiten und Massenflüsse durchgeführt. Sie ist aber nicht auf diese Größen beschränkt. Es ist ebenso möglich das Interpolationsschema für den Druck oder andere Größen, wie z.B. Temperatur, zu übernehmen. Denkbar wäre auch eine Interpolation von Impulsflüssen. Aus diesem Grund wird im Folgenden die Variable  $\phi$  für Geschwindigkeiten verwendet um, den allgemeinen Charakter der Interpolation beizubehalten.

## 3.1 Immersed Boundary Rand mit Punktwerten

Bei der Immersed Boundary Methode mit Punktwerten werden die Punktwerte entlang der kartesischen Achsen interpoliert. Um bei der hier behandelten Methode möglichst hohe Genauigkeit zu erhalten, werden unterschiedliche Interpolationen untersucht. Sehr oft wird aufgrund von Stabilitätsbetrachtungen gefordert (Carpenter et al. [7]), dass die Genauigkeit des Randstencils eine Ordnung niedriger ist als die des übrigen numerischen Schemas. Wie es trotzdem möglich ist, die Ordnung der Randinterpolation zu erhöhen, wird im Folgenden anhand von Stabilitätsbetrachtungen untersucht.

### 3.1.1 Setzen der Randbedingung

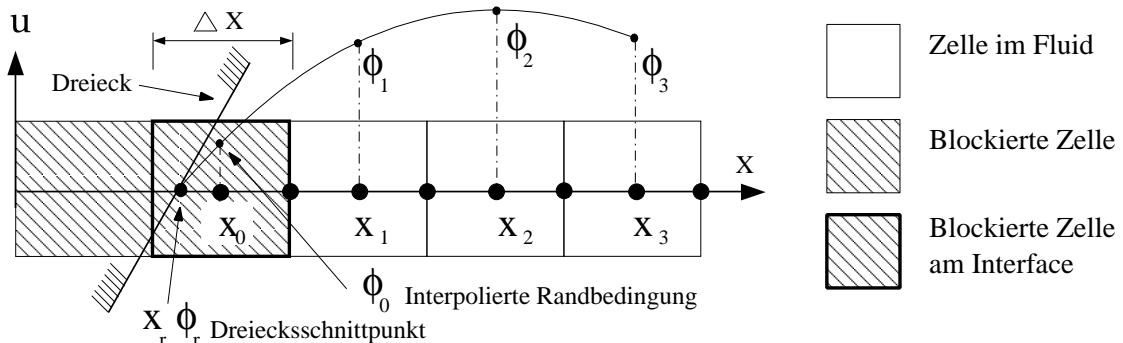
Die behandelte Immersed Boundary Methode ist ein so genannter “Direct forcing” Ansatz und wurde von Tremblay [67] eingeführt. Er besteht darin, dass bekannte Randbedingungen auf der Körperoberfläche in Randbedingungen für das kartesische Gitter umgewandelt werden. Diese Randbedingungen werden durch Interpolation mit den benachbarten Zellen gesetzt. Um die Ordnung des zu Grunde liegenden numerischen Verfahrens zu erhalten und Gitterzellen am Rand zu sparen, werden vorzugsweise Interpolationen hoher Ordnung verwendet. Hier wird zuerst die Vorgehensweise beschrieben und anschließend werden unterschied-

liche Interpolationsverfahren in Abschnitt 3.1.4 untersucht.

**Dirichlet Randbedingung** Um die kartesischen Randbedingungen zu setzen, werden Zellen, die von der Geometrie angeschnitten werden, identifiziert und aus der Berechnung ausgeblokkt. Die Geschwindigkeiten in diesen Zellen werden durch einen Interpolationsalgorithmus zusammen mit den benachbarten Zellen bestimmt und als Dirichlet Randbedingung gesetzt.

$$\phi_0 = \left( \sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot \phi_i \right) + \alpha_r \cdot \phi_r, \quad (3.1)$$

wobei N die Anzahl der an der Interpolation beteiligten Nachbarn ist. Die Konfiguration wird in Abbildung 3.1 gezeigt. Die Konfiguration in der Abbildung entspricht der Standardauswahl von Randbedingungen auf einem Gitter mit versetzt angeordneten Komponenten.  $\phi$  steht dabei für eine der Geschwindigkeitskomponenten,  $\phi_0$  ist die Dirichlet Randbedingung auf dem kartesischen Gitter,  $\phi_i$  sind die Werte auf den benachbarten Zellen und  $\phi_r$  ist die physikalische Randbedingung. Die Interpolationskoeffizienten  $\alpha_i$  und  $\alpha_r$  sind lediglich geometrieabhängig und werden in einem Pre-Processing Schritt vor der Simulation bestimmt. Sie hängen von der jeweils benutzten Interpolationsmethode ab und werden in Abschnitt 3.1.4 behandelt.



**Abbildung 3.1:** Typische 1D stencil Konfiguration für die Interpolation in x-Richtung. Gezeigt werden die blockierten Zellen im Körper, Zellen in der Strömung und die Zellen am Interface zwischen Fluid und Körper.  $x_r$  ist die Position der Wandrandbedingung  $\phi_r$ .  $\phi_{1..3}$  sind die für die Interpolation verwendeten Werte der Nachbarzellen.

**Setzen der IB Randbedingung im Runge-Kutta Zeitschritt** Im Folgenden wird das Setzen der IB Randbedingung in die Abfolge des Runge-Kutta Zeitschritts eingeordnet. Hier wird der Einfachheit halber an Stelle der Variablen  $\phi$  wieder  $u$  für die Geschwindigkeiten verwendet um mit der Schreibweise in Abschnitt 2.2 übereinzustimmen. Dort wurde die Abfolge des Runge-Kutta Zeitschritts im Detail diskutiert. Deshalb wird für die Randbedingung  $\phi_0$  vereinfacht geschrieben:

$$\phi_0 = u_0 = I(u). \quad (3.2)$$

Dabei steht  $I(u)$  für die Interpolation, die in Gleichung (3.1) beschrieben wird. In Tabelle 3.1 wird der Algorithmus für einen Runge-Kutta Zwischenzeitschritt gezeigt. Für den Zeitschritt müssen drei Bedingungen gleichzeitig erfüllt werden, um die Genauigkeit des Runge-Kutta Verfahrens zu erfüllen: Die Impulserhaltung, die Massenerhaltung und die IB Randbedingung.

**Tabelle 3.1:** Zeitschrittalgorithmus für die IB Methode mit Punktwerten. Gezeigt wird der Algorithmus für einen der drei Zwischenzeitschritte im Runge-Kutta Zeitschritt.  $\delta T$ ,  $\delta t$  und  $g_1$  entsprechen den Werten des jeweiligen Zwischenzeitschritts (siehe Gleichungen (2.37) bis 2.39 in Abschnitt 2.2).

**Aktueller Zeitschritt wird gesetzt:**  $u = u^n$ ,  $p = p^n$

**Wiederhole den Runge-Kutta Zwischenzeitschritt**

**Berechne:**  $g_1$

■	Schritt 1:	$u_0 = I(u)$
■	Schritt 2:	$\tilde{u} = u + \delta T g_1$
		$\tilde{p} = p$

**Wiederhole folgende Schritte**

■	Schritt 3:	$\tilde{u}_0 = I(\tilde{u})$
■	Schritt 4: $\operatorname{div}[G(\delta \tilde{p})] \delta t = -\operatorname{div}(\tilde{u})$	
■	Schritt 5:	$\tilde{u} = \tilde{u} + \delta t G(\delta \tilde{p})$
		$\tilde{p} = \tilde{p} + \delta \tilde{p}$

**Solange bis** ( $\operatorname{div}(\tilde{u}) < \epsilon$ )

■	Schritt 6:	$u = \tilde{u}$
		$u_0 = \tilde{u}_0$
		$p = \tilde{p}$

**Solange bis der dritte Zwischenzeitschritt abgeschlossen ist**

**Der neue Zeitschritt wird gesetzt:**  $u^{n+1} = \tilde{u}$ ,  $p^{n+1} = \tilde{p}$

Zuerst wird die IB Randbedingung  $u_0 = I(u)$  gesetzt (Schritt 1). Damit wird die Impulsgleichung in Schritt 2 berechnet und das temporäre Geschwindigkeitsfeld  $\tilde{u}$  erzeugt, siehe auch Abschnitt 2.2 für die Herleitung der diskreten Form der Impulsgleichung. Die Geschwindigkeit wird mit Tilde gekennzeichnet, da das Geschwindigkeitsfeld noch nicht divergenzfrei ist. Danach folgt die Druckkorrektur.

Für die Druckkorrektur wird die IB Randbedingung  $u_0 = I(\tilde{u})$  für das temporäre Geschwindigkeitsfeld gesetzt. Während der Druckkorrektur wird die Poissons-Gleichung mit dem SIP Algorithmus gelöst (Schritt 4). Dabei wird für die Divergenzberechnung das temporäre Geschwindigkeitsfeld  $\tilde{u}$  verwendet. Die Randbedingung für den Druck  $\delta\tilde{p}$  ist die von Neumann Bedingung am IB Rand, siehe auch Abschnitt 2.2 für die Herleitung der diskreten Poissons-Gleichung und deren Lösung. Danach folgt in Schritt 5 die Korrektur des Geschwindigkeits- und Druckfeldes. Die Geschwindigkeiten werden aber weiterhin mit Tilde gekennzeichnet, da das Geschwindigkeitsfeld jetzt im allgemeinen Fall nicht mehr die IB Interpolation  $\tilde{u}_0 = I(\tilde{u})$  erfüllt. Damit die Lösung der Poissons-Gleichung mit der IB Interpolationsbedingung übereinstimmt, werden die Schritte 3-5 solange iteriert, bis die Divergenz  $\text{div}(\tilde{u})$  kleiner als eine Schranke  $\epsilon$  ist. Dabei stellt die Schranke einen Kompromiss zwischen Genauigkeit und Rechenaufwand dar. Je kleiner  $\epsilon$  gewählt wird, umso mehr Iterationen werden benötigt.

Sobald die Divergenz des temporären Geschwindigkeitsfeldes unterhalb der Schranke liegt sind die Impulsgleichung, die Massenerhaltung und die IB Randbedingung erfüllt. In Schritt 6 werden folglich die temporären Geschwindigkeits- und Druckwerte als die aktuellen Werte behandelt. Damit kann der nächste Runge-Kutta Zwischenschritt begonnen werden. Ist bereits der letzte Runge-Kutta Zwischenschritt erreicht, sind die Geschwindigkeits- und Druckwerte  $u^{n+1}$  und  $p^{n+1}$  zum neuen Zeitpunkt  $n+1$  vorhanden und werden aktualisiert, vergleiche dazu nochmals Tabelle 3.1.

### 3.1.2 Algorithmus für das Blocken der Berechnungszellen

Das Berechnungsgitter besteht aus Kontrollvolumen für den Druck (Druckzellen) und für die Geschwindigkeit (Geschwindigkeitszellen), vergleiche hierzu auch Kapitel 2. Aufgrund der versetzten Anordnung der Variablen sind die Kontrollvolumen unterschiedlich. Eine Zelle wird als blockiert bezeichnet, wenn ihre Variable (Druck oder Geschwindigkeit) durch Interpolation bestimmt wird (vgl. Gleichung (3.1)). Zur Veranschaulichung kann Abbildung 3.1 auf Seite 40 dienen, die eine typische Interpolationskonfiguration mit blockierten Zellen zeigt. Zuerst werden die Kriterien für das Blocken von Berechnungszellen und anschließend der Füllalgorithmus vorgestellt.

**Kriterien für das Blocken** Durch das Blocken von Berechnungszellen werden diese aus der Berechnung ausgeschlossen. An den Randzellen zwischen Fluid und Körper wird die IB Interpolation durchgeführt und der interpolierte Wert  $\phi_0$  gilt als Randbedingung für die Simulation. Zellen werden nach den folgenden Kriterien blockiert. Bei der IB Methode mit Punktwerten ist die Strategie für das Blocken zellenorientiert. Beginnend von den Zellmittelpunkten werden Schnittpunkte mit den Koordinatenlinien und dem Körper gesucht. Wenn Schnittpunkte gefunden werden und diese innerhalb der Grenzen der Druckzelle liegen, wird die Zelle blockiert, siehe auch Abschnitt 3.1.3 für die Beschreibung wie Schnittpunkte berechnet werden. Angefangen bei den Druckzellen werden die Geschwindigkeitszellen blockiert: Jede Geschwindigkeitszelle, die eine blockierte Druckzelle berührt wird ebenfalls blockiert.

**Füllalgorithmus** Für die übrigen Zellen im Berechnungsgebiet wird ein Füllalgorithmus angewandt. Der Füllalgorithmus beginnt bei einer beliebigen Zelle von der bekannt ist, dass sie in der Strömung liegt. Alle Zellen, die nicht zur Strömung gehören, werden blockiert und als inaktiv markiert. Zuletzt werden alle übrigen Geschwindigkeitszellen blockiert, die mit einer blockierten Druckzelle überlappen und es ergibt sich beispielsweise eine Konfiguration wie in Abbildung 3.1. Die blockierten Zellen werden von bestimmten Schritten der numerischen Berechnung ausgenommen, wie z.B. die Berechnung des Divergenzkriteriums.

### 3.1.3 Berechnung geometrischer Größen

Im Folgenden wird erklärt, wie die Randbedingung  $\phi_r$  für die Interpolationsgleichung 3.1 aus den Schnittpunkten der Geometrie mit dem kartesischen Gitter bestimmt wird. Dabei kann die Beschreibung der Oberflächengeometrie eines Körpers im Grunde sowohl analytisch als auch durch ein unstrukturiertes Dreiecksgitter beschrieben werden. Hier wird letztere Möglichkeit gewählt, da sie große Flexibilität gewährleistet und jede beliebige Geometrie importiert werden kann. Beispielsweise ist es möglich eine CAD basierte Geometrie zu verwenden. Es wird darauf hingewiesen, dass die Diskretisierung einer Geometrie mit Dreiecksflächen einer Geometriebeschreibung zweiter Ordnung entspricht. Deshalb muss das Oberflächennetz fein genug sein, damit kein unerwünschter Fehler in der Geometriebeschreibung entsteht. Durch die Interpolation würden sich diese Fehler auf die numerische Lösung auswirken. Besonders bei analytisch definierten Flächen wie z.B. einem Zylinder muss die Geometrie entsprechend fein aufgelöst werden. Hier wird die Bestimmung der

Schnittpunkte kurz vorgestellt. Für weitere Informationen wird auf Tremblay [67] verwiesen.

**Vorbemerkung** Im vorausgegangenen Abschnitt wurde erwähnt, dass Druckzellen blockiert werden, die einen Schnittpunkt der Koordinatenlinien mit einem Dreieck enthalten. Mögliche Lagen der Schnittpunkte sind in Abbildung 3.2 (b) zu sehen. In der Abbildung liegt einer der drei Schnittpunkte,  $D_1$ , innerhalb der angedeuteten Druckzelle. Die beiden anderen Schnittpunkte liegen außerhalb der Druckzelle. Da die Schnittpunkte mathematisch aus der Ebenenformulierung des Dreiecks und der Koordinatenlinien bestimmt werden, ist es auch möglich, dass ein Schnittpunkt außerhalb des Dreiecks liegt. Es müssen also zwei Kriterien überprüft werden: Die Lage des Schnittpunktes innerhalb der betrachteten Druckzelle und die Lage innerhalb des betrachteten Dreiecks.

**Mathematische Herleitung der Schnittpunktbestimmung** Abbildung 3.2 (a) zeigt die Definition der Ecken eines Dreiecks der Körpergeometrie:

$$\vec{P}_1 = (x_1, y_1, z_1), \vec{P}_2 = (x_2, y_2, z_2), \vec{P}_3 = (x_3, y_3, z_3). \quad (3.3)$$

Sie definieren den Normalenvektor des Dreiecks:

$$\vec{n} = (\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \times (\vec{P}_3 - \vec{P}_1) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

mit den Konstanten  $a$ ,  $b$  und  $c$ :

$$a = (y_2 - y_1)(z_3 - z_1) - (z_2 - z_1)(y_3 - y_1) \quad (3.4)$$

$$b = (z_2 - z_1)(x_3 - x_1) - (x_2 - x_1)(z_3 - z_1) \quad (3.5)$$

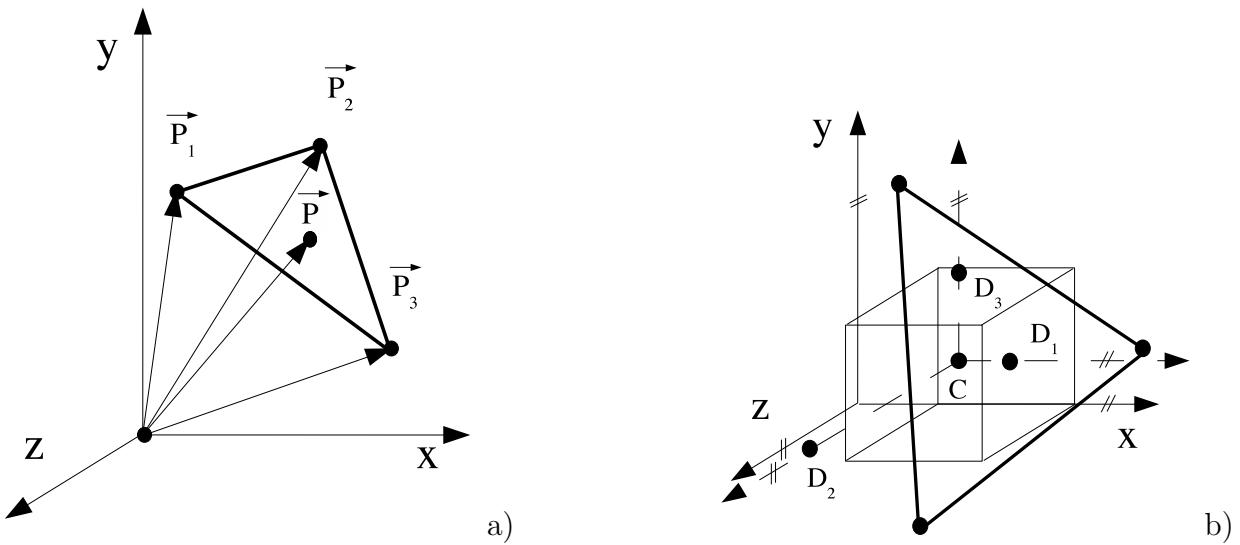
$$c = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1). \quad (3.6)$$

Mit dem Normalenvektor wird die Ebene definiert in der das Dreieck liegt:

$$(\vec{P} - \vec{P}_1) \cdot \vec{n} = 0 \quad (3.7)$$

und es ergibt sich ausgeschrieben:

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0. \quad (3.8)$$



**Abbildung 3.2:** Definition der Punkte, die ein Dreieck definieren, in kartesischen Koordinaten (a) und Veranschaulichung möglicher Schnittpunkte eines Dreiecks mit den drei Koordinatenlinien durch den Zellmittelpunkt (b).

Die Ebene kann bis zu drei Schnittpunkte mit den Koordinatenlinien haben, die durch den Druckmittelpunkt C gehen. Sie werden wie folgt berechnet:

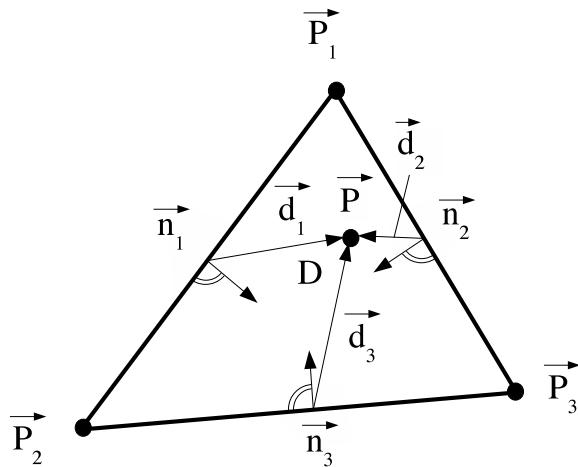
$$D_1 = \left( \frac{-b(y_c - y_1) - c(z_c - z_1)}{a} + x_1, y_c, z_c \right) \quad (3.9)$$

$$D_2 = \left( x_c, \frac{-a(x_c - x_1) - c(z_c - z_1)}{b} + y_1, z_c \right) \quad (3.10)$$

$$D_3 = \left( x_c, y_c, \frac{-a(x_c - x_1) - b(y_c - y_1)}{c} + z_1 \right). \quad (3.11)$$

Sind die Schnittpunkte berechnet, muss im Programm überprüft werden, ob die Schnittpunkte innerhalb der Druckzelle liegen (vergleiche hierzu Abbildung 3.2 (b)). Befinden sich die Schnittpunkte innerhalb der Druckzelle muss zusätzlich überprüft werden, ob der Schnittpunkt innerhalb des Dreiecks liegt.

Bisher wurde die gesamte Ebene betrachtet, die von den Eckpunkten des Dreiecks aufgespannt wird. Abbildung 3.3 zeigt alle Vektoren, die notwendig sind, um die Lage des Schnittpunkts innerhalb des Dreiecks zu überprüfen. Die Normalenvektoren in Abbildung 3.3 sind



**Abbildung 3.3:** Darstellung der Vektoren, die für die Bestimmung des Schnittpunktes eines Dreiecks mit den Koordinatenachsen berechnet werden. Damit wird überprüft, ob der Schnittpunkt innerhalb des Dreiecks liegt.

wie folgt definiert:

$$\vec{n}_1 = (\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}) \times \overrightarrow{P_1P_2} \quad (3.12)$$

$$\vec{n}_2 = (\overrightarrow{P_1P_3} \times \overrightarrow{P_1P_2}) \times \overrightarrow{P_1P_3} \quad (3.13)$$

$$\vec{n}_3 = (\overrightarrow{P_2P_3} \times \overrightarrow{P_2P_1}) \times \overrightarrow{P_2P_3}. \quad (3.14)$$

Mit den Vektoren  $\vec{d}_1$ ,  $\vec{d}_2$  und  $\vec{d}_3$ , die senkrecht zu den Dreieckslinien stehen, muss für das Skalarprodukt mit den Normalenvektoren gelten:

$$(\vec{n}_1 \cdot \vec{d}_1) > 0, \quad (\vec{n}_2 \cdot \vec{d}_2) > 0, \quad (\vec{n}_3 \cdot \vec{d}_3) > 0. \quad (3.15)$$

Werden diese drei Bedingungen erfüllt, liegt der Schnittpunkt innerhalb des Dreiecks. Gilt zusätzlich, dass der Schnittpunkt innerhalb der Druckzelle liegt wird die Zelle blockiert.

### 3.1.4 Interpolation am Rand

Im Folgenden Abschnitt wird die Bestimmung der Interpolationskoeffizienten  $\alpha_i$  aus Gleichung (3.1) beschrieben. Die Interpolationen werden in jeweils 1D Interpolationen aufgespalten. Die Generalisierung auf drei Dimensionen wird durch Gewichtungsfaktoren erreicht,

die von den Abständen der Schnittpunkte abhängen. Hier werden zuerst die Lagrange Interpolation und die Interpolation mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate besprochen.

Der Hintergrund für die Untersuchung unterschiedlicher Interpolationsarten ist, eine stabile und genaue Repräsentation der IB Randbedingung darzustellen. Während die Genauigkeit mit zunehmender Interpolationsordnung zunimmt, steigt auch die Gefahr instabiler Konfigurationen. Ein anschauliches Beispiel für den Einfluss der Randinterpolation auf die Genauigkeit wird in [45] gegeben. In dieser Arbeit wird der Aspekt Stabilität in Kapitel 4 genauer behandelt.

**Typische Konfiguration** Eine typische Konfiguration für die Interpolation in 1D zeigt Abbildung 3.1.  $x_o$  ist die Position der Variable, die interpoliert werden soll. Im Folgenden soll der Einfachheit halber  $x_0 = 0$  gelten.  $x_r$  ist der Schnittpunkt der Koordinatenachse mit der Wand. Er bewegt sich im Intervall  $[-0.5\Delta x; 0.5\Delta x]$ , wobei  $\Delta x$  der Gitterabstand ist. Der Wert  $\phi_r$  bei  $x_r$  wird auf die Geschwindigkeit der Wand gesetzt.  $x_1, x_2, x_3$  sind die Positionen der Nachbarwerte  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$ , die bekannt sind und für die Interpolationsformeln verwendet werden.

### Lagrange Interpolation

Die Lagrange Interpolation besteht darin, ein Polynom durch die Punkte, an denen die Geschwindigkeit bekannt ist und durch den Wandpunkt zu legen. Die Koeffizienten  $\alpha_i$  und  $\alpha_r$  in Gleichung (3.30) werden für den 1D Fall direkt aus der Lagrange Formel bestimmt:

$$\alpha_i = \left( \prod_{j=1, j \neq i}^N \frac{(x_0 - x_j)}{(x_i - x_j)} \right) \frac{x_0 - x_r}{x_i - x_r}, \quad (3.16)$$

$$\alpha_r = \left( \prod_{j=1}^N \frac{(x_0 - x_j)}{(x_r - x_j)} \right). \quad (3.17)$$

Der Polynomgrad ist gleich der Anzahl  $N$  der bekannten Punkte in der Strömung, die zusätzlich zu dem Wandpunkt verwendet werden. Ein Polynom dritter Ordnung benötigt z.B. 3 Punkte  $x_i$  im Fluid plus den Wandpunkt  $x_r$ . Die Genauigkeit der Interpolation besitzt die Ordnung  $O(\Delta x^{N+1})$ , da sie immer um eins höher ist als die Ordnung des Polynoms. Die Koeffizienten  $\alpha_i$  und  $\alpha_r$  sind nur von der Geometrie abhängig und müssen für die Simulation nur einmal berechnet werden. Dazu werden die Koeffizienten vor Beginn der Simulation in einem Pre-Processing Schritt bestimmt und anschließend abgespeichert.

### Interpolation mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate

Mit der Interpolation nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate wird ein Polynom gesucht, für das der Fehler zwischen den Geschwindigkeiten im Strömungsfeld und den Po-

lynomwerten minimal ist. Zusätzlich dazu muss das Polynom exakt den Wert  $\phi_r$  an der Wand annehmen. Für die Methode der kleinsten Fehlerquadrate muss der Grad des Polynoms kleiner als die Anzahl  $N$  der bekannten Punkte sein. Im Folgenden wird gezeigt, wie die Koeffizienten in Gleichung (3.18) für ein Polynom zweiten Grades hergeleitet werden.

**Mathematische Herleitung** Das Polynom  $p(x)$  wird bestimmt durch

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 . \quad (3.18)$$

Die Bedingung, dass an der Wand exakt  $\phi_r$  erreicht werden muss, schreibt sich:

$$p(x_r) = a_0 + a_1x_r + a_2x_r^2 = \phi_r . \quad (3.19)$$

Das führt zu folgendem Ausdruck für das Polynom:

$$p(x) = \phi_r + a_1(x - x_r) + a_2(x^2 - x_r^2) . \quad (3.20)$$

Hierfür wird das Minimum der Fehlerquadrate gesucht:

$$\min[F(a_1, a_2)] = \min\left[\sum_{i=1}^N(p(x_i) - \phi_i)^2\right] . \quad (3.21)$$

Ableiten nach  $a_1$  und  $a_2$  führt auf deren Bestimmungsgleichungen

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{C_2A_2 - C_1A_4}{A_2A_3 - A_1A_4} \\ a_2 &= \frac{C_1A_3 - C_2A_1}{A_2A_3 - A_1A_4} \\ A_1 &= \sum_{i=1}^N(x_i - x_r)^2 & A_2 &= \sum_{i=1}^N(x_i^2 - x_r^2)(x_i - x_r) \\ A_3 &= A_2 & A_4 &= \sum_{i=1}^N(x_i^2 - x_r^2)^2 \\ C_1 &= \sum_{i=1}^N(\phi_i - \phi_r)(x_i - x_r) & C_2 &= \sum_{i=1}^N(\phi_i - \phi_r)(x_i^2 - x_r^2) . \end{aligned} \quad (3.22)$$

Die Summen  $A_i$  hängen nur von der Geometrie ab und bleiben während der Simulation immer konstant. Aber die Summen  $C_1$  und  $C_2$  hängen von den Geschwindigkeitswerten  $\phi_i$  an den Kontrollpunkten ab. Nach dem Einsetzen der Polynomkoeffizienten  $a_1$  und  $a_2$  in das Polynom und Umordnen der Gleichung nach  $\phi_0$  erhält man:

$$\phi_0 = p(x_0) = \alpha_r\phi_r + \alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2 + \dots + \alpha_N\phi_N . \quad (3.23)$$

Die Koeffizienten  $\alpha_r$  und  $\alpha_i$  ergeben sich zu:

$$\alpha_r = 1 + \frac{(-A_2V_2 + A_4V_1)(x_0 - x_r) + (-A_3V_1 + A_1V_2)(x_0^2 - x_r^2)}{A_2A_3 - A_1A_4} \quad (3.24)$$

$$\alpha_i = \frac{A_2(x_i^2 - x_r^2) - A_4(x_i - x_r)}{A_2A_3 - A_1A_4}(x_0 - x_r) +$$

$$\frac{A_3(x_i - x_r) - A_1(x_i^2 - x_r^2)}{A_2A_3 - A_1A_4}(x_0^2 - x_r^2) \quad (3.25)$$

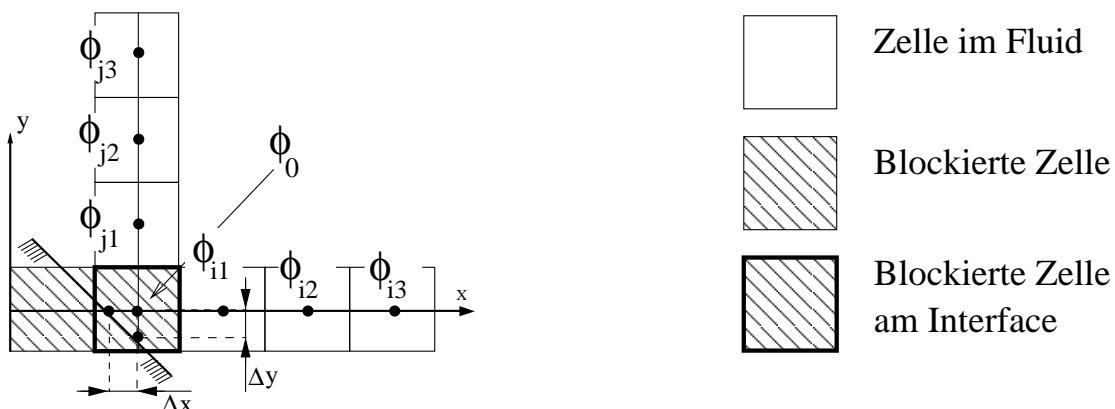
mit:

$$V_1 = \sum_{i=1}^N (x_i - x_r) \quad V_2 = \sum_{i=1}^N (x_i^2 - x_r^2) \quad . \quad (3.26)$$

Alle Koeffizienten  $\alpha_r$  und  $\alpha_i$  können wie bei der Lagrange Interpolation in dem Pre-Processing Schritt berechnet und abgespeichert werden, da sie nur von der Geometrie abhängen.

### Von der 1D zur 3D Interpolation

In den beiden vorhergegangenen Abschnitten wurden zwei Varianten für die eindimensionale Interpolation beschrieben. Je nach Verlauf der Geometrie sind im allgemeinen Fall die Interpolationen der Geschwindigkeiten in zwei oder drei Dimensionen möglich. Abbildung 3.4 zeigt eine mögliche Konfiguration in zwei Dimensionen.



**Abbildung 3.4:** 2D Stencil Konfiguration für die Interpolationen in zwei Raumrichtungen. Gezeigt werden die blockierten Zellen im Körper, Zellen in der Strömung und die Zellen am Interface zwischen Fluid und Körper.  $\phi_0$  ist der zu interpolierende Wert,  $\phi_{i1..i3}$  und  $\phi_{j1..j3}$  sind die für die Interpolation verwendeten Werte der Nachbarzellen.

Die Interpolation in beide Richtungen ist eindimensional und die Interpolationsformel 3.30 kann angewendet werden. Um die einzelnen 1D Interpolationen für den Randbedingungswert  $\phi_0$  zu verbinden, werden die unterschiedlichen Interpolationsrichtungen gewichtet. Es muss sichergestellt werden, dass der interpolierte Wert genau den exakten Randbedingungswert an der Wand erreicht, wenn die Randbedingung  $\phi_r$  mit einer Gitterposition zusammentrifft. Das kann folgendermaßen sichergestellt werden: Die Gewichtungsfaktoren  $\gamma_{dir}$  werden durch die Gleichungen:

$$\gamma_{dir} = \frac{\beta_{dir}}{\sum_{k=1}^3 \beta_k} \quad (3.27)$$

mit:

$$\beta_{dir} = \frac{\prod_{k=1, k \neq dir}^3 \Delta_k}{\Delta_{dir}} \quad (3.28)$$

definiert. Der Abstand  $\Delta k$  ist der Abstand zwischen dem Geometrieschnittpunkt und dem Zellmittelpunkt in der jeweiligen Richtung  $k$ . Die Summe der Faktoren  $\gamma_{dir}$  muss eins ergeben. Das führt schließlich zu einer Summe von interpolierten Werten aus allen drei Richtungen

$$\phi_{mean} = \sum_{dir=1}^3 \gamma_{dir} * \phi_{dir}. \quad (3.29)$$

## 3.2 Immersed Boundary Rand mit Flusskorrektur

Die im vorhergehenden Abschnitt behandelte IB Methode mit Punktwerten beinhaltet keine explizite Korrektur der Massenerhaltung am IB Rand. Die Randzellen, für die eine IB Randbedingung gesetzt wird, werden nicht auf das Erfüllen der Divergenzfreiheit überprüft. Im Folgenden wird eine Korrektur für die Massenflüsse am Rand eingeführt. Die zusätzliche Flusskorrektur erfordert ein neues IB Interpolationsschema, da für die Berechnung der Flüsse die eindimensionale Interpolation entlang der Koordinatenachsen nicht mehr ausreichend ist.

Zuerst wird auf das Setzen der IB Randbedingung im Zeitschrittalgorithmus eingegangen. Danach wird der neue Algorithmus für das Blocken der Berechnungszellen vorgestellt. Es folgt ein Abschnitt zur geometrischen Berechnung von Flächen und Volumina sowie ein Abschnitt, der auf die neue Interpolation von Punktwerten und Flüssen eingeht. Als letztes wird die Flusskorrektur beschrieben.

### 3.2.1 Setzen der Randbedingung

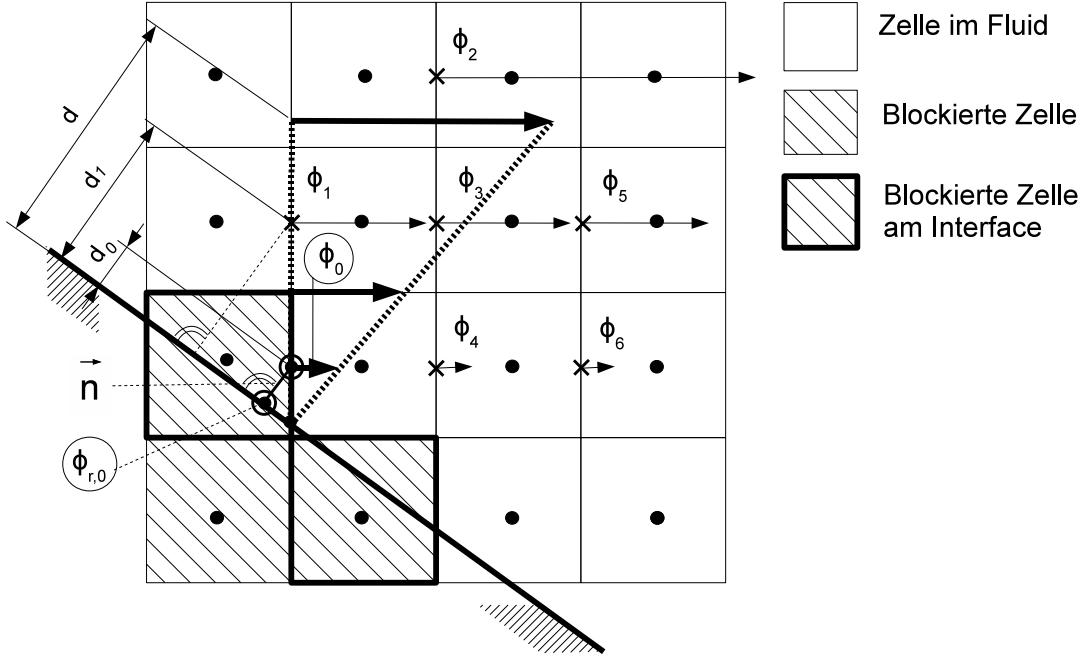
Die IB Methode mit Flusskorrektur gehört ebenfalls zu dem “direct forcing” Ansatz. Auch hier werden Randbedingungen auf der Körperoberfläche der Geometrie in Randbedingungen für das kartesische Gitter umgewandelt. Diese Randbedingungen werden wieder durch Interpolation mit den benachbarten Zellen gesetzt. Der Unterschied zu der IB Methode mit Punktwerten liegt in der zusätzlichen Interpolation von Massenflüssen und der Korrektur der Divergenz in blockierten Druckzellen. Die interpolierten Punktwerte werden als Randbedingung für die Lösung der Impulsgleichung verwendet und die korrigierten Flusswerte für die Lösung der Poissongleichung. Hier wird zuerst das Setzen der Randbedingung beschrieben und anschließend das verwendete Interpolationsverfahren (Abschnitt 3.2.4) sowie die Flussintegration und die Flusskorrektur (Abschnitt 3.2.5) vorgestellt.

**Dirichlet Randbedingung für die Impulsgleichung** Wie bei dem IB Verfahren mit Punktwerten werden Zellen, die von der Geometrie angeschnitten werden, identifiziert und aus der Berechnung ausgeblckt. Die Punktwerte der Geschwindigkeiten in diesen Zellen werden zusammen mit den benachbarten Zellen durch einen Interpolationsalgorithmus bestimmt und als Dirichlet Randbedingung gesetzt:

$$\phi_0 = \left( \sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot \phi_i \right) + \alpha_r \cdot \phi_r. \quad (3.30)$$

wobei N die Anzahl der für die Interpolation benötigten Nachbarn ist. Zur Veranschaulichung kann Abbildung 3.5 auf Seite 52 herangezogen werden.  $\phi$  steht dabei für eine der Geschwindigkeitskomponenten,  $\phi_0$  ist die Dirichlet Randbedingung auf dem kartesischen Gitter,  $\phi_i$  sind die Werte auf den benachbarten Zellen und  $\phi_r$  ist die physikalische Randbedingung. Die Interpolationskoeffizienten  $\alpha_i$  und  $\alpha_r$  sind lediglich geometrieabhängig und werden wie bei der IB Methode mit Punktwerten in einem Pre-Processing Schritt vor der Simulation bestimmt. Sie hängen von der Interpolationsmethode ab und werden in Abschnitt 3.2.4 behandelt. Der Wert  $\phi_0$  wird als Randbedingung für die Lösung der Impulsgleichung

verwendet.



**Abbildung 3.5:** Konfiguration der linearen Interpolation in 2D für die Bestimmung der Punktewerte. Interpolationsrichtung ist entlang des Normalenvektors  $\vec{n}$  der Ebene.  $\phi_0$  ist der zu interpolierende Wert und  $\phi_1 \dots \phi_6$  die für die Interpolation verwendeten Werte der Nachbarzellen.

**Dirichlet Randbedingung für die Druckkorrektur** Für die Lösung der Druckkorrektur werden die Flüsse über die angeschnittenen Zellflächen berechnet, vergleiche hierzu Abbildung 3.6. Dort wird die Konfiguration für die Flussintegration gezeigt. In Abschnitt 3.2.5 wird die Herleitung der Integrationsformel beschrieben. Sie lässt sich analog zur Interpolation der Punktewerte in Abhängigkeit der Geschwindigkeiten schreiben:

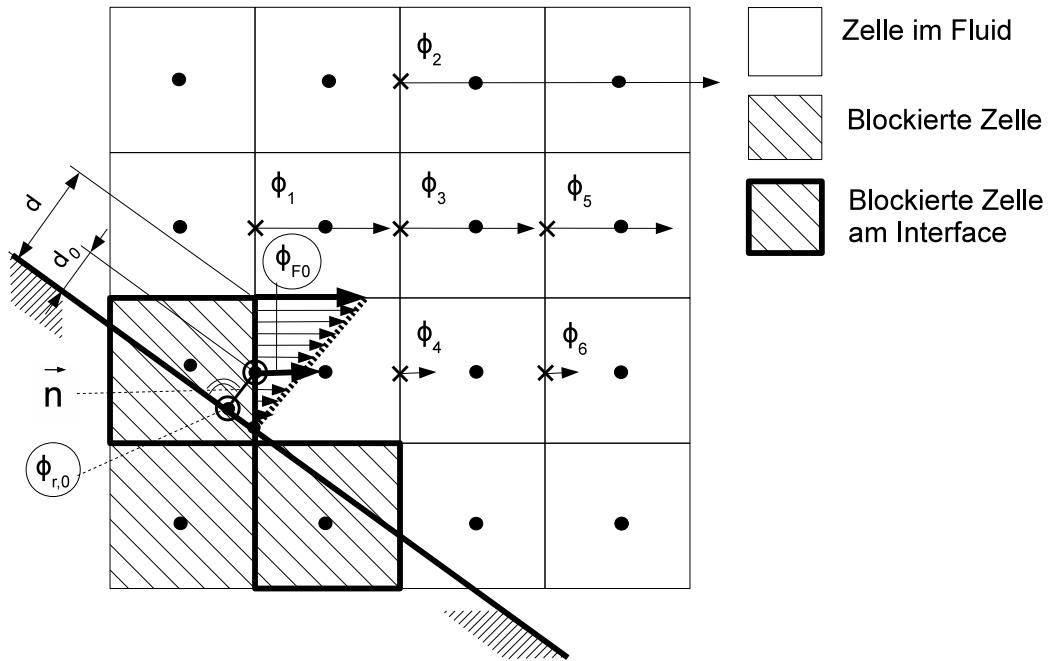
$$\phi'_{F0} = \left( \sum_{i=1}^6 \beta_i \phi_i \right) + \beta_r \phi_r. \quad (3.31)$$

Dabei ist  $\phi'_{F0}$  der integrierte Fluss über die angeschnittene Zellfläche.  $\phi_i$  sind die für die Berechnung verwendeten Geschwindigkeiten und  $\phi_r$  der Geschwindigkeitswert am Rand. Der Fluss  $\phi'_{F0}$  erfüllt im allgemeinen Fall noch nicht die Divergenzfreiheit der angeschnittenen Druckzelle. Aus diesem Grund muss der Fluss korrigiert werden. Das Korrekturverfahren wird in Abschnitt 3.2.5 beschrieben. Die Flusskorrektur wird hier vereinfacht geschrieben:

$$\phi_{F0} = K(\phi'_{F0}). \quad (3.32)$$

Dabei steht  $K$  für die Flusskorrektur und  $\phi_{F0}$  ist der korrigierte Fluss, der als Randbedingung

für die Lösung der Poissons-Gleichung verwendet wird.



**Abbildung 3.6:** Konfiguration der Integration der Flusswerte in 2D. Integriert wird über den Teil der angeschnittenen Fläche, der im Fluid liegt.  $\phi_{F0}$  ist der zu interpolierende Flusswert und  $\phi_1 \dots \phi_6$  die für die Integration verwendeten Werte der Nachbarzellen.

**Setzen der IB Randbedingung im Runge-Kutta Zeitschritt** Das Schema für das Setzen der Immersed Boundary Randbedingung während des Runge-Kutta Zeitschritts ist annähernd identisch mit dem Schema für die IB Methode mit Punktwerten in Abschnitt 3.1.1. Der einzige Unterschied liegt in der Berechnung der Flüsse während der Druckkorrektur. Sie werden an Stelle der Punktwerte berechnet. Zusätzlich wird nach der Berechnung der Flüsse eine Flusskorrektur für die IB Ränder durchgeführt. Hier wird ebenso wie in Abschnitt 3.1.1 zum Zwecke der Einfachheit an Stelle der Variablen  $\phi$  wieder  $u$  für die Geschwindigkeiten verwendet, um mit der Schreibweise in Abschnitt 2.2 übereinzustimmen. Dort wurde die generelle Abfolge des Runge-Kutta Zeitschritts im Detail diskutiert. Für die interpolierten Punktwerte  $\phi_0$ , die als Randbedingung für die Impulsgleichung dienen, wird vereinfacht geschrieben:

$$\phi_0 = u_0 = I(u). \quad (3.33)$$

Dabei steht  $I(u)$  für die Interpolation, die in Gleichung (3.30) beschrieben wird. Die abgekürzte Schreibweise für die Integration der Flusswerte (Gleichung (3.31)) und die Flusskor-

rektur (Gleichung (3.32)) wird wie folgt definiert:

$$\phi'_{F0} = u'_0 = F(u), \quad \phi_{F0} = K(\phi'_{F0}) = u_0 = K(u'_0) \quad (3.34)$$

wobei  $F(u)$  für die Flussintegration und  $K(u'_0)$  für die Flusskorrektur steht. Es wird auch für die Flusswerte  $u$  geschrieben, da sie vor der Verwendung in der numerischen Lösung der Poissons-Gleichung durch die kartesische Zellfläche geteilt werden und somit einer flächengemittelten Geschwindigkeit entsprechen. Diese Vorgehensweise wurde gewählt, um keine Modifikationen an der Implementation des Gleichungslösers vornehmen zu müssen. Dieser erwartet Punkt-werte und multipliziert sie mit der kartesischen Zellfläche, um den Massenfluss zu berechnen. Auf diese Art und Weise wird sichergestellt, dass der korrekte Flusswert während der Druckkorrektur verwendet wird. Es wird angemerkt, dass die Flusswerte im Programm in der gleichen Variablen wie die Punkt-werte abgespeichert werden.

Im Folgenden wird das Setzen der IB Randbedingung für die Punkt-werte und die Massenflüsse in die Abfolge des Runge-Kutta Zeitschritt eingeordnet. In Tabelle 3.2 wird der Algorithmus für einen Runge-Kutta Zwischenschritt gezeigt. Es wird wieder betont, dass für den Zeitschritt drei Bedingungen gleichzeitig erfüllt werden müssen, um die Genauigkeit des Runge-Kutta Verfahrens zu erfüllen: Die Impulserhaltung, die Massenerhaltung und die IB Randbedingung.

Zuerst wird die IB Randbedingung  $u_0 = I(u)$  gesetzt (Schritt 1). Damit wird die Impulsgleichung in Schritt 2 berechnet und das temporäre Geschwindigkeitsfeld  $\tilde{u}$  erzeugt, siehe auch Abschnitt 2.2 für die Herleitung der diskreten Form der Impulsgleichung. Die Geschwindigkeit wird mit Tilde gekennzeichnet, da das Geschwindigkeitsfeld noch nicht divergenzfrei ist. Danach folgt die Druckkorrektur. Hier unterscheidet sich das konservative IB Verfahren von dem Verfahren mit Punkt-werten:

Bei der konservativen Methode müssen jetzt die Flüsse gesetzt werden ( $\tilde{u}'_0 = F(\tilde{u})$ ) und die Flusskorrektur am IB Rand für die angeschnittenen Druckzellen ( $\tilde{u}_0 = K(\tilde{u}')$ ) durchgeführt werden. Danach kann die Poissons-Gleichung mit dem SIP Algorithmus gelöst werden (Schritt 4). Dabei wird für die Divergenzberechnung das temporäre Geschwindigkeitsfeld  $\tilde{u}$  verwendet. Die Randbedingung für den Druck  $\delta\tilde{p}$  ist die von Neumann Bedingung, siehe auch Abschnitt 2.2 für die Herleitung der diskreten Poissons-Gleichung und deren Lösung. Danach folgt in Schritt 5 die Korrektur des Geschwindigkeits- und Druckfeldes. Die Geschwindigkeiten werden aber weiterhin mit Tilde gekennzeichnet, da das Geschwindigkeitsfeld jetzt im allgemeinen Fall nicht mehr die Flussrandbedingung erfüllt. Damit die Lösung der Poissons-Gleichung mit der IB Flussrandbedingung übereinstimmt, werden die Schritte 3-5 solange iteriert bis die Divergenz  $\text{div}(\tilde{u})$  kleiner als eine Schranke  $\epsilon$  ist.

Sobald die Divergenz des temporären Geschwindigkeitsfeldes unterhalb der Schranke liegt sind die Impulsgleichung, die Massenerhaltung und die IB Randbedingung erfüllt. In Schritt 6 werden folglich die temporären Geschwindigkeits- und Druckwerte als die aktuellen Werte behandelt. Damit kann der nächste Runge-Kutta Zwischenschritt begonnen werden. Ist bereits der letzte Runge-Kutta Zwischenschritt erreicht sind die Geschwindigkeits- und Druckwerte  $u^{n+1}$  und  $p^{n+1}$  zum neuen Zeitpunkt  $n+1$  vorhanden und werden aktualisiert, vergleiche dazu nochmals Tabelle 3.2.

**Tabelle 3.2:** Zeitschrittalgorithmus für die IB Methode mit Flusskorrektur. Gezeigt wird der Algorithmus für einen der drei Zwischenzeitschritte im Runge-Kutta Zeitschritt.  $\delta T$ ,  $\delta t$  und  $g_1$  entsprechen den Werten des jeweiligen Zwischenschritts (siehe Gleichungen (2.37) bis (2.39) in Abschnitt 2.2).

**Aktueller Zeitschritt wird gesetzt:**  $u = u^n$ ,  $p = p^n$

**Wiederhole den Runge-Kutta Zwischenschritt**

**Berechne:**  $g_1$

	■ Schritt 1:	$u_0 = I(u)$
	■ Schritt 2:	$\tilde{u} = u + \delta T g_1$
		$\tilde{p} = p$

**Wiederhole folgende Schritte**

	■ Schritt 3:	$\tilde{u}'_0 = F(\tilde{u})$
		$\tilde{u}_0 = K(\tilde{u}'_0)$
	■ Schritt 4:	$\text{div}[G(\delta \tilde{p})] \delta t = -\text{div}(\tilde{u})$
	■ Schritt 5:	$\tilde{u} = \tilde{u} + \delta t G(\delta \tilde{p})$
		$\tilde{p} = \tilde{p} + \delta \tilde{p}$

**Solange bis**  $(\text{div}(\tilde{u}) < \epsilon)$

	■ Schritt 6:	$u = \tilde{u}$
		$u_0 = \tilde{u}_0$
		$p = \tilde{p}$

**Solange bis der dritte Zwischenzeitschritt abgeschlossen ist**

**Der neue Zeitschritt wird gesetzt:**  $u^{n+1} = \tilde{u}$ ,  $p^{n+1} = \tilde{p}$

### 3.2.2 Algorithmus für das Blocken der Berechnungszellen

Wie bei der IB Methode mit Punktwerten wird eine Zelle als blockiert bezeichnet, wenn Ihre Variable (Druck oder Geschwindigkeit) durch Interpolation bestimmt wird (vgl. Gleichungen (3.30) und (3.31) sowie Gleichung (3.32)). Aufgrund der versetzten Variablenanordnung im kartesischen Gitter ergeben sich unterschiedliche Kontrollvolumina für die Druck- und Geschwindigkeitszellen. Der Algorithmus für das Blocken der Zellen unterscheidet sich in einigen Punkten von der IB Methode mit Punktwerten aus Abschnitt 3.1. Dort wurden zur Bestimmung der blockierten Druckzellen die Schnittpunkte entlang der Koordinatenlinien durch den Zellmittelpunkt betrachtet. Hier wird zuerst das neue Kriterium für das Blocken von Zellen vorgestellt und anschließend der Füllalgorithmus betrachtet.

**Kriterien für das Blocken** Durch das Blocken werden Zellen aus der Berechnung ausgeschlossen. Wie zuvor bei der IB Methode mit Punktwerten werden für die Randzellen zwischen Fluid und Körper die IB Interpolation durchgeführt und die Randbedingung  $\phi_0$  für die Impulsgleichung gesetzt. Zusätzlich werden hier für diese Zellen auch die Massenflüsse berechnet. Für die Druckzellen zwischen Fluid und Körper wird zusätzlich eine Flusskorrektur durchgeführt und die Flussrandbedingung  $\phi_{F0}$  gesetzt. Das Blocken der Zellen erfolgt nach folgendem Algorithmus: Es werden die Kanten der Druckzellen verwendet, um zu unterscheiden, ob eine Zelle blockiert ist, siehe Abbildung 3.7 (a) als Beispiel für eine Druckzelle, die von zwei Dreiecken angeschnitten wird. Die Schnittpunkte der Geometrie mit den Kanten werden analog zu den Schnittpunkten mit Koordinatenlinien bei der IB Methode mit Punktwerten berechnet. Ist eine der Kanten angeschnitten, wird die Druckzelle blockiert. Ausgehend von den Druckzellen werden alle Geschwindigkeitszellen blockiert, die eine blockierte Druckzelle berühren.

**Füllalgorithmus** Der Füllalgorithmus funktioniert analog zu der IB Methode mit Punktwerten und wird hier nochmals kurz zusammengefasst: Er beginnt bei einer beliebigen Zelle von der bekannt ist, dass sie in der Strömung liegt. Alle Zellen, die nicht zur Strömung gehören werden blockiert und als inaktiv markiert. Zuletzt werden alle übrigen Geschwindigkeitszellen blockiert, die mit einer blockierten Druckzelle überlappen und es ergibt sich beispielsweise die Konfiguration in Abbildung 3.5. Diese Zellen werden von bestimmten Schritten der numerischen Berechnung ausgenommen, wie z.B. die Berechnung des Divergenzkriteriums.

### 3.2.3 Berechnung geometrischer Größen

Im Folgenden wird erklärt wie die Randbedingung  $\phi_r$  für die Interpolationsgleichungen 3.30 und 3.31 bestimmt wird. Die Oberflächengeometrie des Körpers wird wie bei der Methode mit Punktwerten durch ein unstrukturiertes Dreiecksgitter beschrieben. Siehe auch Abschnitt 3.1.3. Die Bestimmung der Schnittpunkte  $\phi_r$  wird hier anders als bei der Methode mit Punktwerten durchgeführt. Im Folgenden wird zuerst die mathematische Herleitung der Schnittpunktberechnung vorgestellt. Anschließend wird auf die Vergrößerung der Körperoberfläche und die Berechnung von Flächeninhalten sowie Volumina der angeschnittenen Druckzellen eingegangen.

**Vorbemerkung** Im vorausgegangenen Abschnitt wurde das Blocken von Berechnungszellen angesprochen. Wie bei der Methode mit Punktewerten werden hier auch Schnittpunkte der Koordinatenlinien mit der Dreiecksgeometrie gesucht. Der Unterschied liegt darin, dass nicht die Koordinatenlinien durch den Zellmittelpunkt der Druckzelle verwendet werden, sondern die Koordinatenlinien, die die Zellränder bilden. Die Berechnung der Schnittpunkte unterscheidet sich aber nicht von der IB Methode mit Punktewerten und es wird auf Abschnitt 3.1.3 für die mathematische Herleitung verwiesen.

### Mathematische Schnittpunktbestimmung

Für die Bestimmung der Randbedingung  $\phi_r$  unterscheiden sich die beiden IB Methoden. Hier wird der Aufpunkt der Geraden, die durch den Randbedingungswert  $\phi_0$  geht und normal zur Körperoberfläche steht, (Abbildung 3.5) gesucht. Dazu werden die Dreiecke der Geometrie in unmittelbarer Nähe von  $\phi_0$  getestet. Für diese Dreiecke wird der Normalenabstand  $d$  zum Punkt  $\phi_0$  bestimmt. Der Aufpunkt  $\vec{P}_r$  des Normalenvektors muss zuerst bestimmt werden (siehe auch Abschnitt 3.1.3):

$$(\vec{P}_r - \vec{P}_1) \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = 0. \quad (3.35)$$

Dabei ist der Punkt  $P_1$  einer der Eckpunkte des Dreiecks und  $P_r$  die Position der Körperrandbedingung. Der Normalenvektor  $\vec{n}$  ergibt sich analog wie in Abschnitt 3.1.3 ebenfalls aus den Dreieckspunkten und wird hier auf eins normiert. Für die Körperrandbedingung lässt sich schreiben:

$$\vec{P}_r = \vec{P}_0 + d \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}. \quad (3.36)$$

Dabei ist  $\vec{P}_0$  die Position der Randbedingung  $\phi_0$  und  $d$  der Abstand zur Körperrandbedingung  $\phi_r$ , vergleiche Abbildung 3.5 zur Lage der Punkte. Nach Einsetzen in Gleichung (3.35) lässt sich nach dem Normalenabstand  $d$  auflösen:

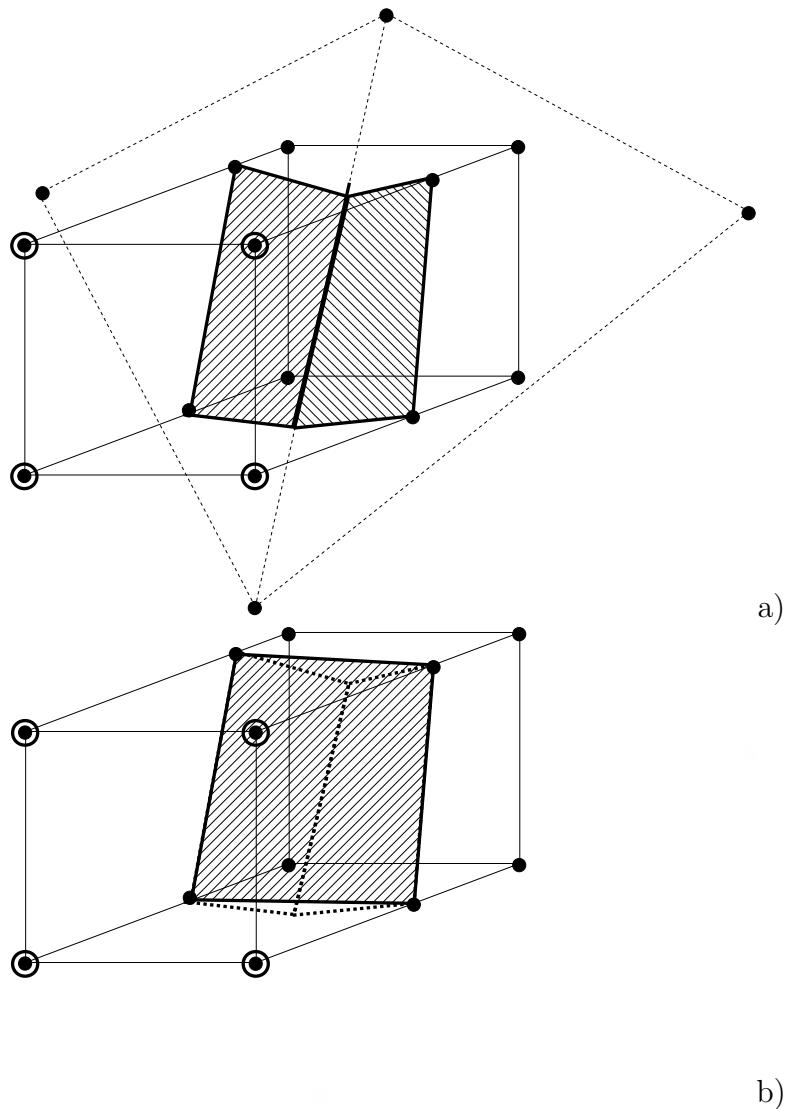
$$d = (\vec{P}_1 - \vec{P}_0) \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}|}. \quad (3.37)$$

Damit ist der gesuchte Normalenabstand  $d$  bekannt. Dieser wird für alle Dreiecke in der Nachbarschaft von  $\phi_0$  berechnet. Das Dreieck mit dem kleinsten Abstand wird für die Randbedingung  $\phi_r$  verwendet.

### Repräsentation der triangulierten Geometrie im kartesischen Gitter

Für die zuvor beschriebene Schnittpunktbestimmung können theoretisch die Dreiecke der Oberflächengeometrie verwendet werden. Hier wird aus zwei Gründen eine andere Vorgehensweise gewählt. (i) Die Auflösung der Körperoberfläche kann feiner als die Auflösung des kartesischen Gitters sein. Dann liegen im allgemeinen Fall mehrere Dreiecke der Körperoberfläche

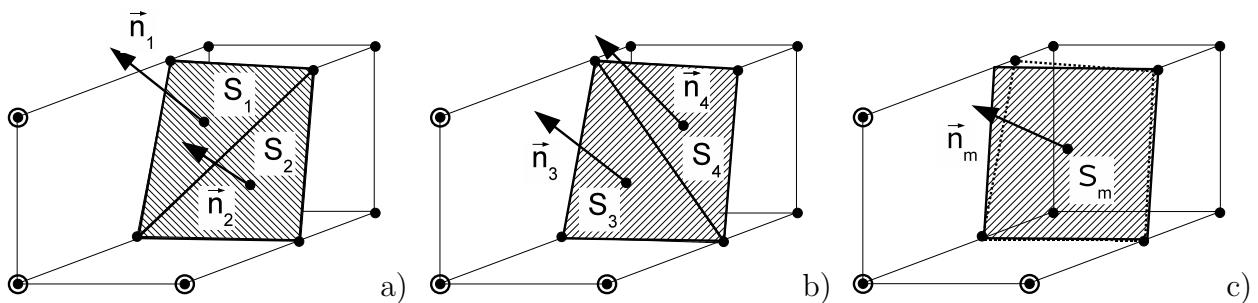
innerhalb einer kartesischen Zelle. Abbildung 3.7 zeigt beispielhaft eine Konfiguration, bei der eine Druckzelle von zwei Dreiecken geschnitten wird. Ziel ist es, eine Auflösung der Oberflächengeometrie zu erhalten, die mit der Auflösung des Berechnungsgitters übereinstimmt. Hierfür wird folgende Konvention getroffen: Für jede Druckzelle, die von der ursprünglichen Oberflächengeometrie geschnitten wird, wird eine repräsentative Ebene (Aufpunkt und Normalenvektor) bestimmt und abgespeichert. (ii) Durch die Beschränkung auf eine repräsentative Ebene wird der Berechnungsaufwand für die geometrischen Größen auf die Anzahl der Gitterpunkte der Strömungssimulation limitiert. Im Folgenden wird der Algorithmus für die Bestimmung einer repräsentativen Ebene beschrieben und im nächsten Abschnitt auf die Berechnung von Flächeninhalten und Volumina eingegangen.



**Abbildung 3.7:** (a) Zwei Dreiecke mit den angeschnittenen Flächen (strichliert) innerhalb einer kartesischen Druckzelle. und (b) daraus resultierende vereinfachte Schnittfläche (strichliert) . Dicke Punkte kennzeichnen die Fluidseite.

**Vorbemerkung** Fein aufgelöste Oberflächengeometrien sind vorteilhaft, weil sie eine gute numerische Approximation einer realen Oberfläche darstellen und auch Krümmungen mit Einschränkungen glatt darstellen. Für die Bestimmung der Schnittpunkte an den Kanten der Druckzelle und den Algorithmus für das Blocken der Zellen wird die triangulierte Oberfläche aus der Originalgeometrie direkt verwendet, vergleiche hierzu auch Abbildung 3.7 (a). Da aber der in Abbildung 3.7 dargestellte Verlauf der Oberflächengeometrie innerhalb der Druckzelle nicht mehr vom Berechnungsgitter berücksichtigt wird, macht es Sinn, eine repräsentative Ebene zu definieren wie sie in Abbildung 3.7 (b) skizziert wird. Die hier gewählte Repräsentation der Oberflächengeometrie durch eine einzelne Ebene, die nur innerhalb der betrachteten Druckzelle gilt, entspricht einer Approximation zweiter Ordnung. Damit wird die räumliche Ordnung des Finite-Volumen Verfahrens erhalten wie durch Konvergenzstudien bestätigt werden kann (siehe dazu z.B. Abschnitt 5.1.3).

**Anschauliche Bestimmung der repräsentativen Ebene** Das zuvor genannte Beispiel in Abbildung 3.7 (b) zeigt eine repräsentative Ebene, die durch vier Kanten begrenzt wird. Die vier Kanten bilden den Polygonzug, der die neue Fläche definiert. Deren genaues Aussehen innerhalb des Polygonzuges ist nicht exakt definiert. Die strichlierten Linien im Hintergrund zeigen den ursprünglichen Verlauf der Oberfläche und die Vereinfachung der Oberfläche ist zu erkennen. Aufgabe ist es, eine repräsentative Ebene zu bestimmen, die möglichst nah an den Eckpunkten des Polygonzuges liegt. Zwei Möglichkeiten sind denkbar. (i) Eine Ebene wird so durch die vier Eckpunkte gelegt, dass der Abstand zu den Punkten minimiert wird. Das ist mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate möglich. Dazu muss allerdings ein Gleichungssystem aufgestellt werden, dessen numerische Lösung mit Aufwand verbunden ist. Versuche zeigen außerdem, dass Fälle mit schlecht konditionierten Gleichungssystemen auftreten und daraus Stabilitätsprobleme resultieren. Aus diesen Gründen wurde eine einfache geometrische Lösung gewählt. (ii) Sie ist sowohl einfach als auch effizient und umgeht die meisten numerischen Probleme, die bei der ersten Variante auftreten. Die Methode basiert auf der Zerlegung des Polygonzugs in Teilflächen.



**Abbildung 3.8:** Zwei mögliche Zerlegungen der Flächen in einzelne Dreiecke (Variante (a) oder (b)) sowie daraus bestimmte gemittelte Ebene (c). In (c) wird gezeigt, dass die gemittelte Fläche (strichlierte Fläche) von dem ursprünglichen Linienzug der Kantschnittpunkte (strichlierte Linie) abweichen kann. Dicke Punkte kennzeichnen die Fluidseite.

Die Fläche, die der Polygonzug aufspannt, wird durch Dreiecke in Teilflächen zerlegt. Wie Abbildung 3.8 zeigt, gibt es für das hier gewählte Beispiel zwei Möglichkeiten der Aufspaltung in Dreiecke. Für den allgemeinen Fall mit  $N$  Kantschnittpunkten gibt es:

$N$  Flächendefinitionen.

Für das hier gezeigte Beispiel sind allerdings jeweils zwei Zerlegungen identisch. In diesem Beispiel sind also an Stelle von  $N = 4$  Flächen nur  $N = 2$  verschiedene Flächendefinitionen möglich. Wie sich später zeigen wird, ist diese Wiederholung identischer Flächendefinitionen erlaubt. Jede dieser beiden Flächendefinitionen bestehen im Beispiel ihrerseits aus zwei Dreiecken. Jede Zerlegung einer der Flächendefinitionen enthält im allgemeinen Fall  $N - 2$  Dreiecke, die den Flächeninhalt definieren:

$(N - 2)$  Dreiecksflächen je Flächendefinition.

In obigem Beispiel (Abbildung 3.8) also  $N - 2 = 4 - 2 = 2$  Dreiecke. Für jedes Dreieck wird nun der Schwerpunkt und der Normalenvektor berechnet. Insgesamt müssen in diesem Beispiel die Flächeninhalte für vier Dreiecke ausgewertet werden. Im allgemeinen Fall also:

$N * (N - 2)$  Dreiecksflächen.

Wurden alle  $N * (N - 2)$  Dreiecksflächen berechnet, werden die Normalenvektoren und Schwerpunkte der einzelnen Dreiecke mit einer Flächengewichtung zusammen addiert und anschließend gemittelt. Der Schwerpunkt wird als Aufpunkt der Ebene verwendet. Abbildung 3.8 (c) zeigt das Ergebnis qualitativ im Vergleich zur ursprünglichen Fläche (strichliert).  $\vec{n}_m$  ist der gemittelte Normalenvektor und  $S_m$  ist der gemittelte Schwerpunkt der Fläche.

Jetzt ist es möglich, für jede blockierte Druckzelle einen Normalenvektor zusammen mit seinem Aufpunkt abzuspeichern. Damit wird die Geometrieinformation aus fein aufgelösten Oberflächengittern stark reduziert und die Geometrieinformation ist ebenso abgespeichert wie z.B. die Druckvariable. Es ist anschaulich, dass durch die abschnittsweise Definition von Ebenen Unstetigkeiten in der Geometriebeschreibung auftreten können. Für die Interpolation der Punktswerte und der Massenflüsse werden diese Unstetigkeiten berücksichtigt und in Abschnitt 3.2.4 und 3.2.5 beschrieben. Im Folgenden wird die mathematische Herleitung der Flächenbestimmung erklärt.

**Mathematische Herleitung der repräsentativen Ebene** Für die Bestimmung der repräsentativen Ebene bzw. des repräsentativen Normalenvektors und des Aufpunktes der Ebene müssen alle Teilflächen berücksichtigt werden. Neben den Normalenvektoren müssen auch die Flächeninhalte der Teilflächen berechnet werden. Sie werden als Gewichtungsfaktoren für die Mittelung verwendet. Bei  $N$  Kantenschnittpunkten, wobei  $N \geq 3$  ist, kann der Polygonzug, wie zuvor am Beispiel (siehe Abbildung 3.8) erläutert, in  $N$  Flächendefinitionen mit jeweils  $N - 2$  Dreiecksflächen zerlegt werden. Das bedeutet, dass  $N * (N - 2)$  Dreiecksflächen berechnet werden müssen. Für den Flächeninhalt der  $m$ -ten Flächendefinition muss die Summe

der Flächeninhalte aus  $N - 2$  Dreiecken gebildet werden:

$$A_m = \sum_{i=1}^{N-2} A_{m,i}. \quad (3.38)$$

Für die Mittelung über die  $N$  möglichen Flächeninhalte bzw. Flächendefinitionen ergibt sich:

$$A_M = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N A_m. \quad (3.39)$$

Für die Normalenvektoren ist die Vorgehensweise ähnlich. Hier kann ein Mittelwert über alle  $N * (N - 2)$  möglichen Dreiecke gebildet werden

$$\vec{n}_M = \frac{1}{A_M} \sum_{i=1}^{N*(N-2)} \vec{n}_i A_i. \quad (3.40)$$

Auch der Stützpunkt der Normalenvektoren wird mit Hilfe der Mittelung bestimmt

$$\vec{S}_M = \frac{1}{A_M} \sum_{i=1}^{N*(N-2)} \vec{S}_i A_i . \quad (3.41)$$

Dabei werden für die Berechnung der Normalenvektoren  $\vec{n}_i$  die jeweils betroffenen Punkte eines Dreiecks verwendet. Durch die Mittelungsoperation entsteht auch kein Problem, wenn wie im oben gezeigten Beispiel eine Dreiecksfläche zweimal berechnet wird. Setzt man den Schwerpunkt  $\vec{S}_M$  als Aufpunkt  $\vec{P}_1$  in die Ebenengleichung (Gleichung (3.7)) ein, ergibt sich:

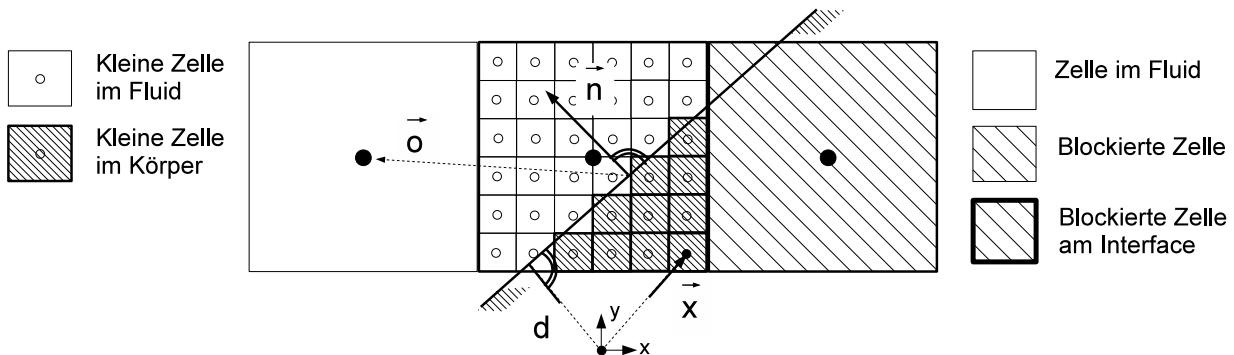
$$(\vec{P}_r - \vec{S}_M) \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = 0. \quad (3.42)$$

Damit lässt sich die Position der Randbedingung  $\vec{P}_r$  bestimmen.

### Bestimmen von Flächeninhalten und Volumina

Die Bestimmung der angeschnittenen Flächen und Volumina der kartesischen Zelle ist analytisch oder numerisch möglich. Hierfür wird die repräsentative Ebene verwendet, die im vorhergehenden Abschnitt bestimmt wurde. Eine mögliche Konfiguration wird in Abbildung 3.9 gezeigt. Basierend auf den Schnittpunkten der repräsentativen Ebene mit den Kanten der Druckzelle und der Ecken der kartesischen Zelle lassen sich die Flächen und Volumina berechnen. Für die Berechnung der angeschnittenen Flächen wie in Abbildung 3.9 ist die Im-

plementierung einer analytischen Lösung einfach. Aufwendiger ist die Volumenberechnung. Dabei entstehen je nach Lage der repräsentativen Ebene unterschiedlich viele Kantenschnittpunkte, die für die Volumenberechnung Fallunterscheidungen notwendig machen. Hier wird die numerische Berechnung der Flächeninhalte und Volumina verwendet, da hier Fallunterscheidungen vermieden werden können und dadurch die Implementierung weniger anfällig für Fehler ist. Im Folgenden wird zuerst auf die Berechnung des Flächeninhaltes eingegangen und anschließend auf die Berechnung des Volumens.



**Abbildung 3.9:** Zerlegung einer Druckzelle in kleine Zellen für die numerische Berechnung der angeschnittenen Flächen und Volumina.  $\vec{n}$  ist der Normalenvektor der repräsentativen Ebene und  $\vec{o}$  ist der Vektor, mit dessen Hilfe die Fluidseite der Ebene identifiziert wird.

**Vorbemerkung** Die repräsentative Ebene aus dem vorhergegangenen Abschnitt ist der Ausgangspunkt für die Berechnung der Flächeninhalte und Volumina. Sie definiert die Grenze zwischen Körper und Fluid. Dabei wurde für den Normalenvektor der Ebene die Konvention eingeführt, dass seine Richtung immer in das Fluid zeigt. Die Normalenrichtung der Ebene wurde durch das Skalarprodukt wie folgt bestimmt: Durch den Füllalgorithmus ist bekannt, welche Zellen innerhalb des Körpers liegen und welche im Fluid. Ist das Skalarprodukt des Normalenvektors und des Orientierungs-Vektors  $\vec{o}$  vom Aufpunkt des Normalenvektors zur nächsten benachbarten Zelle im Fluid positiv, besitzt er bereits die richtige Orientierung. Andernfalls wird seine Orientierung umgekehrt, vergleiche hierzu Abbildung 3.9.

**Flächeninhalt einer angeschnittenen Zellfläche** Mit Hilfe der Ebenengleichung lässt sich nun einfach feststellen, ob ein Punkt außerhalb der Ebene in der Strömung oder im Körper liegt. Die numerische Berechnung nutzt diese Information, um den Flächeninhalt bzw. das Volumen zu berechnen. Die Druckzelle selbst wird in kleine kartesische Zellen zerlegt. Für die Flächenberechnung sind die kleinen Zellen flach und liegen auf der Randfläche der Druckzelle. Es ergibt sich eine Aufteilung wie in Abbildung 3.9 mit  $n_{ik} \times n_{jk}$  kleinen Zellen in x- und y-Richtung. Ob die Lage des Mittelpunkts der kleinen kartesischen Zellen im Fluid oder im Körper liegt, kann mit Hilfe des Normalenvektors der Ebene überprüft werden. Dazu wird

Gleichung (3.7) in leicht abgewandelter Form verwendet:

$$(\vec{x} - \vec{S}_M) \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = R . \quad (3.43)$$

Dabei ist  $\vec{x}$  der Vektor, der zum Zellmittelpunkt der kleinen Zelle zeigt (Abbildung 3.9), und  $R$  das Ergebnis des Skalarprodukts. Ist  $R = 0$  liegt der Zellmittelpunkt  $\vec{x}$  auf der repräsentativen Ebene. Gilt  $R > 0$  liegt der Zellmittelpunkt im Fluid. Bei  $R < 0$  liegt der Zellmittelpunkt im Körper. Für die Bestimmung des Flächeninhalts werden nun alle kleinen Zellflächen aufsummiert, welche innerhalb des Fluids liegen. Diese Berechnung wird für alle sechs Seiten der kartesischen Zelle durchgeführt. Die Genauigkeit der Berechnung hängt dabei von der Größe bzw. Anzahl der kleinen Flächen ab.

**Volumen einer angeschnittenen Druckzelle** Die Bestimmung des Volumens der angeschnittenen Druckzelle erfolgt analog zu der Flächenberechnung. Die Druckzelle wird wieder in kleine Zellen zerlegt und für jede der kleinen Zellen überprüft, ob der Mittelpunkt der kleinen Zelle innerhalb oder außerhalb des Körpers liegt. Hierfür gilt weiterhin Gleichung (3.43). Im zweidimensionalen sieht die Konfiguration analog zur Flächenberechnung wie in Abbildung 3.9 aus. Im dreidimensionalen ergeben sich kleine Quader und der Berechnungsaufwand steigt im Vergleich zur Flächenberechnung, weil an Stelle von  $n_{ik} x n_{jk}$  kleinen Zellen hier  $n_{ik} x n_{jk} x n_{kk}$  kleine Zellen mit Gleichung (3.43) auf ihre Lage überprüft werden müssen. Tests ergeben aber, dass der numerische Aufwand für die Berechnung eines Volumens mit akzeptabler Genauigkeit auch hier gering ist. Es wird weiterhin angemerkt, dass die vorgestellten Berechnungen für den Flächeninhalt und das Volumen ebenfalls im Pre-Processing durchgeführt werden.

### 3.2.4 Interpolation der Punktwerte

Im Folgenden wird die Bestimmung der Interpolationskoeffizienten  $\alpha_i$  aus Gleichung (3.30) beschrieben. Die Interpolation unterscheidet sich von der IB Methode mit Punktwerten (vgl. Abschnitt 3.1.4), da hier nicht entlang der Koordinatenlinien interpoliert wird, sondern entlang des Normalenvektors der Ebene. Abbildung 3.5 zeigt eine typische Konfiguration in zwei Dimensionen. Die 1D Interpolation entlang des Normalenvektors besitzt den Vorteil, dass keine gewichtete Kombination von 1D Interpolationen für den 3D Fall notwendig ist. Die Dreidimensionlität der Interpolation ist bereits durch die Ausrichtung des Normalenvektors gegeben, vergleiche hierzu Abschnitt 3.1.4 für die IB Methode mit Punktwerten. Da sich die Interpolation mit der Methode kleinster Fehlerquadrate für die IB mit Punktwerten bewährt hat, wird sie auch hier verfolgt. Andere Interpolationsarten sind aber ebenso denkbar. Auch die Implementierung einer Wandfunktion ist theoretisch möglich, siehe beispielsweise Peller et al. [47], wo Ergebnisse für die IB Methode mit Punktwerten und einem Wandmodell beschrieben werden.

Im Folgenden wird zuerst eine typische Konfiguration für die Interpolation vorgestellt und anschließend die mathematische Herleitung für die Interpolation besprochen.

**Typische Konfiguration** Eine typische Konfiguration für die Interpolation in 1D entlang des Normalenvektors zeigt Abbildung 3.5.  $x_o$  ist die Position der Variable  $\phi_0$ , die interpoliert werden soll.  $x_r$  ist der Schnittpunkt der Koordinatenachse mit der Wand. Der Wert  $\phi_r$  bei  $x_r$  wird auf die Geschwindigkeit der Wand gesetzt.  $x_1$  bis  $x_6$  sind die Positionen der Nachbarwerte  $\phi_1$  bis  $\phi_6$ , die bekannt sind und für die Interpolationsformeln verwendet werden. Die hier betrachtete Interpolation ist linear und in Abbildung 3.5 angedeutet. Wie einleitend erwähnt, erfolgt die Interpolation entlang der Richtung des Normalenvektors der Ebene. In Abbildung 3.5 wurde aus Gründen der Übersichtlichkeit der lineare Verlauf der Geschwindigkeit entlang der kartesischen y-Achse projiziert. Diese Projektion ist zulässig, da der Wert der interpolierten Geschwindigkeit weiterhin vom Normalenabstand  $d_0$  abhängig ist.

Die Wahl der Geschwindigkeitszellen im Fluid, die für die Interpolation verwendet werden, erfolgt nach einem Suchalgorithmus. Es werden Nachbarzellen der zu interpolierenden Geschwindigkeitszelle gesucht, die nicht blockiert sind. Die nicht blockierten Zellen werden im Algorithmus abgespeichert und nach ihrem Abstand von der Ebene sortiert. Die sechs Zellen mit dem geringsten Abstand von der zu interpolierenden Zelle werden für die Interpolation benutzt. Die Anzahl  $N = 6$  wurde willkürlich gewählt, aber zeigte in Versuchen gute Ergebnisse.

**Mathematische Herleitung der Interpolationskoeffizienten** Die Interpolation der Geschwindigkeit  $\phi_0$  erfolgt nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate. Hierfür wird ein Polynom gesucht, für das der Fehler zwischen den Geschwindigkeiten im Strömungsfeld und den Polynomwerten minimal ist. Zusätzlich muss hier wie bei der IB Methode mit Punktewerten das Polynom den Wert  $\phi_r$  an der Wand annehmen. Für die Methode der kleinsten Fehlerquadrate muss der Grad des Polynoms kleiner als die Anzahl N der verwendeten Nachbargeschwindigkeiten im Strömungsfeld sein. Im Folgenden werden die Koeffizient  $\alpha_i$  und  $\alpha_r$  für ein Polynom ersten Grades hergeleitet. Hier wird nochmal die allgemeine Interpolationsformel (Gleichung (3.30)) angeschrieben:

$$\phi_0 = \left( \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi_i \right) + \alpha_r \phi_r . \quad (3.44)$$

Für die Berechnung von  $\phi_0$  wird zuerst ein linearer Polynomansatz angenommen:

$$p(d) = a_0 + a_1 d. \quad (3.45)$$

Dabei erfolgt die Interpolation entlang des Normalenabstands  $d$ , vergleiche hierzu auch Abbildung 3.5. Die Definition des Abstands  $d$  ergibt sich zu:

$$d = \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_r) \quad (3.46)$$

wobei  $\vec{n}$  der normierte Normalenvektor der Ebene,  $\vec{x}$  die Position der Geschwindigkeit  $\phi$  und  $\vec{x}_r$  die Position der Oberflächenrandbedingung  $\phi_r$  ist. Die Bedingung, dass an der Wand

die Geschwindigkeit des Dreiecks (bzw. der repräsentativen Ebene)  $\phi_r$  erreicht wird, führt auf:

$$p(0) = a_0 + a_1 0 = \phi_r . \quad (3.47)$$

Und das lineare Polynom vereinfacht sich zu:

$$p(d) = \phi_r + a_1 d . \quad (3.48)$$

Der Parameter  $a_1$  ist noch nicht bekannt und wird mit dem Minimum der Fehlerquadrate gesucht:

$$\min[F(a_1)] = \min\left[\sum_{i=1}^n (p(d_i) - \phi_i)^2\right] . \quad (3.49)$$

Ableiten nach dem einzigen freien Parameter  $a_1$  ergibt dessen Bestimmungsgleichung:

$$a_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (\phi_i - \phi_r) d_i}{\sum_{i=1}^n d_i^2} . \quad (3.50)$$

Ausgeschrieben ergibt sich für  $n = 6$ :

$$a_1 = \frac{d_1}{d_1^2 + \dots + d_6^2} (\phi_1 - \phi_r) + \frac{d_2}{d_1^2 + \dots + d_6^2} (\phi_2 - \phi_r) + \dots + \frac{d_6}{d_1^2 + \dots + d_6^2} (\phi_6 - \phi_r) . \quad (3.51)$$

Setzt man  $a_1$  in die Polynomgleichung 3.45 ein, erhält man für den gesuchten Wert  $\phi_0$  an der Position  $d_0$ :

$$\phi_0 = p(d_0) = a_1 d_0 + \phi_r . \quad (3.52)$$

$$\phi_0 = \left[ \frac{d_1}{d_1^2 + \dots + d_6^2} (\phi_1 - \phi_r) + \dots + \frac{d_6}{d_1^2 + \dots + d_6^2} (\phi_6 - \phi_r) \right] d_0 + \phi_r . \quad (3.53)$$

Die Gleichung enthält die Geschwindigkeiten  $\phi_i$  und die Randgeschwindigkeit  $\phi_r$ . Die konstanten Koeffizienten, die nur von der Geometrie abhängen, können zusammengefasst werden und man erhält wieder Gleichung (3.44) für  $N = 6$ :

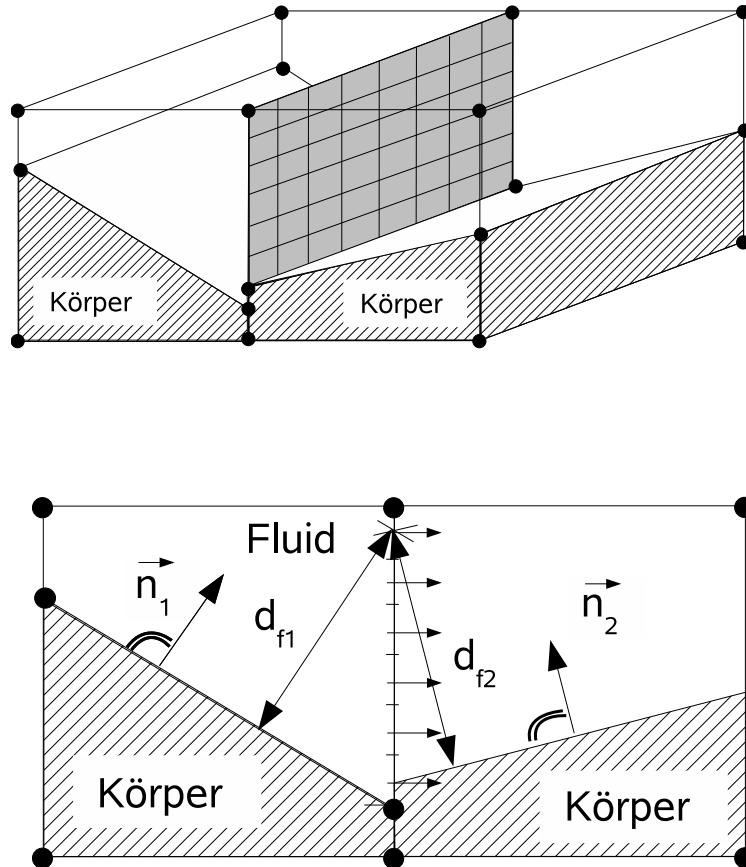
$$\phi_0 = \sum_{i=1}^6 \alpha_i \phi_i + \alpha_r \phi_r \quad (3.54)$$

mit den Koeffizienten  $\alpha_i$  und  $\alpha_r$  :

$$\alpha_i = d_0 \frac{d_i}{\sum_{n=1}^6 d_n^2} \quad \text{und} \quad \alpha_r = \left(1 - d_0 \frac{\sum_{n=1}^6 d_n}{\sum_{n=1}^6 d_n^2}\right) . \quad (3.55)$$

Alle Koeffizienten  $\alpha_i$  und  $\alpha_r$  können wieder wie bei der Methode mit Punktwerten in einem Pre-Processing Schritt berechnet werden, da sie nur von der Geometrie abhängen.

**Mittelung** Bisher wurde vernachlässigt, dass es Konfigurationen gibt, bei denen die Zellfläche für die Geschwindigkeit an zwei blockierte Druckzellen angrenzt. Hier kann nicht eindeutig entschieden werden, welche Druckzelle die Ebene für die Interpolation bzw. Flussintegration zur Verfügung stellt. Um beide Möglichkeiten zu berücksichtigen, werden Interpolationskoeffizienten für beide Fälle erstellt und arithmetisch gemittelt. Eine mögliche Konfiguration zeigt Abbildung 3.10.



**Abbildung 3.10:** Möglichkeiten der Bestimmung der Punktwerte bzw. Flusswerte basierend auf den beiden Normalenvektoren  $\vec{n}_1$  oder  $\vec{n}_2$  der benachbarten Druckzellen.

Die zuvor bestimmte Formel für die Berechnung der Flüsse wird für beide Zellen  $Z_1$  und  $Z_2$  angewendet und der mittlere Fluss berechnet. Zur Vereinfachung wird der mittlere Fluss

wieder mit  $\phi_0$  bezeichnet:

$$\phi_0 = \phi_0^{Z_1} + \phi_0^{Z_2} = \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^6 \alpha_i^{Z_1} \phi_i + \alpha_r^{Z_1} \phi_r \right] + \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^6 \alpha_i^{Z_2} \phi_i + \alpha_r^{Z_2} \phi_r \right] \quad (3.56)$$

Dabei bezeichnen  $\phi_0^{Z_1}$  und  $\phi_0^{Z_2}$  die für die beiden unterschiedlichen Zellen berechneten Geschwindigkeiten. Da die Zellen  $\phi_i$ , die für die Interpolation der Geschwindigkeiten verwendet werden, in beiden Fällen identisch sind, kann man die Formel vereinfachen:

$$\phi_0 = \sum_{i=1}^6 \left( \frac{1}{2} \alpha_i^{Z_1} + \frac{1}{2} \alpha_i^{Z_2} \right) \phi_i + \left( \frac{1}{2} \alpha_r^{Z_1} + \frac{1}{2} \alpha_r^{Z_2} \right) \phi_r \quad (3.57)$$

$$\phi_0 = \sum_{i=1}^6 \alpha_i^M \phi_i + \alpha_r^M \phi_r \quad (3.58)$$

und erhält ein mittleres  $\alpha_i^M$  und  $\alpha_r^M$  für die Interpolationsformel.

### 3.2.5 Integration Massenfluss und Flusskorrektur am Rand

Für die konservative IB Methode werden neben den Punktwerten für die Geschwindigkeiten auch die Massenflüsse berechnet. Sie dienen als Randbedingung für die Lösung der Poisson-Gleichung wie in Abschnitt 3.2.1 besprochen wurde. Da die interpolierten Massenflüsse im allgemeinen Fall die Divergenzfreiheit der angeschnittenen Druckzelle noch nicht erfüllen, ist eine zusätzliche Flusskorrektur notwendig, vergleiche dazu Abbildung 3.12. Im Folgenden wird zuerst auf die Integration der Flusswerte eingegangen und anschließend die Flusskorrektur vorgestellt.

#### Integration Massenfluss am IB Rand

Im Folgenden wird die Bestimmung der Koeffizienten  $\beta_i$  und  $\beta_r$  für die Interpolation der Massenflüsse mit Gleichung (3.31) beschrieben. Für die Integration der Flüsse wird auf die lineare Interpolation der Punktwerte aus dem vorausgegangenen Abschnitt zurückgegriffen, um ein konsistentes Verfahren zu erhalten. Der Unterschied zu der Berechnung der Punktwerte liegt darin, dass das lineare Geschwindigkeitsprofil über die angeschnittene Zellfläche integriert wird. Abbildung 3.6 zeigt eine typische Konfiguration in zwei Dimensionen. Da eine analytische Integration im dreidimensionalen Fall sehr schwierig ist, wird hier die gleiche numerische Strategie gewählt wie für die Berechnung der Flächen und Volumina in Abschnitt 3.2.3. Die Zellfläche, für die der Fluss über die Oberfläche berechnet werden muss, wird in kleine Flächenstücke zerlegt. Abbildung 3.11 zeigt eine mögliche Konfiguration. Jedes dieser kleinen Flächenstücke wird mit dem Wert der Geschwindigkeit am Mittelpunkt des kleinen Flächenstücks multipliziert, um den Fluss durch die Teilfläche zu erhalten. Für alle Flächenstücke innerhalb des Fluids wird der Massenfluss schließlich aufsummiert. Wie in Abschnitt 3.2.3 für die Berechnung der Flächeninhalte und Volumina geschehen, wird hier anhand des

Normalenvektors der Ebene entschieden, ob das Flächenstück innerhalb oder außerhalb der Strömung liegt.

**Typische Konfiguration** Abbildung 3.6 zeigt eine typische Konfiguration für die Integration der Massenflüsse. Die einzelnen Pfeile deuten die Zerlegung der Oberfläche in Teilstücke an. Wie zuvor erwähnt, wird für jedes Teilstück der entsprechende Massenfluss berechnet und anschließend aufaddiert. Die Benennung der Variablen ist analog zu der Interpolation im vorausgegangenen Abschnitt.  $x_o$  ist die Position der Variablen  $\phi_0$ , die interpoliert werden soll.  $x_r$  ist der Schnittpunkt der Koordinatenachse mit der Wand. Der Wert  $\phi_r$  bei  $x_r$  wird auf die Geschwindigkeit der Wand gesetzt.  $x_1$  bis  $x_6$  sind die Positionen der Nachbarwerte  $\phi_1$  bis  $\phi_6$ , die bekannt sind und für die Interpolationsformeln verwendet werden. Die Interpolation ist linear und in Abbildung 3.5 für die Integration der Massenflüsse angedeutet. Der Wert der interpolierten Geschwindigkeit wird durch den Normalenabstand bestimmt.

**Mathematische Herleitung der Interpolationsformel für die Flüsse** Ziel ist es, die integrierten Flüsse  $\phi'_{F0}$  analog zu der Interpolation der Geschwindigkeiten als stencil Formulierung darzustellen.

$$\phi'_{F0} = \left( \sum_{i=1}^6 \beta_i \phi_i \right) + \beta_r \phi_r. \quad (3.59)$$

Hier wird der Fluss mit Tilde gekennzeichnet, da er noch nicht die Divergenzfreiheit der Druckzelle gewährleistet.

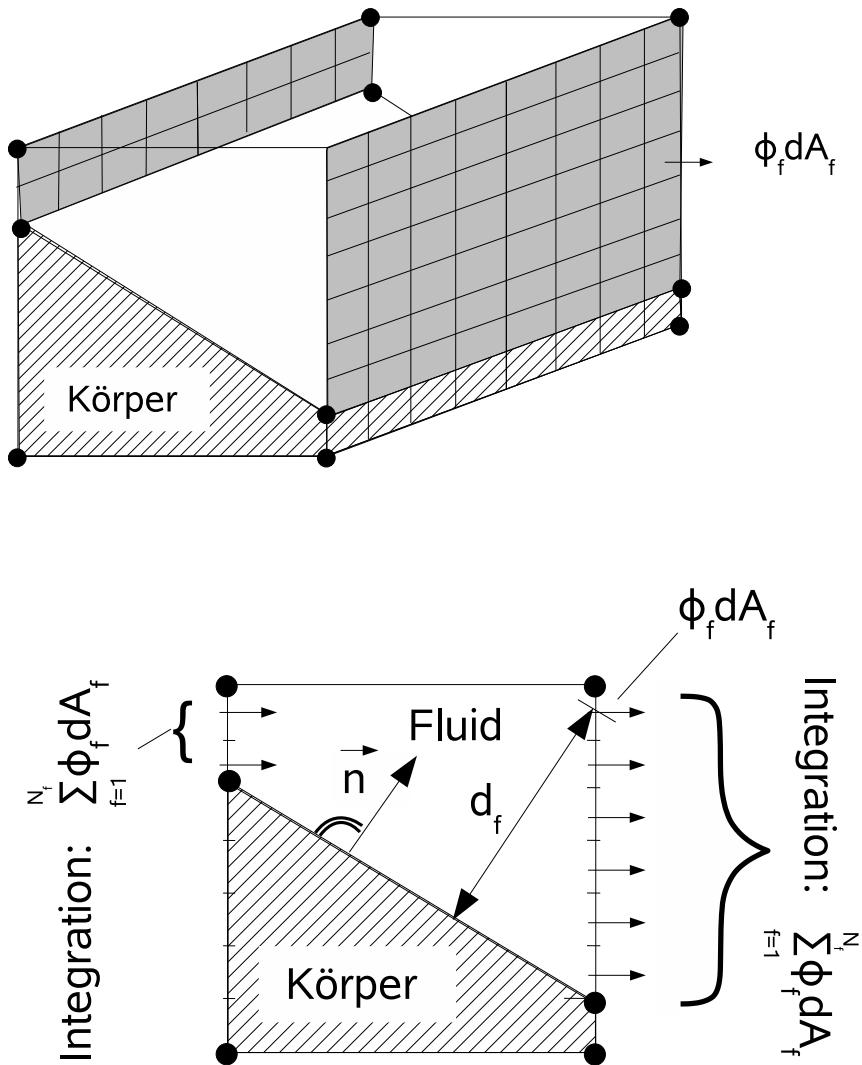
Für die Interpolation der Flüsse wird auf die Interpolationsformel (3.44) aus dem vorausgegangen Abschnitt zurückgegriffen. An Stelle von  $\phi_0$  werden mit der Interpolationsformel hier die Geschwindigkeitswerte  $\phi_f$  an der Position  $\vec{x}_f$  berechnet. Dabei ist  $\vec{x}_f$  der Mittelpunkt der kleinen Zellfläche wie in Abbildung 3.11 angedeutet. Damit lässt sich die Interpolationsgleichung schreiben:

$$\phi_f = \left( \sum_{i=1}^N \alpha_{fi} \phi_i \right) + \alpha_{fr} \phi_r . \quad (3.60)$$

Die Interpolationskoeffizienten  $\alpha_{fi}$  und  $\alpha_{fr}$  (vgl. Gleichungen (3.55)) müssen für jede Teilfläche berechnet werden, da nicht mehr der Abstand  $d_0$  des Geschwindigkeitswertes  $\phi_0$ , sondern der Abstand  $d_f$  des Zellmittelpunktes der kleinen Fläche benutzt wird (Abbildung 3.11).

$$\alpha_{fi} = d_f \frac{d_i}{\sum_{n=1}^6 d_n^2} \quad \text{und} \quad \alpha_{fr} = \left( 1 - d_f \frac{\sum_{n=1}^6 d_n}{\sum_{n=1}^6 d_n^2} \right). \quad (3.61)$$

Der gesamte Massenfluss über die angeschnittene Zellfläche wird durch Aufsummieren der



**Abbildung 3.11:** Flussintegration mit interpolierten Geschwindigkeiten; die interpolierten Geschwindigkeiten sind mit Pfeilen angedeutet und die entsprechenden Flächen mit grau; Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird in der oberen Abbildung nur ein repräsentativer Pfeil gezeigt.  $d_f$  ist der Abstand einer der Geschwindigkeiten  $\phi_f$  von der Fläche.

Flüsse über die kleinen Teilflächen bestimmt:

$$\phi'_{F_0} = \sum_{f=1}^{N_f} \phi_f dA_f . \quad (3.62)$$

Setzt man Gleichung (3.60) in Gleichung (3.62) ein erhält man:

$$\phi'_{F_0} = \sum_{f=1}^{N_f} \left( \sum_{i=1}^N \alpha_{fi} \phi_i + \alpha_{fr} \phi_r \right) dA_f . \quad (3.63)$$

Aufgrund des Kommutativgesetzes lässt sich die Formel umschreiben und vereinfachen:

$$\phi'_{F_0} = \sum_{f=1}^{N_f} \left( \sum_{i=1}^N \alpha_{fi} \phi_i + \alpha_{fr} \phi_r \right) dA_f = \sum_{i=1}^N \left( \sum_{f=1}^{N_f} \alpha_{fi} \phi_i + \alpha_{fr} \phi_r \right) dA_f = \sum_{i=1}^6 \beta_i \phi_i + \beta_r \phi_r . \quad (3.64)$$

Somit war es möglich, eine Formulierung der Integration der Flüsse zu finden, die analog zu der Interpolation der Punktwerte ist und sich nur durch die Koeffizienten  $\beta_i$  und  $\beta_r$  unterscheidet. Die Koeffizienten  $\beta_i$  und  $\beta_r$  enthalten den Abstand  $d_f$  und lassen sich schreiben:

$$\beta_i = dA_f \sum_{f=1}^{N_f} d_f \frac{d_i}{\sum_{n=1}^6 d_n^2} \quad \text{und} \quad \beta_r = dA_f \sum_{f=1}^{N_f} \left( 1 - d_f \sum_{i=1}^6 \frac{d_i}{\sum_{n=1}^6 d_n^2} \right) . \quad (3.65)$$

Dabei wurde  $dA_f$  vor die Summe gezogen, da alle Teilflächen  $dA_f$  hier die gleiche Größe haben und somit eine Konstante darstellen.

**Mittelung** Wie schon bei der Interpolation der Geschwindigkeitswerte müssen auch Konfigurationen betrachtet werden, bei denen die Zellfläche für die Geschwindigkeit an zwei blockierte Druckzellen angrenzt. Hier kann nicht eindeutig entschieden werden, welche Druckzelle die Ebene für die Interpolation bzw. Flussintegration zur Verfügung stellt. Um beide Möglichkeiten zu berücksichtigen, werden Interpolationskoeffizienten für beide Fälle erstellt und arithmetisch gemittelt. Eine mögliche Konfiguration zeigt Abbildung 3.10.

Die zuvor bestimmte Formel für die Berechnung der Flüsse wird für beide Zellen  $Z_1$  und  $Z_2$  angewendet und der mittlere Fluss berechnet. Aus Gründen der Einfachheit wird der mittlere Fluss wieder mit  $\phi'_{F_0}$  bezeichnet:

$$\phi'_{F_0} = \phi_{F_0}^{Z_1} + \phi_{F_0}^{Z_2} = \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^6 \beta_i^{Z_1} \phi_i + \beta_r^{Z_1} \phi_r \right] + \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^6 \beta_i^{Z_2} \phi_i + \beta_r^{Z_2} \phi_r \right] . \quad (3.66)$$

Dabei bezeichnen  $\phi_{F_0}^{Z_1}$  und  $\phi_{F_0}^{Z_2}$  die für die beiden unterschiedlichen Zellen berechneten Flüsse.

Da die Zellen  $\phi_i$ , die für die Flussberechnung verwendet werden, in beiden Fällen identisch sind kann man die Formel vereinfachen:

$$\phi'_{F_0} = \sum_{i=1}^6 \left( \frac{1}{2} \beta_i^{Z_1} + \frac{1}{2} \beta_i^{Z_2} \right) \phi_i + \left( \frac{1}{2} \beta_r^{Z_1} + \frac{1}{2} \beta_r^{Z_2} \right) \phi_{rZ_1} \quad (3.67)$$

$$\phi_{F_0}^M = \sum_{i=1}^6 \beta_i^M \phi_i + \beta_r^M \phi_r \quad (3.68)$$

und erhält ein mittleres  $\beta_i^M$  und  $\beta_r^M$  für die Interpolationsformel.

### Flusskorrektur in blockierten Zellen

In den vorausgegangenen Abschnitten wurden die Punktswerte der Geschwindigkeiten  $\phi_0$  und die Flusswerte  $\phi'_{F_0}$  über die angeschnittenen Flächen berechnet. Die Punktswerte  $\phi_0$  werden in der Impulsgleichung als Randbedingung gesetzt. Die Flusswerte  $\phi'_{F_0}$  können noch nicht als Randbedingung für die Lösung der Poissons-Gleichung verwendet werden, da sie noch nicht die Divergenzfreiheit der angeschnittenen Druckzelle gewährleisten. Abbildung 3.12 zeigt exemplarisch die Massenflüsse an den Rändern der Druckzelle. Im Folgenden wird der Algorithmus eingeführt, der den korrigierten Massenfluss  $\phi_{F_0}$  berechnet.

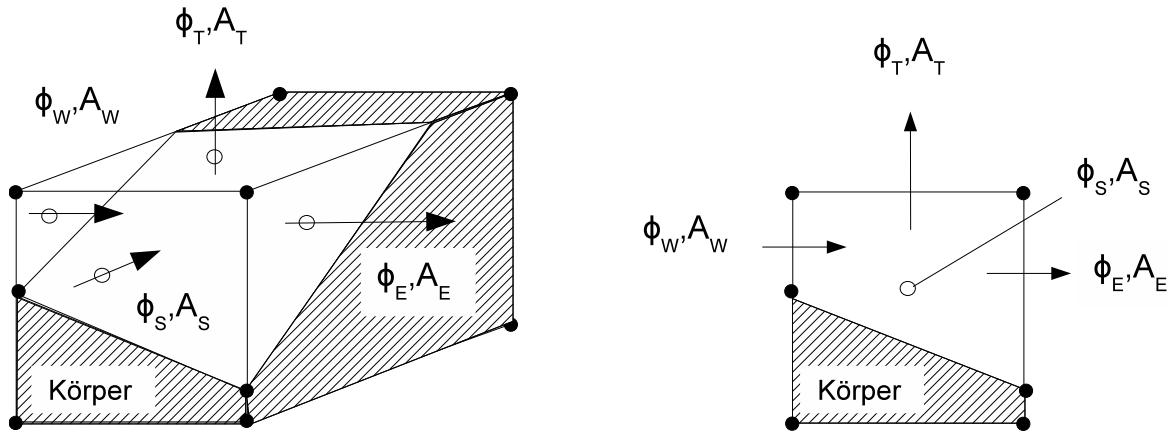
**Vorbemerkung** Die Flusskorrektur für die blockierten Zellen ist notwendig, da für sie selbst keine Poissons-Gleichung gelöst wird. Hier wird ein einfaches Korrekturverfahren gewählt: Durch die Divergenzberechnung in der blockierten Druckzelle wird beispielsweise ermittelt, ob zu viel Masse in die Druckzelle einfließt. Um den Betrag der Massenflussdifferenz, die zu viel in die Druckzelle einfließen würde, werden die Flüsse  $\phi'_{FO}$  korrigiert. Dabei wird die Differenz (also Divergenz) so auf die vorhandenen Flüsse aufgeteilt, dass an allen Seitenflächen die Änderung an Massenfluss pro Fläche ( $div/A$ ) gleich ist. Somit ist eine homogene Aufteilung gewährleistet. Das Vorgehen kann anschaulich mit einem Luftballon verglichen werden, der beim Aufblasen eine homogene Zunahme an Oberfläche zeigt.

**Typische Konfiguration** Abbildung 3.12 zeigt eine typische Konfiguration einer angeschnittenen Druckzelle. Die einzelnen Pfeile deuten die Massenflüsse über die angeschnittenen Zellflächen an. Sie werden mit der zuvor vorgestellten Flussintegration berechnet. Die Nomenklatur der Flüsse ist dabei analog zu der Benennung in Kapitel 2 nach den Himmelsrichtungen. Zum Zwecke der Übersichtlichkeit werden folgende Vereinfachungen eingeführt. Hier am Beispiel des Flusses  $\phi'_W$ :

$$\phi'_W = \phi'_{F_0}|_W. \quad (3.69)$$

Die Position der Flusswerte in Abbildung 3.12 dient nur der Veranschaulichung. Die berechneten Werte werden im Programm an den gleichen Positionen abgespeichert wie die

Punktwerte der Geschwindigkeiten. Für die Berechnung der Divergenz ist die Position der Flusswerte nicht notwendig.



**Abbildung 3.12:** 3D und 2D Darstellung einer angeschnittenen Zelle mit den offenen Flächen  $A_E, A_T, A_S, A_W$  und den entsprechenden Flüssen  $\phi_E, \phi_T, \phi_S, \phi_W$ . Die Positionen der Flusswerte wurden nur zur Veranschaulichung verschoben. Sie sind im Programm weiterhin an den Positionen der Punktwerte abgespeichert.

**Mathematische Herleitung der Flusskorrektur** Ziel ist es, die Divergenzfreiheit der Druckzelle zu gewährleisten. Im allgemeinen Fall gibt es sechs Flüsse mit denen die Divergenz berechnet wird:

$$\text{div} = \sum_{i=1}^6 \phi'_i = \phi'_N + \phi'_S + \phi'_W + \phi'_E + \phi'_T + \phi'_B \neq 0. \quad (3.70)$$

Durch die IB Methode werden Zellen angeschnitten und ein Teil der Zelloberflächen liegt entweder innerhalb des Körpers oder im Fluid. Einen Massenfluss gibt es nur über die Teilstücke, die im Fluid liegen. Hier werden die Flüsse über die zuvor beschriebene Flussintegration bestimmt. Es wird angemerkt, dass über den Rand der Geometrie keine Strömung fließt. Abbildung 3.12 zeigt das Beispiel einer angeschnittenen Zelle, bei der die Flüsse  $\phi'_W, \phi'_E, \phi'_T$  und  $\phi'_S$  über die zuvor beschriebene Interpolation berechnet werden und die Flüsse  $\phi'_N$  und  $\phi'_B$  Null sind, da sie innerhalb des Körpers liegen. Daraus ergibt sich für die Divergenz im Beispiel:

$$\text{div} = \phi'_S + \phi'_W + \phi'_E + \phi'_T \neq 0. \quad (3.71)$$

Im allgemeinen ist die Divergenz aus der Flussinterpolation ungleich Null und muss korrigiert werden. Hier wird die Flusskorrektur unter Berücksichtigung der Flächenanteile vorgenom-

men. Am Beispiel von  $F_N$  kann man die Korrektur ausschreiben:

$$\phi_N = \phi'_N - A_N \frac{\operatorname{div}}{A_W + A_E + A_T + A_S}. \quad (3.72)$$

Die Flächeninhalte wurden hierfür numerisch wie in Abschnitt 3.2.3 bestimmt. Im allgemeinen 3D Fall lässt sich die Formel schreiben:

$$\phi_i = \phi'_i + (-1)^R A_i \frac{\operatorname{div}}{\sum_{n=1}^6 A_n} \quad \text{mit} \quad \operatorname{div} = \sum_{i=1}^6 \phi'_i . \quad (3.73)$$

Dabei werden nur Flächen aufsummiert, die einen Fluss enthalten. Der Exponent  $R$  beschreibt in welche Richtung der Fluss zeigt und ist entweder 1 oder 2. Für einen Flussvektor, der aus der Zelle heraus zeigt, nimmt  $R$  den Wert 2 an. Für einen Vektor, der in eine Zelle hinein zeigt nimmt  $R$  den Wert 1 an. Damit erhält man schließlich die Divergenzfreiheit in der angeschnittenen Randzelle:

$$\operatorname{div} = \sum_{i=1}^6 \phi_i = 0 . \quad (3.74)$$

Die Werte der korrigierten Flüsse  $\phi_i$  können nun als Randbedingung für die Lösung der Poissons-Gleichung verwendet werden und es lässt sich abgekürzt für die Flusskorrektur und einen korrigierten Flusswert  $\phi$  schreiben:

$$\phi_{F0} = \phi = K(\phi'_{F0}).$$



# 4 Stabilität der IB Methoden

Hier wird die Stabilität der Immersed Boundary Methoden untersucht. Zuerst wird die Stabilität anhand der eindimensionalen Konvektionsgleichung betrachtet. Anschließend wird eine Stabilitätsuntersuchung in zwei Dimensionen durchgeführt. Beide Stabilitätsuntersuchungen gehören zu der Gruppe der linearen Stabilitätsuntersuchungen. Die erste Untersuchung wird nur für die IB Methode mit Punktwerten durchgeführt. Hier werden unterschiedliche Interpolationsmethoden getestet und auf Stabilität untersucht. Für die IB Methode mit Flusskorrektur stellt diese Stabilitätsuntersuchung keinen adäquaten Testfall dar, da hier keine Massenerhaltung mit einbezogen wird. Ziel ist es aber herauszuarbeiten, ob die Konservativität der Methode einen Einfluss auf die Stabilitätseigenschaften hat. Aus diesem Grund wird für die konservative IB Methode eine Stabilitätsuntersuchung in zwei Dimensionen eingeführt. Bei der zweidimensionalen Stabilitätsuntersuchung ist es möglich, die Stabilität an einer Kanalströmung zu testen. Es werden zum Vergleich sowohl die IB Methode mit Punktwerten als auch die konservative IB Methode getestet. Die Ergebnisse aus der Stabilitätsuntersuchung mit der eindimensionalen Konvektionsgleichung werden gegenübergestellt. Es wird untersucht, ob die Ergebnisse der beiden unterschiedlichen Stabilitätsuntersuchungen vergleichbare Aussagen liefern und welchen Einfluss die Flusskorrektur hat.

Im Folgenden wird zuerst die lineare eindimensionale Stabilitätsuntersuchung anhand der Konvektionsgleichung vorgestellt. Anschließend wird die Stabilitätsuntersuchung in zwei Dimensionen beschrieben.

## 4.1 Lineare eindimensionale Stabilitätsuntersuchung

Stabilität ist ein wichtiger Aspekt einer Immersed Boundary Methode. Um die Stabilitäts-eigenschaften verschiedener Interpolationen für die IB Methode mit Punktwerten zu untersuchen, wird eine Stabilitätsuntersuchung durchgeführt. Nach Carpenter et al. [6] kann die Stabilität einer Randbedingung nicht unabhängig von dem numerischen Schema im Inneren des Gebiets betrachtet werden. Ihrem Verfahren folgend werden hier die unterschiedlichen Randinterpolationen zusammen mit den räumlichen Approximationen mit Hilfe der Matrix Stabilitätsanalyse untersucht.

### 4.1.1 Bestimmung der Stabilitätsmatrix

Da die vollständigen Navier-Stokes Gleichungen zu komplex sind, um analytisch behandelt zu werden, wird hier die lineare Konvektionsgleichung betrachtet, um den hyperbolischen Teil der Navier-Stokes Gleichung zu modellieren:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = c \frac{\partial \phi}{\partial x} . \quad (4.1)$$

Nach Gottlieb et al. [18] zieht die Stabilität der skalaren Gleichung auch die Stabilität des kompletten Gleichungssystems nach sich. Deshalb ist es ausreichend, die skalare Gleichung (4.1) zu betrachten. Die Konvektionsgeschwindigkeit  $c$  wird für die folgende Analyse auf  $c = -1.0$  gesetzt.

**Räumliche Diskretisierung der 1D Konvektionsgleichung** Für alle expliziten räumlichen Schemata ergibt sich die semidiskretisierte Gleichung zu

$$\frac{\partial \phi^+}{\partial t} = \frac{c}{\Delta x} \cdot M^+ \phi^+ \quad (4.2)$$

wobei  $\Delta x$  die (konstante) Gitterweite ist. Die Stabilitätseigenschaften des Schemas werden durch die Eigenschaften der Matrix  $M^+$  bestimmt. Wenn eine Diskretisierung zweiter Ordnung im Raum verwendet wird und der linke Rand mit einem Upwind stencil sowie der rechte Rand mit einer künstlichen Randbedingung behandelt wird [6, Eq. (76)], ergibt sich die Systemmatrix und der Lösungsvektor zu

$$M^+ = \begin{bmatrix} -1.0 & 1.0 & & & \\ -0.5 & 0 & 0.5 & & \\ . & . & . & & \\ & . & . & . & \\ & & . & & \\ & & & -0.5 & 0 & 0.5 \\ & & & & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad \phi^+ = \begin{bmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_N \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Die Stabilität könnte durch die Wahl der Randbedingung am rechten Rand beeinflusst werden. Hier ist aus zwei Gründen die gleiche künstliche Randbedingung wie in Carpenter et al. [6, Eq. (76)] gewählt worden: (i) Im Falle der eindimensionalen Konvektionsgleichung gibt es nur eine physikalische Randbedingung. Um die Stabilität der physikalischen Randbedingung beurteilen zu können, sollte die andere Randbedingung Instabilitäten zulassen. (ii) Die Wahl eines Upwind stencils am rechten Rand ist keine günstige Wahl, da er zu dissipativ sein könnte. Die Stabilität der Gleichung wäre dann weniger empfindlich gegenüber der Wahl der zu untersuchenden Randbedingung.

**Immersed Boundary Randbedingung** Am linken Rand wird die Immersed Boundary Methode angewendet, um  $\phi_0$  mit der Information der Lage des Randes  $x_r$  und der Lage des nächstgelegenen Gitterpunktes innerhalb der Strömung zu bestimmen. Wenn  $\phi_r = 0$  in Gleichung (3.1) gesetzt wird, kann es folgendermaßen geschrieben werden:

$$\phi_0 = \alpha_1 \cdot \phi_1 + \alpha_2 \cdot \phi_2 + \alpha_3 \cdot \phi_3. \quad (4.4)$$

Hier werden nur drei Punkte in der Strömung betrachtet, die für die Interpolation genutzt werden. Die Koeffizienten  $\alpha_{1..3}$  werden entsprechend nach der Lagrange Interpolation oder der Interpolation mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate gesetzt. Mit den drei Punkten wird bei der Lagrange Interpolation ein Polynom dritten Grades konstruiert und eine

Interpolation vierter Ordnung erreicht. Das Polynom bei der Interpolation der kleinsten Fehlerquadrate ist auf zweite Ordnung limitiert und erreicht somit eine Genauigkeit dritter Ordnung. Es muss beachtet werden, dass die Koeffizienten  $\alpha_{1..3}$  von der Lage der physikalischen Randbedingung abhängen. Deshalb muss die Stabilitätsuntersuchung für mehrere Lagen der Randbedingung durchgeführt werden.

**Reduziertes Gleichungssystem nach dem Einsetzen der IB Randbedingung** Drückt man  $\phi_0$  in Gleichung (4.2) und (4.3) durch Gleichung (4.4) aus, entspricht das dem Aufprägen der linken Randbedingung. Hier ist es wichtig zu erwähnen, dass nur  $N$  Punkte wirklich numerisch berechnet werden [6]. Die physikalische Randbedingung ist eine vorgeschriebene Randbedingung und wird für die Stabilitätsanalyse nicht betrachtet. Aus diesem Grund reduziert sich der Lösungsvektor  $\phi^+$  um das Element  $\phi_0$  und wird ab hier mit  $\phi$  bezeichnet. Folgerichtig reduziert sich auch die Matrix  $M^+$  um die erste Zeile und die erste Spalte, um ein konsistentes Gleichungssystem zu wahren. Sie wird in der reduzierten Form mit  $M$  bezeichnet. Gleichung (4.5) bezeichnet das reduzierte System

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{c}{\Delta x} \cdot M \phi = \hat{M} \phi \quad (4.5)$$

mit

$$M = \begin{bmatrix} [-0.5 \cdot \alpha_1] & [0.5 \cdot (1 - \alpha_2)] & [-0.5 \cdot \alpha_3] \\ -0.5 & 0 & 0.5 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ -0.5 & 0 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 & \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

und

$$\phi = [\phi_1 \cdots \phi_N]^T. \quad (4.7)$$

**Ähnlichkeitstransformation und Eigenwerte** Eine Ähnlichkeitstransformation kann mit Hilfe der Matrix der Eigenwerte (Diagonalmatrix  $S$ ) und Eigenvektoren ( $P$ ) der Matrix  $\hat{M}$  auf Gleichung (4.5) angewendet werden:

$$P^{-1} \hat{M} P = S, \quad P^{-1} \phi = \tilde{\phi}. \quad (4.8)$$

Das führt zu

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} = S \tilde{\phi}. \quad (4.9)$$

Die Lösung der transformierten Gleichung lautet schließlich:

$$\tilde{\phi}(x, t) = e^{(St)} \cdot \tilde{f}(x). \quad (4.10)$$

Sie zeigt eine exponentielle Abhängigkeit [6] der Eigenwerte  $S$  der Matrix  $\hat{M}$  und sagt damit aus, dass die zeitliche Stabilität des numerischen Schemas durch die Eigenschaften der Eigenwerte  $\lambda_{1\dots N}$  in Matrix  $S$  bestimmt wird. Räumliche Diskretisierungen, die zu Eigenwerten mit einem positiven Realteil führen, werden ein exponentielles Wachstum der Lösung hervorrufen. Im Folgenden werden die Eigenwerte für die Lagrange Interpolation und die Interpolation mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate untersucht.

### 4.1.2 Ergebnisse für unterschiedliche Interpolationsarten

Zusammen mit dem numerischen Schema zweiter Ordnung innerhalb des Berechnungsgebiets werden die Eigenwerte für die Lagrange Interpolation zweiter bis vierter Ordnung und für die Interpolation mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate dritter Ordnung berechnet. Die Position des Randes wird zwischen  $-0.5\Delta x$  und  $+0.5\Delta x$  variiert, wobei der Ursprung des Koordinatensystems bei  $x_0$  liegt (siehe Abbildung 3.1). Der Wert  $|x_r| = 0.5\Delta x$  entspricht der Position in der Mitte zwischen zwei Zellen.

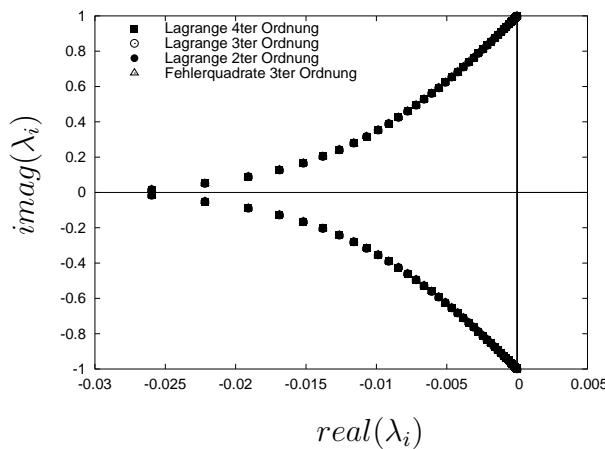
**IB Randbedingung bei  $x_r = 0.0$**  In Abbildung 4.1 werden die Eigenwerte aller zu untersuchenden Schemata für  $x_r = 0.0$  gezeigt. Es ist ersichtlich, dass die Eigenwerte aller Schematas auf einer Kurve zu liegen kommen, da mit  $x_r = 0.0$  der zu interpolierende Wert genau den auf dem Rand liegt und den Randbedingungswert annimmt (in diesem Fall Null).

**IB Randbedingung bei  $x_r = 0.2\Delta x$  und  $x_r = 0.5\Delta x$  (Extrapolation)** Wird die Randbedingung in die Richtung positiver  $x_r$  verschoben, kann die Stabilität der Extrapolation von  $\phi_0$  untersucht werden. Bei  $x_r = 0.2\Delta x$  (Abbildung 4.2, links) bewegt sich der Realteil der Eigenwerte weg von der Imaginärachse und alle Eigenwerte liegen innerhalb der linken Halbebene (LHE). Dieser Trend bestätigt sich für  $x_r = 0.5\Delta x$  (Abbildung 4.2, rechts), weshalb man annehmen kann, dass für Extrapolation alle Schematas stabil sind.

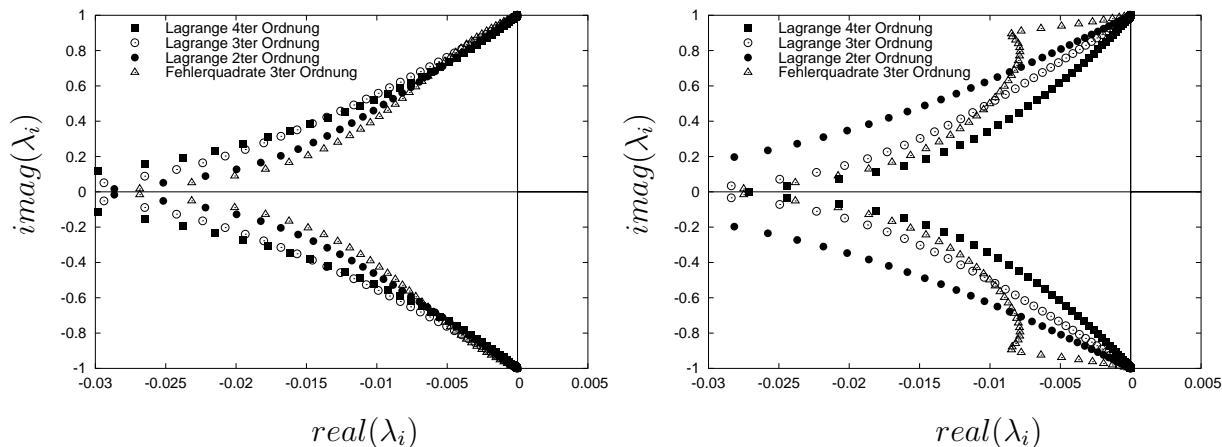
**IB Randbedingung bei  $x_r = -0.2\Delta x$  (Interpolation)** Die Interpolation von  $\phi_0$  wird als nächstes betrachtet. Für die Stelle  $x_r = -0.2\Delta x$  (Abbildung 4.3, links) kann man beobachten, dass die Realteile aller Schemata zur Imaginärachse tendieren. Das erste Randschema mit positivem Realteil der Eigenwerte ist die Lagrange Interpolation vierter Ordnung und damit leicht instabil für diese Konfiguration.

Das Lagrange Polynom dritter Ordnung sowie die lineare Lagrange Interpolation und die Interpolation mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate besitzen immer noch Eigenwerte in der LHE und sind stabil.

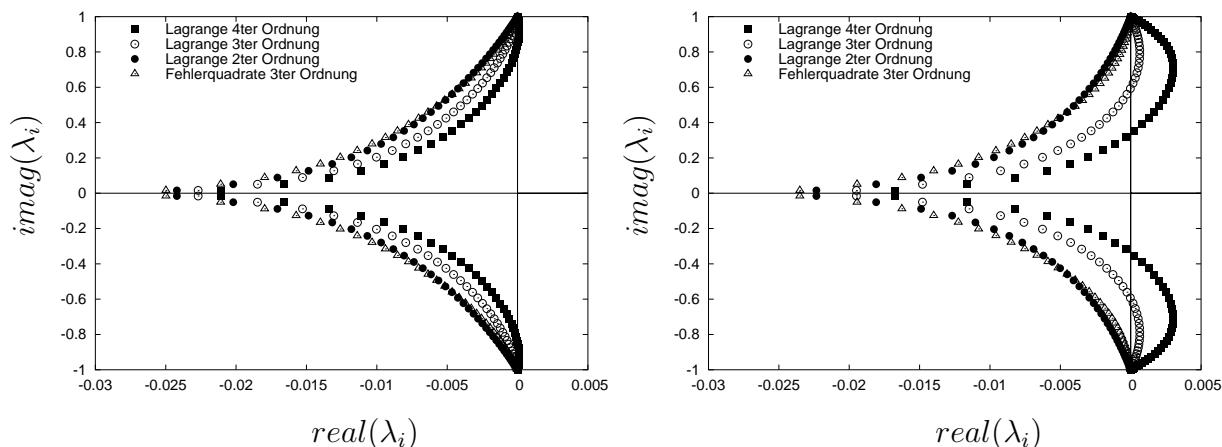
**IB Randbedingung bei  $x_r = -0.5\Delta x$  (Interpolation)** An der Position  $x_r = -0.5\Delta x$  (Abbildung 4.3, rechts) haben jetzt beide Lagrange Interpolationen, dritter und vierter Ordnung, positive Eigenwerte. Das bedeutet, dass in diesem Fall bereits eine Lagrange Interpolation mit einer Ordnung höher als zwei instabil ist. Nur die Interpolation mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate dritter Ordnung ist stabil und besitzt ausschließlich Eigenwerte in der LHE.



**Abbildung 4.1:** Eigenwerte der Matrix für  $x_r = 0.0$ .



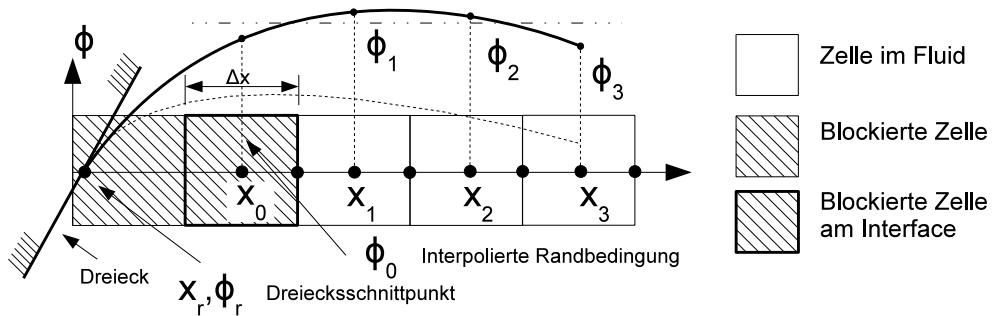
**Abbildung 4.2:** Eigenwerte der Matrix für  $x_r = 0.2\Delta x$  (links) und  $x_r = 0.5\Delta x$  (rechts).



**Abbildung 4.3:** Eigenwerte der Matrix M für  $x_r = -0.2\Delta x$  (links) und  $x_r = -0.5\Delta x$  (rechts).

Aus diesen Beobachtungen lässt sich schließen, dass mit der Interpolation nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate stabile Interpolationschemata für Immersed Boundaries mit höherer Ordnung als bei der Lagrange Interpolation konstruiert werden können.

**Anschaulicher Erklärungsversuch** Die Tatsache, dass die Interpolation im Gegensatz zur Extrapolation instabiles Verhalten bei gleicher Verschiebung der Randbedingung um  $|x_r| = 0.5\Delta x$  zeigt, ist bemerkenswert. Folgender Erklärungsversuch für das instabile Verhalten bei der Interpolation wird angestellt. Verschiebt man die Wandrandbedingung  $\phi_r$  noch weiter als bisher in negativer x-Richtung von  $x_0$  weg, ergibt sich eine Konfiguration wie in Abbildung 4.4. Es ist offensichtlich, dass sich bei ähnlichen Werten der Geschwindigkeiten  $\phi_{1\dots 3}$  auch der interpolierte Wert  $\phi_0$  den übrigen Geschwindigkeiten immer mehr annähert (Vergleiche auch die Werte der Geschwindigkeiten in Abbildung 4.4 mit der gestrichelten waagrechten Linie). Damit nähert man sich an die von Neumann Randbedingung für die Geschwindigkeit an. Von dieser Randbedingung ist aus der Literatur (siehe z.B. Ferziger und Peric [12]) bekannt, dass sie in Simulationen turbulenter Strömungen die Quelle von Instabilitäten sein kann.



**Abbildung 4.4:** Darstellung einer Wandpositionen  $x_r$ , die weit von dem zu interpolierenden Punkt  $\phi_0$  entfernt ist. Die Annäherung des Verlaufs des Interpolationspolynoms an eine Null-Gradienten Randbedingung (waagerechte, strichlierte Linie) ist zu erkennen.

## 4.2 Lineare Stabilitätsuntersuchung in zwei Dimensionen

In vorausgegangenen Abschnitt 4.1 wurde die Stabilität der IB Randbedingung mit Hilfe der linearen eindimensionalen Konvektionsgleichung betrachtet. Damit wird die Stabilität des hyperbolischen Anteils der Navier-Stokes Gleichung betrachtet. Für die IB Methode mit zusätzlicher Flusskorrektur ist die Stabilitätsanalyse basierend auf der eindimensionalen Modellgleichung nicht mehr ausreichend. Der Grund hierfür ist, dass die Flusskorrektur im eindimensionalen Fall nicht betrachtet werden kann. Hier wird aus diesem Grund eine lineare Stabilitätsanalyse in zwei Dimensionen vorgestellt. Sie bildet für einen zweidimensionalen Strömungsfall neben dem konvektiven Anteil der Navier-Stokes Gleichung auch den diffusiven Anteil mit ab. Hierfür wird die Funktion des gesamten Strömungslösers, der in Kapitel 2 vorgestellt wurde, in ein lineares Gleichungssystem überführt. Es ist offensichtlich, dass die Nichtlinearität der Navier-Stokes Gleichung damit nicht abgebildet werden kann. Für die Betrachtung der Stabilität genügt es aber, wie im vorausgegangenen Abschnitt, den linearen Anteil zu betrachten. Die hier vorgestellte Methode bietet den Vorteil, dass Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren für das lineare Gleichungssystem berechnet werden können. Mit Hilfe der Eigenvektoren ist es möglich, z.B. die Eigenformen von instabilen Eigenwerten darzustellen.

Im Folgenden wird zuerst die Bestimmung der Matrix des gesamten Strömungslösers vorgestellt und anschließend die Stabilität der beiden IB Verfahren am Beispiel einer zweidimensionalen Kanalströmung gegenübergestellt. Der Einfluss der IB Flusskorrektur auf die Stabilität wird diskutiert.

### 4.2.1 Bestimmung der Matrix des Simulationsprogramms

Für die Bestimmung der Matrix des Simulationsprogramms wird zuerst das entsprechende Gleichungssystem aufgestellt. Da nur die linearen Anteile des Simulationsprogramms bzw. der Navier-Stokes Gleichung erfasst werden, lässt sich das diskrete Gleichungssystem in Vektor-Matrix Schreibweise nach Morton [40] darstellen:

$$A \vec{\phi}^n + \vec{C} = \vec{\phi}^{n+1}. \quad (4.11)$$

Dabei stellt Matrix  $A$  die linearisierten diskreten Navier-Stokes Gleichungen dar. Die Randbedingungen der numerischen Lösung sind im Vektor  $\vec{C}$  enthalten. In dem Vektor  $\vec{\phi}^n$  bzw.  $\vec{\phi}^{n+1}$  können alle primitiven Variablen enthalten sein. Hier wird exemplarisch Vektor  $\vec{\phi}^n$  ausgeschrieben:

$$\vec{\phi}^n = (u_1^n, u_2^n, \dots, v_1^n, v_2^n, \dots, p_1^n, p_2^n, \dots)^T. \quad (4.12)$$

Dabei sind  $u_1, u_2, \dots$  und  $v_1, v_2, \dots$  die Geschwindigkeiten in x- bzw. y-Richtung. Die Indizes beschreiben hier nicht die Zellindizes in den kartesischen Richtungen, sondern sind von eins bis  $N = (ni \times nj \times 3)$  durchnummerniert. Dabei sind  $ni$  und  $nj$  die Anzahl der Gitterpunkte in x- bzw. y-Richtung. Die gleiche Nummerierung gilt für den Druck. Da der Druck durch die Poisson-Gleichung bestimmt ist, hängt er nur vom Geschwindigkeitsfeld ab und stellt eine Hilfsvariable dar, die auch als Rechenhilfe für die Einhaltung der Massenerhaltung

gesehen werden kann. Er kann aus dem gegebenen Geschwindigkeitsvektor jederzeit rekonstruiert werden. Er ist somit eine abhängige Variable und wird für die Stabilitätsanalyse nicht betrachtet. Damit reduziert sich der Vektor zu:

$$\vec{\phi}^n = (u_1^n, u_2^n, \dots, v_1^n, v_2^n, \dots)^T \quad (4.13)$$

mit  $N = (ni \times nj \times 2)$  für alle Berechnungspunkte und die beiden Geschwindigkeitskomponenten.

**Bestimmung der Simulations-Matrix** Für die Bestimmung der Matrix A des gesamten Strömungslösers stehen zwei Möglichkeiten zur Verfügung. (i) Die Einträge der Matrix werden direkt durch das Einsetzen der diskreten Operatoren, analog zu der Implementierung im Simulationsprogramm, bestimmt. Das bedeutet, dass man den exakten Aufbau des gesamten Strömungslösers nachvollziehen muss. Dieses Vorgehen erfordert hohen Programmieraufwand. Zusätzlich müssen die nichtlinearen Terme in der Navier-Stokes Gleichung linearisiert werden. Eine einfachere Methode, die das Simulationsprogramm als "Black Box" betrachtet, wird im Folgenden vorgestellt. (ii) Sie basiert auf der Idee, dass die Matrix A durch "Abtasten" rekonstruiert werden kann. Das Abtasten wird für einen bestimmten Testfall durchgeführt. Dabei wird Vektor  $\vec{\phi}^n$  mit beliebigen Werten belegt und durch das Simulationsprogramm verändert. Der Strömungslöser vollzieht einen Zeitschritt, der aus  $\vec{\phi}^n$  den Vektor  $\vec{\phi}^{n+1}$  nach Gleichung (4.11) erzeugt. Ist  $\vec{\phi}^n = \vec{0}$ , dann lässt sich sofort der Randbedingungsvektor  $\vec{C}$  mit Gleichung (4.11) bestimmen:

$$A \vec{0} + \vec{C} = \vec{C} = \vec{\phi}^{n+1}. \quad (4.14)$$

Nachdem der Randbedingungsvektor  $\vec{C}$  bestimmt wurde, lässt sich die Matrix A mit Vektoren  $\vec{\phi}^n \neq \vec{0}$  bestimmen. Es reicht allerdings nicht aus nur einen Zeitschritt durchzuführen. Es ist notwendig, das Abtasten zu wiederholen. Für jede Komponente des Vektors  $\vec{\phi}^n$  muss das Abtasten einmal durchgeführt werden. Damit erweitert sich Gleichung (4.11) zu:

$$A [\vec{\phi}^n, \vec{\phi}^{n+1}, \vec{\phi}^{n+2}, \dots] + [\vec{C}, \vec{C}, \vec{C}, \dots] = [\vec{\phi}^{n+1}, \vec{\phi}^{n+2}, \vec{\phi}^{n+3}, \dots] \quad (4.15)$$

und wird vereinfacht geschrieben:

$$AB + C = D \quad (4.16)$$

mit der Matrix B, die sämtliche Eingangsvektoren enthält, und Matrix D, die alle Ausgangsvektoren enthält. Die Matrix C besteht aus  $N$  mal dem Vektor  $\vec{C}$ , der sich als konstanter Randbedingungsvektor über der Zeit nicht ändert. Bisher ist in obiger Gleichung die Matrix

A unbekannt. Durch Umformung erhält man einen Ausdruck für  $A$ :

$$A + CB^{-1} = DB^{-1} \quad (4.17)$$

$$A = DB^{-1} - CB^{-1}. \quad (4.18)$$

Somit kann die Matrix  $A$  durch Abtasten bestimmt werden. Alle Matrizen  $B$ ,  $C$  und  $D$  für die Berechnung von  $A$  sind bekannt. Solange  $B$  nicht singulär ist, kann Gleichung (4.18) gelöst werden. Andernfalls wäre es unmöglich, Matrix  $B$  zu invertieren. Da Matrix  $B$  aus den Eingangsvektoren  $\vec{\phi}^n$  besteht, ist es möglich Einfluss auf die numerischen Eigenschaften der Matrix zu nehmen. Die Eingangsvektoren  $\vec{\phi}^n$  müssen also so gewählt werden, dass sie linear unabhängig sind und Matrix  $B$  nicht singulär wird. Zwei unterschiedliche Vorgehensweisen sind denkbar, um die Eingangsvektoren zu erzeugen. (i) Die Eingangsvektoren werden mit einem Zufallsfeld belegt bzw. (ii) jede Vektorkomponente wird einzeln angeregt. Da sich zeigte, dass beide Vorgehensweisen sehr ähnliche Ergebnisse liefern, wurde im Folgenden Methode (ii) verwendet, da sie deterministisch ist.

**Stabilitätskriterium** Wie schon bei der Stabilitätsanalyse der eindimensionalen Konvektionsgleichung werden hier die Eigenwerte  $\lambda_{i\dots N}$  der Matrix  $A$  betrachtet, um auf die Stabilität zu schließen. Der grundlegende Unterschied ist, dass die zeitliche Diskretisierung mit berücksichtigt wird und bereits in der Matrix enthalten ist. Somit ist die Stabilität auch von dem gewählten Zeitschritt abhängig und das CFL Stabilitätskriterium kann berechnet werden. Weiterhin sind neben den linearisierten konvektiven Termen auch die diffusiven Terme enthalten und die Stabilität der Lösung hängt ebenso von der Viskosität ab. Aufgrund der Form von Gleichung (4.11) ist die Bedingung für stabile Eigenwerte eine andere als für die semidiskrete Stabilitätsanalyse. Im Gegensatz zur semidiskreten Stabilitätsanalyse müssen die Eigenwerte keinen negativen Realteil haben. Sie müssen vielmehr einen Betrag kleiner eins haben (siehe auch Sucec [62]), um für beliebig viele Zeitschritte  $n \rightarrow \infty$  eine stabile Lösung vorherzusagen:

$$|\lambda_i| = R_{Ai} \leq 1. \quad (4.19)$$

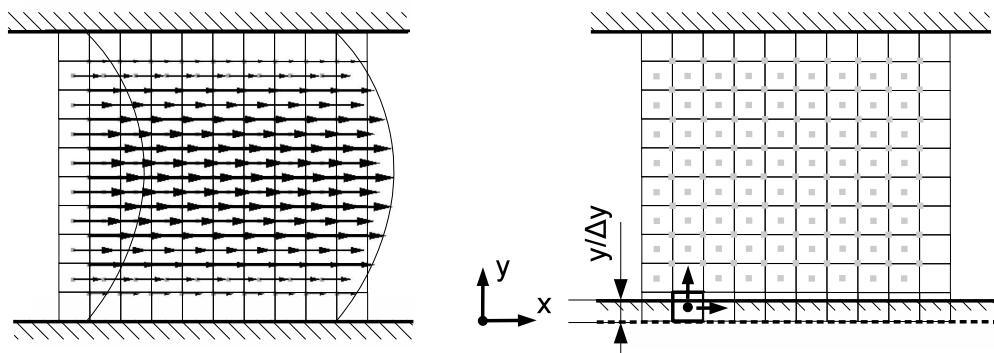
Für Stabilität muss der spektrale Radius  $R_{Ai}$  aller Eigenwerte  $i = 1\dots N$  der Matrix  $A$  kleiner eins sein. Dann ist das System für einen konstanten Zeitschritt  $\Delta t$  stabil. Für die hier betrachtete Stabilitätsanalyse ist die Bedingung für schrittweise Stabilität mit Hilfe des Spektralradius ausreichend.

### 4.2.2 Stabilität im periodischen Kanal (2D)

Im Folgenden wird die Stabilitätsanalyse für einen periodischen zweidimensionalen Kanal angewendet. Die Konfiguration ist in Abbildung 4.5 zu sehen. Gezeigt wird exemplarisch das Geschwindigkeitsprofil für eine laminare Kanalströmung. Die Positionen der Geschwindigkeitsvektoren sind hellgrau markiert. An diesen Punkten werden die Geschwindigkeitsvektoren aus den Geschwindigkeitskomponenten  $u$  und  $v$  zusammengesetzt. Die Konfigurationen aus der eindimensionalen Stabilitätsanalyse (Abschnitt 4.1) ist der Konfiguration Kanalströmung in einer Eigenschaft ähnlich. Es kann ebenfalls die Position der unteren Wand verschoben werden. Hier werden die unterschiedlichen IB Randbedingung verwendet. Der große Unterschied zu der eindimensionalen Stabilitätsanalyse ist, dass im zweidimensionalen Fall für beide Geschwindigkeitskomponenten  $u$  und  $v$  die IB Interpolation berechnet wird. Aufgrund der Lage der Geschwindigkeitskomponenten im versetzten Gitter ist der Abstand der Geschwindigkeitskomponenten von der Wand unterschiedlich. Für die Lage der Wand in Abbildung 4.5 ergibt sich für die  $u$  Geschwindigkeitskomponente eine Extrapolation und für die  $v$  Komponente eine Interpolation. Im Folgenden wird für die unterschiedlichen Positionen  $y/\Delta y$  der Wand zwischen Interpolation und Extrapolation für die beiden Geschwindigkeitskomponenten unterschieden. An der oberen Kanalwand gilt die Haftbedingung aus dem Simulationsprogramm.

**Testfall Setup** Die zweidimensionale Testfall-Konfiguration, die in Abbildung 4.5 gezeigt wird, besteht aus  $ni \times nj = 10 \times 10 = 100$  Berechnungszellen. Hier wird exemplarisch das Profil einer laminaren Kanalströmung gezeigt. Die Randbedingungen für den Testfall sind die Haftbedingung an der oberen und unteren Wand sowie periodische Randbedingungen in  $x$ -Richtung. Die Länge und Breite betragen eine Kanalhöhe  $h$ . Damit ergeben sich die Gitterweiten  $\Delta x = 0.1h$  und  $\Delta y = 0.1h$ . Für die Stabilitätsuntersuchungen wird das Strömungsfeld mit Null initialisiert. Für das anschließende Abtasten der Matrix wird also keine Hintergrundströmung aufgeprägt.

**Abtasten der Simulationsmatrix** Aus Abbildung 4.5 ist ebenfalls die versetzte Anordnung der Variablen zu erkennen. Die beiden versetzt angeordneten Geschwindigkeitskomponenten



**Abbildung 4.5:** Testfall periodischer Kanal mit variabler unterer Wand. Links ist exemplarisch ein laminares Strömungsfeld zu sehen. Rechts wird die Position der verschiebbaren Wand mit zwei Geschwindigkeitskomponenten exemplarisch gezeigt.

$u$  und  $v$  werden für die Stabilitätsanalyse zum Vektor  $\vec{\phi}^n$  aus Gleichung (4.13) zusammengezetzt. Aufgrund der Anzahl der Gitterpunkte  $ni \times nj$  ergeben sich für den Vektor  $\vec{\phi}^n$  200 Einträge. Wie bei der Herleitung der Stabilitätsanalyse beschrieben, wird hier der Druck nicht berücksichtigt, da er nur eine Hilfsvariable darstellt. Für die Matrix A aus Gleichung (4.11) des linearen Gleichungssystems ergeben sich also 40000 Einträge. Es ist offensichtlich, dass bereits für einen kleinen Testfall der numerische Aufwand für die Invertierung der Matrix B (Gleichung (4.18)) erheblich ist. Dadurch wird die Anwendbarkeit der Stabilitätsanalyse auf kleine Testfälle beschränkt.

Das Abtasten der Simulationsmatrix besteht darin jede Geschwindigkeitskomponente des Vektors  $\vec{\phi}^n$  einzeln anzuregen. Die Anregung erfolgt im Folgenden mit der Einheitsamplitude  $T_A = 1$ . Die Amplitude ist frei wählbar und willkürlich auf  $T_A = 1$  gesetzt. Dabei erhält man durch Anwendung des Simulationsprogramms den Vektor  $\vec{\phi}^{n+1}$  zum neuen Zeitschritt. Wiederholt man das Abtasten für jede der  $ni \times nj$  Vektorkomponenten kann die Matrix des Simulationsprogramms mit Hilfe von Gleichung (4.15) berechnet werden. Der Randbedingungsvektor  $\vec{C}$  wird dabei durch einmaliges Einsetzen von  $\vec{\phi}^n = \vec{0}$  nach Gleichung (4.14) bestimmt.

**Kennzahlen** Da keine Hintergrundströmung für die Stabilitätsuntersuchung existiert, ist es schwierig, eine Reynoldszahl basierend auf einer globalen Größe (z.B. der Kanalhöhe) zu definieren. Hier wird deshalb eine Zell-Reynoldszahl gebildet, die für eine Berechnungszelle repräsentativ ist. Dazu wird die Abtastamplitude zur Berechnung herangezogen. Mit der Amplitude  $T_A$  für die charakteristische Geschwindigkeit und der Zellbreite  $\Delta x$  wird die Zell-Reynoldszahl für eine Berechnungszelle definiert:

$$Re_Z = \frac{T_A \Delta x}{\nu} = 20. \quad (4.20)$$

Die Diffusionskennzahl ergibt sich zu:

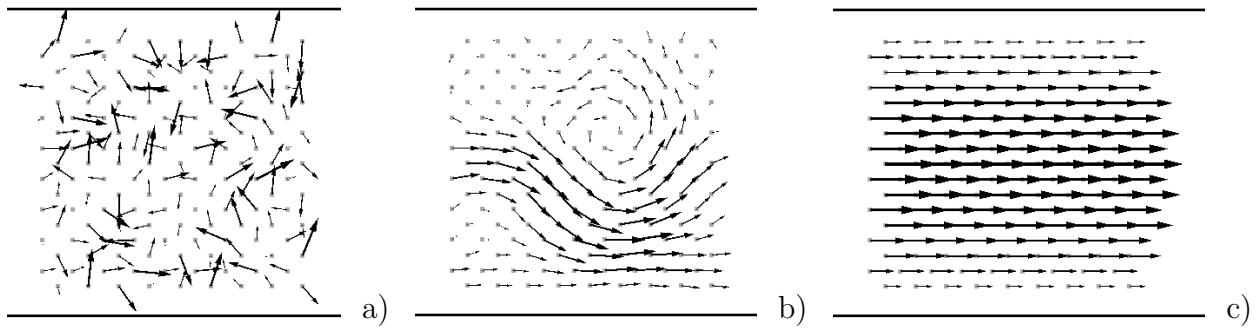
$$DIFF = \frac{\nu \Delta t}{\Delta x^2} = 0.1. \quad (4.21)$$

Die CFL Zahl ergibt sich zu:

$$CFL = \frac{T_A \Delta t}{\Delta x} = 2. \quad (4.22)$$

**Matrix als Simulationsprogramm** Nach dem Abtasten der Matrix A wird diese für die Stabilitätsanalyse herangezogen. Neben der Stabilitätsanalyse kann das lineare Gleichungssystem (Gleichung (4.11)) mit der Matrix A auch als Simulationsprogramm verwendet werden, um den Geschwindigkeitsvektor  $\vec{\phi}^n$  in der Zeit zu integrieren. Damit ist gleichzeitig eine Kontrollmöglichkeit gegeben, um die Bestimmung der Matrix A zu überprüfen. Für die Konfiguration der Kanalströmung (Abbildung 4.5) ohne IB Randbedingung wurde die Zeitintegration getestet. Hierfür wurde mit den oben genannten Parametern durch Abtasten die Matrix A bestimmt. Für den Test der Matrix A wurde folgende Vorgehensweise

gewählt. Zuerst wurde der Geschwindigkeitsvektor  $\vec{\phi}^n$  mit einem randomen, divergenzbehafteten, Geschwindigkeitsfeld beaufschlagt. Abbildung 4.6 (a) zeigt das randome Geschwindigkeitsfeld. Anschließend wurde die Zeitintegration nach Gleichung (4.11) vollzogen, um zu dem neuen Zeitschritt  $\vec{\phi}^{n+1}$  zu gelangen. Dieses Verfahren wurde für mehrere Zeitschritte wiederholt. Folgende Beobachtungen können festgehalten werden. (i) Bereits nach dem ersten Zeitschritt ist das Geschwindigkeitsfeld divergenzfrei. Alle divergenzbehaftete Moden werden vollständig gedämpft. Damit ist der Mechanismus der Druckkorrektur in der Matrix A abgebildet und es ist bestätigt, dass der Druck nur eine Hilfsvariable darstellt. (ii) Für unendlich viele Zeitschritte wird das randome Geschwindigkeitsfeld vollständig gedämpft. Das entspricht dem Verhalten des gesamten Strömungslösers. Es wird dabei angemerkt, dass nach einer Anfangsphase (siehe z.B. Abbildung 4.6 (b)) die Strömung die Form einer laminaren Kanalströmung (siehe z.B. Abbildung 4.6 (c)) annimmt und nur weiter gedämpft wird. Diese Form der Strömung entspricht gleichzeitig dem ersten rein reellen Eigenwert.



**Abbildung 4.6:** Test der Matrix  $A$  als Simulationsprogramm. Randome Anfangsbelegung (a) Entwicklung nach 10 Zeitschritten (b) und Endergebnis (c) nach 1000 Zeitschritten. Feld (c) ist sehr stark skaliert, da es fast identisch Null ist.

### Stabilitätsaussagen

Ziel der vorgestellten Stabilitätsuntersuchungen ist es, den Einfluss der IB Flusskorrektur auf die Stabilität zu betrachten. Dabei wird kein absolutes Kriterium für die Stabilität in Abhängigkeit der CFL Zahl bzw. der Diffusionskennzahl entwickelt. Vielmehr wird eine Konfiguration mit der zuvor vorgestellten Reynoldszahl, CFL-Zahl und Diffusionskennzahl für die unterschiedlichen IB Verfahren betrachtet. Wie schon bei der eindimensionalen Stabilitätsanalyse wird gezeigt, ob für die gewählte Konfiguration eine der IB Verfahren bzw. Randinterpolationen einen Vorteil in Hinsicht auf Stabilität ergibt. Im Besonderen wird dabei die Flusskorrektur betrachtet, die bei der eindimensionalen Stabilitätsanalyse nicht untersucht werden konnte.

**Vergleich mit eindimensionaler Stabilitätsanalyse** Ein Vergleich mit den Ergebnissen aus der eindimensionalen Stabilitätsanalyse ist nur qualitativ möglich. Im Gegensatz zu dem eindimensionalen Fall werden hier immer beide Geschwindigkeitskomponenten  $u$  und  $v$  mit der IB Randinterpolation bestimmt (siehe Abbildung 4.5). Aufgrund der versetzten Anordnung der beiden Geschwindigkeitskomponenten im kartesischen Gitter liegt die Wand immer

unterschiedlich weit von den beiden Komponenten entfernt. Damit kann eine Konfiguration von zu interpolierenden Geschwindigkeitswert  $\phi_0$  und Wand-Randbedingung  $\phi_r$  immer nur für eine Komponente erreicht werden. Es werden aber analog zur eindimensionalen Stabilitätsanalyse Extrapolation und Interpolation unterschieden.

**Kontrolle der Stabilitätsaussagen** Ein Vorteil der hier vorgestellten Stabilitätsanalyse ist, dass die Ergebnisse sofort überprüft werden können. Eigenwerte der Matrix A mit spektralen Radien größer als eins führen zu divergierenden Lösungen. Ergibt sich also ein Spektralradius größer als eins bei der Analyse von Matrix A, kann mit Hilfe der Simulation überprüft werden, ob diese divergiert. Zusätzlich muss bei einem instabilen Eigenwert auch die Simulation mit dem linearen Gleichungssystem divergieren. Für alle hier vorgestellten Ergebnisse wurden sowohl die Simulation mit dem gesamten Strömungslöser als auch mit dem linearen Gleichungssystem überprüft. Für die Überprüfung der Simulation wurde die Anregung mit der Abtastamplitude durchgeführt, ohne das Strömungsfeld nach einem Zeitschritt wieder mit Null zu initialisieren. Die Reinitialisierung ist nur bei der Abtastung notwendig, um jeweils einen Geschwindigkeitswert anzuregen. Ein weiterer Vorteil der Stabilitätsanalyse ist die Möglichkeit, Eigenformen der Strömung zu betrachten. Dabei kann z.B. die Eigenform eines instabilen Eigenwerts Aufschluss über das Problem geben.

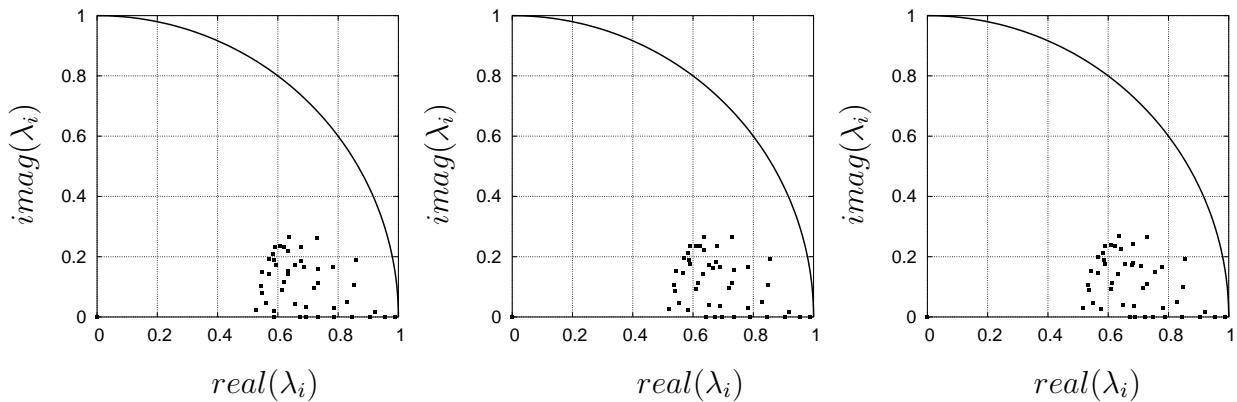
### Stabilitätsaussagen für die Kanalströmung bei $Re_Z = 20$

Im Folgenden werden die Konfigurationen des zweidimensionalen Testfalls bei der Zell-Reynoldszahl  $Re_Z = 20$  betrachtet. Die Wand-Randbedingung wird zwischen  $y/\Delta y = 0.9$ ,  $y/\Delta y = 0.5$  und  $y/\Delta y = 0.1$  variiert. Siehe dazu Abbildung 4.5. Wie bei der eindimensionalen Stabilitätsanalyse werden wieder mehrere Interpolationsverfahren gegenübergestellt. Hier werden Lagrange Interpolation dritter und vierter Ordnung sowie die Interpolation nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate (dritte Ordnung) betrachtet.

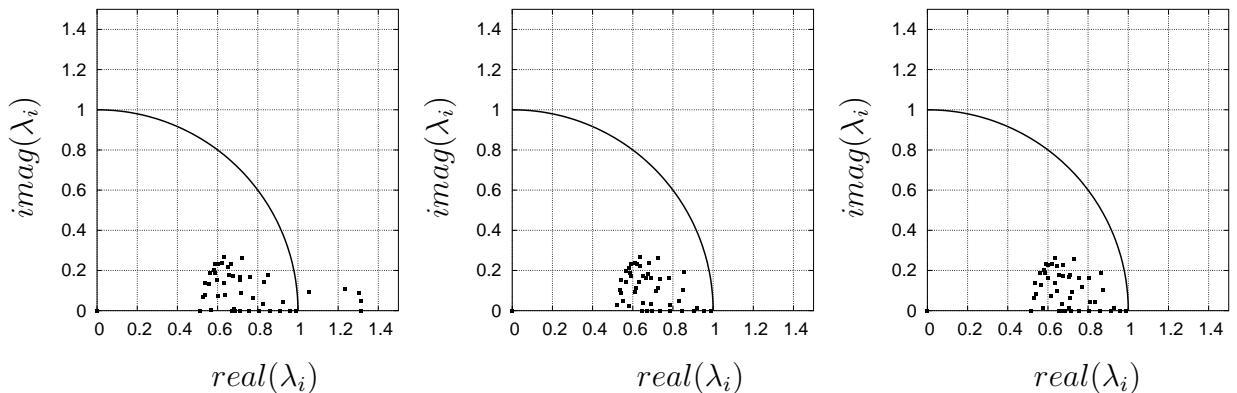
**Kanalströmung mit IB Wand bei  $y/\Delta y = 0.9$**  Für die Wandposition  $y/\Delta y = 0.9$  wird die Geschwindigkeitskomponente u extrapoliert und die v Komponente interpoliert, vergleiche dazu auch Abbildung 4.5.

In Abbildung 4.7 werden die Eigenwerte für drei unterschiedliche Interpolationsverfahren gezeigt: Lagrange Interpolation vierter und dritter Ordnung sowie Interpolation mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate (auch dritter Ordnung). Die Graphen zeigen, dass sich die Eigenwerte der Interpolationsmethoden kaum unterscheiden und alle einen spektralen Radius  $R_A \leq 1$  besitzen. Damit sind alle verwendeten Interpolationsverfahren für diese Konfiguration stabil. Das IB Verfahren mit Flusskorrektur wird hier nicht explizit gezeigt, aber ist ebenfalls stabil. Es wird erwähnt, dass für alle Interpolationen die erste Eigenform eine Kanalströmung wie in Abbildung 4.6 ist.

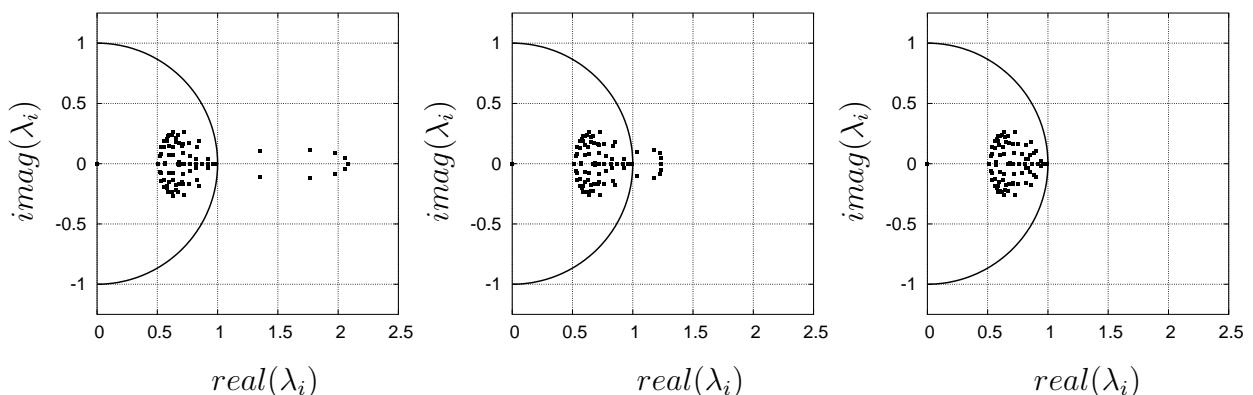
**Kanalströmung mit IB Wand bei  $y/\Delta y = 0.5$**  Für die Wandposition  $y/\Delta y = 0.5$  wird die Geschwindigkeitskomponente v interpoliert. Die Geschwindigkeitskomponente u liegt auf der Wand und keine Interpolation/Extrapolation ist notwendig, vergleiche dazu auch Abbildung 4.5.



**Abbildung 4.7:** Eigenwerte für Wandposition  $y/\Delta y = 0,9$ . Von links nach rechts: Lagrange Int. 4ter Ordnung, Lagrange Int. 3ter Ordnung und Int. mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate (3ter Ordnung). Alle Eigenwerte konj. komplex und in der rechten Halbebene.



**Abbildung 4.8:** Eigenwerte für Wandposition  $y/\Delta y = 0,5$ . Von links nach rechts: Lagrange Int. 4ter Ordnung, Lagrange Int. 3ter Ordnung und Int. mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate (3ter Ordnung). Alle Eigenwerte konj. komplex und in der rechten Halbebene.



**Abbildung 4.9:** Eigenwerte für Wandposition  $y/\Delta y = 0,1$ . Von links nach rechts: Lagrange Int. 4ter Ordnung, Lagrange Int. 3ter Ordnung und Int. mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate (3ter Ordnung). Alle Eigenwerte konj. komplex und in der rechten Halbebene.

Für die u Komponente ist die Konfiguration mit der Position  $x_r/\Delta x = -0.5$  aus der Stabilitätsanalyse in Abschnitt 4.1 vergleichbar, da für die v Komponente der Geschwindigkeit keine IB Interpolation notwendig ist. Abbildung 4.8 zeigt die Eigenwerte für die Lagrange Interpolation vierter und dritter Ordnung als auch für die Interpolation mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate. Es ist zu erkennen, dass die Lagrange Interpolation vierter Ordnung Eigenwerte mit Spektralradien  $R_A \geq 1$  zeigt und damit instabiles Verhalten zu erwarten ist. Die Spektralradien der Lagrange Interpolation dritter Ordnung und die Interpolation mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate sind kleiner eins. Ebenfalls für das IB Verfahren mit Flusskorrektur liegen die Eigenwerte innerhalb des Einheitsradius.

**Kanalströmung mit IB Wand bei  $y/\Delta y = 0.1$**  Für die Wandposition  $y/\Delta y = 0.1$  wird die Geschwindigkeitskomponente u und v interpoliert. Vergleiche dazu auch Abbildung 4.5. In Abbildung 4.9 werden die Eigenwerte der Matrix A für diese Konfiguration gezeigt. Für die hier gezeigte Konfiguration ist die Lagrange Interpolation dritter und vierter Ordnung instabil. Aber die Interpolation nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate ist weiterhin stabil, obwohl sie wie die Lagrange Interpolation ebenfalls dritter Ordnung ist. Auch das IB Verfahren mit Flusskorrektur ist für diese Konfiguration stabil.

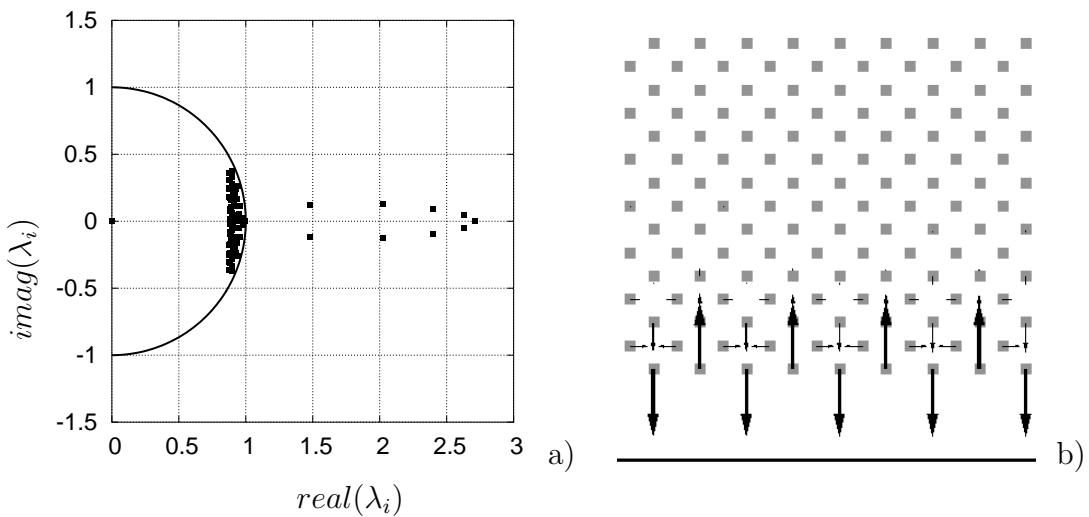
### Stabilitätsaussagen für die Kanalströmung bei $Re_Z = 100$

In den bisherigen Tests wurden nur bei den Interpolationen höherer Ordnung Instabilitäten beobachtet. Für die lineare Lagrange Interpolation bei der IB Methode mit Punktewerten als auch bei der konservativen IB Methode waren alle Konfigurationen stabil. Aus diesem Grund wird im Folgenden die Reynoldszahl auf  $Re_Z = 100$  erhöht. Folglich erhöht sich auch die Diffusionskennzahl auf  $DIFF = 0.5$ . Damit wird der Effekt der viskosen Dämpfung reduziert und instabile Konfigurationen sind eher zu erwarten.

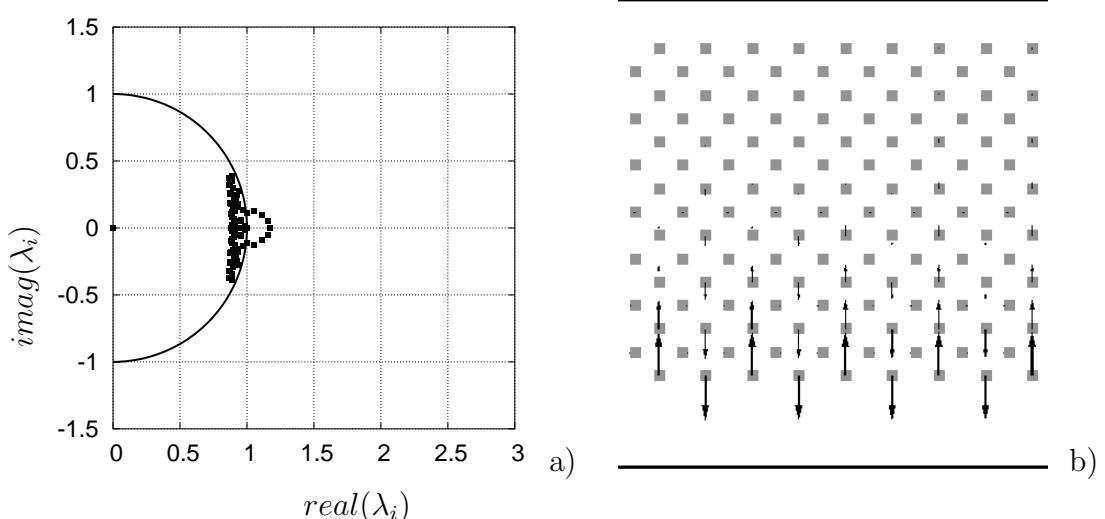
Für alle hier betrachteten Konfigurationen wird die IB Wand bei  $y/\Delta y = 0.1$  belassen. Es werden Lagrange Interpolation vierter Ordnung, Interpolation mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate sowie lineare Interpolation betrachtet. Für die lineare Interpolation werden jetzt sowohl die IB Methode mit Punktewerten als auch die konservative IB Methode gegenübergestellt. Dabei wird auf die Eigenwerte und Eigenformen eingegangen.

**Lagrange Interpolation vierter Ordnung** Abbildung 4.10 zeigt die Eigenwerte und die erste rein reelle Eigenform für diese Interpolation. Wie schon aus dem vorhergehendem Abschnitt bekannt ist diese Konfiguration instabil. Das gleiche Verhalten war bei der niedrigeren Viskosität zu erwarten. Es ist zu erkennen, dass die Spektralradien der Eigenwerte größer sind als bei der gleichen Konfiguration und  $Re_Z = 20$ . (Abbildung 4.9).

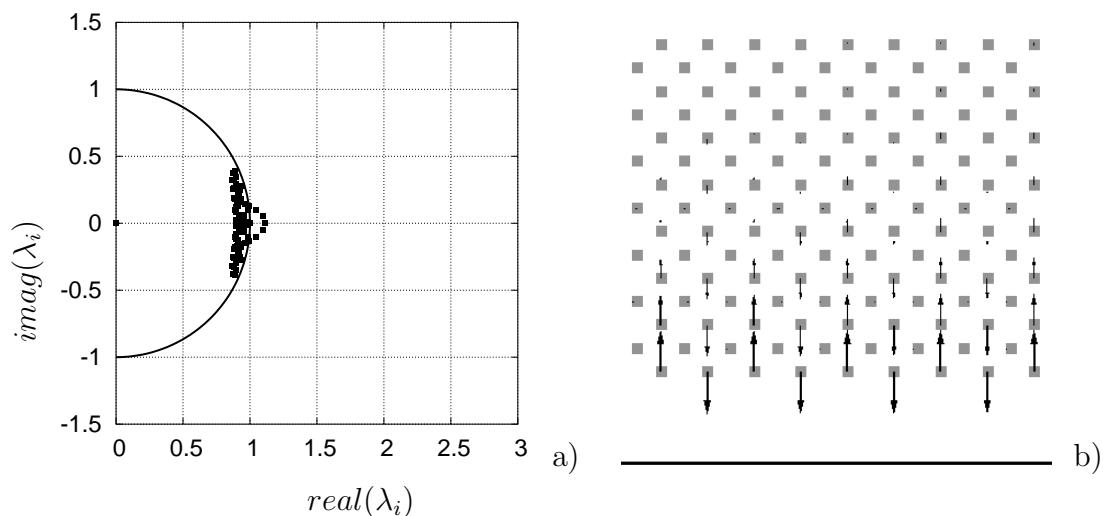
Interessant ist die Betrachtung der Eigenform des Eigenwerts mit dem größten Spektralradius. Diese rein reelle Eigenform wird in Abbildung 4.10 (b) gezeigt. Sie zeigt eine Strömung, bei der ein Massenfluss über die IB Wand stattfindet. Sie unterscheidet sich dadurch von dem Eigenwert (mit dem größten Spektralradius) bei der stabilen Konfiguration ohne IB Wand (siehe Abbildung 4.6). Die Eigenform entspricht nicht dem erwarteten Strömungsverhalten nahe der Wand, da die Geschwindigkeiten nicht gegen Null gehen.



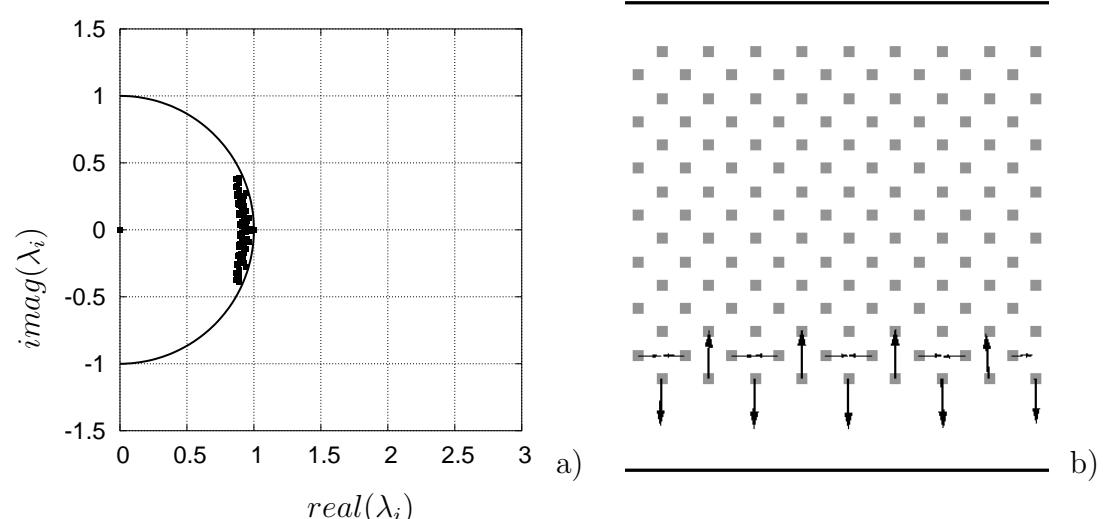
**Abbildung 4.10:** IB Methode mit Lagrange Interpolation (4ter Ordnung) ohne Flusskorrektur: Instabile Eigenwerte (a) und erste rein reelle (instabile) Eigenform (b).



**Abbildung 4.11:** IB Methode mit Interpolation nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate (3ter Ordnung) ohne Flusskorrektur: Instabile Eigenwerte (a) und erste rein reelle (instabile) Eigenform (b).



**Abbildung 4.12:** IB Methode mit linearer Lagrange Interpolation (2ter Ordnung) ohne Flusskorrektur: Instabile Eigenwerte (a) und erste rein reelle (instabile) Eigenform (b).



**Abbildung 4.13:** IB Methode mit linearer Interpolation (2ter Ordnung) und Flusskorrektur: Stabile Eigenwerte und erste rein reelle (gedämpfte) Eigenform (b).

Folgender Erklärungsversuch wird angestellt. Das Verhalten ähnelt den Beobachtungen aus Abschnitt 4.1.2 für die eindimensionale Stabilitätsanalyse. Dort wurde vermutet, dass bei der Interpolation eine von Neumann Randbedingung angenähert wird, wenn die Wand weit von dem zu interpolierenden Geschwindigkeitswert entfernt ist. Diese Vermutung wird hier durch die Eigenform bestätigt, da sie Ein- und Ausströmen wie bei einer von Neumann Randbedingung zeigt. Zusätzlich wird angemerkt, dass aufgrund der Divergenzfreiheit im Strömungsfeld nur kombiniertes Ein- und Ausströmen wie in Abbildung 4.10 (b) möglich ist.

**Interpolation mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate** Für die Interpolation mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate ist jetzt bei dieser Konfiguration ebenfalls ein spektraler Radius größer eins zu beobachten. Bei der gleichen Konfiguration aus dem vorausgegangenen Abschnitt wurde bei der Reynoldszahl  $Re_Z = 20$  noch kein instabiles Verhalten für diese Interpolation beobachtet. Abbildung 4.11 zeigt die Eigenwerte und die erste rein reelle Eigenform für diese Interpolation. Die Eigenwerte verhalten sich analog zu der Lagrange Interpolation vierter Ordnung und auch die Eigenform zeigt die gleiche Strömungstopologie.

**Lineare Lagrange Interpolation** Abbildung 4.12 (a) und (b) zeigt die Eigenwerte und Eigenformen für die lineare Lagrange Interpolation. Für diesen Fall besitzt auch diese Interpolation Eigenwerte mit einem Spektralradius größer eins. Wieder zeigen sich ähnliche Eigenwerte wie für die Lagrange Interpolation vierter Ordnung und die Interpolation mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate. Auch die Eigenform zeigt wieder die gleiche Strömungstopologie.

**Lineare Lagrange Interpolation mit Flusskorrektur** Abbildung 4.13 (a) zeigt die Eigenwerte für die lineare Lagrange Interpolation mit der konservativen IB Methode. Es ist zu erkennen, dass keine Eigenwerte mit einem Spektralradius größer eins auftreten. Damit ist die hier betrachtete Konfiguration für die IB Methode mit Flusskorrektur stabil. Die Verteilung der Eigenwerte mit einem Spektralradius kleiner eins ist vergleichbar mit den Eigenwerten der zuvor betrachteten Interpolationen mit der IB Methode mit Punktewerten. Es wird hier nochmal darauf hingewiesen, dass das stabile bzw. instabile Verhalten bei der IB Methode mit bzw. ohne Flusskorrektur auch in der Simulation bestätigt werden konnte.

Weiteren Aufschluss über den Grund für die Stabilität der konservativen Methode soll wieder die Betrachtung der Eigenformen geben. Hier wird im Gegensatz zu den bisher gezeigten Eigenformen nicht die Eigenform gezeigt, dessen Spektralradius am größten ist. Es wird der erste Eigenwert ausgewählt, dessen Spektralradius nahe Null liegt und eine rein reelle Eigenform besitzt. Das entspricht der ersten divergenzfreien Eigenform, die wegen des kleinen Spektralradius vollständig gedämpft wird. Die entsprechende Eigenform wird in Abbildung 4.13 (b) gezeigt. Es ist deutlich zu erkennen, dass er die gleiche Strömungstopologie wie die zuvor betrachteten rein reellen Eigenformen bei der IB Methode mit Punktewerten besitzt, vergleiche hierzu z.B. Abbildung 4.12 (b) für die lineare Lagrange Interpolation mit der IB Methode mit Punktewerten. Der Unterschied ist, dass diese Eigenform bei der konservativen IB Methode nicht erlaubt ist. Aufgrund der Flusskorrektur ist ein Ein- bzw. Ausströmrund

nicht möglich. Damit ist der Spektralradius für diese Eigenform Null und führt zu einer sofortigen Dämpfung der instabilen Eigenform.

## 4.3 Erkenntnisse aus der Stabilitätsuntersuchung

In den vorausgegangenen Abschnitten wurden Stabilitätsuntersuchungen für die IB Methode mit Punktwerten sowie für die IB Methode mit Flusskorrektur durchgeführt. Hierfür wurde die Stabilität anhand der eindimensionalen Konvektionsgleichung und einer zweidimensionalen Stabilitätsuntersuchung analysiert. Zuerst wird die eindimensionale Stabilitätsuntersuchung zusammengefasst.

**Eindimensionale Stabilitätsuntersuchung** Die eindimensionale Stabilitätsuntersuchung wurde für die IB Methode mit Punktwerten durchgeführt. Dabei wurden unterschiedliche Interpolationsverfahren getestet und die Fälle Interpolation sowie Extrapolation betrachtet. Die folgenden Beobachtungen wurden gemacht. Instabile Konfigurationen wurden nur für die Interpolation beobachtet. Je weiter die Wand von der zu interpolierenden Zelle entfernt war, umso eher wurde eine instabile Konfiguration erreicht. Dabei unterscheiden sich die Interpolationsarten. Für die Lagrange Interpolation vierter Ordnung wird zuerst eine instabile Konfiguration erreicht, dann folgt die Lagrange Interpolation dritter Ordnung und anschließend die lineare Lagrange Interpolation. Eine Konfiguration mit der Interpolation der kleinsten Fehlerquadrate (zweite Ordnung) zeigte sich als vergleichbar mit der linearen Lagrange Interpolation. Damit ist es mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate möglich, stabile Interpolationen höherer Ordnung zu konstruieren.

**Zweidimensionale Stabilitätsuntersuchung** Die zweidimensionale Stabilitätsuntersuchung wurde für beide IB Verfahren untersucht. Dabei wurden wie bei der eindimensionalen Stabilitätsuntersuchung unterschiedliche Interpolationsverfahren getestet und zwischen Interpolation sowie Extrapolation unterschieden. Zusätzlich wurde hier die IB Methode mit Flusskorrektur berücksichtigt. Für die unterschiedlichen Interpolationsarten der IB Methode mit Punktwerten ergeben sich folgende Erkenntnisse. Je weiter die Wand bei der Interpolation von den zu interpolierenden Geschwindigkeitskomponenten entfernt ist, desto eher wird eine instabile Konfiguration erreicht. Dabei gibt es aufgrund der versetzten Anordnung der Geschwindigkeitskomponenten Konfigurationen, bei denen Interpolation für die  $v$  Geschwindigkeitskomponente und Extrapolation für die  $u$  Komponente auftritt (Abbildung 4.5). Es wurde gezeigt, dass bei den Konfigurationen mit ausschließlich Interpolation eher instabiles Verhalten auftritt als für eine Konfiguration mit Interpolation und Extrapolation. Weiterhin wurde gezeigt, dass es Konfigurationen gibt, bei denen die Lagrange Interpolation dritter Ordnung instabil und die Interpolation mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate (auch dritter Ordnung) noch stabil ist. Diese Beobachtungen stimmen qualitativ mit den Ergebnissen aus der eindimensionalen Stabilitätsanalyse überein.

Im Gegensatz zur eindimensionalen Stabilitätsuntersuchung wurde hier zusätzlich eine Konfiguration provoziert, die auch für die lineare Lagrange Interpolation bei der IB Methode mit Punktwerten instabil ist. Diese Konfiguration wurde bei der eindimensionalen Analyse nicht erreicht, da der Wandabstand geringer war und das numerische Zeitschrittverfahren nicht berücksichtigt wurde. Für diese Konfiguration zeigte die instabile Eigenform Ein- bzw. Ausströmen über den IB Rand. Wie schon bei der eindimensionalen Analyse vermutet, wird bei der Interpolation durch einen großen Abstand von Wand und zu interpolierender Geschwindigkeit eine von Neumann Randbedingung angenähert. Diese Eigenform ist bei der IB Methode mit Flusskorrektur nicht möglich, da kein Fluss über die Wand erlaubt ist. Es

konnte gezeigt werden, dass bei der konservativen IB Methode die entsprechende Eigenform zwar ebenfalls vorhanden ist, aber vollständig gedämpft wird. Es wird angemerkt, dass die konservative IB Methode ebenfalls lineare Lagrange Interpolation verwendet. Damit wurde gezeigt, dass die Massenerhaltung am IB Rand einen Einfluss auf die Stabilität des numerischen Schemas hat.

**Eindimensionale vs. zweidimensionale Stabilitätsuntersuchung** Bei der eindimensionalen Stabilitätsanalyse ist es einfacher, ein absolutes Kriterium zu entwickeln, ab wann instabiles Verhalten zu erwarten ist. Damit kann z.B. der maximale Wandabstand ermittelt werden, ab dem eine gewählte Interpolationsart eine instabile Simulation provoziert. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Annahme nach Gottlieb et al. [18] gilt und die Stabilität der skalaren Gleichung auch die Stabilität des ganzen Gleichungssystems nach sich zieht. Die Stabilitätseigenschaften des Zeitschrittverfahrens bleiben damit unberücksichtigt.

Bei der zweidimensionalen Stabilitätsanalyse wird sowohl die numerische Diskretisierung im Raum als auch das Zeitschrittverfahren berücksichtigt. Damit ist es möglich, für eine gewählte Konfiguration die Stabilität zu analysieren. Es ist aber schwierig, absolute Aussagen über die Stabilität einer Konfiguration zu generieren. Der Vorteil dieser Stabilitätsanalyse liegt viel mehr darin, dass unterschiedliche Interpolationsverfahren an einem realen Fall miteinander verglichen werden können. Denkbar sind hier ebenfalls dreidimensionale Konfigurationen. Dabei erhält man für den praktischen Anwendungsfall die Topologie der instabilen Eigenform. Das kann Aufschluss über das vorhandene Stabilitätsproblem geben wie es zuvor für die Massenerhaltung gezeigt wurde. Ein weiterer Vorteil der zweidimensionalen Stabilitätsanalyse liegt in der einfachen Anwendung. Prinzipiell kann die Stabilitätsanalyse für jedes beliebige Simulationsprogramm angewendet werden, da dieses selbst als “Black box” betrachtet wird.



# 5 Zweidimensional Testfälle

Im Folgenden werden die IB Methode mit Punktwerten und die IB Methode mit Flusskorrektur anhand unterschiedlicher Testfälle verglichen. In diesem Kapitel werden zweidimensionale Testfälle vorgestellt und im anschließenden Kapitel dreidimensionale Testfälle turbulenter, komplexer Strömungen diskutiert. Für die Untersuchungen an zweidimensionalen Testfällen wurden drei Konfigurationen gewählt, um die Konvergenz in Raum und Zeit sowie die Massenerhaltung am IB Rand zu beurteilen. Die Konvergenzordnung im Raum wird anhand der Taylor-Couette Strömung betrachtet und die Konvergenzordnung in der Zeit mit einer beschleunigten laminaren Kanalströmung. Für die Massenerhaltung am IB Rand wird eine instationäre Kanalströmung mit Hindernis betrachtet.

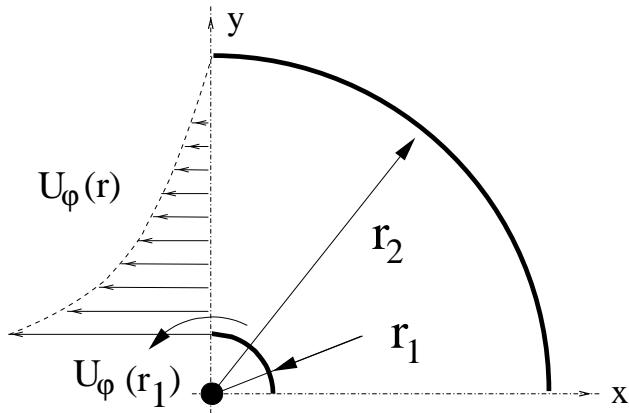
## 5.1 Räumliche Genauigkeit am Beispiel der Taylor-Couette Strömung

Der Einfluss der unterschiedlichen IB Randbehandlungen auf die numerische Genauigkeit der Strömungsberechnung wird untersucht. Hierfür wird die laminare Taylor-Couette Strömung betrachtet. Die Zylinder werden im kartesischen Gitter durch die Immersed Boundary Methode repräsentiert und die numerische Lösung wird mit der analytischen Lösung verglichen. Es werden die Lagrange Interpolation zweiter und vierter Ordnung sowie die Interpolation mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate (dritter Ordnung) verglichen. Zusätzlich wird die IB Methode mit Flusskorrektur betrachtet. Es wird am Rande erwähnt, dass für die Lagrange Interpolation dritter und vierter Ordnung die Stabilitätsuntersuchung instabiles Verhalten vorhersagt. Das ist aber im Fall einer laminaren, gleichförmigen Strömung nicht zu erwarten. Die Instabilität wie schon bei Tremblay et al. [70, 69] beobachtet ist gitterabhängig und muss nicht bei allen Fällen auftreten.

### 5.1.1 Testfall Setup

Die zylindrische Taylor-Couette Strömung entsteht zwischen einem inneren und äußeren Zylinder, die mit unterschiedlicher Rotationsgeschwindigkeit drehen. Eine Draufsicht ist in Abbildung 5.1 zu sehen. Für die numerische Berechnung wird der äußere Zylinder festgehalten während der innere Zylinder mit konstanter Winkelgeschwindigkeit dreht. Der Radius des äußeren Zylinders ist 6 mal größer als der des inneren Zylinders. Die Reynoldszahl wird mit der Winkelgeschwindigkeit und dem Radius des inneren Zylinders gebildet und beträgt  $Re = 30$ . Die Simulation ist zweidimensional und es können keine dreidimensionalen Taylor-Wirbel entstehen. Dadurch bleibt die Strömung laminar und eine analytische Lösung kann abgeleitet werden.

In zylindrischen Koordinaten ist die Strömung eindimensional und wird durch die azimutale Geschwindigkeit  $u_\varphi$  und die Druckverteilung  $p$  vollständig beschrieben. Beide Variablen hän-



**Abbildung 5.1:** Draufsicht auf die zylindrische Taylor-Couette Strömung. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird nur ein Viertel des Zylinders gezeigt. Der äußere Zylinder ist starr, während der innere Zylinder mit  $U_\phi$  rotiert.

gen nur von  $r$  ab.  $u_\phi$  erfüllt die Haftbedingung am inneren und äußeren Zylinder. Die eindimensionale analytische Lösung ergibt sich zu (siehe auch [72]):

$$u_\phi(r) = \frac{A}{r} + Br \quad (5.1)$$

$$\frac{p(r)}{\rho} = \frac{-A^2}{2} \frac{1}{r^2} + 2AB \ln(r) + \frac{B^2}{2} r^2 + D \quad (5.2)$$

mit:

$$A = \frac{-U_\phi(r_1) \cdot r_1 r_2^2}{(r_1^2 - r_2^2)}, \quad B = \frac{U_\phi(r_1) \cdot r_1}{(r_1^2 - r_2^2)}. \quad (5.3)$$

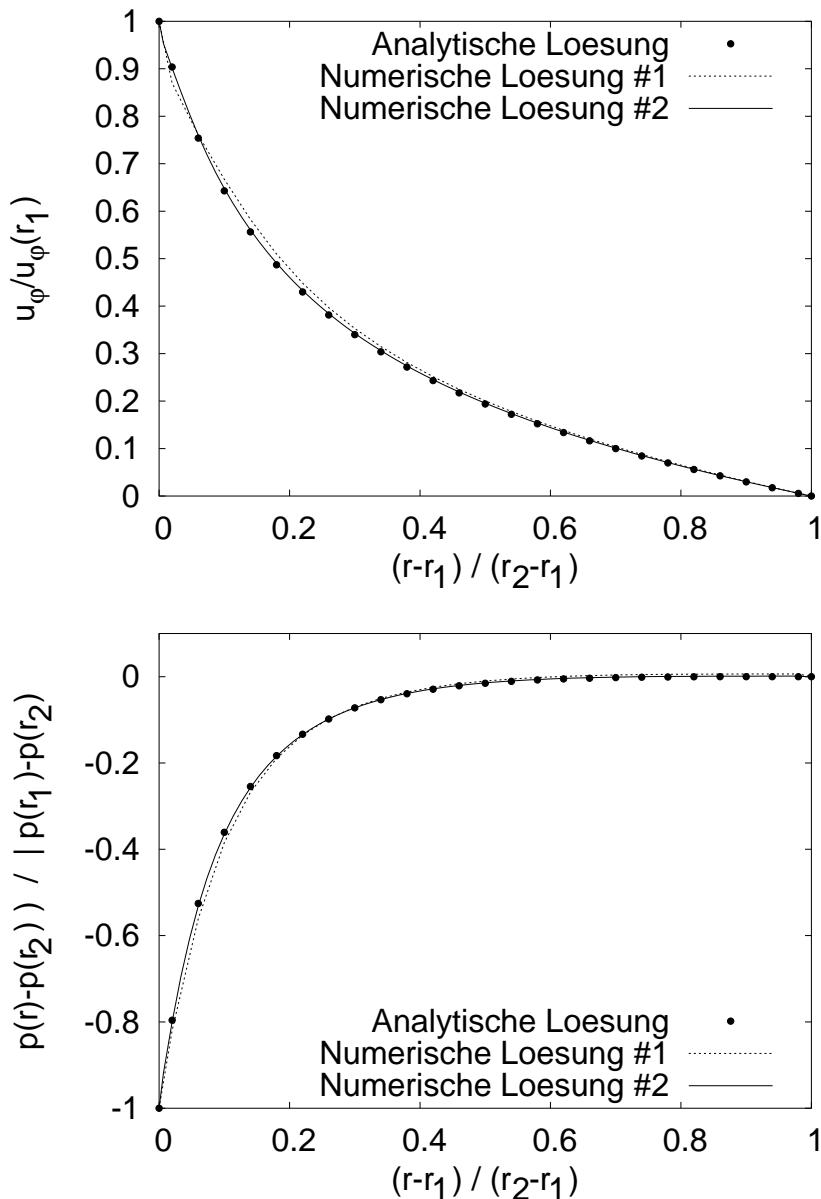
Die Konstante  $D$  in der Lösung für die Druckverteilung wird so gewählt, dass der Druck am äußeren Zylinder Null ist  $p(r_2) = 0$ . Es wird an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die Lösung unabhängig von Reynolds- und Taylorzahl ist.

### 5.1.2 Numerische und analytische Lösung

Die beiden Zylinder befinden sich in einem zweidimensionalen Gitter mit konstanter Gitterweite und Gittergröße  $16r_1 \times 16r_1$ . Für alle untersuchten Interpolationsschemata werden vier Simulationen mit unterschiedlichen Gitterweiten präsentiert. Eine Übersicht der Simulationsparameter zeigt Tabelle 5.1.

Abbildung 5.2 zeigt die azimutale Geschwindigkeit und den Druck der numerischen Lösung im Vergleich zur analytischen Lösung für die Gitter #1 und #2 wie in Tabelle 5.1 beschrieben. Beide wurden mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate für die Repräsentation der Zylinder berechnet. Gitter #1 ist das größte Gitter, das für die Simulationen verwendet wurde. Nur kleine Abweichungen zur analytischen Lösung können beobachtet werden. Für

das feinere Gitter #2 sind keine Abweichungen mehr sichtbar.



**Abbildung 5.2:** Analytische und numerische Lösung im Vergleich für Gitter #1 und Gitter #2 mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate als IB Randberechnung. Oben: Verlauf des Geschwindigkeitsprofils. Unten: Druckverlauf.

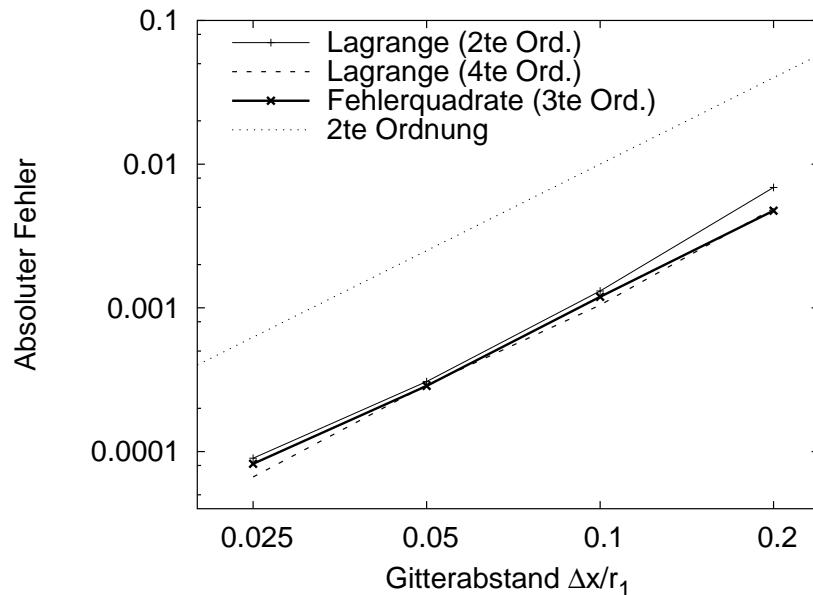
### 5.1.3 Gitterstudie und räumliche Konvergenz

Der numerische Fehler wird berechnet, indem der Unterschied zwischen numerischer und analytischer Lösung der Geschwindigkeit am Punkt  $(x, y) = (0, 4r_1)$  bestimmt wird. Die Rotationsachse des Zylinders liegt bei  $(x, y) = (0, 0)$ . Zuerst wird die Konvergenzordnung für die IB Methode mit Punktwerten gezeigt und anschließend für die IB Methode mit Flusskorrektur.

**Tabelle 5.1:** Gitterparameter

	#1	#2	#3	#4
$\Delta x/r_1$	0.2	0.1	0.05	0.025
Anzahl der Berechnungszellen	6400	25600	102400	409600
Zellen über den inneren Radius	5	10	20	40

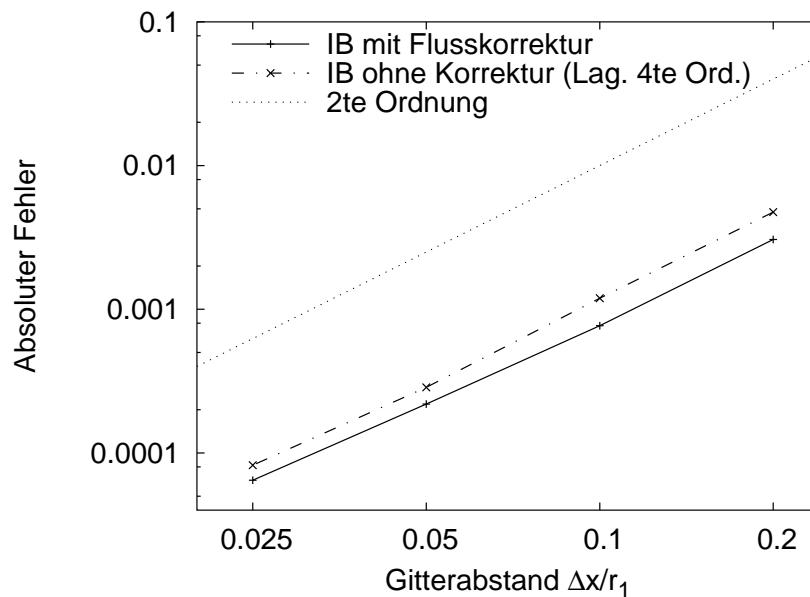
**IB Methode mit Punktwerten** In Abbildung 5.3 wird der Fehler für alle drei Interpolationsalgorithmen in Abhängigkeit von der Gitterweite gezeigt. Zum Vergleich ist in dem logarithmischen Maßstab eine Linie für die zweite Ordnung eingezeichnet, die von dem Strömungslöser erwartet wird. Alle drei Interpolationsalgorithmen zeigen vergleichbares Verhalten und liegen sehr gut im Vergleich zur Linie zweiter Ordnung. Der einzige Unterschied ist der absolute Wert des Fehlers. Die Interpolation vierter Ordnung berechnet die Randbedingung etwas genauer als die Methode der kleinsten Fehlerquadrate (dritte Ordnung), die ihrerseits etwas genauer als die Lagrange Interpolation zweiter Ordnung ist. Die größere Stabilität der Methode der kleinsten Fehlerquadrate wird scheinbar auf Kosten der Genauigkeit erreicht.



**Abbildung 5.3:** Absoluter Fehler der tangentialen Geschwindigkeit im Vergleich zur analytischen Lösung an einem Punkt für die unterschiedlichen Interpolationsverfahren.

**IB Methode mit Flusskorrektur** Wie schon für die Immersed Boundary Methode mit Punktwerten durchgeführt, muss auch hier die Gitterstudie die Genauigkeit der konservativen Immersed Boundary Methode bestätigen. Die Konfiguration des Gitters und der Simulationsparameter ist identisch. Abbildung 5.4 zeigt den Fehler der tangentialen Geschwindigkeit im Vergleich zur analytischen Lösung. Als Anhaltspunkt ist der Konvergenzverlauf der IB Methode mit Punktwerten mit der Interpolation der kleinsten Fehlerquadrate eingezeichnet. Der Verlauf des Fehlers folgt der Kurve zweiter Ordnung und zeigt damit, dass auch bei der

konservativen IB Methode die räumlich Konvergenzordnung des Strömungslösers beibehalten wird. Im Vergleich zur IB Methode mit Punktwerten wird sogar ein etwas geringerer absoluter Fehler beobachtet. Diese Verbesserung der Genauigkeit wird der Tatsache zugeschrieben, dass die Massenerhaltung am IB Rand eingehalten wird.



**Abbildung 5.4:** Absoluter Fehler der tangentialen Geschwindigkeit im Vergleich zur analytischen Lösung an einem Punkt für die konservative IB Methode und die IB Methode mit Punktwerten (Lagrange Interpolation 4ter Ordnung).

## 5.2 Zeitliche Genauigkeit am Beispiel der Kanalströmung

Am Testfall einer laminaren Kanalströmung in zwei Dimensionen wird die zeitliche Genauigkeit des numerischen Verfahrens untersucht. Neben der zuvor gezeigten räumlichen Konvergenzordnung muss auch die zeitliche Konvergenzordnung des numerischen Verfahrens mit der IB Methode erhalten bleiben. In Kapitel 3 wird die Implementierung des IB Verfahrens in Hinsicht auf das Runge-Kutta Zeitschrittverfahren dritter Ordnung besprochen. Für den Erhalt der zeitlichen Konvergenzordnung wurde das Setzen der IB Randbedingung während des Zeitschritts so gewählt, dass immer Impulsgleichung, Massenerhaltung und IB Randbedingung erfüllt sind. Hierfür ist es notwendig, die IB Randbedingung während der Druckkorrektur iterativ zu setzen, siehe Tabelle 3.1 für eine genaue Beschreibung des Algorithmus bei der IB Methode mit Punktwerten und Tabelle 3.2 für die IB Methode mit Flusskorrektur (Abschnitt 3).

Für die Untersuchung der Konvergenzordnung untersucht Manhart [31] einen Wirbeldipol, der auf eine ebene Platte trifft. Die Ordnung in der Zeit wird durch eine stete Verfeinerung der Zeitschrittweite  $\Delta t$  gezeigt. Der numerische Fehler wird hierfür durch den Vergleich mit einer Referenzlösung berechnet. Dabei wird die Referenzlösung mit einer sehr kleinen Zeitschrittweite  $\Delta t$  erzeugt. Hier wird die zeitliche Genauigkeit des Verfahrens anhand der laminaren zweidimensionalen Kanalströmung gezeigt. Um eine zeitliche Evolution der numerischen Lösung zu erhalten, wird die Kanalströmung aus dem Stillstand mit einem konstanten Druckgradienten beschleunigt. Im Folgenden wird der Testfall und die numerische Lösung vorgestellt und die Konvergenz in der Zeit untersucht. Für das hier verwendete Runge-Kutta Verfahren wird erwartet, dass die zeitliche Genauigkeit dritter Ordnung erhalten bleibt.

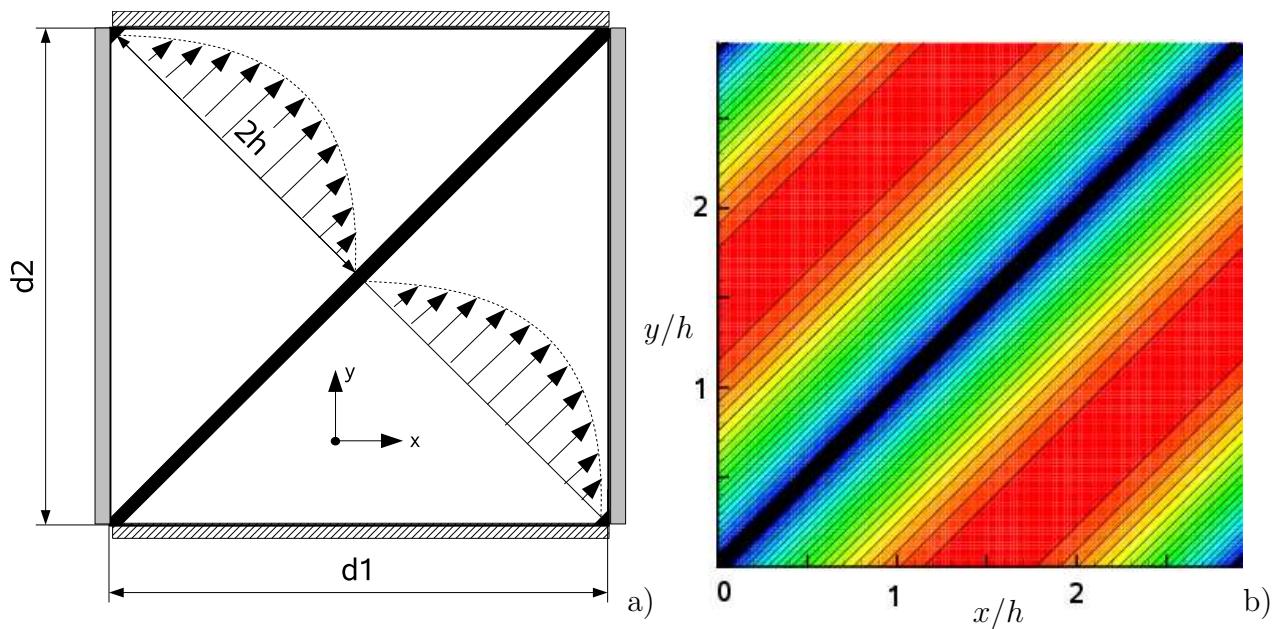
### 5.2.1 Testfall Setup

Abbildung 5.5 zeigt den Setup des Testfalls. Die laminare Kanalströmung bildet sich zwischen zwei Platten aus, die  $45^\circ$  geneigt sind. Die Idee für die IB Methode eine schiefe Kanalströmung zu verwenden, geht auf Dröge [9] zurück. Hier wurde allerdings eine etwas andere Konfiguration gewählt. Das Berechnungsgebiet ist ein Rechteck mit periodischen Randbedingungen. Die jeweils zusammengehörenden periodischen Randbedingungen sind in Abbildung 5.5 durch graue Rechtecke bzw. schraffierte Rechtecke gekennzeichnet. Der Winkel der Platten ist so gewählt, dass in dem Berechnungsrechteck der Kanalverlauf periodisch ist. Die Strömung, die das Berechnungsgebiet oben verlässt, betritt das Berechnungsgebiet wieder von unten. Die Strömung, die den Kanal rechts verlässt, betritt das Berechnungsgebiet wieder von links. Durch diese Anordnung ist es möglich den laminaren Kanal durch einen konstanten Druckgradienten zu beschleunigen.

Parameter	$d_1$	$d_2$	$Re$	$\Delta x$	$\Delta y$	$N_x$	$N_y$	$N_x \times N_y$
	2.92 h	2.92 h	100	0.02 h	0.02 h	146	146	21316

**Tabelle 5.2:** Gitterparameter und Simulationsparameter für den schießen Kanal.

Der Druckgradient ist parallel zu den Kanalwänden ebenfalls im  $45^\circ$  Winkel ausgerichtet und so eingestellt, dass sich die Reynoldszahl  $Re_B = 50$  basierend auf der flächengemittelten Geschwindigkeit  $\bar{u}$  und  $Re_M = 75$  basierend auf der Maximalgeschwindigkeit  $u_{max}$  einstellt, sobald sich der Druckgradient und der viskose Term im Gleichgewicht befinden. Die Reynoldszahl wird hier mit der halben Kanalhöhe ( $h$ ) gebildet. Die Abmessungen des Testfalls sind in Tabelle 5.2 gegeben.



**Abbildung 5.5:** Schiefer Kanal für die Bestimmung der zeitlichen Konvergenzordnung. Abbildung a) zeigt den schematischen Aufbau der numerischen Lösung mit periodischen Randbedingungen und (b) zeigt die numerische Lösung mit  $|\vec{u}/u_{max}|_{min} = 0$  (blau) und  $|\vec{u}/u_{max}|_{max} = 1$  (rot).

## 5.2.2 Numerische und analytische Lösung

Im wandparallelen Koordinatensystem ist die Strömung eindimensional und vollständig beschrieben durch die Viskosität  $\mu$  und den Druckgradienten  $\frac{\partial p}{\partial x}$ . Die Geschwindigkeit hängt nur vom Wandabstand  $d$  ab. Die analytische Lösung für den Testfall lässt sich schreiben:

$$u(d) = \frac{\tau_w}{\mu} d + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} d^2 \quad (5.4)$$

mit dem Zusammenhang für das Gleichgewicht aus viskosem Term und Druckterm:

$$\tau_w = -\frac{\partial p}{\partial x} h \quad (5.5)$$

Mit dem Zusammenhang zwischen der Wandschubspannung  $\tau_w$  und dem Druckgradienten  $\frac{\partial p}{\partial x}$  kann die Gleichung weiter vereinfacht werden.

$$u(d) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \left( \frac{1}{2} d^2 - h d \right). \quad (5.6)$$

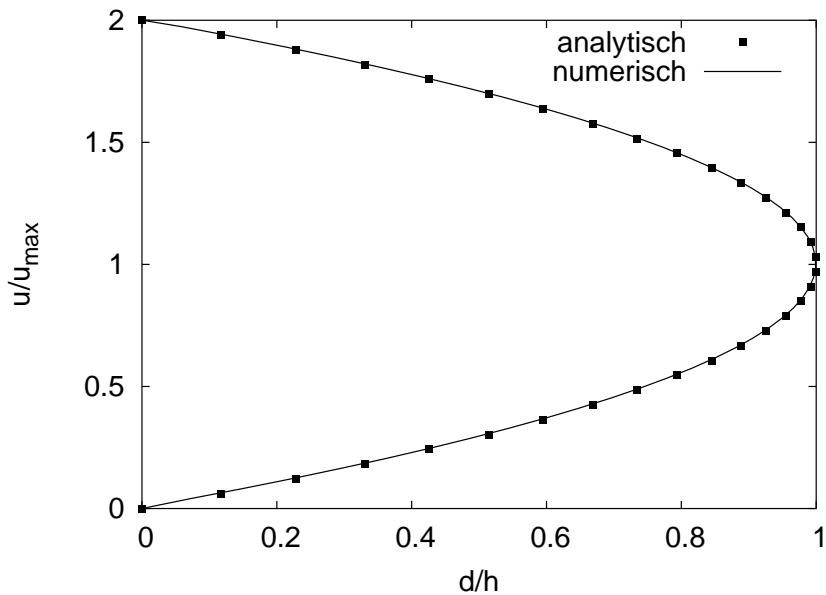
Die maximale Geschwindigkeit  $u_{max}$  im Kanalmittelpunkt bei  $h$  und die mittlere Geschwindigkeit über die Kanalbreite  $\bar{u}$  sind:

$$u_{max} = \frac{3}{2} \bar{u} = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} h^2. \quad (5.7)$$

Die Geschwindigkeit  $u(d)$  lässt sich mit Hilfe der Maximalgeschwindigkeit  $u_{max}$  dimensionslos anschreiben:

$$|u(d)/u_{max}| = \frac{1}{h^2} (2h d - d^2). \quad (5.8)$$

Die numerische Lösung im Vergleich zur analytischen Lösung wird in Abbildung 5.6 gezeigt.

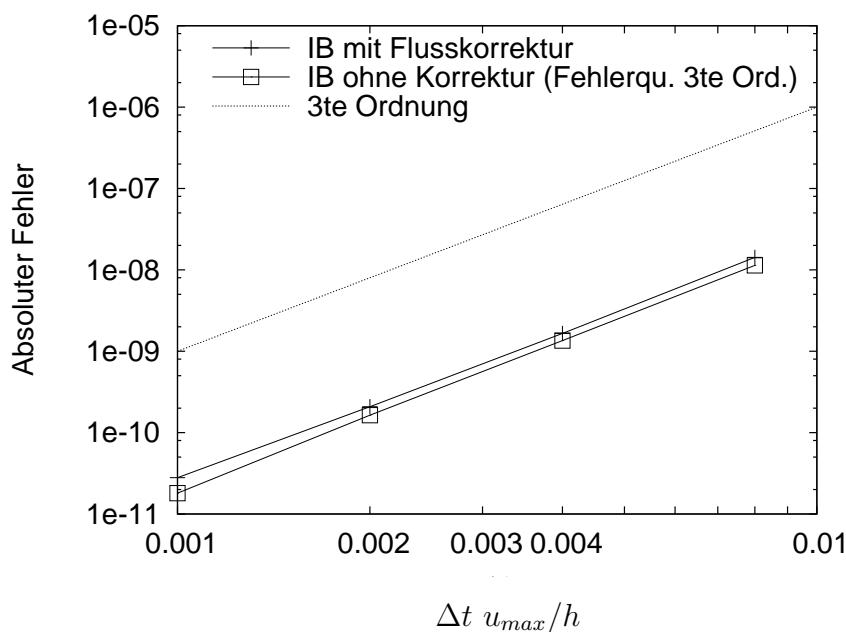


**Abbildung 5.6:** Numerische und analytische Lösung der laminaren Kanalströmung.

### 5.2.3 Konvergenz in Abhängigkeit des Zeitschritts

Um die Konvergenz in der Zeit zu überprüfen, wird der Fehler zwischen Berechnungen mit großer Zeitschrittweite  $\Delta t$  und einer Referenzrechnung mit kleiner Zeitschrittweite  $\Delta t$  am Punkt  $(x, y) = (1.36h, 1.54h)$  bestimmt. Dabei müssen alle Berechnungen bis zum gleichen physikalischen Zeitpunkt durchgeführt werden, um den Fehler zu berechnen. Andernfalls wäre die zeitliche Entwicklung der Lösung nicht gegeben. Wie zuvor erwähnt, wird die Kanalströmung hierfür aus dem Stillstand mit einem konstanten Druckgradienten beschleunigt, so dass sich das laminare Geschwindigkeitsprofil anfängt auszubilden.

Abbildung 5.7 zeigt den berechneten Fehler in Abhängigkeit von der gewählten Zeitschrittweite. Zum Vergleich ist in dem logarithmischen Maßstab die Linie für die dritte Ordnung eingezeichnet, die von dem Runge-Kutta Verfahren dritter Ordnung erwartet wird (siehe auch Kapitel 2 für die Beschreibung des Runge-Kutta Verfahrens). Es ist zu erkennen, dass die beiden IB Methoden die erwartete Konvergenzordnung in der Zeit bestätigen. Ein marginaler Unterschied im Verlauf der Fehlerterme ist nur bei der kleinsten gezeigten Zeitschrittweite zu erkennen.



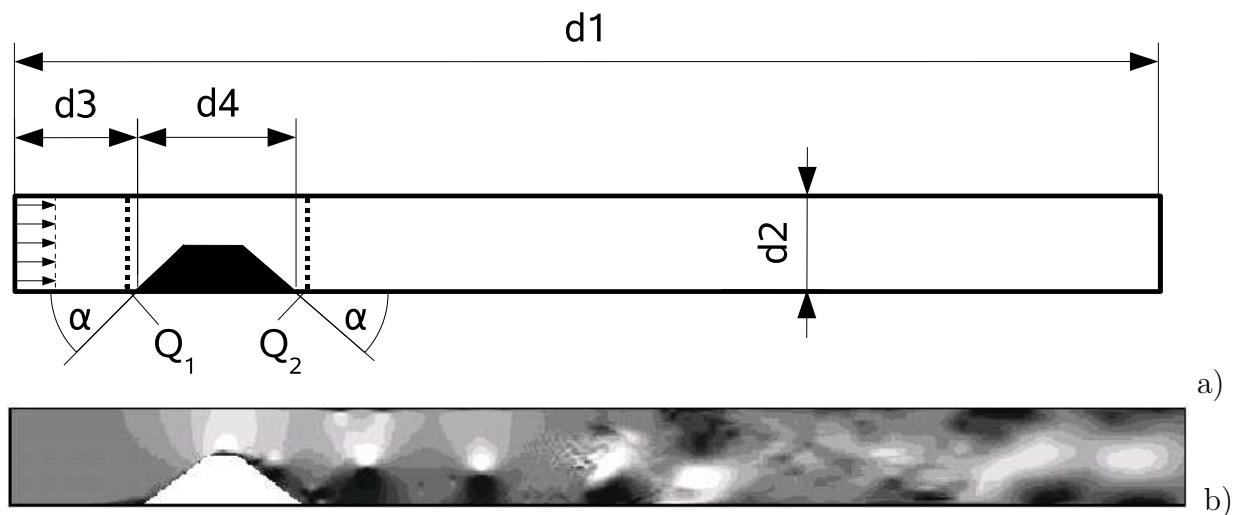
**Abbildung 5.7:** Absoluter Fehler der Geschwindigkeit in x-Richtung im Vergleich zur Referenzlösung für beide IB Methoden. Für die IB Methode mit Punktwerten wird die Interpolation mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate verwendet.

## 5.3 Konservativität am Beispiel Kanalströmung

Der Effekt der IB Flusskorrektur wird am Beispiel einer zweidimensionalen Kanalströmung mit Hindernis untersucht. Der Testfall wurde dem dreidimensionalen Testfall Kanalströmung mit Hügeln aus Abschnitt 6.2 nachempfunden. Hierbei wird die IB Methode mit Punktwerten der IB Methode mit Flusskorrektur gegenübergestellt. Für die IB Methode mit Punktwerten wird in diesem Abschnitt wieder ausschließlich die Interpolation mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate verwendet. Im Folgenden wird zuerst der Testfall vorgestellt, die numerische Lösung besprochen und auf den Effekt der Massenerhaltung am IB Rand eingegangen.

### 5.3.1 Testfall Setup

Im Vergleich zur dreidimensionalen Kanalströmung mit Hügeln aus Abschnitt 6.2 wurden einige Modifikationen eingeführt, um die Problematik der Massenerhaltung hervorzuheben. Das Hindernis im Kanal ist scharfkantig und nicht abgerundet und ist in Abbildung 5.8 zu sehen. Seine Position und Größe wurden willkürlich gewählt. Die Einschnürung des Kanals durch das Hindernis nimmt die Hälfte der Kanalhöhe ein. Der Testfall ist auf zwei Dimensionen reduziert, um den Rechenaufwand zu reduzieren. Die Abmessungen des Testfalls sind in Abbildung 5.8 angegeben.



**Abbildung 5.8:** Konfiguration der zweidimensionalen Kanalströmung mit scharfkantigem Hindernis  
(a). Die Abmessungen sind  $d_1 = 24h$ ,  $d_2 = 2h$ ,  $d_3 = 2.6\bar{6}h$ ,  $d_4 = 3.3\bar{3}h$ ,  $\alpha = 45^\circ$ .  
Momentanaufnahme der instationären Strömung anhand der  $u$  Geschwindigkeitskomponente (b) für die Simulation *res03*. Vergleiche hierzu Tabelle 5.3.

Hier wird im Gegensatz zu den periodischen Randbedingungen bei der dreidimensionalen Kanalströmung ein uniformes Einströmprofil sowie eine Ausströmrandbedingung am Ende des Simulationsgebietes gesetzt. Die Länge des Kanals ist groß, um Instabilitäten der Ausströmrandbedingung zu vermeiden. Die Randbedingungen wurden so gewählt, da sie einen Massenverlust über das Hindernis erlauben. Im Gegensatz dazu kann es bei periodischen Randbedingungen nicht zu einem globalen Massenverlust kommen, da die Randbedingung

den identischen Massenfluss vor und nach dem Hindernis erzwingen. In der vorgestellten Konfiguration wird die uniforme Strömung am Anfang stark durch die Engstelle über dem Hindernis beschleunigt, so dass steile Geschwindigkeitsgradienten entstehen. Auf dem Hügel löst die Strömung ab und führt bei der hier gewählten Reynoldszahl  $Re = 33000$  zu einem instationären, zweidimensionalen Strömungsfeld. Die Reynoldszahl wird mit der halben Kanalhöhe  $h$  und der flächengemittelten Geschwindigkeit  $u_b$  gebildet. In Abbildung 5.8 (b) ist eine Momentanaufnahme der Geschwindigkeit in Strömungsrichtung zu sehen. Die abgelöste Scherschicht hinter dem Hindernis sowie die instationäre Wirbelstraße sind deutlich zu erkennen.

### 5.3.2 Numerische Lösung

Im Folgenden wird die numerische Lösung der zweidimensionalen Kanalströmung mit Hindernis besprochen.

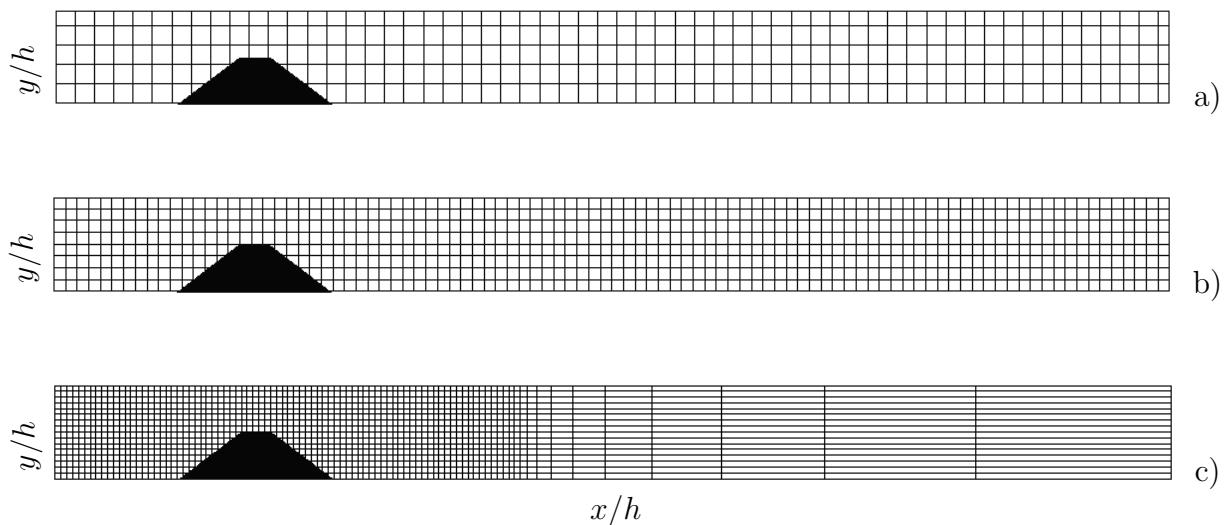
**Gitterauflösung** Für die numerische Lösung der Kanalströmung werden drei Gitterauflösungen untersucht. Sie sind in Tabelle 5.3 angegeben und werden in Abbildung 5.9 gezeigt. Die Gitterauflösung *res01* ist die größte Auflösung mit 27648 Berechnungszellen. Der Buchstabe *k* bei *kres01* kennzeichnet die Verwendung der konservativen IB Methode. Alle anderen Simulationen verwenden die IB Methode mit Punktwerten.

Simulation	nx x ny	Punkte	RMS Fehler [%]
<i>kres01</i>	576 x 48	27648	$2.6e^{-3}$
<i>res01</i>	576 x 48	27648	2.56
<i>res02</i>	960 x 80	76800	1.71
<i>res03</i>	900 x 160	144000	1.14

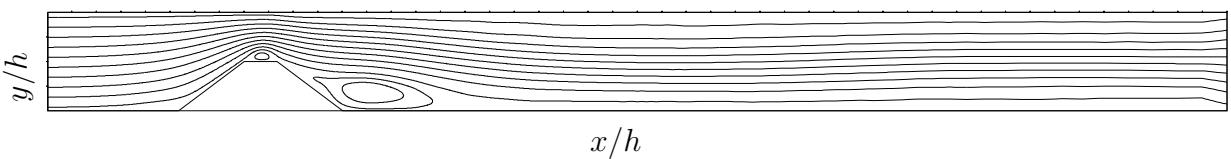
**Tabelle 5.3:** Berechnete Auflösungen des Kanals mit scharfkantigem Hindernis und rms Wert des Massenfehlers für die konservative IB Methode (*kres01*) und die IB Methode mit Punktwerten (*res02*, *res03*, *res04*).

Für die Auflösung *res03* wurde das Gitter im Bereich der Ausströmrandbedingung in x-Richtung gestreckt, um instationäre Wirbelstrukturen zu dämpfen. Die Dämpfung der instationären Strukturen ist auch in der Geschwindigkeitskomponente auf Abbildung 5.8 (b) zu erkennen, wo nach  $x/h = 12h$  die Wirbelstrukturen zunehmend verwaschen. Die Dämpfung der Wirbelstrukturen ist für die Ausströmrandbedingung wichtig, da hier Instabilitäten auftreten können. Der freie Ausströmrand mit Druckbedingung  $p = 0$  erlaubt das Einströmen von Fluid. Das ist bei Wirbelstrukturen möglich, die das Berechnungsgebiet verlassen.

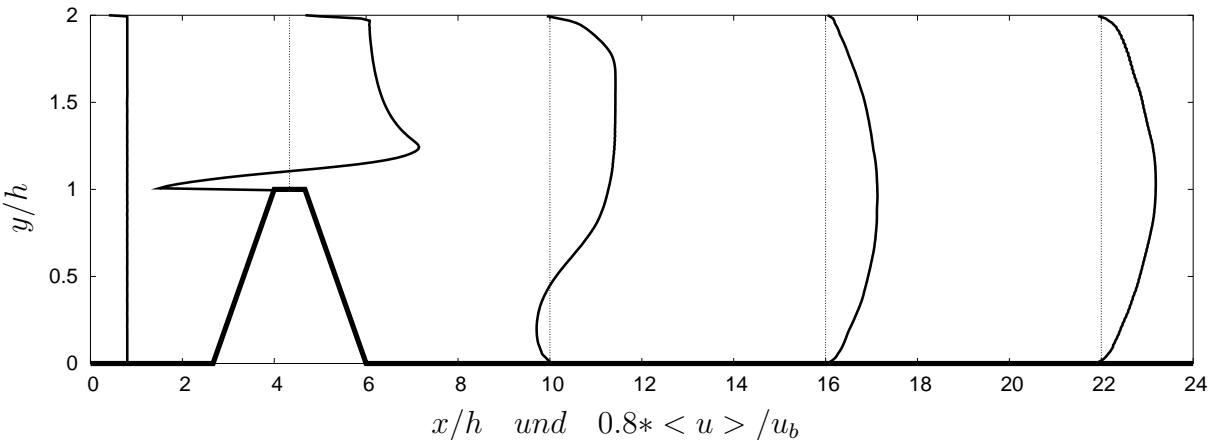
**Zeitlich gemitteltes Strömungsfeld** Abbildung 5.10 zeigt die zeitlich gemittelten Stromlinien der Kanalströmung für die Simulation *res03*. Deutlich zu erkennen sind die beiden Ablöseblasen auf der Hügel spitze und nach dem Hügel, vergleiche auch Abschnitt 6.2 für die dreidimensionale Kanalströmung mit Hügeln. Auch dort wird die Hauptrezirkulationszone nach dem Hügel beobachtet. Zusätzlich entwickelt sich bei erhöhten Reynoldszahlen ebenfalls die Ablöseblase auf der Hügel spitze auf. Aufgrund der scharfen Kanten des Hügels



**Abbildung 5.9:** Gitterlinien der Simulationen *res01* (a), *res02* (b) und *res03* (c) nach Tabelle 5.3. Gezeichnet ist jede zehnte Gitterlinie.



**Abbildung 5.10:** Stromlinien der zweidimensionalen Kanalströmung mit scharfkantigem Hindernis für Simulation *res03*.



**Abbildung 5.11:** Übersicht der Geschwindigkeitsprofile in Hauptströmungsrichtung für die zweidimensionalen Kanalströmung (*res03*). Der Beginn der Geschwindigkeitsprofile wurde an die jeweilige  $x/h$  Position ( $x/h=0, 4, 10, 16, 22$ ) gesetzt und mit dem Faktor 0.8 skaliert.

bei dem zweidimensionalen Testfall ist die Position der Ablösung auf der Hügelspitze genau lokalisiert. Gegen Ende des Simulationsgebiets nehmen die Stromlinien nahezu waagerechten Verlauf an. Das deutet darauf hin, dass sich hier die Strömung wieder von der Störung durch

das Hindernis erholt hat.

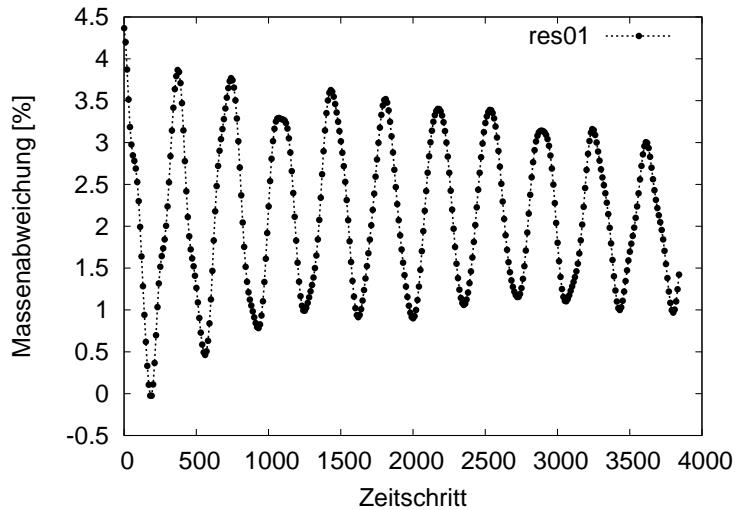
Abbildung 5.11 zeigt eine Übersicht der Geschwindigkeitsprofile in Hauptströmungsrichtung. Hier ist das homogene Geschwindigkeitsprofil in der Einströmebene deutlich zu erkennen. Die stark ausgeprägte Rezirkulation auf der Hügelspitze ist wie zuvor in dem Verlauf der Stromlinien sichtbar. Gegen Ende des Simulationsgebiets zeigt sich wieder ein nahezu symmetrisches Geschwindigkeitsprofil und bestätigt, dass sie die Strömung hier wieder von der Störung durch das Hindernis beruhigt.

### 5.3.3 Massendefekt

Hier wurde eine Gitterstudie durchgeführt, um die Abhängigkeit des Massenverlusts in Abhängigkeit von der Gitterauflösung zu erfassen. Untersucht wird der Massenverlust, der sich zwischen den Querschnitten  $Q_1$  und  $Q_2$  (siehe Abbildung 5.8) vor und nach dem Hindernis einstellt. In den Bereichen ohne Hindernis wird keine IB Randbedingung angewendet und es kann kein Massenverlust entstehen. Im Folgenden wird auf den zeitlichen Verlauf des Massenfehlers eingegangen und anschließend der zeitliche Mittelwert des Massenfehlers berechnet. Der Einfluss der Massenerhaltung auf das Strömungsfeld und die Reynoldsspannungen wird diskutiert.

**Zetilicher Verlauf des Massenfehlers** Der zeitliche Verlauf des Massenfehlers für die Simulation *res01* mit der IB Methode mit Punktwerten ist in Abbildung 5.12 zu sehen. Wie man erkennen kann ist der Massenfehler nicht konstant, sondern unterliegt zeitlichen Schwankungen. Für die hier betrachtete Gitterauflösung (siehe Tabelle 5.3) wird ein maximaler Massendefekt von  $\approx 4.5\%$  erreicht. Für die IB Methode mit Flusskorrektur wird die Massenerhaltung bis zur numerischen Genauigkeit gelöst. Der dabei vorhandene Massendefekt aufgrund numerischen Ungenauigkeit liegt ca. drei Größenordnungen unter dem Massenverlust der IB Methode mit Punktwerten. Damit wird bei der IB Methode mit Flusskorrektur die Massenerhaltung am IB Rand erfüllt. Das Problem bei der IB Methode mit Punktwerten, dass der Massenfehler zeitlich schwankt, kann folgende Probleme verursachen. Der numerische Gleichungslöser konvergiert schlechter oder die Massenschwankungen verfälschen das Strömungsfeld. Hier wird im Folgenden beispielhaft auf den Effekt der Massenerhaltung auf das Strömungsfeld für Simulation *res02* eingegangen. Zuvor wird noch der Massenverlust im zeitlichen Mittel betrachtet.

**Massenverlust** In Tabelle 5.3 sind die Ergebnisse für den Massenfehler für die drei unterschiedlichen Gitter angegeben. Angegeben ist der zeitlich gemittelte *rms* Fehler des Massenverlusts in Prozent zwischen den Querschnitten  $Q_1$  und  $Q_2$  (siehe Abbildung 5.8). Bei der IB Methode mit Punktwerten entsteht ein Massenverlust abhängig von der Gitterweite. Bei der besten Auflösung ist der Massenverlust 1.1% und bei der größten Auflösung 2.6%. Bei der konservativen IB Methode ist der Massenverlust schon bei der größten Auflösung kleiner als 1% und vernachlässigbar. Aus Tabelle 5.3 lässt sich erkennen, dass der Massenverlust mit zunehmend feinen Gitter abnimmt. Bei Simulationen turbulenter Strömungen um komplexe Geometrien, deren Berechnungsgitter in Wandnähe fein aufgelöst ist, wird deshalb ein vernachlässigbar kleiner Fehler erwartet. So werden in Tremblay et al. [69, 70, 71] mit der IB Methode mit Punktwerten gute Ergebnisse bei DNS und wandaufgelösten LES Simulationen



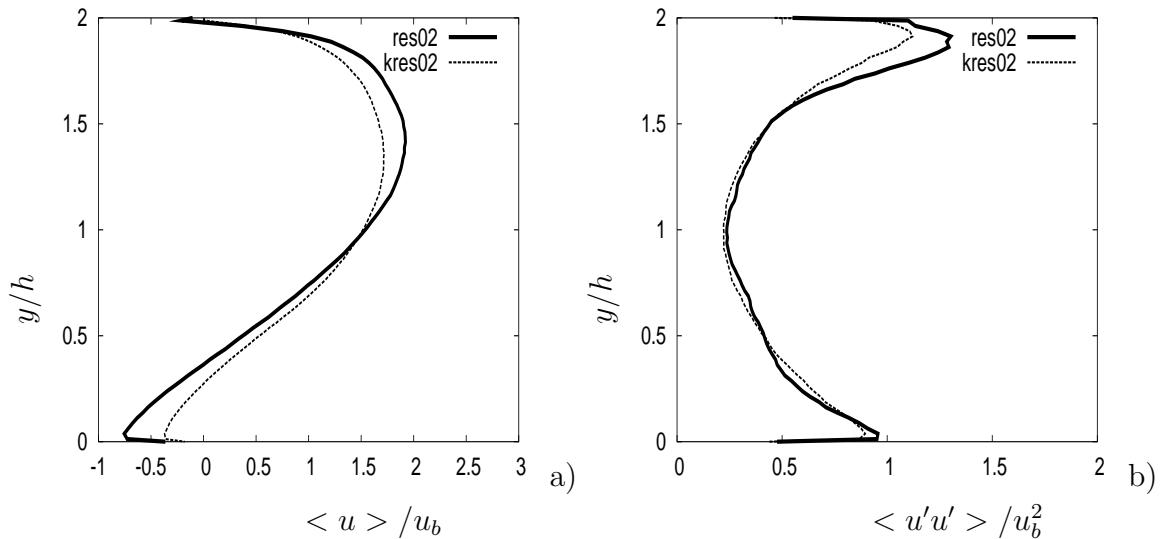
**Abbildung 5.12:** Massenabweichung zwischen den Querschnitten  $Q_1$  und  $Q_2$  über der Zeit für die Simulation  $res01$  (siehe Abbildung 5.8 für die Position der Querschnitte).

erzielt. In dieser Arbeit werden in Kapitel 6 Ergebnisse für DNS und LES Simulationen einer Kanalströmung mit Hügeln für beide IB Verfahren vorgestellt.

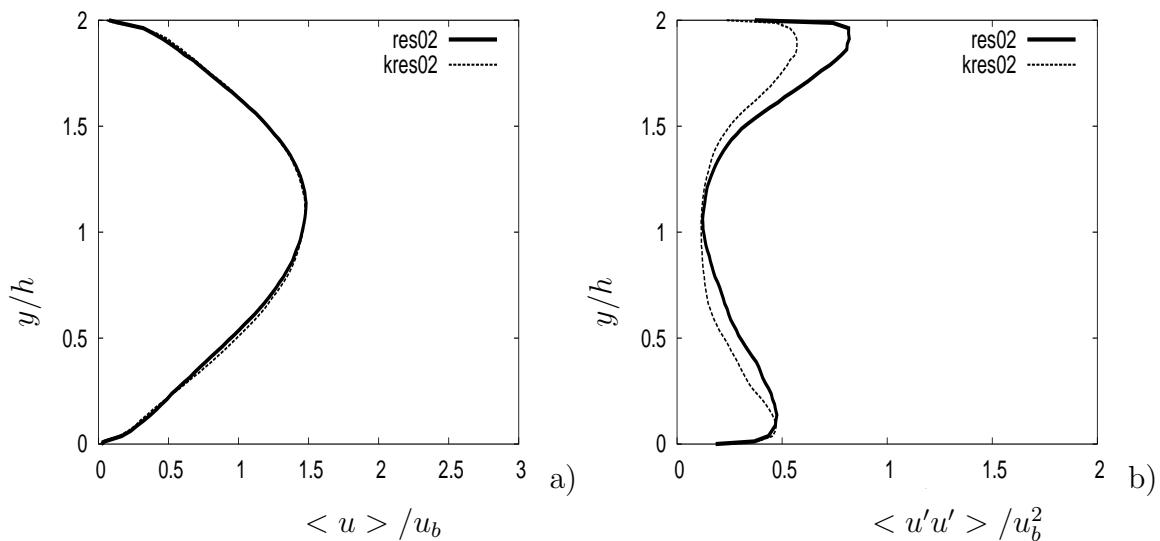
**Mittlere Geschwindigkeitsprofile** In Abbildung 5.13 (a) und Abbildung 5.14 (a) werden die Geschwindigkeitsprofile in Strömungsrichtung für die Simulationen  $res02$  und  $kres02$  gezeigt. Die Profile sind mit der flächengemittelten Geschwindigkeit  $u_b$  normiert. Hierbei unterscheiden sich die Simulationen nur in der IB Randbedingung. Simulation  $res02$  verwendet die IB Methode mit Punktwerten und  $kres02$  die IB Methode mit Flusskorrektur, siehe Tabelle 5.3 für die Auflösung des Berechnungsgitters. An Position  $x/h = 10$  (Abbildung 5.13 (a)) ist ein deutlicher Unterschied im Geschwindigkeitsprofile zu erkennen. An Position  $x/h = 22$  (Abbildung 5.14 (a)) sind die Geschwindigkeitsprofile nahezu identisch. Hier hat sich die Strömung bereits wieder von dem Hindernis beruhigt.

**Turbulente Strömungsgrößen** In Abbildung 5.13 (b) und Abbildung 5.14 (b) werden die Profile der turbulenten Spannung  $\langle u'u' \rangle$  für die Simulationen  $res02$  und  $kres02$  gezeigt. Die Profile sind mit der flächengemittelten Geschwindigkeit  $u_b^2$  normiert. Hier ist sowohl für Position  $x/h = 10$  (Abbildung 5.13 (b)) und Position  $x/h = 22$  (Abbildung 5.14 (b)) ein Unterschied in den Profilen zu erkennen. Interessant ist, dass auch noch im Nachlauf der Strömung bei  $x/h = 22$  ein Unterschied zu erkennen ist.

Besonders hervorzuheben ist die Tatsache, dass an Position  $x/h = 22$  die Geschwindigkeitsprofile zwischen Simulation mit und ohne IB Flusskorrektur gut übereinstimmen, aber die Reynoldsspannungen markante Unterschiede aufweisen. Es wird darauf hingewiesen, dass bei beiden Positionen die Reynoldsspannungen bei der IB Methode mit Punktwerten höhere Werte zeigen als bei der IB Methode mit Flusskorrektur.



**Abbildung 5.13:** Geschwindigkeitsprofil (a) und turbulente Spannung  $\langle u' u' \rangle$  (b) an Position  $x/h = 10$  für die Simulationen  $\text{res02}$  und  $\text{kres02}$ .



**Abbildung 5.14:** Geschwindigkeitsprofil (a) und turbulente Spannung  $\langle u' u' \rangle$  (b) an Position  $x/h = 22$  für die Simulationen  $\text{res02}$  und  $\text{kres02}$ .

## 5.4 Erkenntnisse aus den zweidimensionalen Testfällen

In den vorausgegangenen Abschnitten wurden zweidimensionale Testfälle untersucht um drei numerische Eigenschaften der unterschiedlichen IB Verfahren zu untersuchen. Die Konvergenzordnung in Raum und Zeit sowie der Einfluss der Massenerhaltung am IB Rand. Folgende Ergebnisse können festgehalten werden.

**Konvergenzordnung im Raum** Für die Untersuchung der Konvergenzordnung im Raum wurde die laminare Taylor-Couette Strömung untersucht. Hierfür wurde die numerische Lösung auf unterschiedlich fein aufgelösten Berechnungsgittern mit der analytischen Lösung verglichen. Dabei wurde die Abnahme des Diskretisierungsfehlers mit der Genauigkeit zweiter Ordnung für beide IB Verfahren bestätigt. Die räumliche Genauigkeit des gesamten Strömungslösers wird also durch die IB Methode nicht reduziert.

**Konvergenzordnung in der Zeit** Für die Untersuchung der Konvergenzordnung in der Zeit wurde die zeitliche Entwicklung einer laminaren Kanalströmung betrachtet. Hierfür wurde die zeitliche Evolution der Strömung mit unterschiedlich großen Zeitschritten berechnet. Als Referenz wurde die Lösung mit der kleinsten Zeitschrittweite gewählt. Dabei wurde die Abnahme des Diskretisierungsfehlers in Abhängigkeit von der Zeitschrittweite angegeben und für das Runge-Kutta Verfahren die Genauigkeit dritter Ordnung bei beiden IB Verfahren bestätigt. Hier konnte durch richtiges Setzen der IB Randbedingungen während des Zeitschritts die zeitliche Genauigkeit des Strömungslösers erhalten werden.

**Einfluss der IB Flusskorrektur** Der Einfluss der IB Flusskorrektur wurde an einer instationären zweidimensionalen Kanalströmung mit Hindernis untersucht. Folgende Aussagen sind möglich. Bei der IB Methode mit Flusskorrektur entsteht kein Massenfehler. Der Massendefekt bei der Methode mit Punktewerten ist ähnlich instationär wie das Strömungsfeld. Es muss berücksichtigt werden, dass der momentane Massenfehler schwankt und zeitweise größere Werte als im zeitlichen Mittel entstehen. In Hinsicht auf den Einfluss auf das Strömungsfeld lässt sich folgendes festhalten. Sowohl bei den mittleren Geschwindigkeitsprofilen als auch bei der turbulenten Spannung  $\langle u'u' \rangle$  unterscheiden sich die Profile. Dabei wurden für die IB Methode mit Punktewerten höhere Werte für die betrachtete turbulente Spannung beobachtet.

Der Massenfehler bei der IB Methode mit Punktewerten ist von der Gitterauflösung abhängig und nimmt bei Gitterverfeinerung ab. Es ist zu erwarten, dass bei einer voll turbulenten und dreidimensionalen Strömung der Massenfehler bei grober Auflösung noch mehr ins Gewicht fällt. Das gilt vor allem bei Strömungen in oder um komplexe Geometrien wie sie in industriellen Anwendungen vorkommen. Bei wandaufgelösten Simulationen ist zu erwarten, dass der Fehler durch den Massendefekt minimal ist. Das bedeutet, dass für wandaufgelöste Grobstruktursimulationen bzw. Direkte Numerische Simulationen sowohl die IB Methode mit oder ohne Flusskorrektur eingesetzt werden können.

# 6 Dreidimensionale Testfälle

Nach dem Test der IB Verfahren an zweidimensionalen Testfällen werden sie in diesem Kapitel mit Hilfe komplexer Testfälle untersucht. Für die Testfälle mit turbulenter Strömung werden zuerst die Turbulenzmodelle für die Grobstruktursimulation (Kapitel 2.4) an einer turbulenten Kanalströmung ohne Hindernis validiert. Hierfür sind Referenzdaten notwendig, die zum Vergleich der Ergebnisse herangezogen werden können. Die turbulente Kanalströmung ist nicht mehr analytisch berechenbar und für die Erzeugung von Referenzdaten werden Direkte Numerische Simulationen durchgeführt und die Ergebnisse mit Daten aus der Literatur verglichen.

Anschließend wird eine turbulente Kanalströmung mit periodisch angeordneten Hügeln betrachtet. Diese Konfiguration etablierte sich in den letzten Jahren als Testfall für abgelöste Strömungen. Sie ist ein beliebter Testfall sowohl für Reynolds Averaged Navier-Stokes (RANS) Simulationen als auch für die Grobstruktursimulation. Auch hier werden zuerst wieder Referenzdaten mit Hilfe der DNS Simulation erzeugt und mit Daten aus der Literatur sowie mit experimentellen Daten verglichen. Danach werden Grobstruktursimulationen für den gleichen Testfall vorgestellt. Die IB Verfahren werden mit Hilfe der Grobstruktursimulation auf unterschiedlichen Gittern untersucht. Der Einfluss unterschiedlicher LES Modelle und IB Randbehandlungen wird diskutiert.

Abschließend wird als Testfall die Strömung in einem porösen Medium vorgestellt. Die dabei betrachtete Geometrie ist sehr komplex und stellt eine Herausforderung für die IB Methode dar. Die Strömung durch das poröse Medium selbst ist laminar. Das Potential der IB Methode wird anhand dieses Beispiels verdeutlicht. Im folgenden Abschnitt wird zuerst auf die turbulente Kanalströmung eingegangen.

## 6.1 Validierung der Feinstrukturmodelle in turbulenter Kanalströmung

In Kapitel 2.4 wurden unterschiedliche Turbulenzmodelle vorgestellt und deren Verhalten nahe der Wand angesprochen. Hier wird das Verhalten der Feinstrukturmodelle mit Hilfe der Simulation einer voll entwickelten turbulenten Kanalströmung untersucht. Zuerst wird kurz auf die Referenzdaten aus DNS und Literatur eingegangen sowie das Strömungsverhalten nahe der Wand näher betrachtet, das vom Turbulenzmodell richtig wiedergegeben werden muss. Anschließend werden die Ergebnisse der Grobstruktursimulation diskutiert.

**Testfall Setup** Simuliert wird die Strömung zwischen zwei unendlich ausgedehnten parallelen Platten. Die Randbedingungen sind die Haftbedingung an den Wänden ( $y$ ) sowie Periodizität in Strömungsrichtung ( $x$ ) und spannweitiger Richtung ( $z$ ). Die Ausmaße des

Berechnungsgebietes sind  $L_x = 2\pi h$ ,  $L_y = 2h$  und  $L_z = \pi h$ . Die Simulationen wurden bei einer Reynoldszahl  $Re_\tau = 180$  basierend auf der Schubspannungsgeschwindigkeit durchgeführt. Zu dieser Reynoldszahl gibt es Vergleichsdaten von Moser et al. [41], die mit einem sehr genauen spektralen Verfahren erzeugt wurden. Im Folgenden werden die DNS Ergebnisse mit den Daten von Moser et al. [41] verglichen.

**Gitterparameter** Die Gitterparameter für die Direkte Numerische Simulation und die Grobstruktursimulation sind in Tabelle 6.1 angegeben. Die Gitterzellen sind aufgrund der turbulenten Grenzschicht im wandnahen Bereich verfeinert, vergleiche auch Kapitel 2.3 für die Kriterien zur Gitterauslegung. Zum Vergleich sind in Tabelle 6.1 auch die Gitterparameter der DNS von Moser et al. [41] angegeben.

Name	$N_x$	$N_y$	$N_z$	$\Delta x^+$	$\Delta y^+$	$\Delta z^+$
DNS	192	128	160	9	1.35	6.75
LES	96	64	80	18	2.7	13.5
MKM	128	129	128	17.7	5.9	4.4

**Tabelle 6.1:** Gitterparameter für die DNS und LES der turbulenten Kanalströmung, sowie für die DNS von Moser et al. [41].

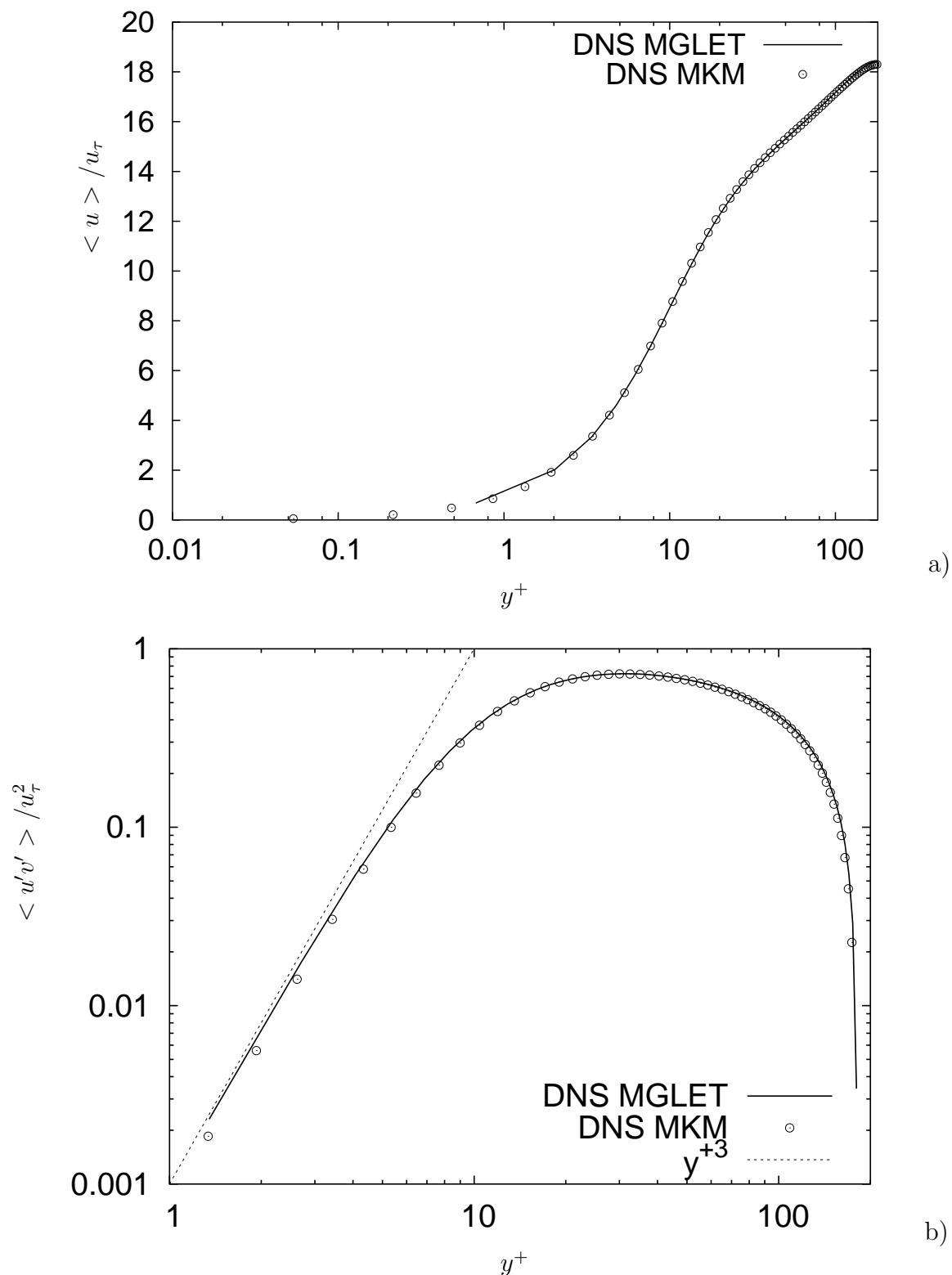
### 6.1.1 DNS Ergebnisse

Hier werden zuerst die Geschwindigkeitsprofile und Profile der turbulenten Spannungen verglichen. Anschließend wird das asymptotische Verhalten der Reynoldsspannungen diskutiert.

**Mittleres Geschwindigkeitsprofil** Abbildung 6.1 (a) zeigt, dass die Übereinstimmung des Geschwindigkeitsprofils mit der Referenzsimulation von Moser et al. [41] sehr gut ist. Die hier gezeigten Profile sind mit der jeweiligen Schubspannungsgeschwindigkeit normiert. Damit wird der Wandabstand in inneren Einheiten  $y^+ = yu_\tau/\nu$  ausgedrückt. Die Geschwindigkeiten werden mit  $u^+ = u/u_\tau$  normiert.

**Turbulente Spannung**  $\langle u'v' \rangle$  Da später das Verhalten der Feinstrukturmodelle in Wandnähe überprüft wird, ist es wichtig das Verhalten der Komponente  $\langle u'v' \rangle$  der Reynoldsspannungen zu zeigen. Hier wird vorweggenommen, dass sie eine Steigung proportional zu  $y^3$  an der Wand aufweisen muss. Wie in Abbildung 6.1 (b) zu sehen, wird die Physik richtig abgebildet und der Verlauf der Reynoldsspannungen stimmt gut mit den Daten von Moser et al. [41] überein. Die Komponente  $\langle u'v' \rangle$  des Spannungstensors zeigt die erwartete Steigung und folgt der Referenzsimulation. In der Abbildung ist die Reynoldsspannung mit  $u_\tau^2$  normiert:  $\langle u'u' \rangle^+ = \langle u'u' \rangle / u_\tau^2$ .

**Turbulente Spannungen**  $\langle u'u' \rangle$ ,  $\langle w'w' \rangle$  und  $\langle v'v' \rangle$  Das Verhalten der übrigen Komponenten des Reynoldsschen Spannungstensors wird in Abbildung 6.2 (a) und (b) gezeigt. Auch hier ist eine gute Übereinstimmung mit der Referenzlösung von Moser et al. [41] zu erkennen. Besonders interessant ist wieder das Verhalten der Spannungskomponenten in



**Abbildung 6.1:** Geschwindigkeit in Strömungsrichtung und Reynoldsspannung  $\langle u'v' \rangle$  für die Kanalströmung bei  $Re_\tau = 180$ . MKM bezeichnet die Simulation von Moser et al. [41] und MGLET die hier vorgestellte Simulation.

unmittelbarer Wandnähe. Der Verlauf der turbulenten Spannungen nahe der Wand wird im Folgenden erklärt.

**Asymptotisches Verhalten der turbulenten Spannungen** Entwickelt man Taylor-Reihen für die Geschwindigkeitskomponenten an der Wand lässt, sich schreiben:

$$u = a_1 + b_1 y + c_1 y^2 + \dots$$

$$v = a_2 + b_2 y + c_2 y^2 + \dots$$

$$w = a_3 + b_3 y + c_3 y^2 + \dots$$

An der Wand sind alle drei Geschwindigkeitskomponenten Null und damit die Konstanten  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 0$  und  $a_3 = 0$ . Die Ableitungen entlang der Wand,  $(\partial u / \partial x)|_{y=0}$  und  $(\partial w / \partial z)|_{y=0}$ , sind ebenfalls Null und aus der Massenerhaltung ergibt sich zusätzlich  $(\partial v / \partial y)|_{y=0} = b_2 = 0$ . Damit ist sofort klar, dass in unmittelbarer Wandnähe die  $v$  Geschwindigkeitskomponente einen quadratischen Verlauf haben muss, während die anderen beiden Komponenten eine lineare Steigung aufweisen. Für die Reynoldsspannungen ergeben sich aus dieser Taylor Reihe die dominanten Terme [50]:

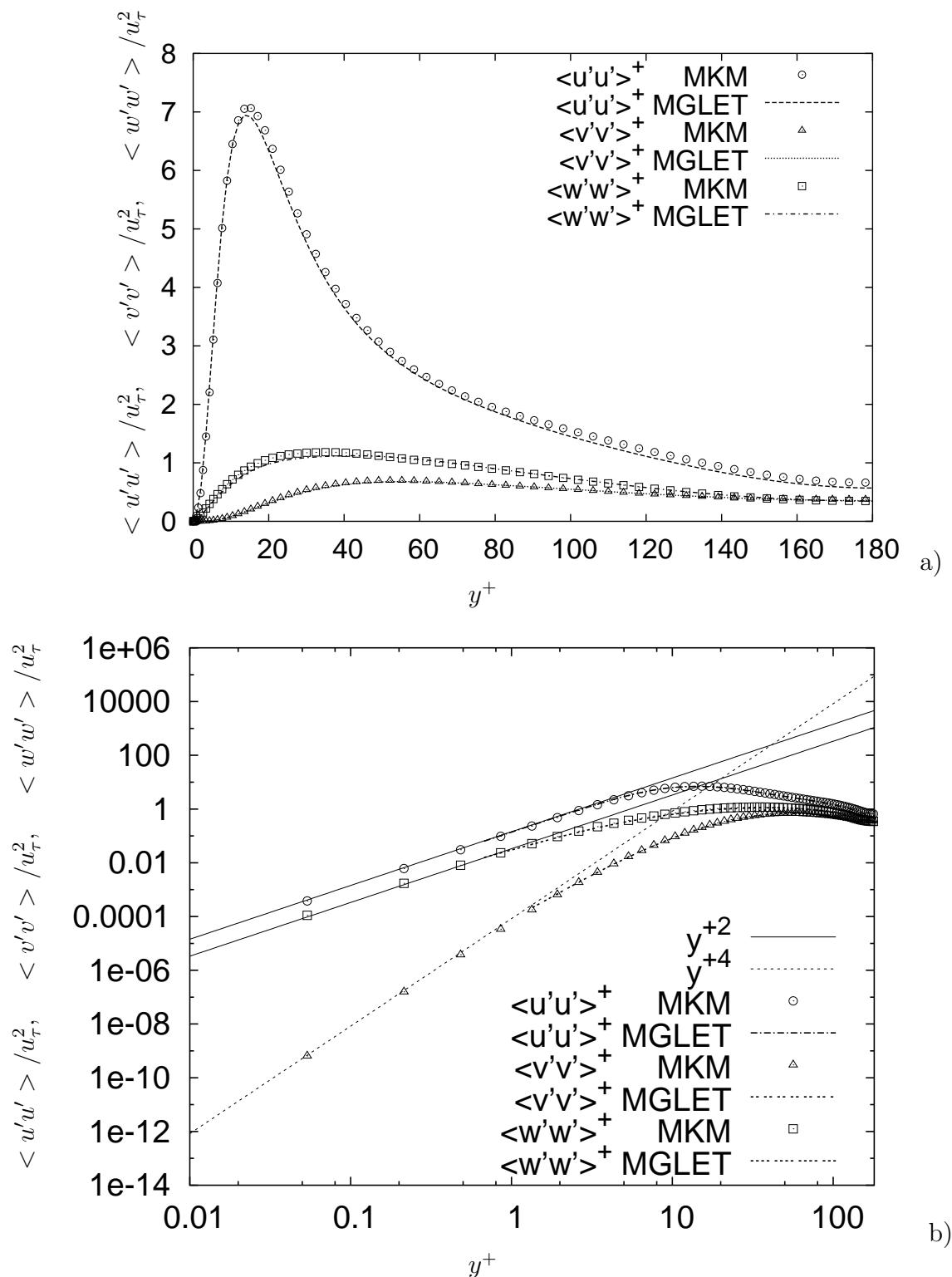
$$\langle u' u' \rangle = b_1^2 y^2 + \dots,$$

$$\langle v' v' \rangle = c_2^2 y^4 + \dots,$$

$$\langle w' w' \rangle = b_3^2 y^2 + \dots,$$

$$\langle u' v' \rangle = b_1 c_2 y^3 + \dots .$$

Das erklärt den in Abbildung 6.2 (b) gezeigten Verlauf der Komponente  $\langle u' v' \rangle$  der Reynoldsspannung. Wie aus der Reihenentwicklung zu erwarten, ergibt sich in der Kanalströmung ein parabolischer Verlauf für die Komponenten  $\langle u' u' \rangle$  und  $\langle w' w' \rangle$ , und ein Verlauf mit der Steigung  $y^{+4}$  für die Komponente  $\langle v' v' \rangle$ . Abbildung 6.2 (b) zeigt die verschiedenen Steigungen der Reynoldsspannungen im logarithmischen Koordinatensystem.



**Abbildung 6.2:** Reynoldsspannungen  $\langle u'u' \rangle$ ,  $\langle v'v' \rangle$ ,  $\langle w'w' \rangle$  für die Kanalströmung bei  $Re_\tau = 180$ . MKM bezeichnet die Simulation von Moser et al. [41] und MGLET die hier vorgestellte Simulation.

## 6.1.2 Grobstruktursimulation

Im Folgenden werden die Ergebnisse der drei hier vorgestellten Turbulenzmodelle gezeigt: Standard Smagorinsky Modell ohne Van Driest Dämpfung, dynamisches Smagorinsky Modell und WALE Modell. Die Parameter des Berechnungsgitters für die Grobstruktursimulation sind in Tabelle 6.1 definiert und für alle Grobstruktursimulationen identisch. Zusätzlich wird das Ergebnis einer grob aufgelösten Direkten Numerischen Simulation, die ebenfalls auf dem LES Gitter berechnet wurde, zum Vergleich herangezogen. Als Referenzlösung wird wieder mit den Daten von Moser et al. [41] verglichen. Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden die DNS Ergebnisse aus dem vorherigen Kapitel hier nicht gezeigt.

Für die Normierung der Profile wurde hier die Schubspannungsgeschwindigkeit aus der zuvor diskutierten DNS Simulation verwendet.

**Mittleres Geschwindigkeitsprofil** Abbildungen 6.3 (a) zeigt das zeitlich gemittelte Geschwindigkeitsprofil. Zusätzlich zu den Grobstruktursimulationen ist auch die Simulation ohne Feinstrukturmodell (GDNS) gezeigt. Im Vergleich zu den Referenzdaten von Moser ergibt sich für die Simulation ohne Feinstrukturmodell eine gute Übereinstimmung in unmittelbarer Wandnähe. Im Inneren des Kanals weicht das Geschwindigkeitsprofile von den Referenzdaten ab.

Die Simulation mit dem Standard Smagorinsky Modell liegt nahe an den Referenzdaten, zeigt aber deutlich schlechtere Ergebnisse in Wandnähe. Das war zu erwarten, da dieses Modell nicht für die Strömung in Wandnähe entwickelt wurde (siehe Kapitel 2.4) und eine zu hohe Wirbelviskosität hervorsagt (siehe Abbildung 6.3 (b)).

Die Erweiterung des Smagorinsky Modells durch die dynamische Prozedur verbessert deutlich das Geschwindigkeitsprofil in unmittelbarer Wandnähe. Dieses Verhalten scheint ebenfalls mit dem Wert der Wirbelviskosität in diesem Bereich korreliert zu sein (vgl. Abbildung 6.3 (b)), der in diesem Bereich niedriger ist als beim Standard Smagorinsky Modell. In der Kanalmitte sind aber wieder Abweichungen von der Referenzlösung zu beobachten. Ähnliches Verhalten für das dynamische Smagorinsky Modell wird in Fröhlich [13] für die Kanalströmung bei  $Re_\tau = 395$  beobachtet.

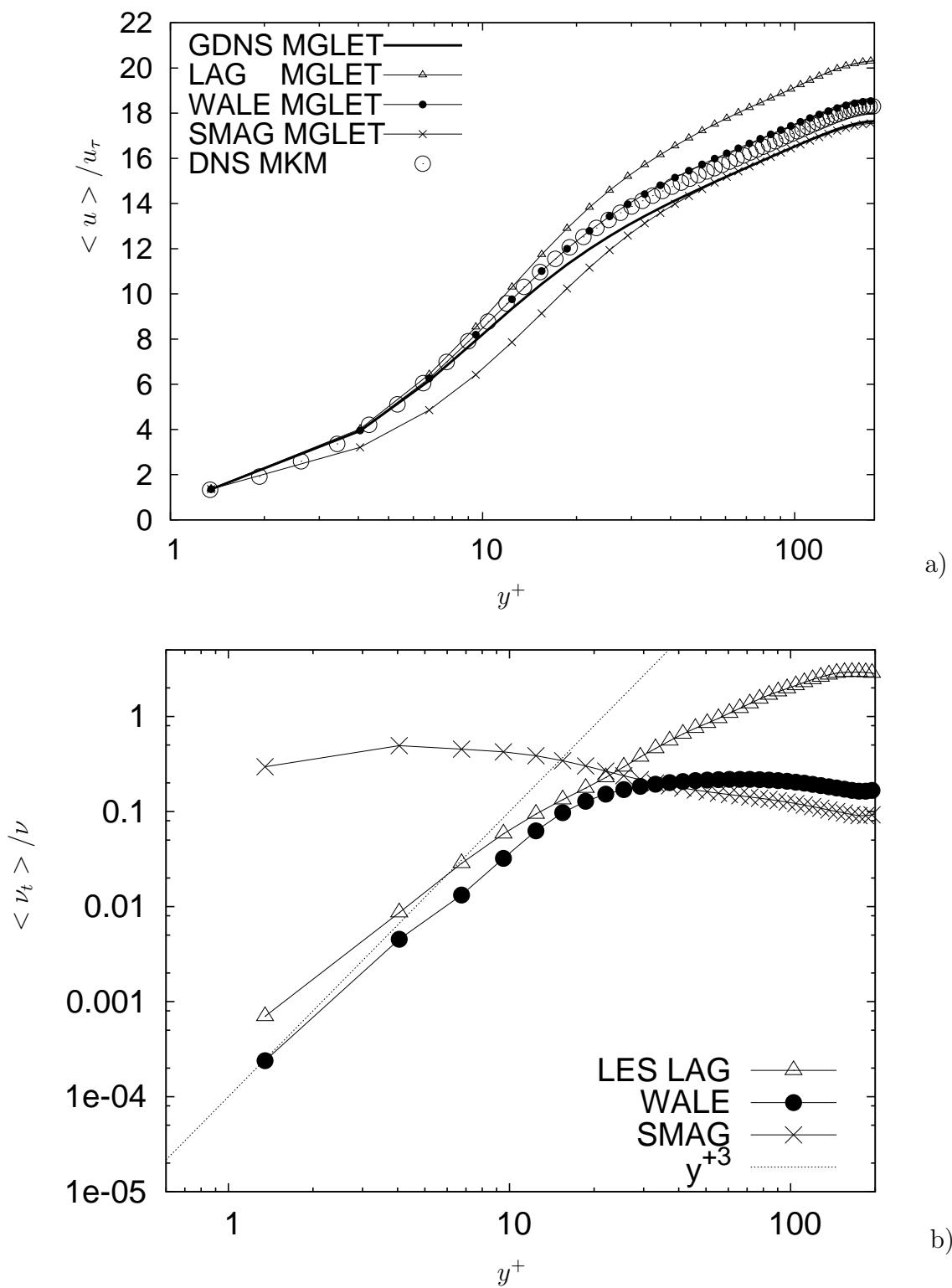
Am besten folgt das WALE Modell der Referenzlösung.

**Mittlere turbulente Viskosität** Wie zuvor besprochen muss die zeitlich gemittelte Wirbelviskosität einen Verlauf proportional zu  $y^{+3}$  in Wandnähe aufweisen. Das entspricht dem Abfall der Komponente  $\langle u'v' \rangle$  des Reynoldsschen Spannungstensors. Das Verhalten der turbulenten Viskosität in Wandnähe zeigt Abbildung 6.3 (b) für die drei Modelle.

Die Wirbelviskosität beim Smagorinsky Modell folgt nahe der Wand nicht dem geforderten Verlauf. Sie bleibt ungefähr konstant oder nimmt tendenziell zu.

Im Vergleich dazu zeigen das dynamische Modell und das WALE Modell in guter Näherung den zu erwartenden Verlauf.

Die hier gezeigten Ergebnisse weisen die gleiche Tendenz auf wie die Untersuchungen von Temmerman und Leschziner [63] bei einer turbulenten Kanalströmung bei  $Re_\tau = 590$ . Dort ergibt sich für das Smagorinsky Modell ebenfalls eine fast konstante turbulente Viskosität nahe der Wand und das dynamische Modell zeigt eine größere turbulente Viskosität als das

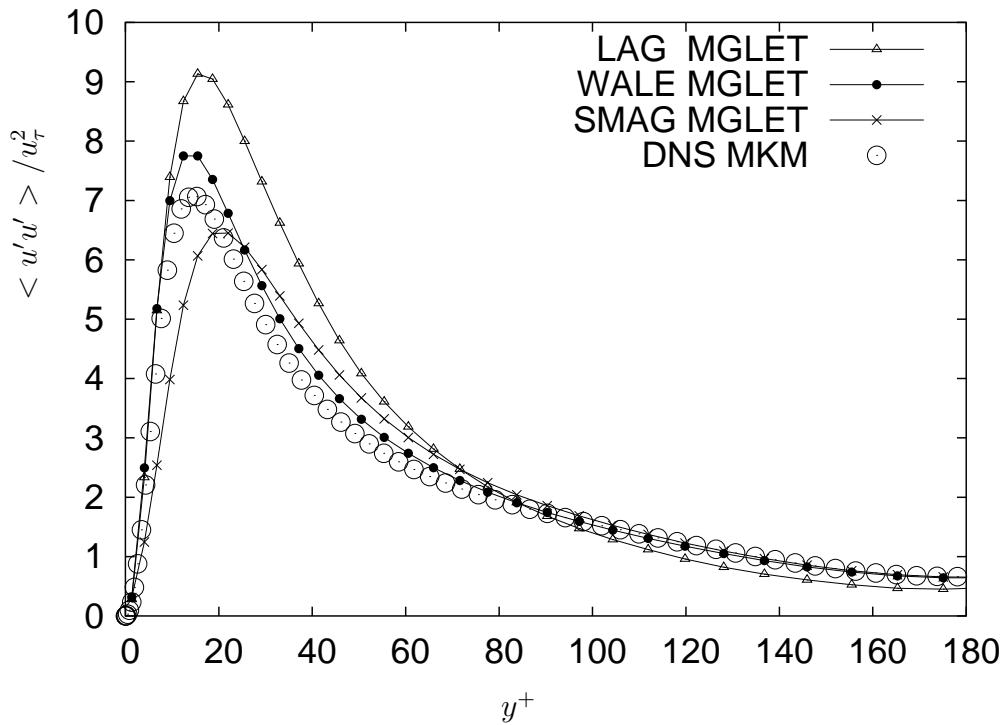


**Abbildung 6.3:** Mittleres Geschwindigkeitsprofil und mittlere Wirbelviskosität für die Kanalströmung bei  $Re_\tau = 180$ . MKM bezeichnet die Simulation von Moser et al. [41]. Gezeigt werden die LES Simulation mit Standard Smagorinsky Modell (SMAG), dynamischem Smagorinsky Modell (LAG) und dem WALE Modell. Die Simulation ohne Turbulenzmodell wird als grob aufgelöste DNS (GDNS) bezeichnet.

WALE Modell.

**Turbulente Spannungen**  $\langle u'u' \rangle$  Abbildung 6.4 zeigt den Verlauf der Normalspannung für die drei Grobstrukturmodelle. Diese zeigen bei der Simulation mit WALE Modell eine gute Übereinstimmung mit den Referenzdaten von Moser et al. [41]. Das dynamische Smagorinsky Modell überschätzt das Maximum der Reynoldsspannung, aber trifft den Verlauf nahe der Wand.

Im Gegensatz dazu wird beim Standard Smagorinsky Modell die Spannung nahe der Wand deutlich unterschätzt. Das steht im Zusammenhang mit dem Verlauf der turbulenten Viskosität, die nahe der Wand nicht gegen Null geht und damit Fluktuationen dämpft.



**Abbildung 6.4:** Reynoldsspannungen  $\langle u'u' \rangle$  für die Kanalströmung bei  $Re_\tau = 180$ . MKM bezeichnet die Simulation von Moser et al. [41]. Gezeigt werden die LES Simulation mit Standard Smagorinsky Modell (SMAG), dynamischem Smagorinsky Modell (LAG) und dem WALE Modell.

**Grobstruktur- und Feinstrukturspannungen** Der Vollständigkeit halber sei hier erwähnt, dass es zur Beurteilung der Grobstruktursimulation möglich ist, beim Reynoldsschen Spannungstensor Grobstruktur und modellierte Feinstruktur zu berücksichtigen:

$$-\langle \bar{u}'_i \bar{u}'_j \rangle = -\langle \bar{u}'_i \bar{u}'_j \rangle + \langle \bar{u}_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \rangle = -\langle R \rangle + \langle \tau^{mod} \rangle$$

Bei niedrigen Reynoldsspannungen ist es aber zu erwarten, dass die modellierten Feinstruk-

tursspannungen  $\langle \tau^{mod} \rangle$  im Vergleich zu den aufgelösten Reynoldsspanngunen  $\langle R \rangle$  vernachlässigbar klein sind und die Beziehung  $\langle R \rangle \gg \langle \tau^{mod} \rangle$  gilt.

Der Grund für diese Annahme ist, dass man bei der Grobstruktursimulation einen Großteil der turbulenten kinetischen Energie auflöst und nur einen kleinen Anteil modelliert (siehe auch Fröhlich [13]). Für die Kanalströmung bestätigt sich diese Argumentation und die modellierten Spannungen sind vernachlässigbar klein. In den Graphen der Reynoldsspannungen würde man keinen Unterschied erkennen, wenn man die modellierten Spannungen zusätzlich berücksichtigt.

## 6.2 DNS der Kanalströmung mit Hügeln

( $Re = 2800$  und  $5600$ )

Die zuvor vorgestellte einfache turbulente Kanalströmung wird hier durch Einbauten erweitert. Der Testfall beinhaltet turbulente Strömungsphänomene und eine Geometrie, die durch das IB Verfahren im Gitter abgebildet wird. Die periodisch angeordneten Hügel werden in den Kanal verbaut, so dass in der Strömung Phänomene wie Ablösung und Wiederanlegen auftreten. Im Prinzip ähnelt der Testfall der Konfiguration, die in Kapitel 5.3 als zweidimensionaler Testfall vorgestellt wurde.

**Entstehung der Hügelkonfiguration** Die hier vorgestellte Konfiguration geht zurück auf Almeida und Heitor [1], die 1993 eine Kanalströmung mit Hügeln in einem Experiment verwirklichten. Dabei wurden zwei unterschiedliche Aufbauten berücksichtigt: Die Strömung über einen einzelnen Hügel und die Strömung über mehrere periodisch angeordnete Hügel. 1995 wurden diese Experimente als Grundlage für den ERCOFTAC/IAHR Workshop verwendet. Da im Experiment der Einfluss der Seitenwände nicht berücksichtigt wurde, entstanden Zweifel an der Vergleichbarkeit zwischen Experiment und Simulation. Weitere Probleme mit der bisherigen Konfiguration zeigte Mellen et al. [33] auf und schlug eine neue Konfiguration vor, welche in dieser Arbeit verwendet wird. Sie etablierte sich als Standardtestfall für die Simulation abgelöster Strömungen mit LES und RANS (Reynolds Averaged Navier Stokes Equations) (siehe auch [33, 14, 63, 64, 23]). Es wird darauf hingewiesen, dass sich im Vergleich zum experimentellen Aufbau von Almeida und Heitor [1] die Hügelkontur selbst nicht unterscheidet. Die wichtigste Modifikation ist ein größerer Abstand der Hügel, der ein Wiederanlegen der Strömung vor dem nachfolgendem Hügel erlaubt. Die mathematische Beschreibung der Hügelkontur ist im Anhang (Abschnitt A.1) gegeben.

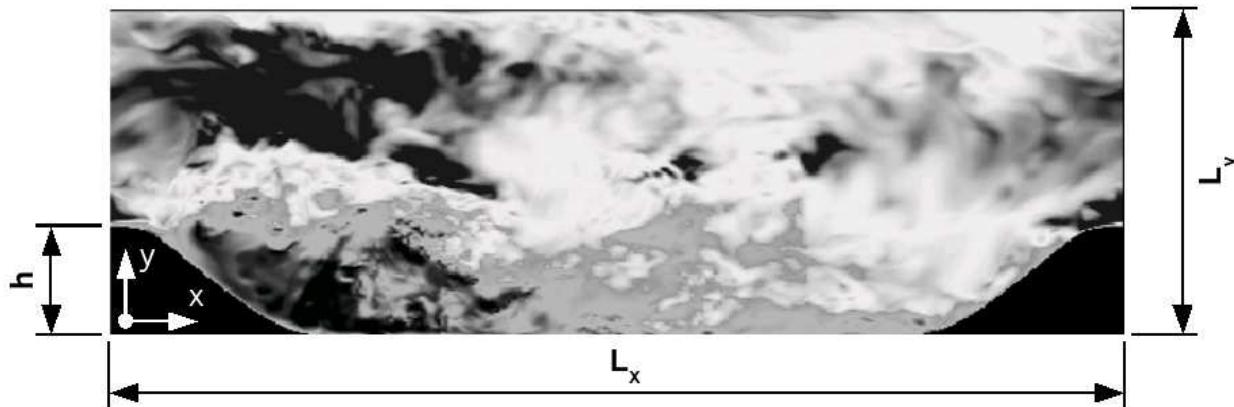
**Experimentelle Daten** Von dem hier verwendeten Setup wurden Experimente in [5] und [52] durchgeführt, die in dieser Arbeit zum Vergleich herangezogen werden. Die experimentellen Daten wurden mittels Particle Image Velocimetry (PIV) und Laser Doppler Anemometrie (LDA) gemessen. Dabei wurde großer Wert auf die Überprüfung der Annahme einer periodischen Strömung gelegt, um die Daten mit der Simulation vergleichen zu können, siehe auch Breuer et al. [5] oder Rapp [52] für eine genaue Beschreibung des Messaufbaus und der verwendeten Messverfahren.

**Numerische Daten** Daten aus numerischen Simulationen sind z.B. von Breuer et al. [5], Fröhlich et al. [14] und Temmerman und Leschziner [64] vorhanden. Die Konfiguration für die numerische Simulation wird im Folgenden vorgestellt.

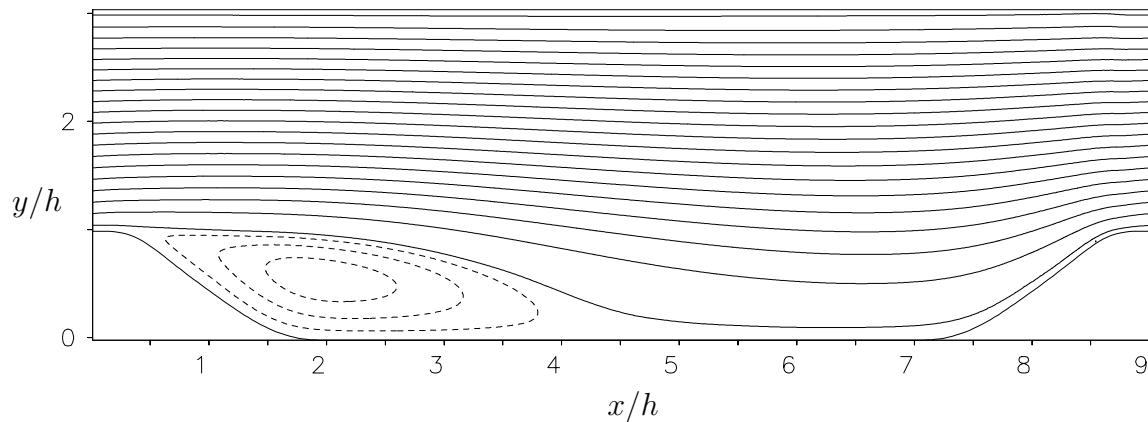
### 6.2.1 Testfall Setup und Topologie der Strömung

In Abbildung 6.5 und 6.6 ist die Konfiguration im Querschnitt zu sehen. Die Hügelstruktur ist zweidimensional und bleibt in  $y$ -Richtung konstant. Der Abstand der Hügel beträgt  $9h$  und ist damit größer als in der ursprünglichen Konfiguration von Almeida und Heitor [1]. Dadurch legt die Strömung im Mittel bereits wieder an der flachen Platte an und wird anschließend wieder entlang des nachfolgenden Hügels beschleunigt. Der nachfolgende Hügel

hat jetzt wenig Einfluss auf den Wiederanlegepunkt und die Anforderungen an die Qualität der numerischen Auflösung und der Modelle steigt [5]. Um den numerischen Aufwand zu reduzieren, wurde in der neuen Konfiguration auch auf Seitenwände verzichtet und periodische Randbedingungen angenommen. Von Mellen et al. [33] wurden die Dimensionen  $L_x = 9h$ ,  $L_y = 3.035h$  und  $L_z = 4.5h$  basierend auf der Hügelhöhe  $h$  eingeführt. Die periodischen Randbedingungen in Strömungsrichtung und spannweiter Richtung machen den Testfall frei von der Unsicherheit, die bei Einströmrandbedingungen besteht. Trotzdem bietet er komplexe Strömungsphänomene wie Ablösung und Wiederanlegung, die für numerische Simulationen eine Herausforderung darstellen.



**Abbildung 6.5:** Instantane Geschwindigkeit in Strömungsrichtung bei  $Re = 5600$ .



**Abbildung 6.6:** Stromlinien für das zeitlich gemittelte Strömungsfeld bei  $Re = 5600$ .

Die Strömung wird durch eine Volumenkraft angetrieben, die mit einem Druckgefälle im Experiment vergleichbar ist. So wird der Volumenstrom im engsten Querschnitt eingestellt und dort die flächengemittelte Geschwindigkeit  $u_b$  (engl. bulk velocity) konstant gehalten. Die Reynoldszahl wird mit Hilfe der Geschwindigkeit  $u_b$  und der kinematischen Viskosität  $\nu$  definiert als  $Re = u_b h / \nu$ . In Abbildung 6.5 wird der momentane Strömungszustand bei  $Re = 5600$  anhand der Geschwindigkeitskomponente in Strömungsrichtung ( $x$ ) gezeigt. Gut zu erkennen sind die komplexen turbulenten Strömungsstrukturen. Besonders interessant ist dabei der Bereich der Ablösung auf der linken Hügelspitze, wo sich eine starke

Scherschicht von der Hügelkontur ablöst und zu einer freien Scherschicht entwickelt. Unter der Scherschicht formt sich die Rezirkulationszone, die wie der Ablöse- und Wiederanlegepunkt selbst starken zeitlichen Fluktuationen unterworfen ist. Sie kann zu manchen Zeitpunkten bis zum nachfolgenden Hügel reichen. Dabei bilden sich auch einzelne Fluidballen aus, die kleine geschlossene Rezirkulationszonen beinhalten und stromab konvektiert werden. Im zeitlichen Mittel lässt sich eine große Rezirkulationszone erkennen (siehe Abbildung 6.6).

## 6.2.2 Gitterauslegung für die DNS

In Kapitel 2.3 wurden zwei Kriterien für die Auslegung eines DNS Gitters eingeführt: Die Kolmogorov Längenskala und viskose Wandeinheiten. Um diese Kriterien bzw. Längenmaße für die Kanalströmung mit Hügeln bei  $Re = 2800$  abzuschätzen, wurde eine DNS auf einem Testgitter durchgeführt. Für die Auslegung des Testgitters wurde die Auflösung einer klassischen Kanalströmung ohne Einbauten bei der gleichen Reynoldszahl als Startpunkt gewählt. Die dann berechneten Kriterien aus der Testsimulation wurden verwendet, um das endgültige Gitter zu bestimmen. Dabei kann es sein, dass bei der Simulation mit grobem Gitter die berechneten Kriterien überschätzt werden und das endgültige Gitter zu grob ausgelegt wird. In diesem Fall war das Testgitter bereits relativ fein aufgelöst und die Längenmaße, die auf dem finalen Gitter berechnet wurden, bestätigten die ersten Abschätzungen [46].

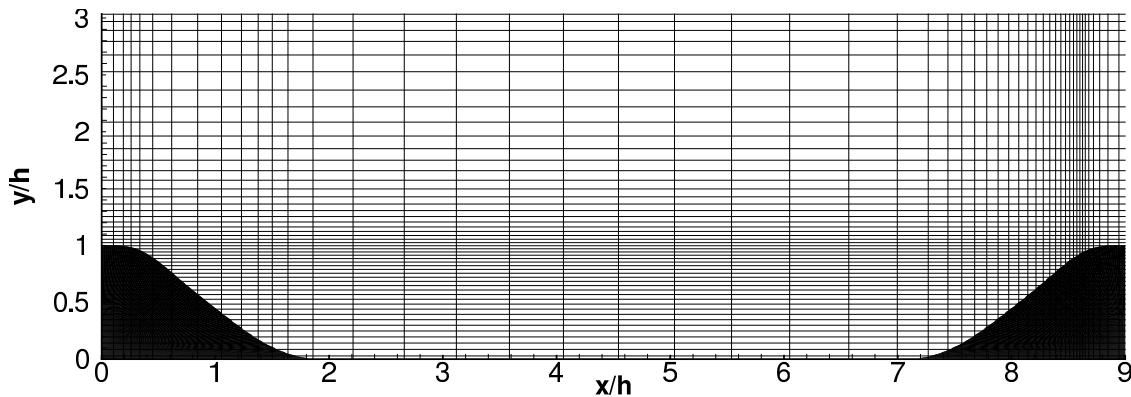
Für die Simulation bei  $Re = 5600$  wurde dann das Skalierungsgesetz angewandt, das eine Abschätzung für die kleinste Längenskala  $\eta_k$  bei turbulenten Strömungen angibt:

$$\frac{L}{\eta_k} \sim Re^{\frac{3}{4}} \quad (6.1)$$

und das Gitter der DNS bei  $Re = 2800$  entsprechend verfeinert. Der numerische Aufwand steigt dabei ebenfalls in Abhängigkeit von der Reynoldszahl:

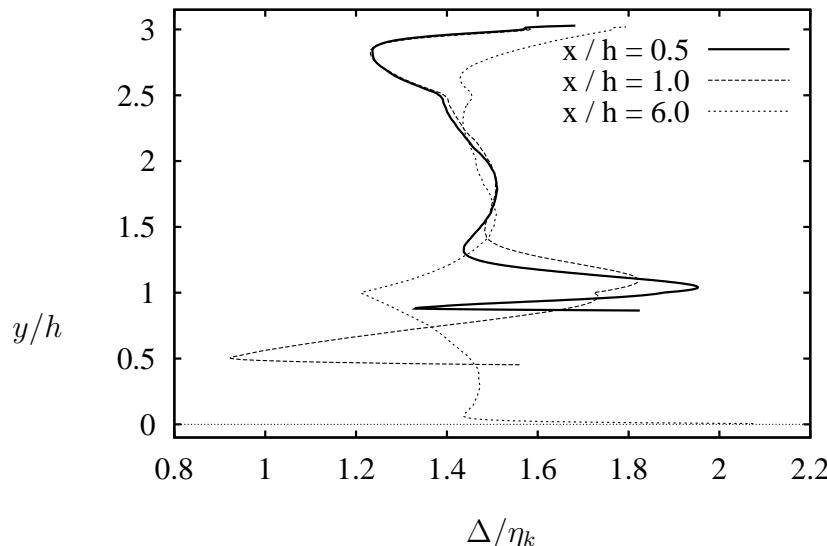
$$\text{Numerischer Aufwand} \sim Re^{9/4}. \quad (6.2)$$

Durch die bereits vorhandene Kenntnis der Strömung wurden Bereiche identifiziert, wo mit Hilfe von Gitterstreckung zusätzlich Gitterpunkte gespart werden können. Z.B. in Bereichen geringer Wandschubspannung wurde das Gitter vergröbert, wobei der Streckungsfaktor immer unter 3% blieb. Abbildung 6.7 zeigt das resultierende Berechnungsgitter. Man kann erkennen, dass an der Spitze des zweiten Hügels das Gitter stark verfeinert ist. Die Ursache hierfür liegt an den starken Gradienten der Strömung, die nur mit einer ausreichenden Anzahl an Gitterpunkten wiedergegeben werden können. Die starken Geschwindigkeitsgradienten spiegeln sich auch in der Wandschubspannung wieder, wie in Abbildung 6.10 zu sehen ist. Es wird angemerkt, dass auch für die Berechnung der Wandschubspannung mit der Immersed Boundary Methode eine feine Auflösung in diesem Bereich notwendig ist (vergleiche hierzu auch Dröge [9]).



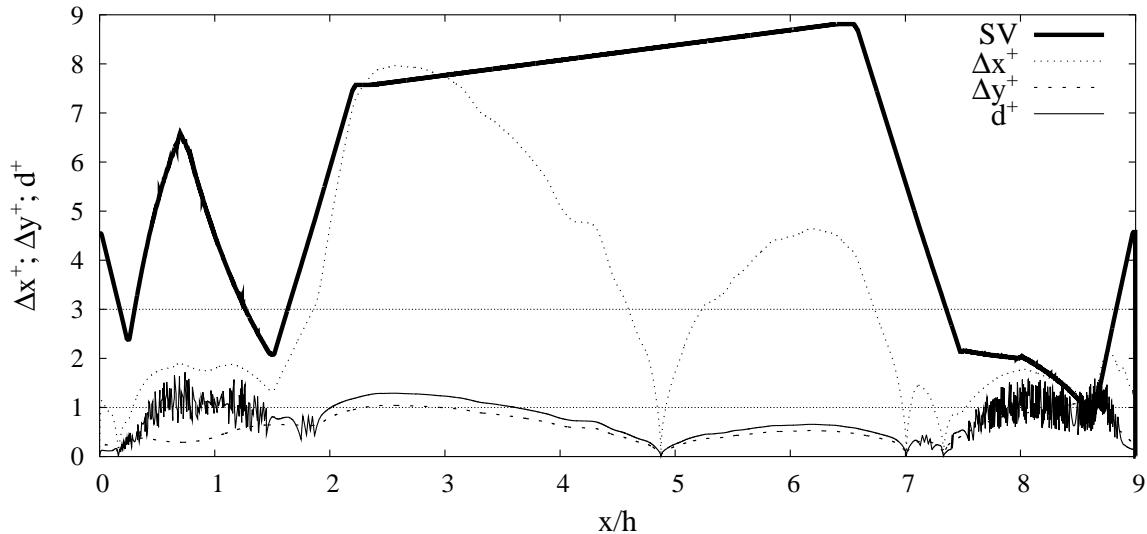
**Abbildung 6.7:** Berechnungsgitter der turbulenten Kanalströmung mit Hügeln bei  $Re = 5600$ ; dargestellt ist jede 15te Gitterlinie.

**Kolmogorov Längenskala** Die Qualität der numerischen Auflösung im Rechengebiet wird hier anhand der Kolmogorov Länge für die DNS bei  $Re = 5600$  gezeigt. Wie schon in Kapitel 2 erwähnt, gibt es unterschiedliche Auffassungen über die Größe der Gitterweite im Vergleich zur Kolmogorov Länge. Hier wird Pope [50] angeführt, der ein Maximum der Dissipation bei  $24\eta_k$  schätzt. Damit müssen Strukturen in der Größenordnung  $24\eta_k$  aufgelöst werden, um die turbulente Energiekaskade richtig wiederzugeben. Abbildung 6.8 zeigt den Quotienten aus Filterweite des Gitters und der Kolmogorov Länge für drei repräsentative Ausschnitte der Simulation bei  $x/h = 0.5$ ,  $x/h = 1.0$  und bei  $x/h = 6.0$ . Die Filterweite ist definiert durch  $\Delta = (\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z)^{1/3}$ . Wie man aus der Abbildung erkennen kann, sind Strukturen der Größe  $24\eta_k$  sehr gut aufgelöst, da der Quotient überall zwischen  $1 < \Delta/\eta_k < 2$  liegt.



**Abbildung 6.8:** Quotient aus Filterweite des Gitters und Kolmogorov Längenskala für das DNS Gitter bei  $Re = 5600$ . Gezeigt werden die Positionen  $x/h = 0.5, 1.0$  und  $6.0$ .

**Wandnahe Auflösung und viskoses Längenmaß** Neben der Kolmogorov Längenskala wurde in Kapitel 2 auch das viskose Längenmaß als Kriterium für die Gitterauflösung in Wandnähe angeführt. Abbildung 6.9 zeigt die Gitterweiten  $\Delta x^+$  und  $\Delta y^+$  an der IB Wand sowie den Abstand des Druckpunktes  $d^+$  von der IB Wand in viskosen Einheiten. Es ist gut zu erkennen, dass der Abstand  $d^+$  um den Wert eins schwankt und somit in der viskosen Grenzschicht liegt. Damit ist eine gute Wandauflösung für die DNS gewährleistet. Weiterhin wird in Abbildung 6.9 das Seitenverhältnis SV der Zellen an der Wand gezeigt, das den Wert 9 nicht überschreitet.



**Abbildung 6.9:** Gitterparameter: Gitterweiten  $\Delta x^+$  und  $\Delta y^+$  an der IB Wand sowie der Abstand des Druckpunktes  $d^+$  von der IB Wand in viskosen Einheiten sowie das Seitenverhältnis (SV) der Zellen an der Wand ( $Re = 5600$ ).

**Optimierungsaufgabe** Das Erstellen eines Berechnungsgitters stellt eine Optimierungsaufgabe dar. Gewünscht ist ein Minimum an Berechnungspunkten bei einer maximal guten Auflösung. Besonders bei der DNS, aber auch bei der Grobstruktursimulation, muss darauf geachtet werden, dass unnötige Gitterpunkte vermieden werden. Andernfalls ist der numerische Aufwand nicht mehr vertretbar. Die Einsparung von Punkten muss beim hier verwendeten kartesischen Gitter durch Strecken und Stauchen der Zellen geschehen. Dabei werden zwei limitierende Faktoren immer beachtet. Die Gitterstreckung muss für die DNS unter 3% bleiben und das Seitenverhältnis der Zellen muss kleiner als 9 sein. Da bei der DNS sowie bei einer LES ohne Wandmodell das Verhalten der Strömung in Wandnähe aufgelöst werden muss, ist hier das Gitter besonders fein. Dadurch entstehen aber im Strömungsgebiet überflüssige Zellen, auch wenn dort eine geringere Auflösung ausreichen würde. Dieses Problem ist bei komplexen Geometrien und kartesischen Gittern nicht zu vermeiden.

### 6.2.3 Ergebnisse im Vergleich zu Daten aus der Literatur

Im Folgenden werden die Ergebnisse für die DNS Simulationen bei  $Re = 2800$   $Re = 5600$  vorgestellt. Die Simulation bei  $Re = 2800$  wird mit den Ergebnissen von Breuer et al. [5] verglichen. Experimentelle Daten stehen hier nicht für den Vergleich zur Verfügung. Die Simulation bei  $Re = 5600$  wird sowohl mit den Ergebnissen von Breuer et al. [5] als auch mit den experimentellen Daten von Rapp [52] verglichen. Zuerst werden die numerischen Ergebnisse verglichen und anschließend Vergleiche mit dem Experiment vorgestellt. Die Ergebnisse in diesem Kapitel wurden mit der IB Methode mit Punktewerten und der Interpolation mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate berechnet. Es wird erwartet, dass der Einfluss der Massenkonservativität vernachlässigbar ist, da die Simulation wandaufgelöst ist und der erste Gitterpunkt in der viskosen Grenzschicht liegt.

#### Vergleich von numerischen Ergebnissen bei $Re = 2800$ und $Re = 5600$

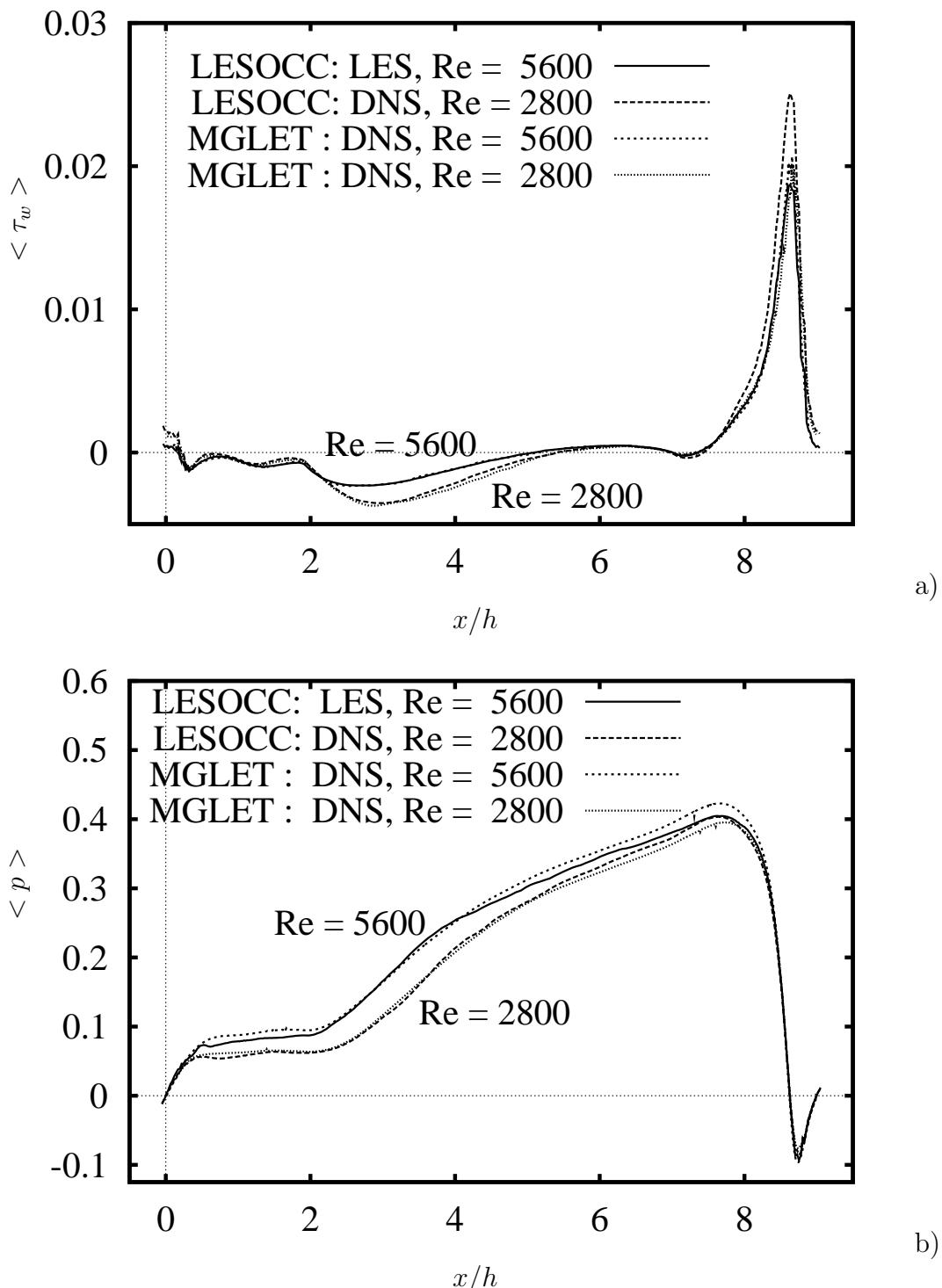
Im Folgenden werden die Ergebnisse der DNS bei  $Re = 2800$  und  $Re = 5600$  vorgestellt. Tabelle 6.2 gibt eine Übersicht über die wichtigsten Parameter der Simulationen. Die Abkürzung LESOCC bezeichnet die Simulationen von Breuer et al. [5] auf einem krummlinigen, konturangepassten Gitter und MGLET die hier vorgestellten DNS Simulationen.

Fall Nr.	Re	Typ	$N_{tot}/10^6$	$N_{span}$	$\Delta t/10^{-3}$	$T_{avg}$	Code
1	2800	DNS	13.1	200	2.0	1249	LESOCC
2	2800	DNS	48.0	304	1.0	562	MGLET
3	5600	LES	13.1	200	2.0	1303	LESOCC
4	5600	DNS	231.0	404	1.0	343	MGLET

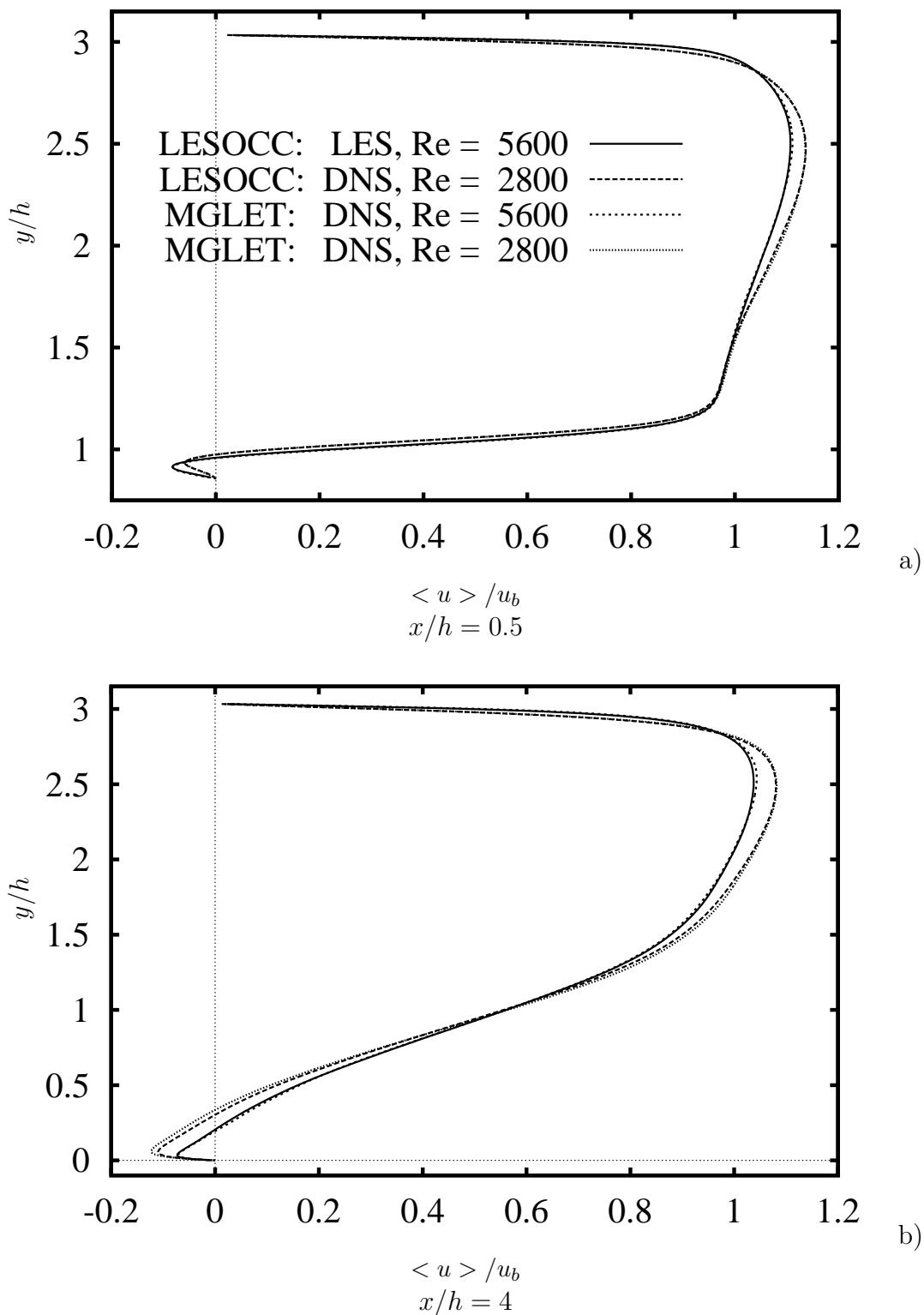
**Tabelle 6.2:** Parameter der durchgeführten Simulationen. Dabei ist  $N_{tot}$  die Anzahl der Gitterpunkte,  $N_{Span}$  die Anzahl der Gitterpunkte in spannweiter Richtung (z) und  $T_{avg}$  die Zeit für die Generierung statistischer Mittelwerte für die Simulation von Breuer et al. [5] und der hier vorgestellten Simulationen (MGLET).

**Wandschubspannung und Druck entlang der Wand:** Zuerst werden zwei globale Strömungsgrößen, nämlich Wandschubspannung und Wanddruck, betrachtet. Sie werden mit numerischen Daten von Breuer verglichen. An der Wandschubspannung (vgl. Abbildung 6.10) ist zu erkennen, dass bei beiden Reynoldszahlen der Ablöse- und der Wiederanlegepunkt gut mit der Simulation von Breuer übereinstimmt. Leichte Unterschiede ergeben sich am Punkt der maximalen Wandschubspannung. Diese Abweichungen sind aber kein Anzeichen dafür, dass die Simulationsergebnisse stark voneinander abweichen. Geschwindigkeitsprofile an diesem Querschnitt zeigen eine gute Übereinstimmung trotz abweichender Wandschubspannung. Auch der Druckverlauf zeigt in allen Simulationen das zu erwartende Plateau in der Rezirkulationszone [5].

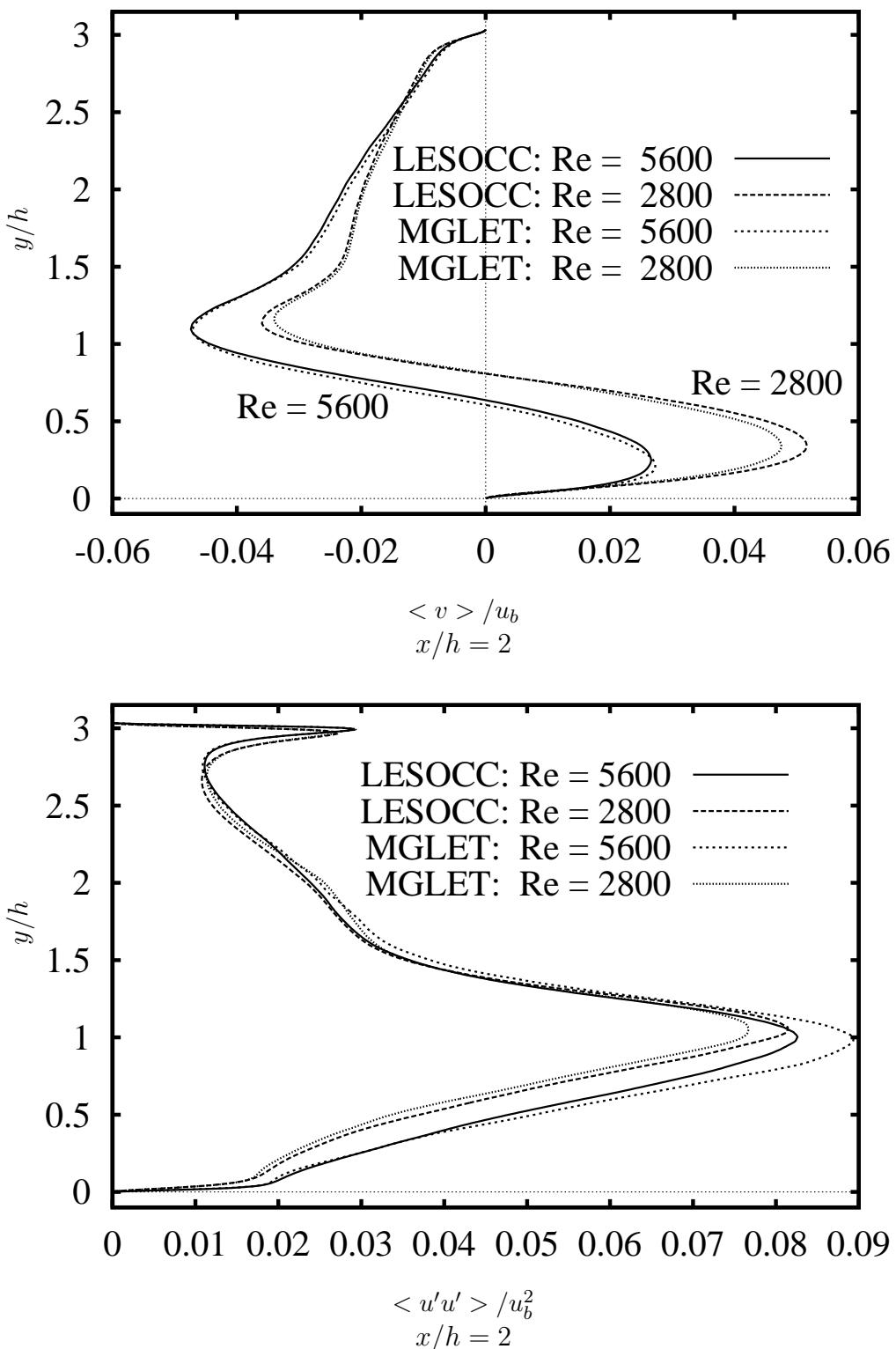
**Mittlere Geschwindigkeitsprofile:** Abbildung 6.11 zeigt repräsentative Geschwindigkeitsprofile bei  $x/h = 0.5$ ,  $x/h = 2$  und  $x/h = 4$ . Lediglich bei der vertikalen Geschwindigkeitskomponente bei  $x/h = 2$  findet sich ein leicht unterschiedliches Maximum. Ge-



**Abbildung 6.10:** Wandschubspannung (a) und Druckverlauf (b) der DNS bei  $Re = 2800$  und  $Re = 5600$  (MGLET) im Vergleich zu den Simulationsergebnissen von Breuer et al. [5] (LESOCC).



**Abbildung 6.11:** Geschwindigkeit in Strömungsrichtung der DNS bei  $Re = 2800$  und  $Re = 5600$  (MGLET) im Vergleich zu den Simulationsergebnissen von Breuer et al. [5] (LESOCC).



**Abbildung 6.12:** Wandnormale Geschwindigkeit und Reynoldsspannung  $\langle u' u' \rangle$  der DNS bei  $Re = 2800$  und  $Re = 5600$  (MGLET) im Vergleich zu den Simulationsergebnissen von Breuer et al. [5] (LESOCC) .

nerell findet man eine sehr gute Übereinstimmung für die Geschwindigkeitskomponenten [5].

**Turbulente Spannungen:** Die Abweichungen der turbulenten Spannung  $\langle u'u' \rangle$  an der Position  $x/h = 2$  in Abbildung 6.12 sind repräsentativ für die Übereinstimmung der Simulationsergebnisse. Kleine Abweichungen sind sichtbar bei den Extrema der Profile.

Auch für die Extremwerte von  $\langle u'v' \rangle$  und  $\langle v'v' \rangle$  bei  $x/h = 2$  sind an der Position der Scherschicht kleine Abweichungen zu erkennen. Die Abweichungen können damit erklärt werden, dass die hier vorgestellte Simulation bei  $Re = 5600$  eine DNS ist und die Simulation von Breuer eine LES. Trotzdem kann die Übereinstimmung als zufriedenstellend bewertet werden [5].

### Vergleich mit experimentellen Ergebnissen

Wie schon zuvor erwähnt, stehen für die Reynoldszahl  $Re = 2800$  keine experimentellen Ergebnisse zur Verfügung. Für die Simulation bei  $Re = 5600$  werden die Ergebnisse mit experimentellen Ergebnissen von Rapp [52] verglichen. Hier wird wieder auf Breuer et al. [5] und Rapp [52] für eine genaue Beschreibung des Messaufbaus und der verwendeten Messverfahren verwiesen. Um die periodischen Randbedingungen im Experiment nachzubilden, sind in einem Kanal mehrere Hügel hintereinander angeordnet. Eine Idee der experimentellen Konfiguration zeigt Abbildung 6.13, in der das gleiche Strömungsfeld (aus der Simulation) zweimal hintereinander gezeigt wird.

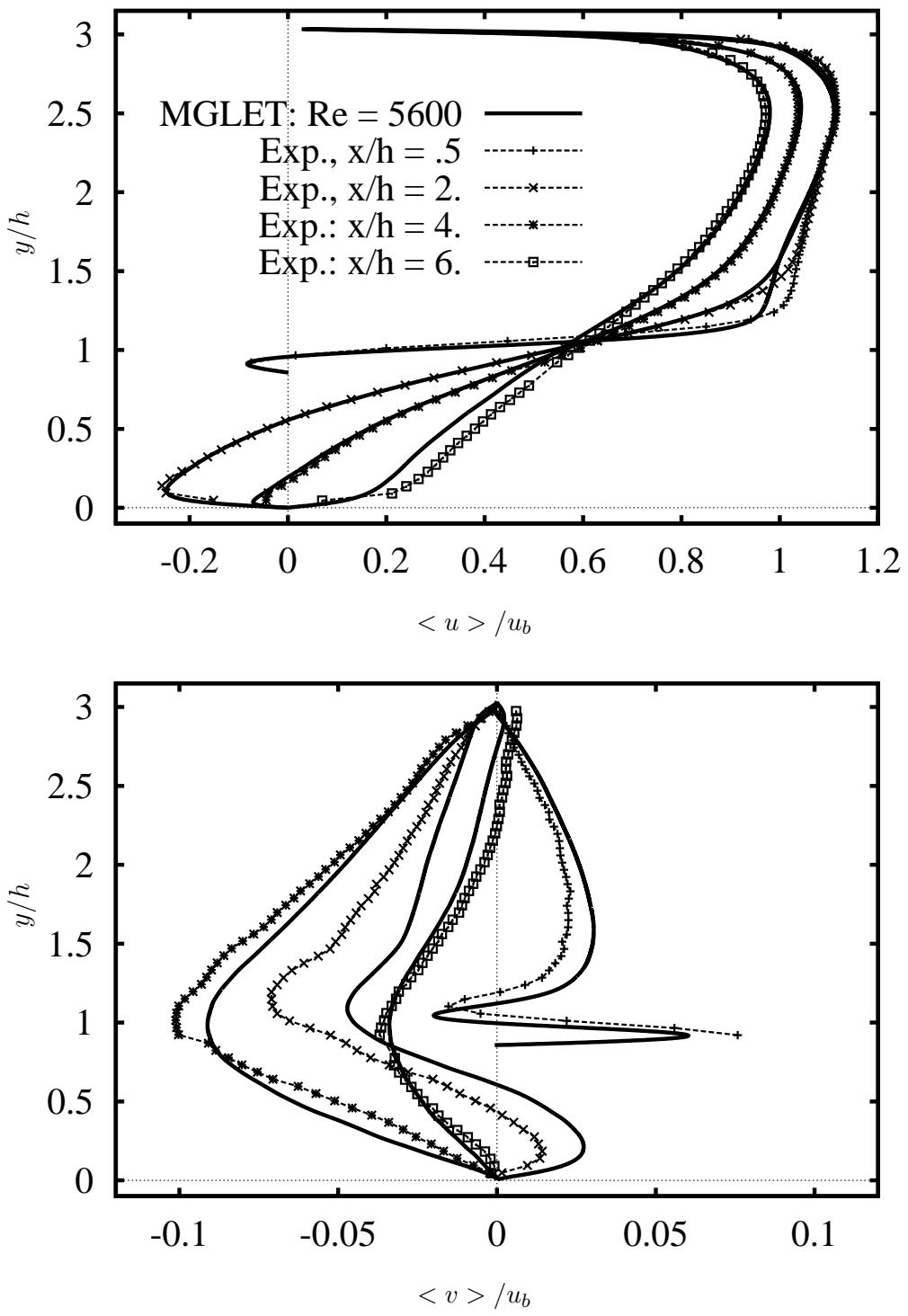


**Abbildung 6.13:** Instantanes Geschwindigkeitsfeld aus der Simulation für zwei hintereinander angeordnete Hügel.

**Mittlere Geschwindigkeitsprofile:** Abbildung 6.14 zeigt einen Vergleich der Geschwindigkeitsprofile an unterschiedlichen Positionen. Abweichungen lassen sich im Bereich der Scherschicht erkennen, wo die experimentellen Daten leicht höhere Geschwindigkeiten zeigen.

Die vertikale Geschwindigkeitskomponente ist eine Größenordnung kleiner als die Hauptströmungskomponente und hier finden sich größere Abweichungen. Die größten Abweichungen liegen bei  $x/h = 2$ . Alle anderen Profile zeigen bessere Übereinstimmung. Es wird bemerkt, dass der gleiche Trend bei den Abweichungen auch bei  $Re = 10595$  beobachtet wird und auf ein systematisches Verhalten schließen lässt [5].

**Numerische Genauigkeit und Messgenauigkeit:** In der Messung stellte sich heraus, dass die Messung der Reynoldsspannungen mit sinkender Reynoldszahl anspruchsvoller wird.



**Abbildung 6.14:** Vergleich der DNS Simulation bei  $Re = 5600$  (MGLET) mit experimentellen Daten von Rapp [52] (Exp.) an unterschiedlichen Positionen für die Geschwindigkeit in Hauptströmungsrichtung und die vertikale Geschwindigkeit.

Rapp [52] zeigte, dass im Experiment für  $Re = 5600$  noch keine vollständig homogene Strömung ausgebildet ist und z.B. die Reynoldsspannungen zwar einen ähnlichen Verlauf zeigen, aber im Vergleich zur Simulation systematisch höher liegen. Aus diesem Grund werden die Reynoldsspannungen hier nicht zum Vergleich herangezogen und es wird auf Rapp [52] verwiesen. Fluktuationen der Wasserpumpe wurden als möglicher Grund für die systematischen Abweichungen in Erwägung gezogen. Diese Vermutung wurde aber durch high-pass Filterung entkräftet [5].

## 6.3 Grobstruktursimulation der Kanalströmung mit Hügeln ( $Re = 10595$ )

Im Folgenden werden die Konfigurationen und Ergebnisse für die Grobstruktursimulationen bei  $Re = 10595$  vorgestellt. Neben der Vorstellung der Ergebnisse im Vergleich zu Referenzsimulationen und Experiment sollen folgende Fragestellungen untersucht werden:

- Welches der Feinstrukturmodelle erzielt die besten Ergebnisse?
- Wie hängt das Ergebnis vom Berechnungsgitter ab?
- Welchen Einfluss hat die Flusskorrektur auf die Ergebnisse?

Hierfür wird der Testfall aus dem vorhergehenden Abschnitt für die höhere Reynoldszahl  $Re = 10595$  mit Hilfe der Grobstruktursimulation berechnet. Für die Reynoldszahl  $Re = 10595$  ist der numerische Aufwand einer DNS zu groß und die Gitterauflösung wird für die Grobstruktursimulation reduziert. Zwei Gitterauflösungen werden untersucht.

Im Folgenden wird zuerst auf die Unterschiede der Strömungstopologie bei  $Re = 10595$  im Vergleich zur Strömung bei  $Re = 5600$  eingegangen. Dabei wird mit einer Simulation von Breuer et al. [5] verglichen. Anschließend werden die Berechnungsgitter und Konfigurationen für die Grobstruktursimulation vorgestellt. Die Ergebnisse einer der Grobstruktursimulationen wird mit Simulationen von Breuer et al. [5] sowie Fröhlich et al. [14] und dem Experiment von Rapp [52] verglichen und validiert. Dann werden die Ergebnisse für unterschiedliche Turbulenzmodelle sowie Gitterauflösungen gegenübergestellt und der Einfluss der IB Flusskorrektur untersucht. Zuerst wird die Strömungstopologie bei der erhöhten Reynoldszahl besprochen.

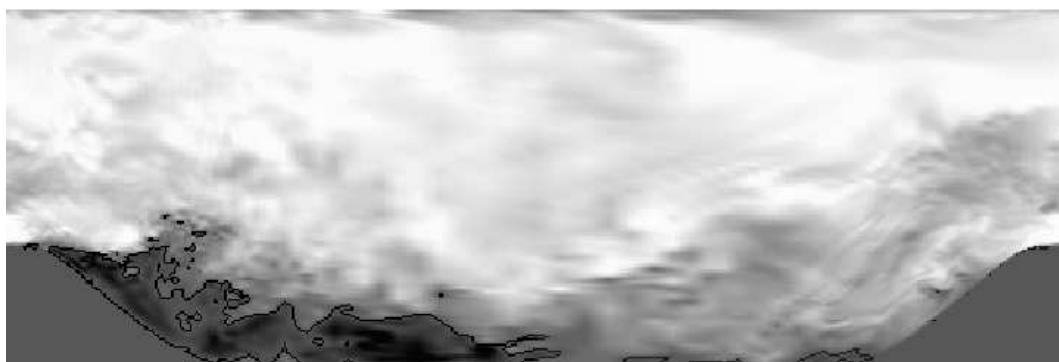
### 6.3.1 Topologie der Strömung

Hier wird die Topologie der Strömung bei der erhöhten Reynoldszahl vorgestellt und die Unterschiede im Strömungsverhalten zu der in Abschnitt 6.2 mittels DNS betrachteten Strömung bei  $Re = 5600$  herausgearbeitet. Hierzu werden Daten von Breuer et al. [5] sowie die hier vorgestellte Simulation *4mWaleF* verwendet. Die Erläuterungen zu der Abkürzung *4mWaleF* finden sich in Tabelle 6.4 auf Seite 143. Die Gitterparameter der Simulation *4mWaleF* finden sich in Tabelle 6.3 auf Seite 138 und die genaue Gitterbeschreibung folgt im nächsten Abschnitt. Hier wird bereits vorgegriffen, dass die Simulation *4mWaleF* die beste Übereinstimmung mit der Simulation von Breuer et al. [5] und dem Experiment von Rapp [52] zeigt, siehe auch Tabelle 6.4 für alle hier vorgestellten Grobstruktursimulationen.

#### Qualitativer Vergleich

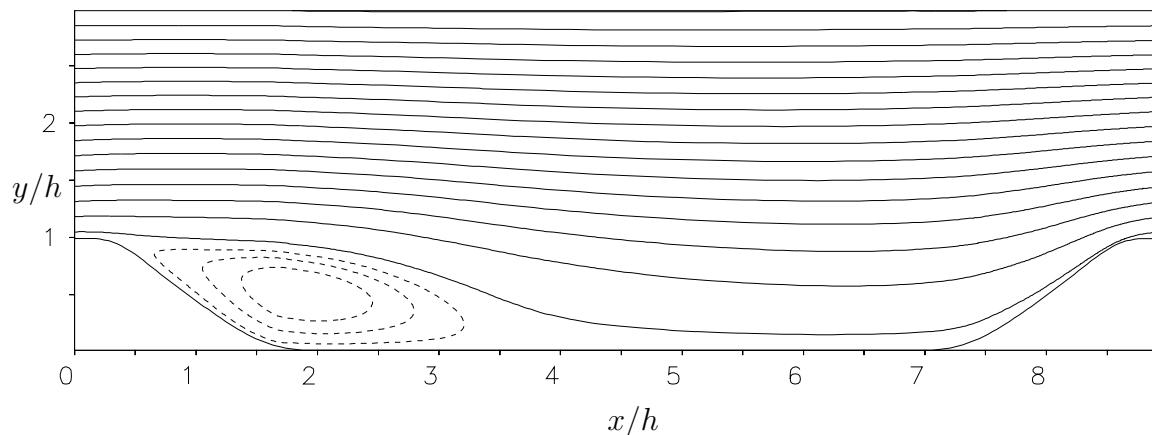
Abbildung 6.15 zeigt das instantane Geschwindigkeitsfeld der Simulation *4mWaleF* (siehe Tabelle 6.3). Im Vergleich zu der DNS bei  $Re = 5600$  (siehe Abbildung 6.5) erkennt man qualitativ keinen markanten Unterschied zwischen den instantanen Strömungsfeldern. Bei der höheren Reynoldszahl sind kleinere turbulente Strukturen zu erwarten, die aber bei den gewählten Gitterauflösungen nicht sichtbar sind, sondern durch das Turbulenzmodell modelliert werden. In Breuer et al. [5] wurden die zunehmend kleiner werdenden turbulenten Strukturen durch die Wirbelstärke visualisiert. Hierfür wurden die Simulationen in

Breuer et al. [5] für alle betrachteten Reynoldszahlen auf dem gleichen Gitter durchgeführt.



**Abbildung 6.15:** Instantanes Geschwindigkeitsfeld mit Isolinie bei  $U = 0$  der Grobstruktursimulation bei  $Re = 10595$  für die Simulation *4mWaleF*.

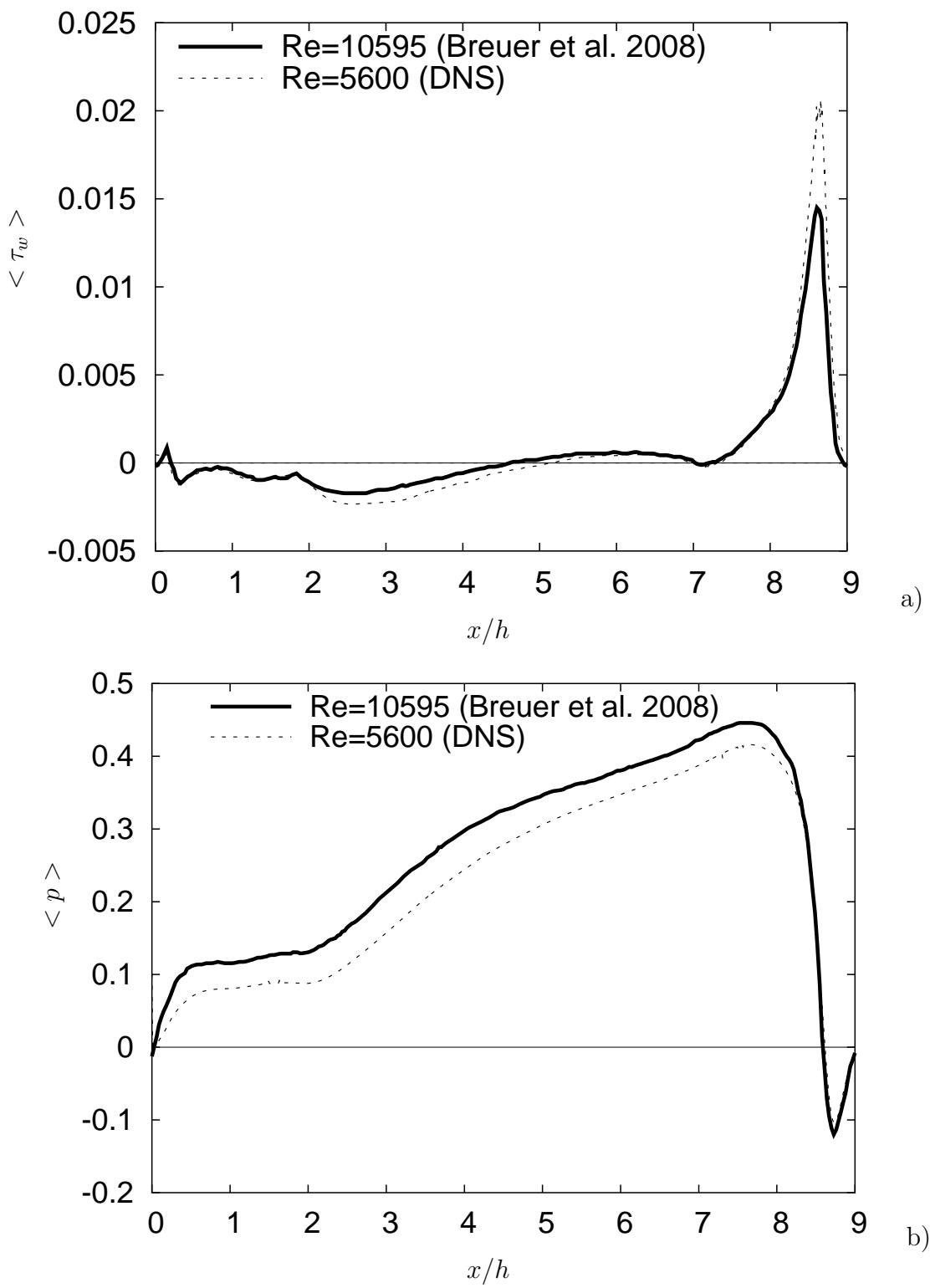
Abbildung 6.16 zeigt qualitativ den Verlauf der Stromlinien für das zeitlich gemittelte Strömungsfeld der Simulation *4mWaleF* (siehe Tabelle 6.3) bei  $Re = 10595$ . Im Vergleich dazu erkennt man bei den Stromlinien der DNS bei  $Re = 5600$  (siehe Abbildung 6.6) keine markanten Unterschiede. Allenfalls eine Verkürzung der Rezirkulationszone deutet sich hier bereits ab.



**Abbildung 6.16:** Stromlinien der Grobstruktursimulation für die zeitlich gemittelte Strömung bei  $Re = 10595$  für die Simulation *4mWaleF*.

### Quantitativer Vergleich

Für den quantitativen Vergleich der beiden Reynoldszahlen wird die DNS aus Kapitel 6.2 für  $Re = 5600$  und die LES von Breuer et al. [5] für  $Re = 10595$  herangezogen. Die LES von Breuer wird verwendet, da sie auf einem sehr feinen konturangepassten Berechnungsgitter durchgeführt wurde und als Referenzlösung angesehen werden kann. Es wird auf globale Größen wie Wandschubspannung, Druckverlauf und Ablöse- und Wiederanlegepunkte eingegangen. Die Ergebnisse der Simulation *4mWaleF* und der weiteren hier vorgestellten Simulationen werden dann in den folgenden Abschnitten mit der Simulation von Breuer verglichen.

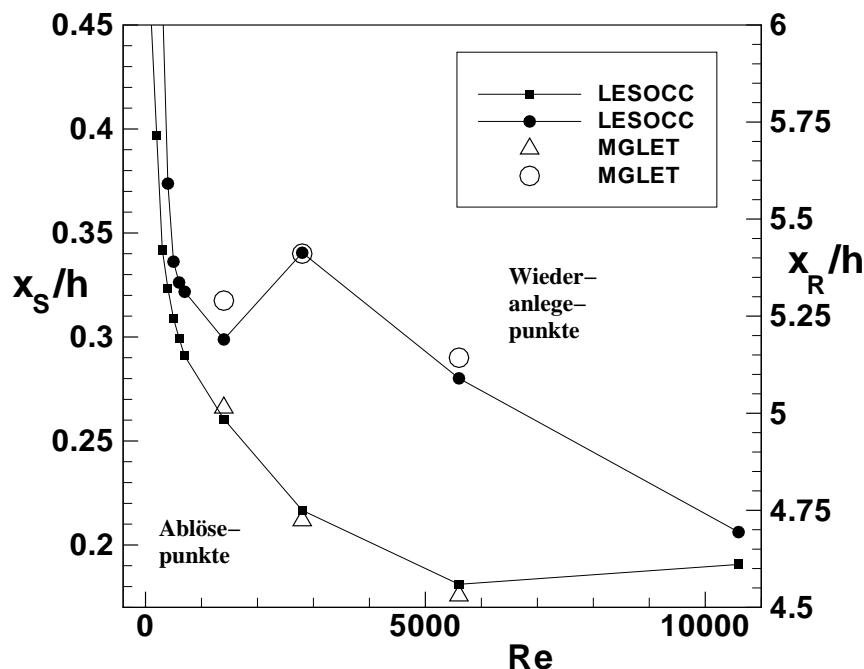


**Abbildung 6.17:** Wandschubspannung (a) und Druckverlauf (b) bei  $Re = 5600$  für die DNS und bei  $Re = 10595$  für die Grobstruktursimulation von Breuer et al. [5].

**Wandschubspannung und Druckverlauf** Die Wandschubspannung der beiden Reynoldszahlen wird in Abbildung 6.17 (a) gezeigt. Es ist zu erkennen, dass die Maximalwerte der

Wandschubspannung mit zunehmender Reynoldszahl abnehmen. Bemerkenswert ist, dass der Ablösepunkt fast konstant bleibt. Neben der deutlichen Ablösung bei  $x/h = 0.18$  ( $Re = 5600$ ) bzw.  $x/h = 0.19$  ( $Re = 10595$ ) finden sich zwei weitere kleine Rezirkulationszonen. Beide Reynoldsahlen zeigen bei ca.  $x/h \approx 7.0 - 7.4$  eine Rezirkulationszone und die Simulation bei  $Re = 10595$  zeigt zusätzlich einen Bereich mit Rückströmung auf der Hügelspitze. Dabei ist es unwahrscheinlich, dass die Ablöseblase auf dem Hügel ein Artefakt ist, da ein eindeutiger Trend der Wandschubspannung mit zunehmender Reynoldszahl zu erkennen ist [5]. Weiterhin kommt hinzu, dass die Hügeloberfläche an der Spitze flach ist und diesen Effekt begünstigt. Es wird in diesem Zusammenhang darauf hingewiesen, dass die zweidimensionale Kanalströmung mit Hügeln in Abschnitt 5.3 ebenfalls eine vergleichbare Ablöseblase zeigt.

Innerhalb der Rezirkulationszone findet sich wieder das Druckniveau, das bei beiden Simulationen ein Plateau aufweist (siehe Abbildung 6.17 (b)). Damit ähnelt die wandnahe Strömung z.B. bei  $x/h \approx 2.0$  einer typischen turbulenten Grenzschicht ohne Druckgradient und in Manhart et al. [32] wird die Skalierung des wandnahen Geschwindigkeitsprofils auf die Übereinstimmung mit einer ungestörten turbulenten Grenzschicht mit Hilfe der hier erzeugten DNS Daten überprüft. Der Verlauf des Drucks in Abbildung 6.17 (b) scheint einem eindeutigen Trend zu folgen, weicht aber bei niedrigeren Reynoldsahlen davon ab [5]. Abbildung 6.10 in Kapitel 6.2.3 zeigt, dass dieser Trend bereits für die Reynoldsahl  $Re = 2800$  nicht mehr stimmt.



**Abbildung 6.18:** Ablöse- und Wiederanlegepunkte in Abhängigkeit von der Reynoldszahl mit den DNS Simulationen aus dieser Arbeit (MGLET) im Vergleich zu Simulationen von Breuer et al. [5] (LESOCC).

**Ablöse- und Wiederanlegepunkt** Wie schon zuvor erwähnt, ergeben sich für die beiden betrachteten Reynoldsahlen sehr ähnliche Ablösepunkte. Ein anderes Bild ergibt sich bei den

Wiederanlegepunkten. Eine deutliche Verkürzung der Rezirkulationszone bei  $Re = 10595$  ist in Abbildung 6.18 zu erkennen.

Abbildung 6.18 zeigt ebenfalls den Verlauf der Ablöse- und Wiederanlegepunkte bei niedrigeren Reynoldszahlen. Damit ist anschaulich klar, dass der Verlauf nicht linear ist. Besonders interessant ist das Verhalten der Wiederanlegepunkte bei  $Re = 1400$ , wofür sich ein Sprung im Verlauf über der Reynoldszahl ergibt. Da dieses Strömungsverhalten sowohl durch Simulationen von Breuer et al. [5] und dem Autor unabhängig durch zwei unterschiedliche Simulationsprogramme vorhergesagt wird, ist es unwahrscheinlich, dass es sich um ein numerisches Artefakt handelt. Der Verlauf der Ablöse- und Anlegepunkte erklärt damit auch, warum bei dem Druckverlauf kein eindeutiger Trend auszumachen ist. Es wird angemerkt, dass die in Abbildung 6.18 gezeigten DNS Ergebnisse des Autors für  $Re = 1400$  ebenfalls im Rahmen dieser Arbeit erzeugt wurden, aber hier nicht weiter beschrieben werden. Für genauere Angaben zu dieser Simulation siehe Breuer et al. [5].

### 6.3.2 Gitterauslegung für die Grobstruktursimulation

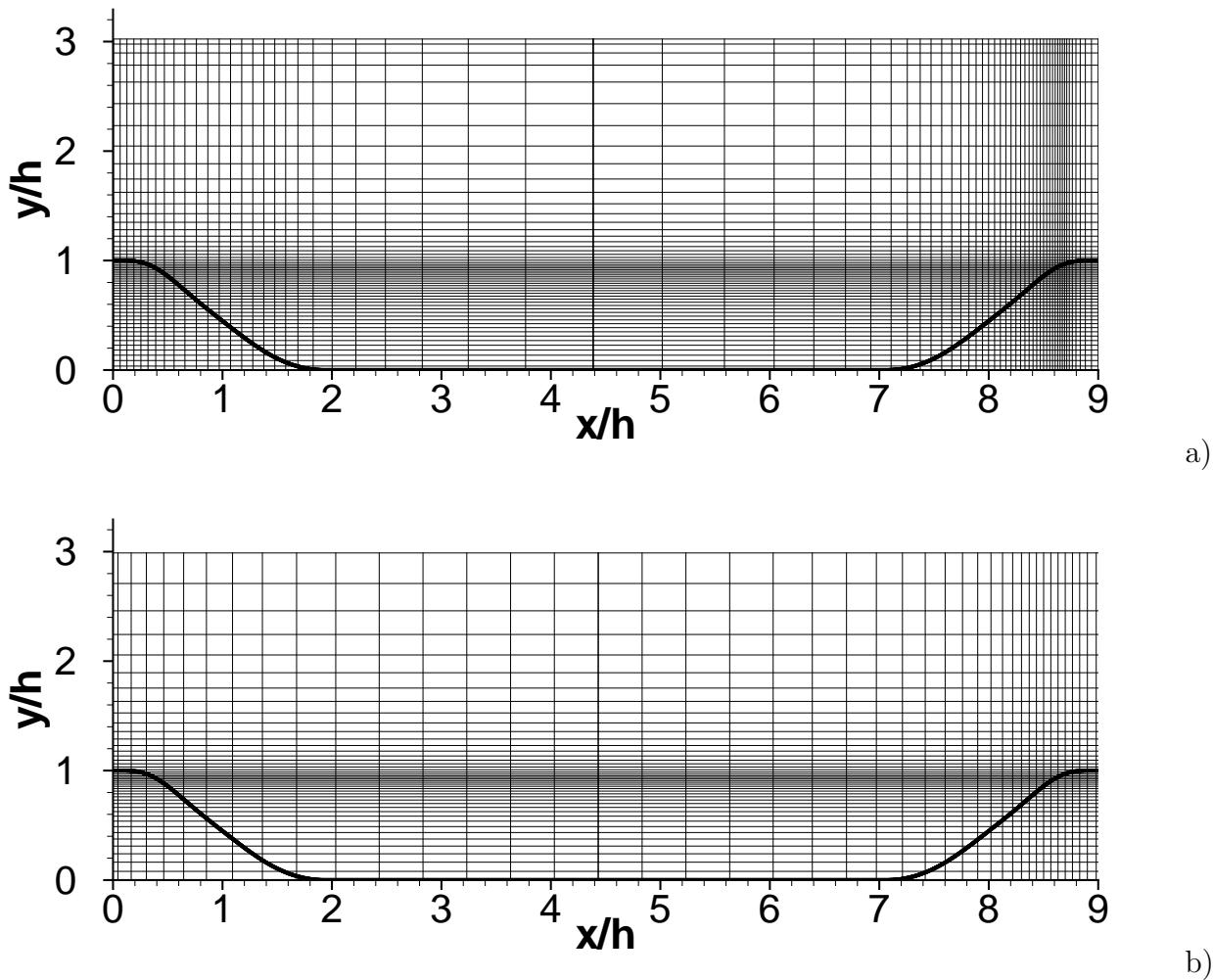
Im Folgenden werden die Gitterkonfigurationen der Grobstruktursimulationen vorgestellt. Die Simulationen werden alle bei der Reynoldszahl  $Re = 10595$  durchgeführt. Zwei Gitterauflösungen werden untersucht. Die Gitterparameter und Wandauflösungen sind in Tabelle 6.3 angegeben. Die Gitter werden kurz vorgestellt und verglichen. Es wird auf die Verfeinerung in bestimmten Gitterbereichen eingegangen sowie auf die numerische Auflösung im Berechnungsgebiet und an der Wand. Dazu werden wie bei der Auslegung des DNS Gitters in Abschnitt 6.2.2 die Kolmogorov Länge und die viskosen Wandeinheiten angegeben.

Gitter	$N_{tot}/10^6$	$N_x$	$N_y$	$N_z$	$\Delta x_{max}^+$	$\Delta y_{max}^+$	$\Delta z_{max}^+$	$\Delta d_{max}^+$
1	3.8	216	168	104	63	8	55	11
2	1.0	118	136	64	59	13	90	20

**Tabelle 6.3:** Gitterparameter für das feine (1) und das grobe Gitter (2). Die angegebenen Wandeinheiten basieren auf der Wandschubspannung aus der Simulation von Breuer et al. [5].

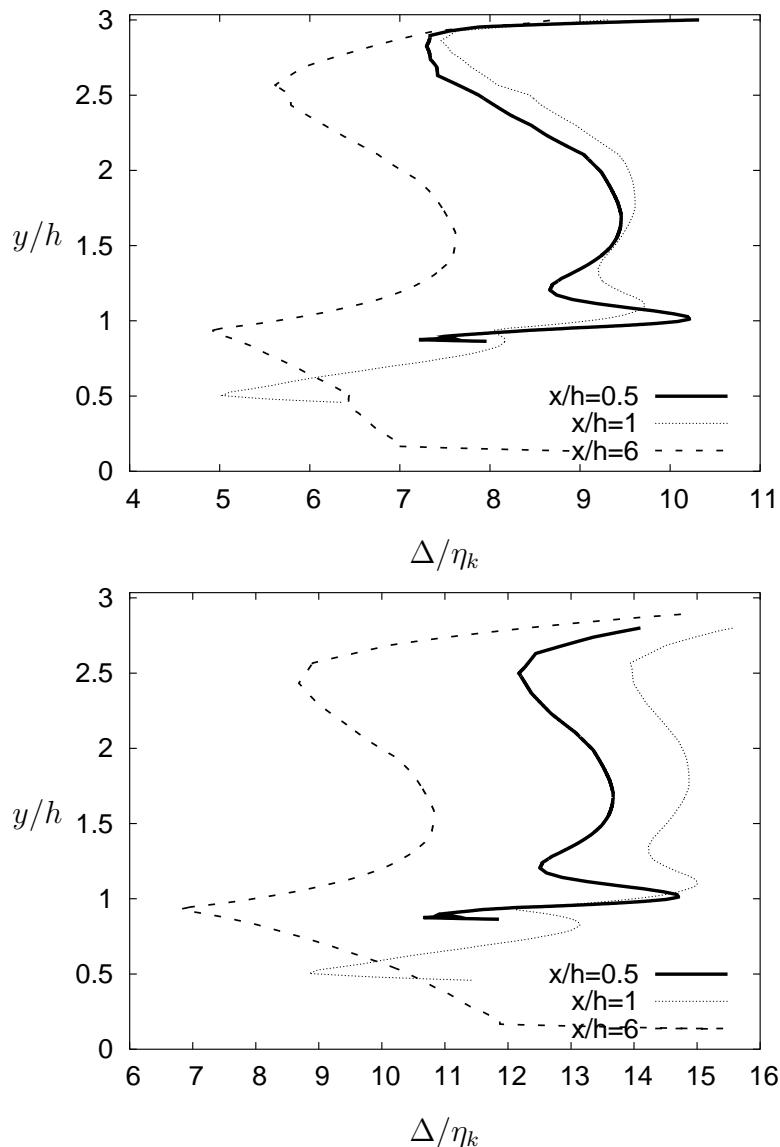
**Visueller Gittervergleich** Die beiden Gitter sind in Abbildung 6.19 zu sehen. Bei beiden Gittern ist im Vergleich zur DNS sowohl im Berechnungsgebiet als auch an der Wand die Auflösung reduziert. Ein Vergleich mit Abbildung 6.9 zeigt das deutlich feinere DNS Gitter. Gut zu erkennen ist in Abbildung 6.19 (a) und (b), dass beide Gitter im Bereich der maximalen Wandschubspannung bei  $x/h \approx 8.7$  analog zum Gitter für die DNS verfeinert sind. Die Verfeinerung wurde in x- und in y-Richtung gewählt. Dadurch ist die abgelöste Grenzschicht (vergleiche Abbildung 6.15) in diesem Bereich ebenfalls gut wiedergegeben. Diese Tatsache spiegelt sich im Verlauf der Gitterweite über der Kolmogorov Länge in Abbildung 6.20 wieder und wird im Anschluss diskutiert.

**Kolmogorov Längenskala** Der hier berechnete Wert der Filterweite im Verhältnis zur Kolmogorov Längenskala ist im Gegensatz zur DNS im vorausgegangenen Kapitel nur eine



**Abbildung 6.19:** Gitterlinien des feinen Gitters (a) und des groben Gitters (a). Gezeichnet ist jede dritte Gitterlinie.

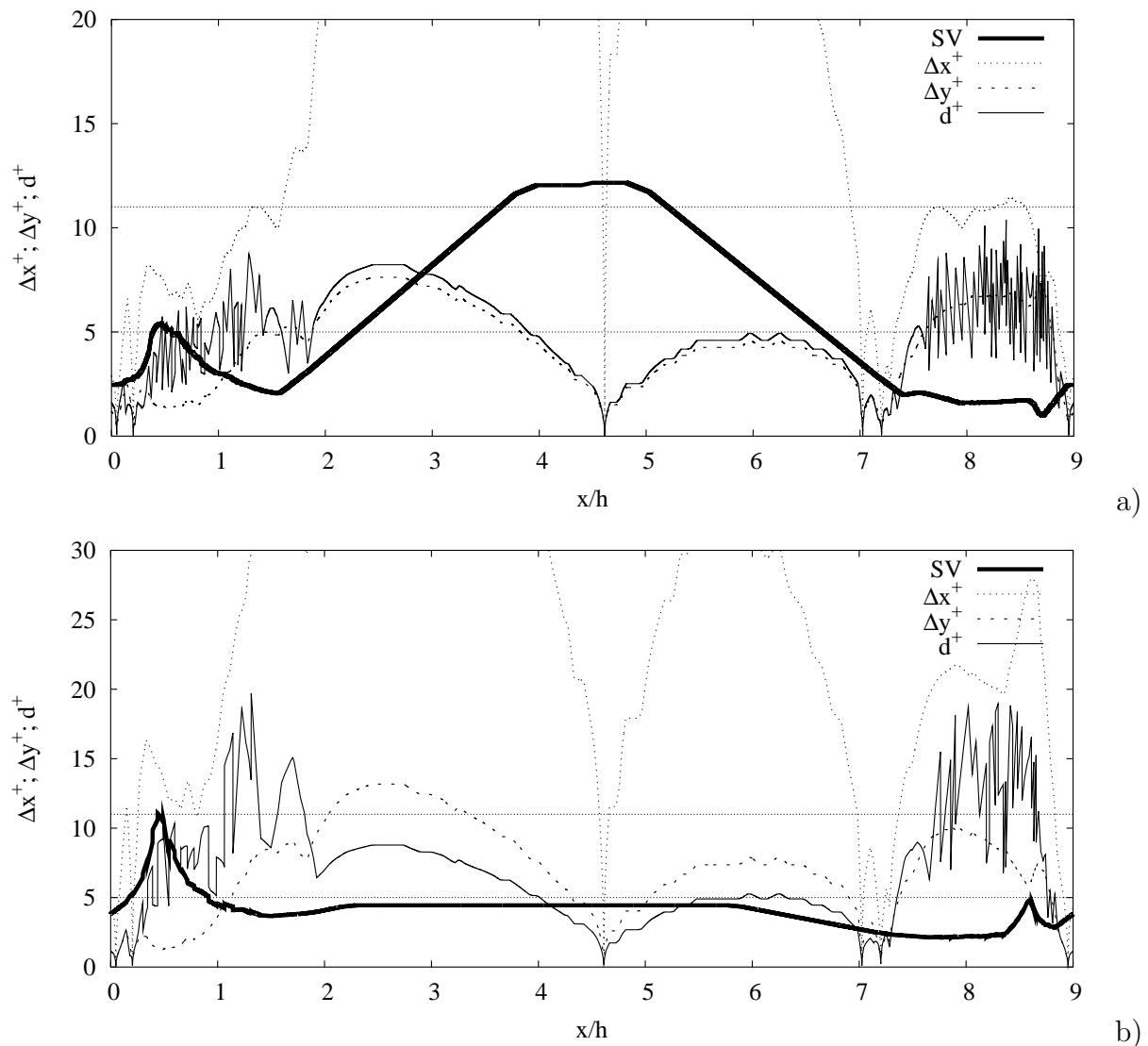
Abschätzung, weil der Anteil des Feinstrukturtensors nicht für die Berechnung berücksichtigt wurde und das Ergebnis vom Turbulenzmodell abhängt. Die berechnete Dissipation  $\epsilon$  könnte unterschätzt werden und damit ein zu großes Kolmogorov Längenmaß hervorrufen (vergleiche auch Breuer et al. [5]). Für die Abschätzung der Kolmogorov Länge wurde die Simulation *4mWaleF* (siehe Tabelle 6.4) verwendet. In Abbildung 6.20 wird die Gitterweite im Verhältnis zur Kolmogorov Längenskala für das feine und grobe Gitter gezeigt. Das feine Gitter erreicht maximal ein Verhältnis von  $\approx 11$  und das grobe Gitter maximal  $\approx 16$ . Im Vergleich dazu zeigt Abbildung 6.8 auf Seite 125 die Filterweite der DNS Simulation. Man kann erkennen, dass die Gitter für die Grobstruktursimulation wesentlich größer sind als das DNS Gitter. Das DNS Gitter erreicht maximal ein Verhältnis von  $\approx 2$ . Das Kriterium nach Pope [50], dass Strukturen der Größe  $24\eta_k$  gut aufgelöst sein sollen, weil dort die meiste Dissipation stattfindet, ist bei den Gittern der Grobstruktursimulation nur bei dem feinen Gitter vollständig erfüllt. Nahe der Wand ist eine Struktur der Größe  $24\eta_k$  bei dem feinen Gitter mit zwei Punkten gerade noch aufgelöst und bei dem groben Gitter mit nur einem Punkt gerade nicht mehr aufgelöst.



**Abbildung 6.20:** Quotient aus Filterweite des Gitters und Kolmogorov Längenskala für die Simulation *4mWaleF* auf dem feinen Gitter (a) und *1mWaleF* auf dem groben Gitter (b) bei  $Re = 10595$ . Gezeigt werden die Positionen  $x/h = 0.5, 1.0$  und  $6.0$ .

An der oberen Wand ist die Auflösung bei dem groben Gitter in einem vergleichbaren Bereich wie in Fröhlich et al. [14]. Sie argumentieren, dass eine detaillierte Betrachtung der oberen Wand für die Analyse der Strömung in der unteren Hälfte des Kanals nicht notwendig ist und verwendet das Werner und Wengle Wandmodell [77] an der oberen Wand. Die Tatsache, dass auch in der Kanalmitte die Auflösung zwischen den beiden Gittern variiert, spiegelt sich in Abschnitt 6.3.5 auf Seite 151 in der Höhe der turbulenten Viskosität wieder und wird später diskutiert.

**Wandnahe Auflösung und viskoses Längenmaß** Bei beiden Gittern ist die Auflösung nahe der Wand unterschiedlich, wie sich bereits durch die Betrachtung der Kolmogorov Länge andeutete.



**Abbildung 6.21:** Gitterparameter: Gitterweiten  $\Delta x^+$  und  $\Delta y^+$  an der IB Wand sowie der Abstand des Druckpunktes  $d^+$  von der IB Wand in viskosen Einheiten sowie das Seitenverhältnis (SV) der Zellen an der Wand für das feine Gitter (a) und das grobe Gitter (b). Für die Berechnung wurde die Wandschubspannung aus Breuer et al. [5] verwendet.

Zuerst zur unteren Wand: Abbildung 6.19 (a) zeigt das feine Berechnungsgitter (1) in einem Z-Schnitt. Die Verfeinerung nahe der Hügelspitze ist deutlich zu erkennen. Abbildung 6.21 (a) zeigt die Gitterweite  $\Delta x^+$  und  $\Delta y^+$  entlang der Wand sowie den Abstand  $d^+$  des Druckpunktes. Für die Berechnung der viskosen Wandeinheiten wurde die Wandschubspannung aus der hoch aufgelöste Simulation von Breuer et al. [5] als Referenz genommen. Bei dem feinen Gitter ist das Maximum  $d^+$  unter  $d^+ \approx 11$ . In den meisten Bereichen ist  $d^+$  aber geringer und liegt etwas über dem Ende der viskosen Grenzschicht bei  $y^+ = 5$  (siehe auch Schlichting [57]). Die Simulationen mit diesem Gitter werden deshalb noch als wandaufgelöst bezeichnet. Die Tatsache, dass z.B. das 1/7 Potenzgesetz [76, 77] einen linearen Bereich bis  $\Delta y^+ = 11$  verwendet, wurde hier als weitere Rechtfertigung genommen die Simulation als

wandaufgelöst zu bezeichnen. Das Wandmodell würde in diesem Bereich noch nicht auf das 1/7 Potenzgesetz umschalten.

Das gröbere Gitter zeigt Abbildung 6.19 (b). Bei dem groben Gitter liegt der maximale Abstand der Gitterweite in Strömungsrichtung bei  $\Delta x^+ \approx 28$  und der Abstand der Gitterweite bei  $\Delta y^+ \approx 10$  (Abbildung 6.21 (b)). Als Mittelmaß zwischen den beiden Komponenten kann wieder  $d^+$  der Abstand des Druckpunktes von der Geometrie angegeben werden. Dabei sieht man, dass die Wandauflösung bei dem groben Gitter bis maximal  $d^+ \approx 20$  geht, während bei dem feinen Gitter  $d^+$  unter  $d^+ \approx 11$  bleibt. Damit ist zu erwarten, dass bei dem groben Gitter der erste wandnächste Punkt an bestimmten Positionen in dem Übergangsbereich zwischen linearer und logarithmischer Region bzw. in der logarithmischen Region liegt. Das Gitter wird als nicht mehr wandaufgelöst betrachtet. Beim 1/7 Potenzgesetz [76, 77] würde nicht mehr nur der lineare Bereich verwendet werden.

Die obere Wand der Kanalströmung ist bei beiden Gittern grob aufgelöst. Wie zuvor erwähnt argumentiert Fröhlich et al. [14], dass die Auflösung der oberen Kanalwand für die Strömung in der unteren Hälfte nicht ausschlaggebend ist. Abbildung 6.19 zeigt beide Berechnungsgitter im Z-Schnitt und die deutlich gröbere Auflösung nahe der oberen Wand. Wie in Fröhlich et al. [14] und Temmerman et al. [64] wird hier die Werner und Wengle [77] Wandfunktion verwendet. Sie besteht aus der integralen Formulierung des 1/7 Potenzgesetztes mit linearem Bereich bis  $y^+ = 11$  und anschließendem Potenzbereich. Temmerman und Fröhlich berichten sehr gute Ergebnisse unter Verwendung der Wandfunktion.

### 6.3.3 Durchgeführte Simulationen

Für die Grobstruktursimulation bei  $Re = 10595$  wurden die in Tabelle 6.4 aufgeführten Simulationen durchgeführt. Sie unterscheiden sich durch die Wahl der Gitterauflösung, des Turbulenzmodells und der IB Methoden. Folgende Variationen werden betrachtet.

Gitter	Punkte	Flusskorr.	Smagorinsky	dyn. Smag.	Lag.	WALE
1	4 Mio	nein	4mSmag	—	—	4mWale
2	1 Mio	nein	1mSmag	1mLag	—	1mWale
1	4 Mio	ja	4mSmagF	—	—	4mWaleF
2	1 Mio	ja	1mSmagF	1mLagF	—	1mWaleF

**Tabelle 6.4:** Parameter der Simulationen: Feines (1) und grobes Gitter (2); Immersed Boundary mit oder ohne Flusskorrektur (Flusskorr.); Standard Smagorinksy Modell (Smagorinsky), dynamisches Smagorinsky Modell mit Mittelung entlang Lagrangescher Partikelbahnen (dyn. Smag. Lag.) und WALE Turbulenzmodell.

**Turbulenzmodelle:** Hier werden drei Turbulenzmodelle betrachtet: Das Standard Smagorinsky Modell ohne Van Driest Dämpfung, das dynamische Smagorinsky Modell mit Mittelung entlang Lagrangescher Partikelbahnen sowie das WALE Modell, siehe Abschnitt 2.4 für eine detaillierte Beschreibung der Grobstruktursimulation und der Turbulenzmodelle.

Temmerman et al. [64] zeigte beispielsweise, dass das WALE Turbulenzmodell einen späteren Wiederanlegepunkt hervorsagte als die in seiner Arbeit untersuchten dynamischen Turbulenzmodelle. Auch hier werden Unterschiede in den Ergebnissen für die drei Turbulenzmodelle erwartet.

**Gitterauflösungen:** Es werden ein feines Gitter #1 und ein grobes Gitter #2 betrachtet. Bei dem feinen Gitter liegt der erste Gitterpunkt im Bereich  $y^+ = [1 : 11]$  und es wird als wandaufgelöst bezeichnet. Bei dem groben Gitter liegt der erste Punkt in einem Bereich von  $y^+ = [1 : 20]$  und wird deshalb als nicht wandaufgelöst bezeichnet. Die beiden Bezugsgitter wurden zuvor diskutiert. Nach Temmerman et al. [64] hat die numerische Behandlung der Wand einen stärkeren Einfluss auf die Strömung als die Wahl des Feinstrukturmodells. Auch hier werden Auswirkungen der Wandauflösung auf die Ergebnisse erwartet.

**IB Methoden** Für die Grobstruktursimulation werden jetzt die beiden in dieser Arbeit vorgestellten IB Verfahren angewandt: die Methode mit Punktwerten mit der Interpolation der kleinsten Fehlerquadrate und die konservative Methode mit Flusskorrektur. Im Folgenden wird aus Gründen der Verständlichkeit häufig von IB Methode mit und ohne Flusskorrektur gesprochen. Der Einfluss der unterschiedlichen IB Wandbehandlungen wird dokumentiert.

### 6.3.4 Ergebnisse im Vergleich zu Daten aus der Literatur

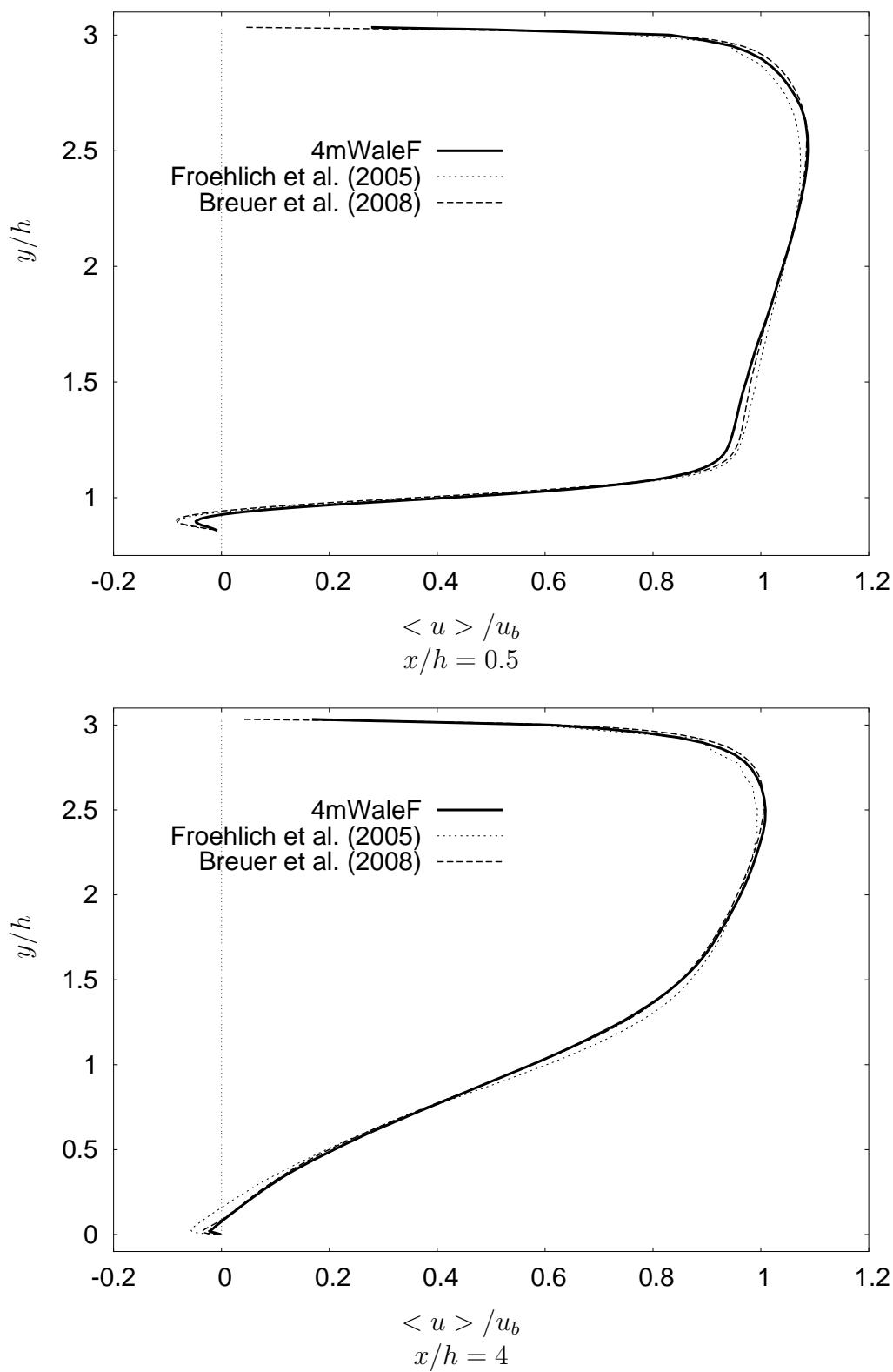
Im Folgenden werden die Ergebnisse der Simulation *4mWaleF* (siehe Tabelle 6.4) mit den numerischen Ergebnissen von Breuer et al. [5] und Fröhlich et al. [14] sowie mit den experimentellen Ergebnissen von Rapp [52] verglichen. Es wird hier nur Simulation *4mWaleF* zum Vergleich herangezogen, um eine übersichtliche Präsentation der Ergebnisse zu ermöglichen. Die Unterschiede in den Ergebnissen zwischen Simulation *4mWaleF* und den übrigen durchgeführten Simulationen in Tabelle 6.4 werden in den anschließenden Abschnitten gesondert herausgearbeitet. Dort werden gezielt der Einfluss des Turbulenzmodells, der IB Methode und der Gitterauflösung diskutiert. Es wird hier schon vorweggenommen, dass Simulation *4mWaleF* die beste Übereinstimmung mit der Simulation von Breuer et al. [5] aufweist. Simulation *4mWaleF* wurde auf dem feinen LES Gitter mit 4 Millionen Punkten mit dem WALE Modell und der IB Methode mit Flusskorrektur berechnet.

#### Vergleich mit numerischen Ergebnissen aus der Literatur

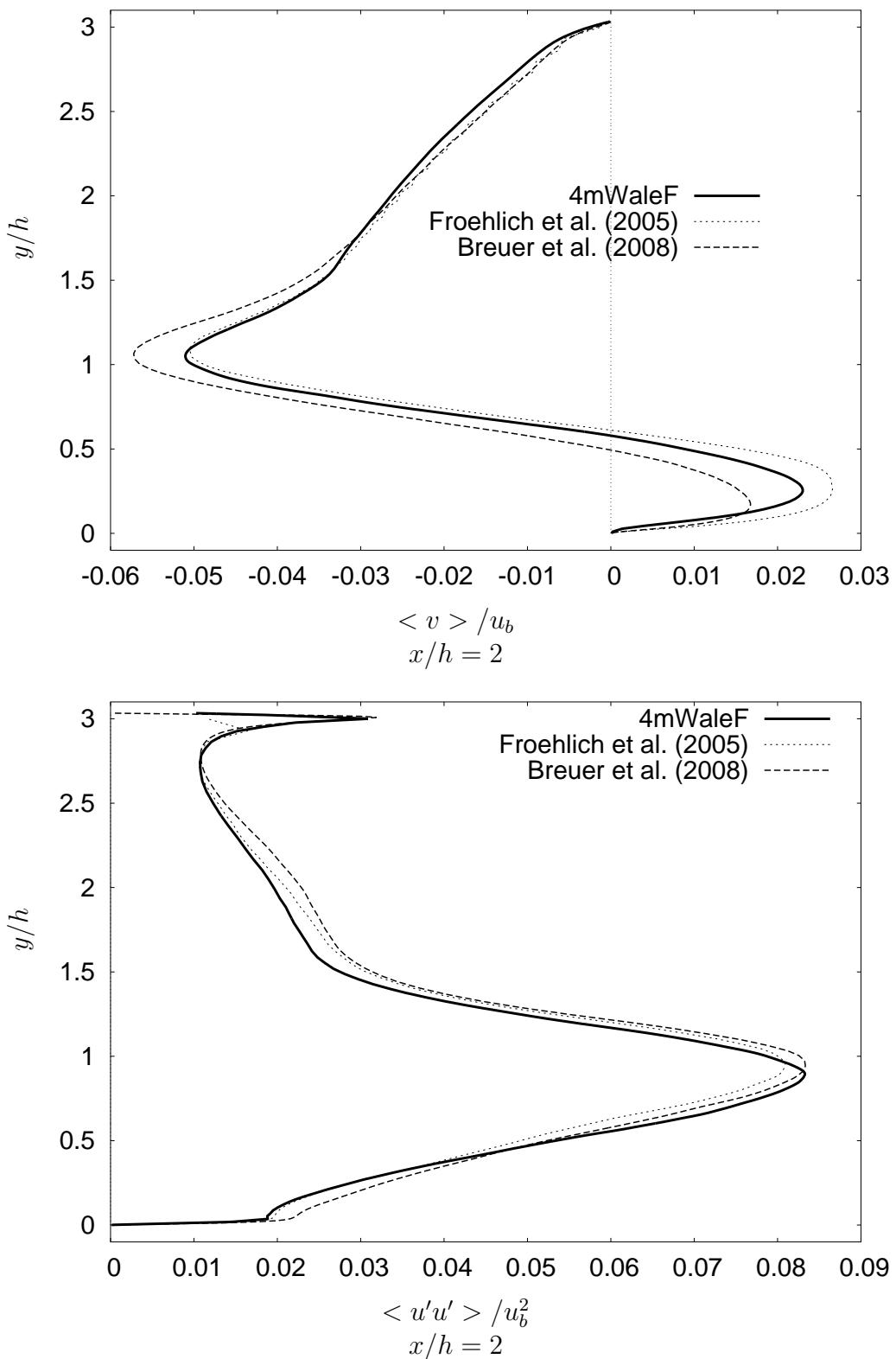
Die Ergebnisse der Simulation *4mWaleF* (siehe Tabelle 6.4) werden mit den Ergebnissen von Breuer et al. [5] und Fröhlich et al. [14] verglichen. Die Simulationen von Breuer wurde mit einem kurvilinearen Gitter und ca. 12 Millionen Gitterpunkten berechnet [5]. Die Simulation von Fröhlich et al. [14] basiert auf einem ähnlichen numerischen Verfahren, das ebenfalls zweiter Ordnung genau in Raum und Zeit ist und wie Breuer kurvilineare Gitter verwendet. Der wesentliche Unterschied zwischen der Simulation von Breuer und Fröhlich ist die Gitterauflösung nahe der oberen Wand. Wie schon zuvor erwähnt, argumentiert Fröhlich et al. [14], dass die Auflösung der oberen Wand die Strömung in der unteren Hälfte des Kanals nicht wesentlich beeinflusst und verwendet das Werner und Wengle Wandmodell. Breuer et al. [5] löst die Grenzschicht an der oberen Wand auf und vermeidet Wandmodelle, so dass sein Gitter ca. dreimal so viele Gitterpunkte aufweist wie die Simulation von Fröhlich. Eine Folge der größeren Wandauflösung bei Fröhlich sind wiggles nahe der oberen Wand wie in [5] beschrieben. Im Folgenden werden Profile der drei Simulationen an den gleichen Positionen wie bereits bei der DNS bei  $Re = 2800$  und  $Re = 5600$  in Abschnitt 6.2.3 verglichen.

**Mittlere Geschwindigkeitsprofile** Abbildung 6.22 zeigt die zeitlich gemittelten Geschwindigkeitsprofile an den Positionen  $x/h = 0.5$  und  $x/h = 4$ . Für die Geschwindigkeiten in Strömungsrichtung wird eine sehr gute Übereinstimmung gefunden. Kleine Abweichungen finden sich bei  $x/h = 0.5$ . Nahe der unteren Wand weicht die Simulation *4mWaleF* von Breuer und Fröhlich ab und zeigt eine stärker ausgebildete Rückströmung. Bei  $x/h = 4$  sind die Ergebnisse der Simulationen von Breuer und Fröhlich unterschiedlich wobei das Profil aus der Simulation *4mWaleF* fast identisch mit dem Profil aus der Simulation von Breuer ist.

Die zeitlich gemittelte vertikale Geschwindigkeitskomponente ist in Abbildung 6.23 für die Position  $x/h = 2$  zu sehen. Dort ist ein größerer Unterschied zu beobachten als beim Vergleich der DNS Ergebnisse für  $Re = 2800$  und  $Re = 5600$  in Abschnitt 6.2.3. Auch dort werden die Ergebnisse aus dieser Arbeit mit Ergebnissen von Breuer et al. [5] verglichen. Hier liegt das Geschwindigkeitsprofil der Simulation *4mWaleF* zwischen den Ergebnissen von Breuer und Fröhlich.



**Abbildung 6.22:** Geschwindigkeit in Strömungsrichtung bei  $Re = 10595$  für die Simulationen von Breuer et al. [5] und Fröhlich et al. [14] im Vergleich zu Simulation *4mWaleF*.



**Abbildung 6.23:** Wandnormale Geschwindigkeit und Reynoldsspannung  $\langle u'u' \rangle$  bei  $Re = 10595$  für die Simulationen von Breuer et al. [5] und Fröhlich et al. [14] im Vergleich zu Simulation 4mWaleF.

**Turbulente Strömungsgrößen** Die turbulente Spannung  $\langle u'u' \rangle$  wird in Abbildung 6.23 für die Position  $x/h = 2$  gezeigt. Hier ist die gröbere Auflösung der Simulation von Fröhlich et al. [14] nahe der oberen Wand deutlich zu erkennen. Das Maximum der turbulenten Spannung nahe der Wand ist nicht mehr aufgelöst. Es ist aber kein wesentlicher Einfluss auf das restliche Profil zu bemerken.

Weitere Unterschiede nahe der Wand finden sich auch für die turbulenten Scherspannungen  $\langle u'v' \rangle$  (hier nicht gezeigt) wie in Breuer et al. [14] beschrieben. Die Auswirkungen scheinen aber lokal begrenzt zu sein. Das unterstützt die Annahme von Fröhlich in Fröhlich et al. [14], dass eine gröbere Auflösung nahe der oberen Wand und die Verwendung von Wandmodellen keinen merkbaren Einfluss auf die Strömung in der unteren Kanalhälfte hat. Die Übereinstimmung der Profile ist an Position  $x/h = 2$  als sehr gut zu bezeichnen.

### Vergleich mit experimentellen Ergebnissen

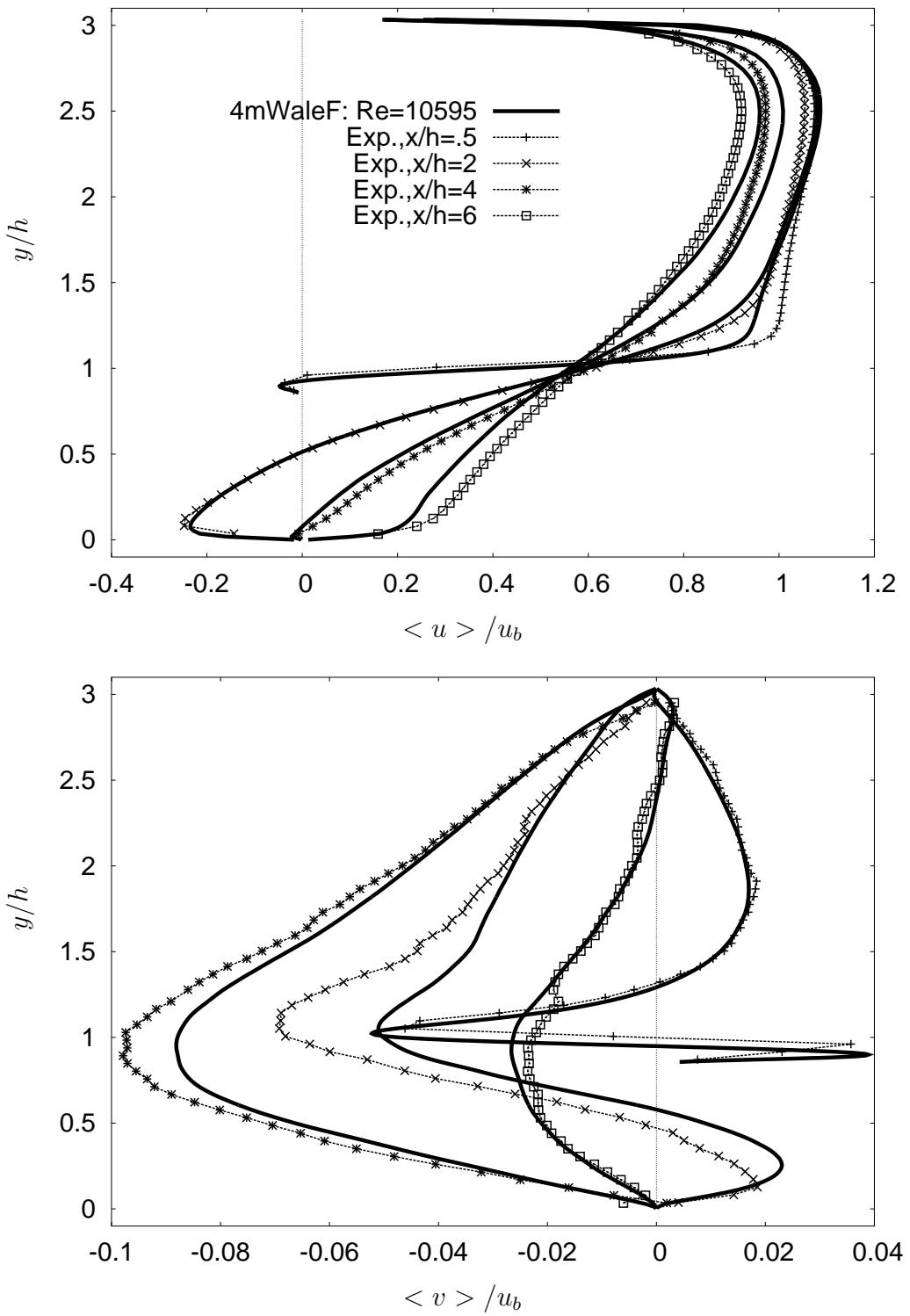
Nach dem Vergleich der Ergebnisse von Simulation *4mWaleF* mit numerischen Ergebnissen aus der Literatur werden sie nun experimentellen Ergebnissen von Rapp [52] gegenübergestellt. Der experimentelle Aufbau ist identisch mit der in Abschnitt 6.2.3 vorgestellten Konfiguration. Die Anhebung der Reynoldszahl von  $Re = 5600$  auf  $Re = 10595$  wurde von Rapp durch die Beschleunigung der Strömungsgeschwindigkeit eingestellt. Für den genauen experimentellen Aufbau und die Messmethoden wird wieder auf Rapp [52] verwiesen.

Bei  $Re = 5600$  lag im Experiment die Periodizität der Strömung nur eingeschränkt vor und eine systematische Abweichung der Reynoldsspannungen wurde in Breuer et al. [5] beobachtet. Für  $Re = 10595$  ist das nicht der Fall. Rapp [52] argumentiert, dass die Strömung bei dem bestehenden Versuchsaufbau ab  $Re = 10595$  vollständig periodisch ist. Im Folgenden werden neben den Geschwindigkeitsprofilen auch Profile der turbulenten Strömungsgrößen gezeigt.

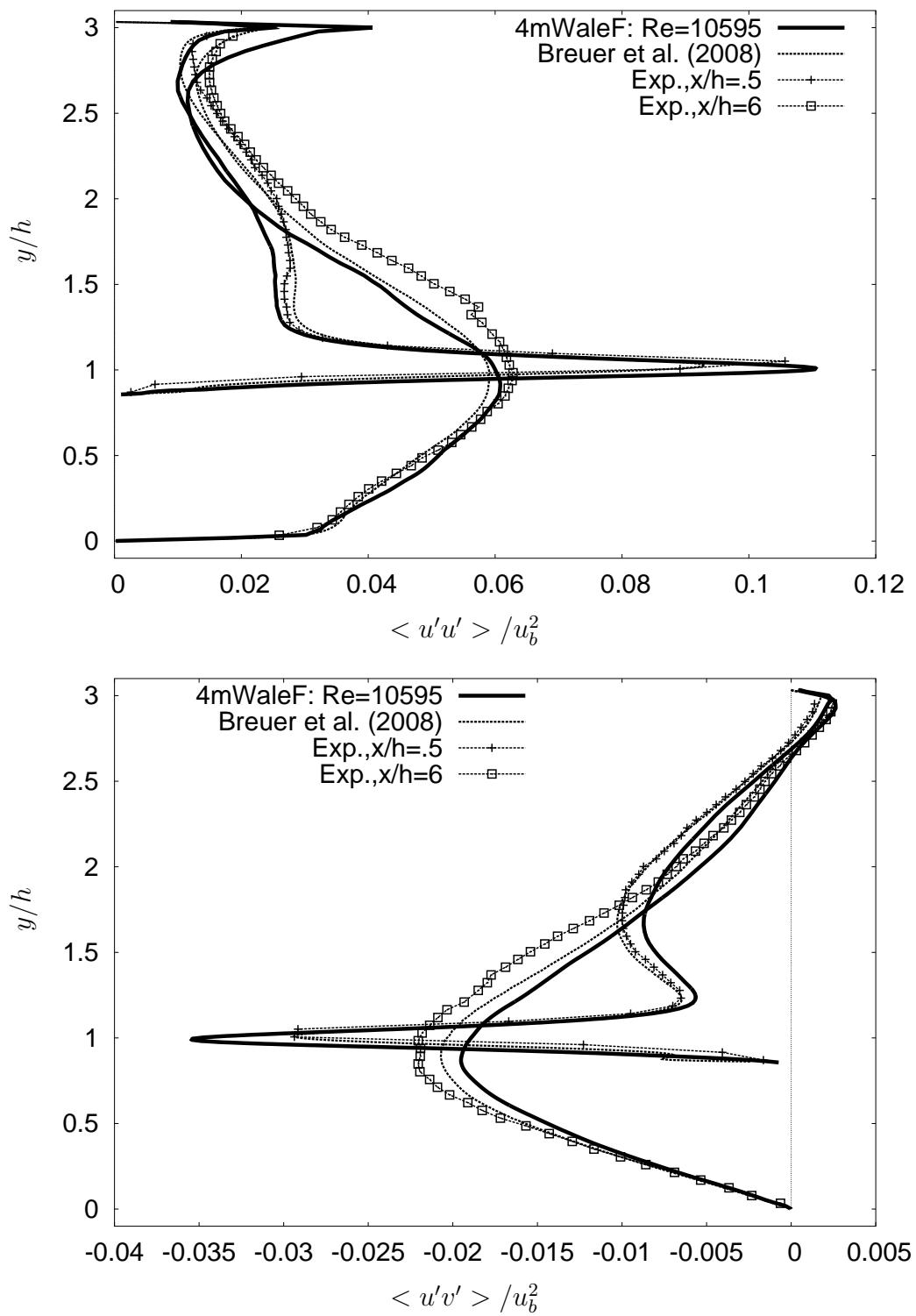
**Mittlere Geschwindigkeitsprofile** Abbildung 6.24 zeigt die Geschwindigkeitskomponente in Hauptströmungsrichtung der Simulation *4mWaleF* im Vergleich zum Experiment. Es zeigt sich, dass das Experiment in der Scherschicht (Position  $x/h = 0.5$ ) auf der Hügeloberseite einen schwächeren Gradienten als die Simulation aufweist. Dementsprechend erreicht die Geschwindigkeit in der Scherschicht einen leicht höheren Wert. Das kann mit der Tatsache verbunden sein, dass sich die Strömung im Experiment nach der Ablösung auch etwas schneller wieder erholt wie das Geschwindigkeitsprofil bei  $x/h = 6$  bestätigt. Beide Beobachtungen decken sich mit den Beobachtungen in Abschnitt 6.2.3 und dem Vergleich der DNS Ergebnisse bei  $Re = 5600$  mit dem Experiment.

Die vertikale Geschwindigkeitskomponente in Abbildung 6.24 zeigt eine sehr gute Übereinstimmung an den Positionen  $x/h = 0.5$  und  $x/h = 6$ . Die Abweichungen sind an der Position  $x/h = 2$  am größten. Wieder deckt sich der Trend mit den Beobachtung aus Abschnitt 6.2.3: Die Maxima der Geschwindigkeit in der Simulation sind kleiner als im Experiment.

**Turbulente Strömungsgrößen** Abbildung 6.25 zeigt die turbulenten Spannungen  $\langle u'u' \rangle$  und  $\langle u'v' \rangle$  im Vergleich zum Experiment von Rapp [52]. Zusätzlich werden die Ergeb-



**Abbildung 6.24:** Vergleich der Simulation *4mWaleF* bei  $Re = 10595$  mit experimentellen Daten von Rapp [52] (Exp.) an unterschiedlichen Positionen für die Geschwindigkeit in Hauptströmungsrichtung und die vertikale Geschwindigkeit .



**Abbildung 6.25:** Vergleich der Simulation 4mWaleF bei  $Re = 10595$  mit Experiment von Rapp [52] (Exp.) und Simulation von Breuer et al. [5] an unterschiedlichen Positionen für die Reynoldsspannungen  $\langle u'u' \rangle$  und  $\langle u'v' \rangle$ .

nisse der Simulation von Breuer et al. [5] gezeigt. Die Maxima der Profile liegen an den gleichen  $y$  Positionen. Leichte Abweichen an der Position  $x/h = 0.5$  lassen sich im oberen Bereich des Kanals feststellen. Dort zeigt das Experiment höhere Werte und die Simulation von Breuer liegt näher am Experiment. Noch akzentuierter ist die Abweichung an der Position  $x/h = 6$  wo ebenfalls die Simulation von Breuer näher am Experiment liegt. Im unteren Bereich zeigen aber beide Simulationen sehr gute Übereinstimmung mit dem Experiment.

Ebenfalls in Abbildung 6.25 zu sehen sind die Reynoldsspannungen  $\langle u'v' \rangle$  für die gleichen Positionen. Bei  $x/h = 0.5$  als auch bei  $x/h = 6$  findet man zufriedenstellende Übereinstimmung der Simulation von Breuer mit dem Experiment. Die Simulation *4mWaleF* zeigt in beiden Profilen leichte Abweichungen bei den Maximalwerten und liegt etwas schlechter als die Ergebnisse von Breuer. Bei  $x/h = 0.5$  werden die Spannungen überschätzt und bei  $x/h = 6$  unterschätzt. Der Verlauf wird aber ebenso richtig wiedergegeben wie bei der Simulation von Breuer.

### 6.3.5 Gegenüberstellung der Feinstrukturmodelle

Im Folgenden wird der Einfluss der Feinstrukturmodelle diskutiert. Es werden drei Feinstrukturmodelle behandelt: Das Standard Smagorinsky Modell ohne Van Driest Dämpfung, das WALE Modell und das dynamische Smagorinsky Modell mit Mittelung entlang Lagrangescher Partikelbahnen, siehe Abschnitt 2.4 für eine detaillierte Beschreibung der Turbulenzmodelle. Tabelle 6.5 gibt eine Übersicht der betrachteten Simulationen. Die Vergleiche werden hier für die IB Methode mit Flusskorrektur durchgeführt. Die Unterschiede zu den Simulationen ohne Flusskorrektur werden im Anschluss behandelt. Es wird zwischen den Simulationen auf dem feinen und dem groben Gitter unterschieden. Zuerst wird das Verhalten auf dem feinen Gitter untersucht.

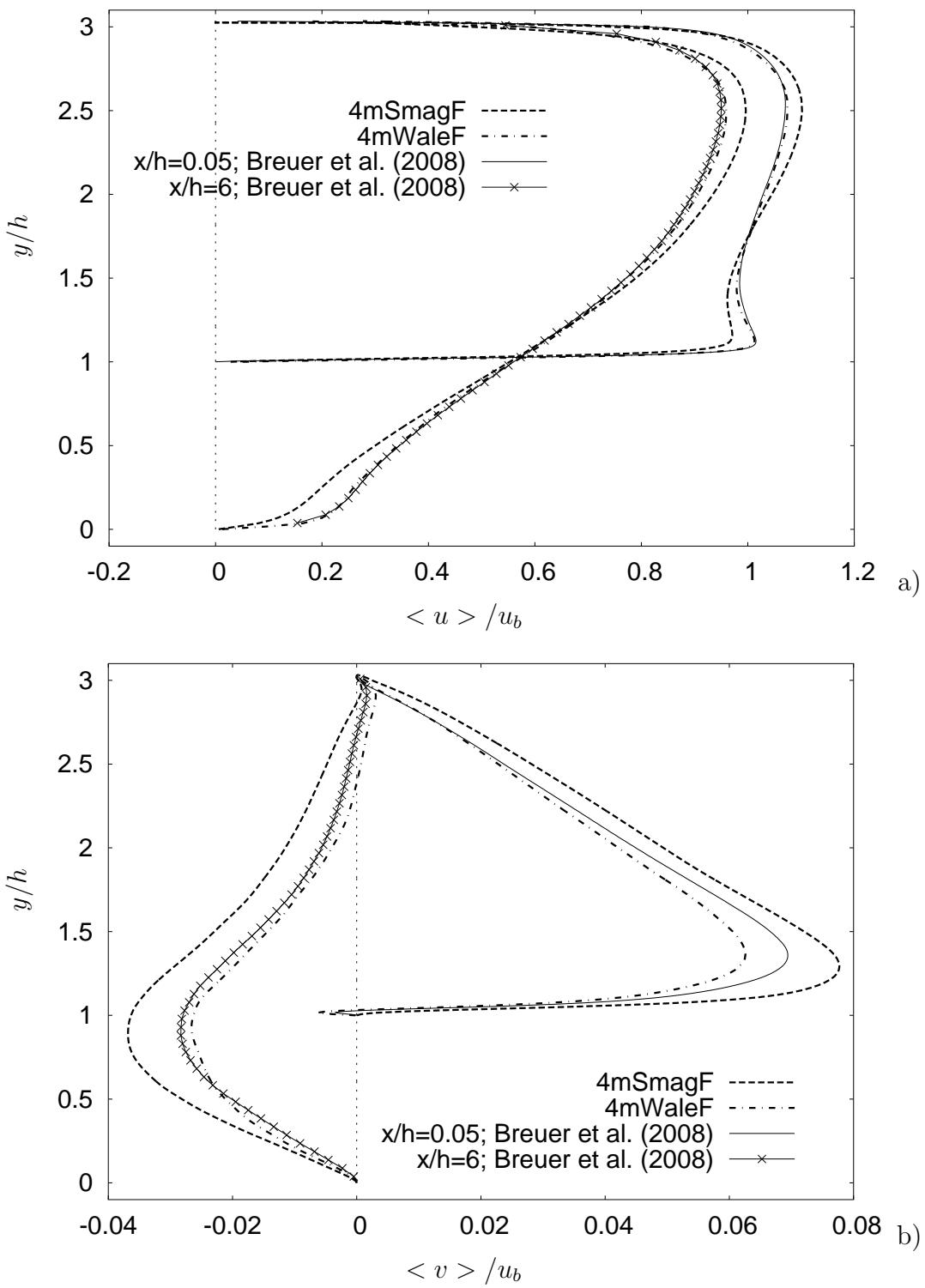
Gitter	Punkte	Flusskorr.	Smagorinsky	dyn. Smag. Lag.	WALE
1	4 Mio	nein	4mSmag	—	4mWale
2	1 Mio	nein	1mSmag	1mLag	1mWale
1	4 Mio	ja	<b>4mSmagF</b>	—	<b>4mWaleF</b>
2	1 Mio	ja	1mSmagF	1mLagF	1mWaleF

**Tabelle 6.5:** Parameter der Simulationen: Feines (1) und grobes Gitter (2); Immersed Boundary mit oder ohne Flusskorrektur (Flusskorr.); Standard Smagorinksy Modell (Smagorinsky), dynamisches Smagorinsky Modell mit Mittelung entlang Lagrangescher Partikelbahnen (dyn. Smag. Lag.) und WALE Turbulenzmodell. Simulationsvergleiche sind durch die Schrift hervorgehoben, grau markierte Simulationen werden in diesem Abschnitt nicht behandelt.

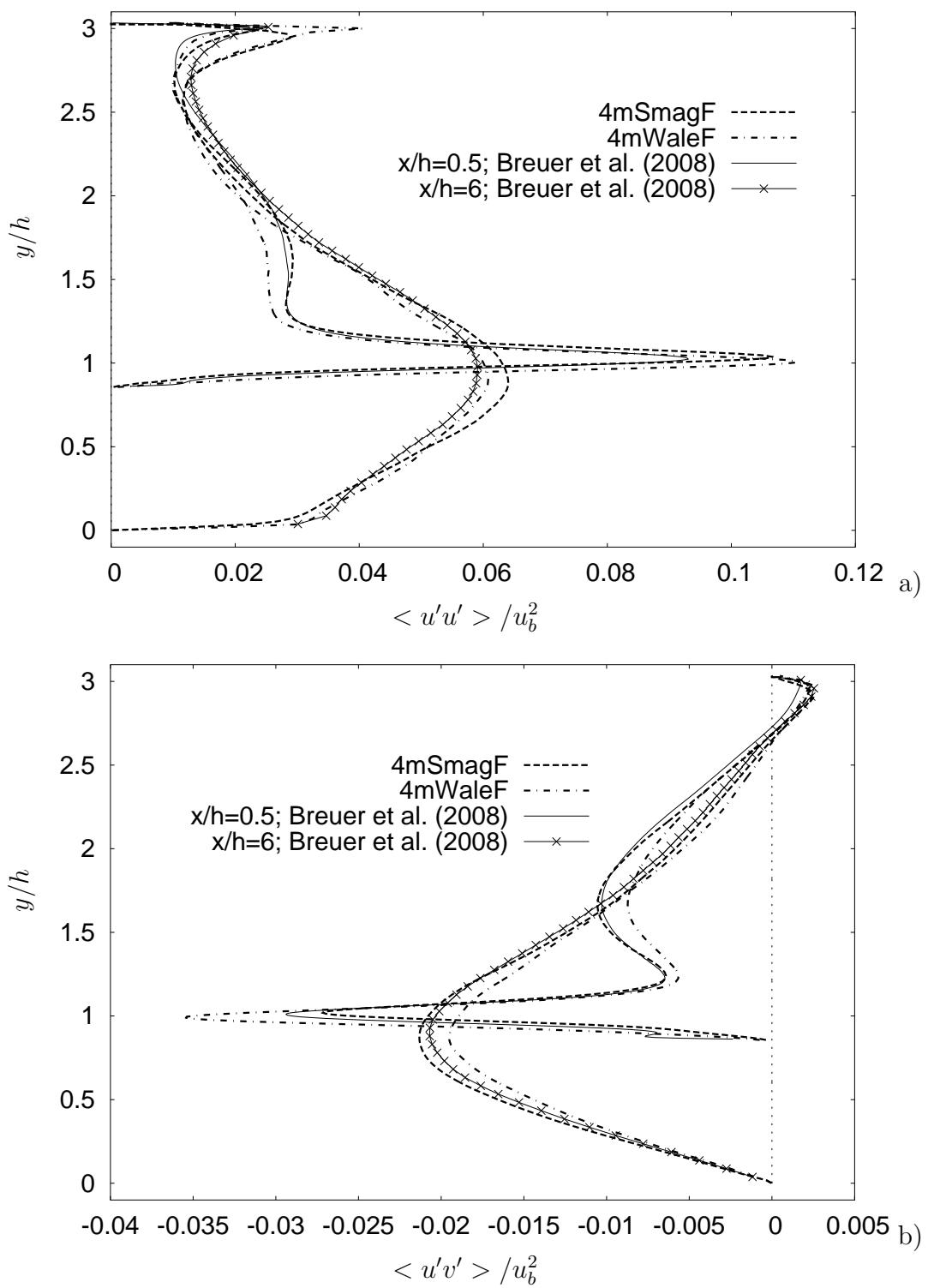
#### Ergebnisse für das feine Gitter

Für das feine Gitter werden die Simulationen *4mSmagF* und *4mWaleF* (siehe Tabelle 6.5) verglichen. Simulation *4mSmagF* verwendet das Standard Smagorinsky Modell. Dabei wird auf eine Wandbehandlung der turbulenten Viskosität nahe der IB Wand verzichtet. Das ist physikalisch nicht richtig, wie in Abschnitt 2.3 diskutiert wird. Die turbulente Viskosität, die das Smagorinsky Modell berechnet, erreicht nahe der Wand nicht Null und ist deshalb unphysikalisch. Anders verhält es sich beim WALE Modell (Simulation *4mWaleF*). Wie in Abschnitt 2.3 für die Kanalströmung ohne Hügel gezeigt wurde, nimmt die turbulente Viskosität bei Annäherung an die Wand proportional zu  $y^{+3}$  ab und folgt damit dem Verlauf der Reynoldsspannungen nahe der Wand. Aufgrund des unterschiedlichen Verhaltens beider Modelle werden merkbare Unterschiede in den Ergebnissen erwartet.

**Mittlere Geschwindigkeitsprofile** Abbildung 6.26 zeigt die Geschwindigkeitsprofile der Simulationen *4mSmagF* und *4mWaleF* im Vergleich zu Breuer et al. [5]. Das Profil der Geschwindigkeit in Strömungsrichtung bei  $x/h = 0.05$  zeigt bei der Simulation *4mSmagF* einen schwächeren Gradienten nahe der unteren Wand. Folglich verändert sich auch die Ablösung und ebenso der Wiederanlegepunkt. An der Position  $x/h = 6$  sieht man, dass sich die Strömung in Simulation *4mSmagF* später erst von der Ablösung erholt. Hier ist der Betrag der Geschwindigkeit nahe der Wand geringer.



**Abbildung 6.26:** Geschwindigkeit  $\langle u \rangle$  in Strömungsrichtung und  $\langle v \rangle$  in vertikaler Richtung an den Positionen  $x/h = 0.05$  und  $x/h = 6$  für die Simulationen  $4mSmagF$  und  $4mWaleF$  bei  $Re = 10595$ .



**Abbildung 6.27:** Reynoldsspannungen  $\langle u'u' \rangle$  und  $\langle u'v' \rangle$  an den Positionen  $x/h = 0.5$  und  $x/h = 6$  für die Simulationen  $4mSmagF$  und  $4mWaleF$  bei  $Re = 10595$ .

Diese Beobachtung stimmt mit den Erkenntnissen aus Abschnitt 6.1 überein: Beim Standard Smagorinsky Modell ist die turbulente Viskosität nahe der Wand nicht Null und beeinflusst dadurch den mittleren Geschwindigkeitsgradienten. Temmerman et al. [64] beschreibt ein ähnliches Verhalten bei der turbulenten Kanalströmung. Danach vermindert hohe turbulente Viskosität im Bereich  $10 < y^+ < 20$  den Geschwindigkeitsgradienten beginnend im Übergangsbereich zwischen linearem Bereich und logarithmischer Region. Auch bei der Simulation  $4mSmagF$  ist die turbulente Viskosität nahe der Wand höher als bei dem Wale Modell (siehe z.B. Abbildung 6.32) und das Geschwindigkeitsprofil weist einen schwächeren Gradienten nahe der Wand auf. Die Ergebnisse der Simulation  $4mWaleF$  und Breuer hingegen zeigen eine sehr gute Übereinstimmung in Hinsicht auf den Gradienten.

Die Geschwindigkeitskomponente in vertikaler Richtung (Abbildung 6.26 (b)) zeigt ebenfalls eine gute Übereinstimmung zwischen Simulation  $4mWaleF$  und den Ergebnissen von Breuer. An der Position  $x/h = 0.05$  unterschätzt Simulation  $4mWaleF$  den Geschwindigkeitsverlauf um maximal 10%. Simulation  $4mSmagF$  zeigt aber sowohl bei Position  $x/h = 0.05$  als auch bei  $x/h = 6$  einen zu hohen Maximalwert.

**Turbulente Strömungsgrößen** Abbildung 6.27 zeigt die Reynoldsspannungen  $\langle u'u' \rangle$  und  $\langle u'v' \rangle$  für zwei Positionen:  $x/h = 0.5$  und  $x/h = 6$ . Hier wird im Gegensatz zu den Vergleichen für die mittlere Geschwindigkeit Position  $x/h = 0.5$  an Stelle von  $x/h = 0.05$  betrachtet, da hier die Unterschiede in den Simulationen deutlicher herausgearbeitet werden können. An der Position  $x/h = 0.5$  zeigen Simulationen  $4mWaleF$  und  $4mSmagF$  beide ein erhöhtes Maximum im Verlauf von  $\langle u'u' \rangle$  in der Scherschicht nahe der unteren Wand im Vergleich zur Simulation von Breuer.

Es wird hier angemerkt, dass die Profile zwar von den Ergebnissen von Breuer abweichen, aber etwas näher am Experiment liegen. Zum Vergleich kann Abbildung 6.25 herangezogen werden, die Simulation  $4mWaleF$  sowohl mit Breuer als auch mit dem Experiment von Rapp [52] zeigt.

Bei den turbulenten Spannungen  $\langle u'v' \rangle$  an der Position  $x/h = 0.5$  (Abbildung 6.27) zeigt Simulation  $4mWaleF$  ebenfalls einen höheren Maximalwert als die Simulation von Breuer. Hierbei ist aber das experimentelle Profil von Rapp in Übereinstimmung mit dem Profil von Breuer und Simulation  $4mSmagF$ . Überraschender Weise liegt hier die Simulation mit dem Smagorinsky Modell etwas näher an der Simulation von Breuer. Der Verlauf der Spannungen und die Positionen der Maxima ist bei allen Simulationen gut wiedergegeben wird.

### Ergebnisse für das grobe Gitter

Für das grobe Gitter werden die Simulationen  $1mSmagF$ ,  $1mLagF$  und  $1mWaleF$  (siehe Tabelle 6.5) verglichen. Damit werden alle in Kapitel 2.4 vorgestellten Feinstrukturmodelle getestet. Simulation  $1mSmagF$  verwendet das Standard Smagorinsky Modell. Simulation  $1mLagF$  verwendet das dynamische Smagorinsky Modell mit Mittelung der Konstanten entlang Lagrangescher Partikelbahnen. Simulation  $1mWaleF$  wird mit dem WALE Modell durchgeführt.

Bei dem Standard Smagorinsky Modell wird wie bei dem feinen Gitter auf eine Wandbehandlung der turbulenten Viskosität verzichtet. Die beiden anderen Modelle erfüllen aber die Bedingung, dass der Wert der turbulenten Viskosität nahe der Wand mit einem Verlauf propor-

tional zu  $y^{+3}$  abnehmen muss. Aufgrund des deutlich größeren Gitters werden hier ausgeprägte Unterschiede zwischen den Turbulenzmodellen erwartet.

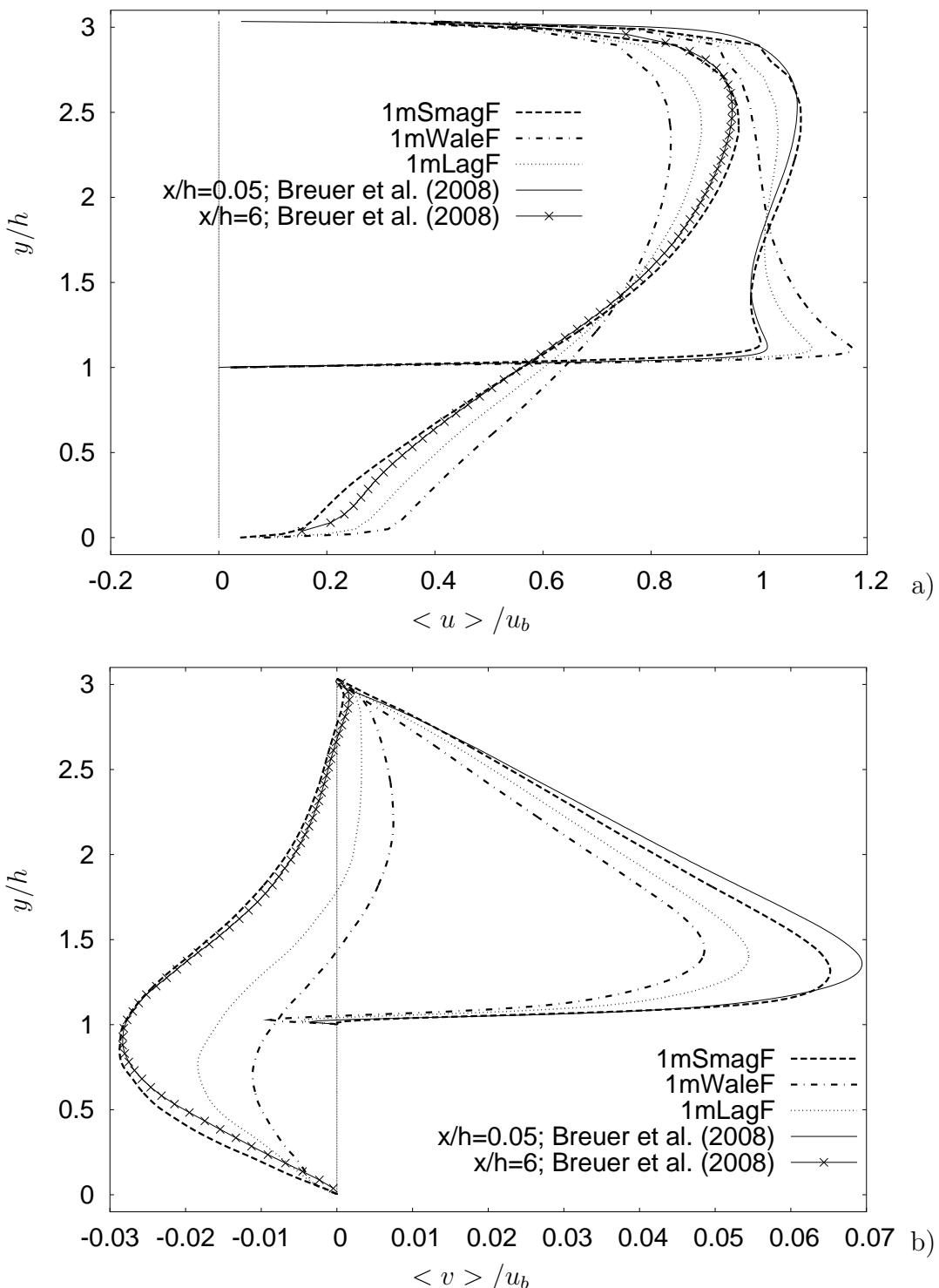
**Mittlere Geschwindigkeitsprofile** Abbildung 6.28 zeigt die Geschwindigkeit in Strömungsrichtung für die drei Simulationen im Vergleich zu Breuer et al. [5]. Sehr deutliche Unterschiede sind zu erkennen. An Position  $x/h = 0.05$  sieht man den Effekt des Turbulenzmodells auf den Geschwindigkeitsgradienten nahe der Wand. Ein vergleichbarer Effekt wurde bereits bei dem feinen Gitter beobachtet und ist in Abbildung 6.26 (a) zu sehen. Auch bei dem feinen Gitter zeigte das Standard Smagorinsky Modell den schwächsten Geschwindigkeitsgradienten. Das führte bei dem feinen Gitter noch zu einer Unterschätzung des Geschwindigkeitsgradienten. Hier aber trifft das Smagorinsky Modell die Referenzsimulation von Breuer am besten. Das dynamische Modell und das WALE Modell überschätzen beide den Gradienten und damit das Geschwindigkeitsmaximum nahe der Wand. An Position  $x/h = 6$  in Abbildung 6.28 erkennt man wieder, dass der stark unterschiedliche Geschwindigkeitsgradient bei  $x/h = 0.05$  auch das Wiederanlegen der Strömung beeinflusst und sich die Grenzschicht im Fall des dynamischen Modells bereits stärker erholt hat als bei dem Standard Smagorinsky Modell.

Ein Vergleich der vertikalen Geschwindigkeitskomponente in Abbildung 6.28 zeigt ebenfalls die beste Übereinstimmung für das Standard Smagorinsky Modell. Am stärksten weicht das WALE Modell von Breuer ab. Ein Zusammenhang zwischen den unterschiedlichen Ergebnissen und der berechneten Wirbelviskosität wird in Abschnitt 6.3.6 weiter diskutiert.

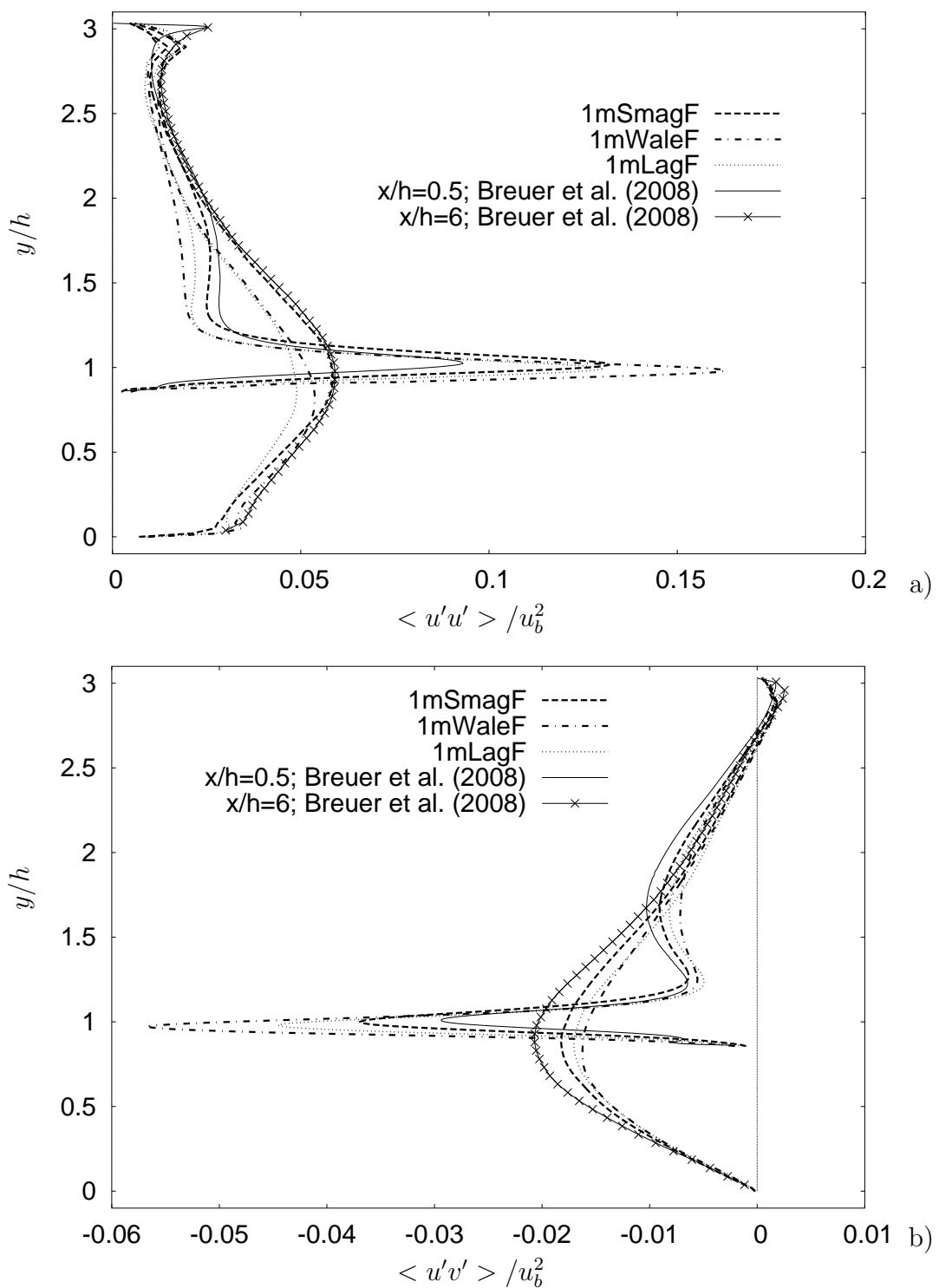
Es wird festgehalten, dass für das grobe Gitter die Ergebnisse des dynamischen Modells in Hinsicht auf die Geschwindigkeitsprofile näher an den Ergebnissen von Breuer liegen als die Ergebnisse mit dem WALE Modell. Überraschender Weise zeigt das Smagorinsky Modell eine gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Breuer.

**Turbulente Strömungsgrößen** Abbildung 6.29 (a) zeigt die Reynoldsspannungen  $\langle u'u' \rangle$  an den Positionen  $x/h = 0.5$  und  $x/h = 6$ . Auch für das grobe Gitter wird hier im Gegensatz zu den Vergleichen für die mittlere Geschwindigkeit Position  $x/h = 0.5$  an Stelle von  $x/h = 0.05$  betrachtet. An der Position  $x/h = 0.5$  ist die größte Abweichung beim WALE Modell zu beobachten. An Position  $x/h = 6$  weicht das dynamische Modell etwas stärker ab als das WALE Modell.

Im Vergleich zu den Grobstruktursimulationen auf dem feinen Gitter (Abbildung 6.27 (a)) sind die Abweichungen hier deutlich größer. Bei dem feinen Gitter unterschieden sich die Maxima bei  $x/h = 0.5$  um höchstens 20%, während hier Abweichungen um ca. 75% auftreten. Es war zu erwarten, dass mit einem größeren Gitter der Einfluss des Feinstrukturmodells zunimmt. Auch Temmerman et al. [64] beobachteten an der Position  $x/h = 6$  ein ähnliches Verhalten: Das dynamische Smagorinsky Modell und das WALE Modell auf dem größten Gitter unterschätzen beide das Maximum der Reynoldsspannung. Dabei wird angemerkt, dass Temmerman beim dynamischen Smagorinsky Modell die Smagorinsky Konstante in homogener Richtung mittelt und nicht wie hier entlang Lagrangescher Partikelbahnen.



**Abbildung 6.28:** Geschwindigkeit  $\langle u \rangle$  in Strömungsrichtung und  $\langle v \rangle$  in vertikaler Richtung an den Positionen  $x/h = 0.05$  und  $x/h = 6$  für die Simulationen *1mSmagF*, *1mWaleF* und *1mLagF* bei  $Re = 10595$ .



**Abbildung 6.29:** Reynoldsspannungen  $\langle u'u' \rangle$  und  $\langle u'v' \rangle$  an den Positionen  $x/h = 0.5$  und  $x/h = 6$  für die Simulationen 1mSmagF, 1mWaleF und 1mLagF bei  $Re = 10595$ .

Die Reynoldsspannungen  $\langle u'v' \rangle$  werden in Abbildung 6.29 (b) gezeigt. Auch hier werden die größten Abweichungen an der Position  $x/h = 0.5$  für das WALE Modell beobachtet. Wieder zeigt das Standard Smagorinsky Modell die beste Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Breuer. Die unterschätzten Reynoldsspannungen  $\langle u'v' \rangle$  des dynamischen Feinstrukturmodells und des WALE Modells an der Position  $x/h = 6$  stimmt mit den Beobachtungen von Temmerman et al. [64] auf ihrem am größten aufgelösten Gitter überein. Bemerkenswert ist, dass die y-Position der Maxima trotz großer Abweichungen in den Maximalwerten kaum variiert. Das gilt für die Normalspannungen  $\langle u'u' \rangle$  und für die Scherspannungen  $\langle u'v' \rangle$ .

### 6.3.6 Gittervergleich für die Grobstruktursimulation

Nachdem die Ergebnisse für die unterschiedlichen Feinstrukturmodelle auf dem feinen und groben Gitter vorgestellt wurden, werden hier Ergebnisse für beide Gitter in Hinsicht auf die Gitterauflösung verglichen.

Es wird zuerst auf die Wandschubspannung, die turbulenten Spannungen und anschließend auf die zeitlich gemittelte turbulente Viskosität eingegangen. Da sich die beiden Gitter in der Auflösung nahe der Wand unterscheiden, werden vor allem dort Unterschiede erwartet. In Hinsicht auf das Verhalten der Turbulenzmodelle nahe der Wand wird diskutiert, ob die turbulente Viskosität auch bei der IB Wand mit dem Wandabstand  $\nu_t \sim y^{+3}$  skaliert, wie es für die Kanalströmung ohne Hügel in Abschnitt 6.1.2 gezeigt wurde, siehe Tabelle 6.6 für die hier zum Vergleich herangezogenen Simulationen.

Gitter	Punkte	Flusskorr.	Smagorinsky	dyn. Smag.	Lag.	WALE
1	4 Mio	nein	4mSmag	—	—	<b>4mWale</b>
2	1 Mio	nein	1mSmag	1mLag	—	1mWale
1	4 Mio	ja	<b>4mSmagF</b>	—	—	<b>4mWaleF</b>
2	1 Mio	ja	1mSmagF	1mLagF	—	1mWaleF

**Tabelle 6.6:** Parameter der Simulationen: Feines (1) und grobes Gitter (2); Immersed Boundary mit oder ohne Flusskorrektur (Flusskorr.); Standard Smagorinksy Modell (Smagorinsky), dynamisches Smagorinsky Modell mit Mittelung entlang Lagrangescher Partikelbahnen (dyn. Smag. Lag.) und WALE Turbulenzmodell. Simulationsvergleiche sind durch die Schrift hervorgehoben, grau markierte Simulationen werden in diesem Abschnitt nicht behandelt.

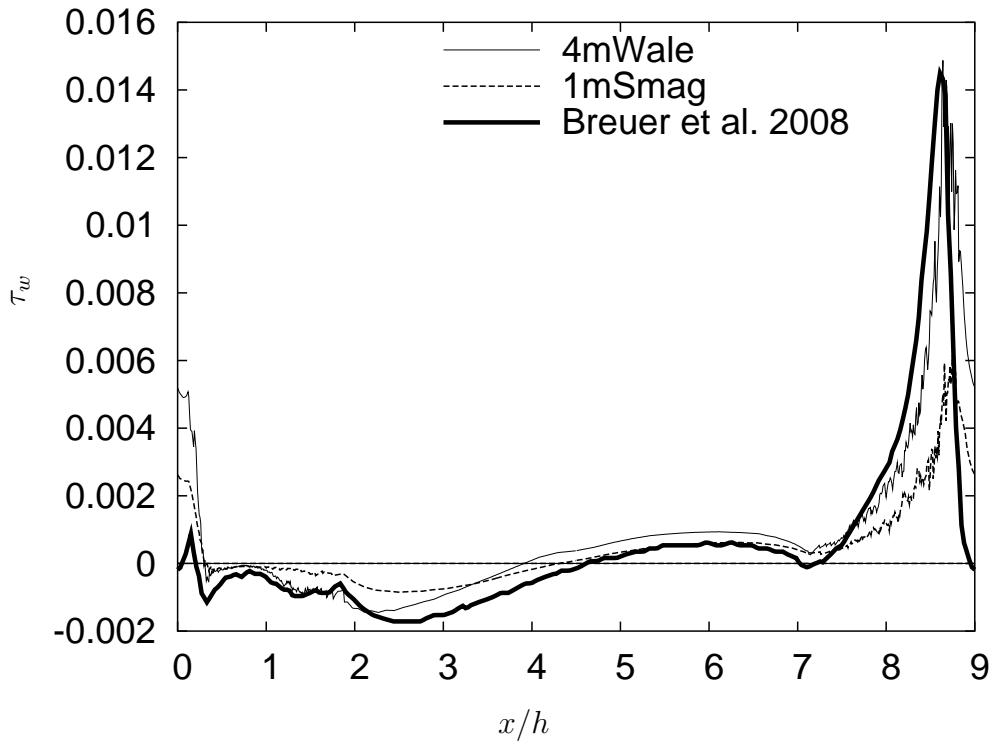
#### Zeitlich gemittelte Wandschubspannung

**Ergebnisse für das feine Gitter** Abbildung 6.30 zeigt die Wandschubspannung für die Simulationen *4mWale* und *1mSmag*. Bei Simulation *4mWale* wird das Maximum der Wandschubspannung gut wiedergegeben und der Wert stimmt mit der Simulation von Breuer et al. [5] überein. Auch der Verlauf der Wandschubspannung innerhalb der Hauptrezirkulationszone folgt den Ergebnissen von Breuer.

Der Ablösepunkt ist allerdings verzögert und die Strömung legt früher wieder an. Nach Temmerman et al. [64] ist für den Ablösepunkte die Auflösung in Strömungsrichtung ausschlaggebend. Es wird vermutet, dass die Auflösung in Strömungsrichtung im Bereich  $8.7 < x/h < 9$  bei beiden Gittern nicht ausreichend ist, da der schnelle Abfall der Wandschubspannung nicht wiedergegeben wird (vergleiche auch Abbildung 6.21). Auch in Fröhlich [13] wird ein großer Einfluss der Auflösung in Strömungsrichtung ( $\Delta x$ ) auf die Ergebnisse festgestellt. Das Optimum der Gitterauflösung wird für das Seitenverhältnis  $\Delta x^+/\Delta y^+ = 1$  angegeben.

Durch die größere Auflösung in Strömungsrichtung erkennt man in der Wandschubspannung auch nicht die kleine Rezirkulationszone auf dem Hügel, die sich im Verlauf der Wandschubspannung von Breuer et al. [5] abzeichnet. Ebenso findet sich nicht die kleine Rezirkulationszone bei  $x/h \approx 7.1$  vor dem Hügel. Hier wird aber angemerkt, dass im Verlauf der Wandschubspannung der DNS bei  $Re = 2800$  und  $Re = 5600$  diese kleine Rezirkulationszone zu erkennen ist (siehe Abbildung 6.17). Damit wird deutlich, dass der

Grund für das Fehlen der kleinen Rezirkulationszonen eine unzureichende Gitterauflösung ist.



**Abbildung 6.30:** Wandschubspannung für die Simulationen *4mWale* und *1mSmag* auf dem feinen und groben Gitter ( $Re = 10595$ ).

**Ergebnisse für das grobe Gitter** Die Wandschubspannung für die Simulation *1mSmag* ist ebenfalls in Abbildung 6.30 zu sehen. Hier ist deutlich zu erkennen, dass die Simulation nicht mehr wandaufgelöst ist. Die Wandschubspannung zeigt viel geringere Maxima und folgt auch in der Hauptrezirkulationszone nicht dem Verlauf der Simulation von Breuer.

**Bemerkung zur Wandschubspannung** Für die Auswertung der Wandschubspannung in der IB Methode bedarf es der Interpolation und Transformation der Geschwindigkeitsgradienten in das wandparallele Koordinatensystem der Hügelkontur. Dabei entstehen zusätzliche Interpolationsfehler, die den zackigen Verlauf der Wandschubspannung in Abbildung 6.30 erklären. Der Fehler nimmt aber mit zunehmend feinem Gitter ab. Beispielsweise zeigt sich bei der DNS Simulation in Abbildung 6.10 auf Seite 128 ein glatter Verlauf der Wandschubspannung. Es wird an dieser Stelle betont, dass der zackige Verlauf der Wandschubspannung nicht gleichzeitig eine Strömungslösung mit wiggles bedeutet, da es sich hier um eine nachträgliche Auswertung handelt. Dieses Verhalten ist eine Eigenheit der IB Methode und erfordert für die Darstellung eines glatten Verlaufs unter Umständen eine feinere Gitterauflösung nahe der Wand als bei einem wandangepassten Gitter.

## Turbulente Strömungsgrößen

Für die turbulenten Spannungen werden die Simulationen *4mWaleF* für das feine Gitter und *1mSmagF* für das grobe Gitter verglichen (siehe auch Tabelle 6.5), da sie die beste Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Breuer zeigen.

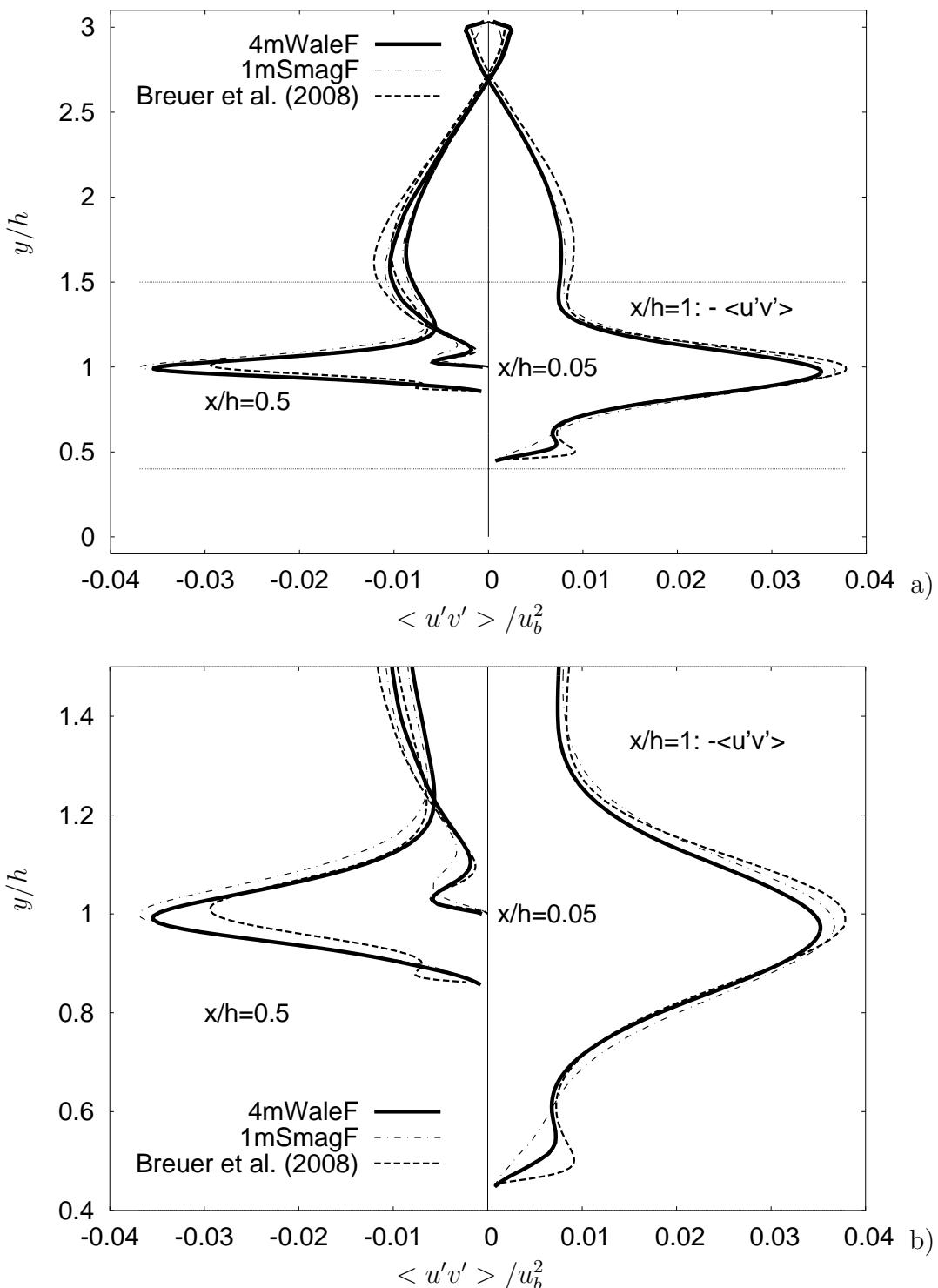
Abbildung 6.31 zeigt die Reynoldsspannungen  $\langle u'v' \rangle$  an den Positionen  $x/h = 0.05$ ,  $x/h = 0.5$  und  $x/h = 1$ . Abbildung 6.31 (b) zeigt einen vergrößerten Ausschnitt des wandnahen Verlaufs der Spannungen. An Position  $x/h = 0.05$  findet sich eine gute Übereinstimmung zwischen allen Ergebnissen. Das kleine Maximum der Reynoldsspannung nahe der Wand wird bei allen Simulationen wiedergegeben. Anders verhält es sich an den Positionen  $x/h = 0.5$  und  $x/h = 1$ . Die feine Simulation zeigt bei  $x/h = 1$  nur noch ein stark gedämpftes lokales Maximum nahe der Wand mehr, während die grobe Simulation kein lokales Maximum mehr zeigt. Bei  $x/h = 0.5$  zeigen sowohl grobe als auch feine Simulation kein Maximum. Diese Beobachtung war für das grobe Gitter zu erwarten. Für das feine Gitter ist es überraschend, da die Wandauflösung entsprechend fein gewählt wurde, siehe auch Abschnitt 6.3 für die Auslegung der beiden Gitter.

Zwei Gründe für die mangelhafte Auflösung des lokalen Maximums der Spannung  $\langle u'v' \rangle$  bei  $x/h = 0.5$  werden vermutet. Zum Einen ist die Auflösung  $\Delta x^+$  in Strömungsrichtung deutlich größer als die Auflösung  $\Delta y^+$  in vertikaler Richtung (vergleiche dazu Abbildung 6.21). Sie liegt mit  $6 < \Delta x^+ < 8$  deutlich über  $\Delta y^+ \approx 1$  und damit an der abfallenden Flanke nicht mehr in der viskosen Unterschicht. Zum anderen ist in Abbildung 6.21 bei  $x/h = 0.5$  zusätzlich ein plötzlicher Anstieg des Seitenverhältnisses zu erkennen. Dadurch entstehen längliche Berechnungszellen wie man in Abbildung 6.19 erkennt. Beide Effekte zusammen können wie ein Filter wirken und die Geschwindigkeitsfluktuationen in Strömungsrichtung dämpfen.

## Turbulente Viskosität

Für die Betrachtung der turbulenten Viskosität werden die Positionen  $x/h = 0.05$  und  $x/h = 2$  herausgegriffen. Das Profil bei  $x/h = 0.05$  wurde gewählt, da zuvor ein starker Einfluss des Feinstrukturmodells auf das Geschwindigkeitsprofile an dieser Position gezeigt wurde. Das Geschwindigkeitsprofil besitzt hier einen starken Gradienten nahe der Wand. Die zweite Position wurde gewählt, da es mitten in der Hauptzirkulationszone liegt und dort der Druckgradient nahe Null ist. Zum Vergleich mit dem Wandschubspannungsverlauf und dem Druckverlauf können Abbildungen 6.17 (a) und (b) herangezogen werden. Es muss erwähnt werden, dass bei beiden Gittern der erste wandnahe Gitterpunkt in einem ähnlichen Bereich liegt, vergleiche hierzu auch Abbildung 6.21.

**Position  $x/h = 0.05$**  Abbildung 6.32 zeigt die turbulente Viskosität in doppelt logarithmischen Maßstab für die beiden Gitter an Position  $x/h = 0.05$ . Bei beiden Gitter ist zu erkennen, dass die turbulente Viskosität des Standard Smagorinsky Modells nahe der Wand nicht gegen Null geht, das dynamische Smagorinsky Modell und das WALE Modell hingegen schon. Es wurde bereits vermutet, dass die Wirbelviskosität am Rand einen Einfluss auf das Geschwindigkeitsprofil hat. Da das feine Gitter und das grobe Gitter schon zuvor zeigten, dass das Geschwindigkeitsprofil in Strömungsrichtung bei  $x/h = 0.05$  für das Standard Smagorinsky Modell einen schwächeren Gradienten aufweist, wird hierin die Ursache



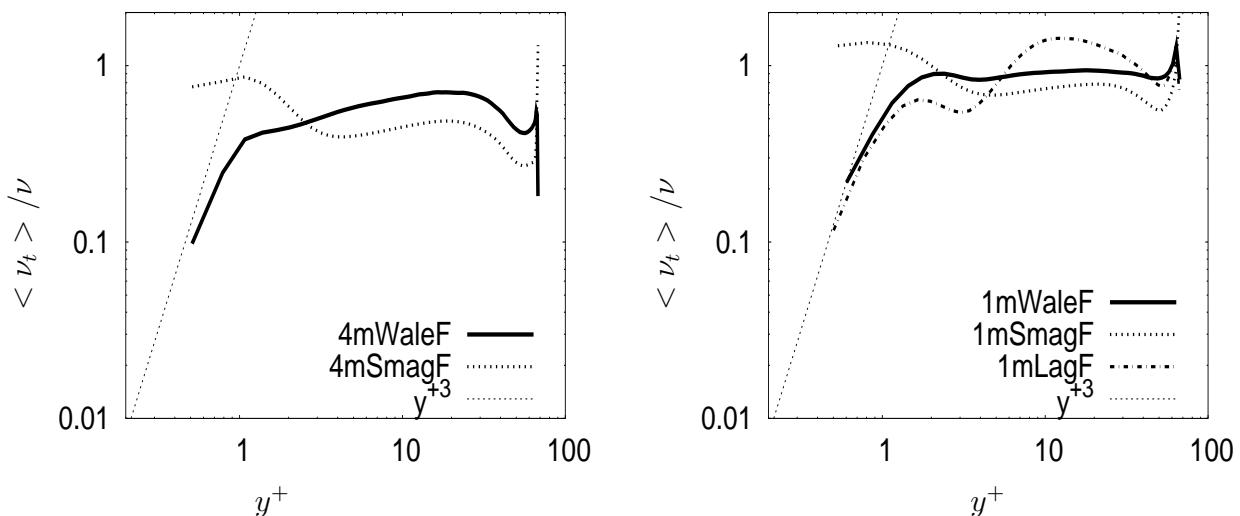
**Abbildung 6.31:** Reynoldsspannungen im Vergleich für das feine und das grobe Gitter aus den Simulationen *4mWaleF* und *1mSmagF*. Abbildung (b) zeigt einen vergrößerten Ausschnitt aus (a). Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurden die turbulenten Spannungen  $\langle u'v' \rangle$  mit  $(-1)$  multipliziert.

vermutet. Hierzu können Abbildung 6.26 für das feine Gitter und Abbildung 6.28 für das grobe Gitter verglichen werden. Das Verhalten ist auch in Übereinstimmung mit den Beobachtungen von Temmerman et al. [64], der ebenfalls einen Einfluss der Wirbelviskosität auf das Geschwindigkeitsprofil beschreibt.

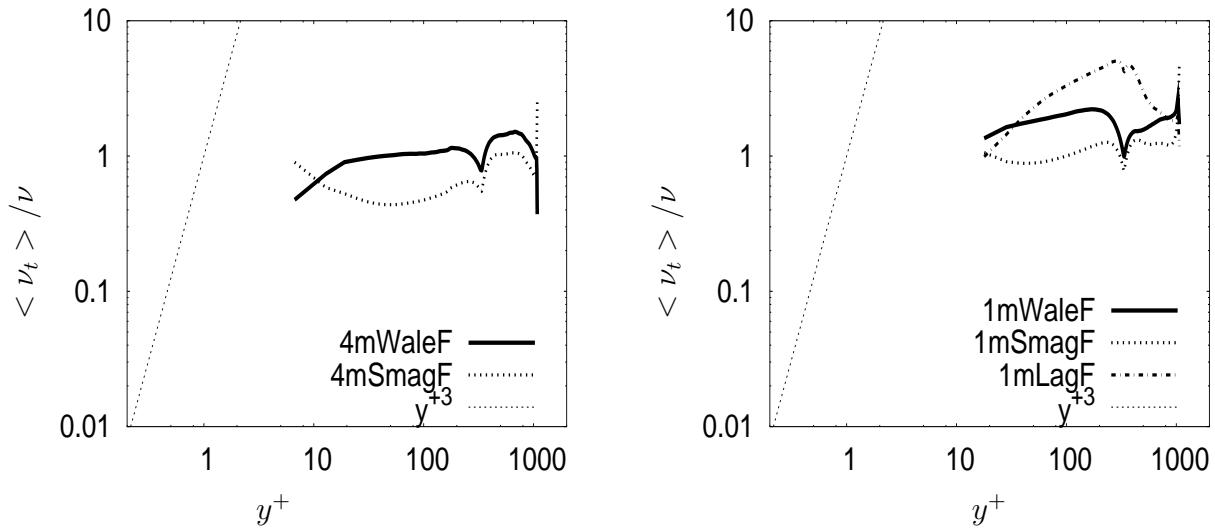
Für das WALE Modell und das dynamische Smagorinsky Modell ist die turbulente Viskosität nahe der Wand vergleichbar und die Unterschiede im Geschwindigkeitsprofil in Abbildung 6.28 (a) müssen eine andere Ursache haben. Wiederum in Übereinstimmung mit Temmerman et al. [64] ist die Tatsache, dass das dynamische Smagorinsky Modell in einem weiten Bereich eine deutlich höhere Viskosität als das WALE Modell vorhersagt.

Zu erkennen ist in Abbildung 6.32 (a) und (b) auch, dass die turbulente Viskosität z.B. beim Smagorinsky Modell im Verhältnis zur molekularen Viskosität bei dem groben Gitter den Maximalwert 1.5 nahe der Wand erreicht, während auf dem feinen Gitter nur 0.9 erreicht wird. Die Tatsache, dass auf dem groben Gitter viel höhere Werte der turbulenten Viskosität erreicht werden spiegelt sich auch in den beobachteten Unterschieden in den Geschwindigkeitsprofilen wieder. Auf dem groben Gitter sind z.B. die Unterschiede in den Geschwindigkeitsprofilen bei  $x/h = 0.05$  prägnanter als auf dem feinen Gitter. Vergleiche dazu auch Abbildung 6.26 (a) für das feine Gitter und Abbildung 6.28 (a) für das grobe Gitter.

Das WALE Modell und das dynamische Smagorinsky Modell zeigen bei beiden Gittern in Abbildung 6.32 ungefähr den erwarteten Abfall der turbulenten Viskosität  $\langle \nu_t \rangle / \nu$  mit  $\langle \nu_t \rangle \sim y^{+3}$  wie in Abschnitt 6.3 besprochen. Abweichungen sind zu erwarten, da hier keine Standard Grenzschicht vorliegt. An der betrachteten Position ist der Druckgradient  $\partial p / \partial x$  ungleich Null (siehe Abbildung 6.17). Auch Temmerman et al. [64] zeigen für die Hügelströmung, dass die turbulente Viskosität nahe der Wand gegen Null geht.



**Abbildung 6.32:** Normierte Wirbelviskosität  $\langle \nu_t \rangle / \nu$  nahe der Wand für die Grobstruktursimulationen bei  $Re = 10595$  an der Position  $x/h = 0.05$  für das feine (links) und das grobe Gitter (rechts).



**Abbildung 6.33:** Normierte Wirbelviskosität  $\langle \nu_t \rangle / \nu$  nahe der Wand für die Grobstruktursimulationen bei  $Re = 10595$  an der Position  $x/h = 2$  für das feine (links) und das grobe Gitter (rechts).

**Position**  $x/h = 2$  Da bei  $x/h = 0.05$  keine Standard Grenzschicht vorliegt, wird das Verhalten der turbulenten Viskosität bei  $x/h = 2$  untersucht. Die Position befindet sich in der Rezirkulationszone und der Druckgradient ist hier näherungsweise Null (siehe Abbildung 6.17 für den Verlauf der Wandschubspannung und des Druckes entlang der unteren Wand). Abbildung 6.33 zeigt den Verlauf der turbulenten Viskosität für das feine Gitter (a) und das grobe Gitter (b). Wie schon zuvor erkennt man, dass das grobe Gitter höhere Werte der turbulenten Viskosität erreicht. Auf dem groben Gitter erreicht  $\langle \nu_t \rangle / \nu$  beim WALE Modell ein Maximum von  $\langle \nu_t \rangle / \nu \approx 2$ , während auf dem feinen Gitter ein Maximum von  $\langle \nu_t \rangle / \nu \approx 1.5$  erreicht wird. Für das dynamische Smagorinsky Modell wird auf dem groben Gitter sogar ein Maximum von  $\langle \nu_t \rangle / \nu \approx 3.3$  erreicht.

Im Gegensatz zum Verlauf der Wandschubspannung bei Temmerman sieht man hier einen deutlichen Bereich, in dem die turbulente Viskosität stark abnimmt. Das liegt an den unterschiedlichen Gittertopologien. Temmerman et al. [64] verwenden ein wandangepasstes kurvilineares Gitter und hier wird ein kartesisches Gitter verwendet. Bei dem kartesischen Gitter ist der Bereich der Scherschicht bei  $y/h = 1$  sehr fein aufgelöst wie in Abbildung 6.19 (a) und (b) für beide Gitter im Gitterlinienplot zu erkennen ist. Diese feine Auflösung bleibt im kartesischen Gitter über die x-Richtung konstant. Dort wird aufgrund der feinen Auflösung die berechnete turbulente Viskosität geringer und spiegelt sich in dem Verlauf der gezeigten Profile wider.

Aus den gezeigten Profilen kann keine genaue Aussage über den Verlauf der turbulenten Viskosität nahe der Wand gemacht werden, da die wandnahe Auflösung bei beiden Gittern zu gering ist. Der erste Gitterpunkt liegt an dieser Position bei beiden Gittern zwischen  $9 < y^+ < 11$ , siehe auch Abbildung 6.21 für den Wandabstand in viskosen Einheiten. Es lässt sich lediglich ein Trend feststellen. Das dynamische Modell und das WALE Modell zeigen eine Abnahme der turbulenten Viskosität, während das Smagorinsky Modell ein Ansteigen der turbulenten Viskosität nahe der Wand vermuten lässt.

### 6.3.7 Bewertung der IB Flusskorrektur

Es wurde gezeigt, dass bei der Direkten Numerischen Simulation in Kombination mit der IB Methode mit Punktwerten sehr gute Ergebnisse erzielt werden können. Für die DNS wurde die IB Flusskorrektur nicht unbedingt benötigt, weil die Simulation wandaufgelöst ist. Durch die bedeutend gröbere Gitterauflösung bei der Grobstruktursimulation wird ein Einfluss der IB Flusskorrektur erwartet. Es wird angemerkt, dass der hier behandelte Testfall für den Test der Konservativität am IB Rand besonders interessant ist. Durch die periodischen Randbedingungen kann in der Simulation kein globaler Massenverlust auftreten und ein Einfluss der Randbedingungen wird minimiert. Hier spielt also nur der lokale Massenfehler über den Körper, respektive Hügel, eine Rolle. Erfahrungsgemäß wird aber erwartet, dass bei der Anwendung einer Ausströmrandbedingung wie bei der zweidimensionalen Kanalströmung in Abschnitt 5.3 ein stärkerer Effekt der IB Flusskorrektur zu beobachten ist.

Im Folgenden wird der Einfluss der unterschiedlichen IB Methoden untersucht. Es wird die IB Methode mit Punktwerten mit der konservativen IB Methode verglichen. Für den Vergleich auf dem feinen Gitter werden die Simulationen mit dem WALE Modell, *4mWaleF* und *4mWale*, sowie die Simulationen mit dem Standard Smagorinsky Modell, *4mSmagF* und *4mSmag*, herangezogen. Auf dem groben Gitter sind es die Simulationen *1mWaleF* und *1mWale* mit dem WALE Modell und die Simulationen *4mSmagF* und *4mSmag* mit dem Standard Smagorinsky Modell. Tabelle 6.7 gibt einen Überblick über die Simulationen.

Gitter	Punkte	Flusskorr.	Smagorinsky	dyn. Smag. Lag.	WALE
1	4 Mio	nein	<b>4mSmag</b>	—	<b>4mWale</b>
2	1 Mio	nein	1mSmag	1mLag	1mWale
1	4 Mio	ja	<b>4mSmagF</b>	—	<b>4mWaleF</b>
2	1 Mio	ja	1mSmagF	1mLagF	1mWaleF

**Tabelle 6.7:** Parameter der Simulationen: Feines (1) und grobes Gitter (2); Immersed Boundary mit oder ohne Flusskorrektur (Flusskorr.); Standard Smagorinksy Modell (Smagorinsky), dynamisches Smagorinsky Modell mit Mittelung entlang Lagrangescher Partikelbahnen (dyn. Smag. Lag.) und WALE Turbulenzmodell. Simulationsvergleiche sind durch die Schrift hervorgehoben, grau markierte Simulationen werden in diesem Abschnitt nicht behandelt.

Aus dem Vergleich der unterschiedlichen Turbulenzmodelle im vorausgegangenen Abschnitt ist bekannt, dass die Simulation mit dem WALE Modell auf dem feinen Gitter und die Simulation mit dem Standard Smagorinsky Modell auf dem groben Gitter jeweils die genaueste Übereinstimmung der Ergebnisse im Vergleich mit Breuer et al. [5] hervorsagt. Deshalb werden hier die meisten Vergleiche für die Simulationen *4mWaleF* und *4mWale* sowie *1mSmagF* und *1mSmag* durchgeführt. Die Simulationen mit dem dynamischen Smagorinsky Modell werden aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht zum Vergleich herangezogen und, weil wird kein wesentlicher Informationsgewinn erwartet. Zuerst werden im Folgenden die Ergebnisse auf dem feinen und anschließend die Ergebnisse auf dem groben Gitter betrachtet.

### Ergebnisse für das feine Gitter

Für das feine Gitter werden die Simulationen  $4mWaleF$  und  $4mWale$  verglichen. Neben den Simulationen mit dem WALE Modell werden für den Vergleich der turbulenten Spannungen zusätzlich die Simulationen  $4mSmagF$  und  $4mSmag$  mit dem Standard Smagorinsky Modell herangezogen. Das hier verwendete Gitter wird als nahezu wandaufgelöst betrachtet und es werden kleinere Unterschiede in den Ergebnissen als auf dem groben Gitter erwartet.

**Mittlere Geschwindigkeitsprofile** Abbildung 6.34 zeigt die Geschwindigkeitsprofile der Simulationen  $4mWaleF$  und  $4mWale$  im Vergleich zu Breuer et al. [5]. Die Geschwindigkeitskomponente in Hauptströmungsrichtung an den Positionen  $x/h = 0.05$  und  $x/h = 6$  folgen bei beiden Simulationen in weiten Bereichen den Ergebnissen von Breuer. Ein Unterschied ergibt sich für den Gradienten nahe der Wand. Er wird bei der Simulation ohne Flusskorrektur an der Position  $x/h = 0.05$  überschätzt. Folglich verändert sich auch der Ablösepunkt sowie der Wiedeanlegepunkt. Dadurch ist an Position  $x/h = 6$  zu erkennen, dass sich die Strömung im Fall der IB Methode ohne Flusskorrektur etwas schneller erholt.

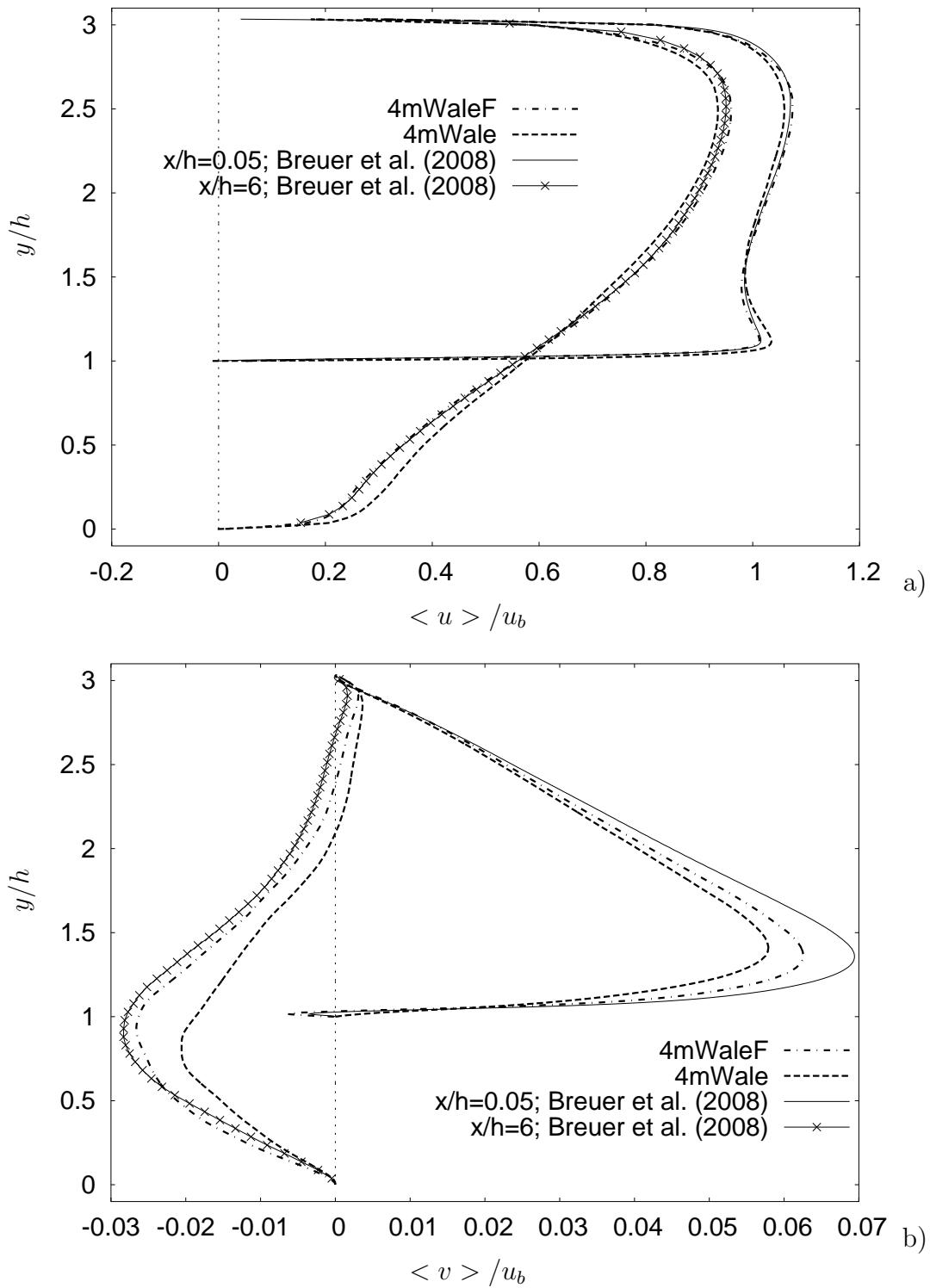
Größere Unterschiede ergeben sich für die vertikale Geschwindigkeitskomponente. Die Simulation  $4mWaleF$  mit IB Flusskorrektur liegt deutlich näher an den Ergebnissen von Breuer. Die Ergebnisse der Simulation  $4mWale$  ohne Flusskorrektur unterschätzen die Geschwindigkeit sowohl an Position  $x/h = 0.05$  als auch bei  $x/h = 6$ .

**Turbulente Strömungsgrößen** Abbildung 6.35 (a) zeigt die Reynoldsspannungen  $\langle u'u' \rangle$  für die Simulationen mit dem WALE Modell. Die Profile der Simulation ohne IB Flusskorrektur weichen deutlich stärker von den Ergebnissen von Breuer ab als die Simulation mit Flusskorrektur. An der Position  $x/h = 2$  unterschätzt Simulation  $4mWale$  die turbulenten Spannungen, während sie die Spannungen an Position  $x/h = 6$  überschätzt.

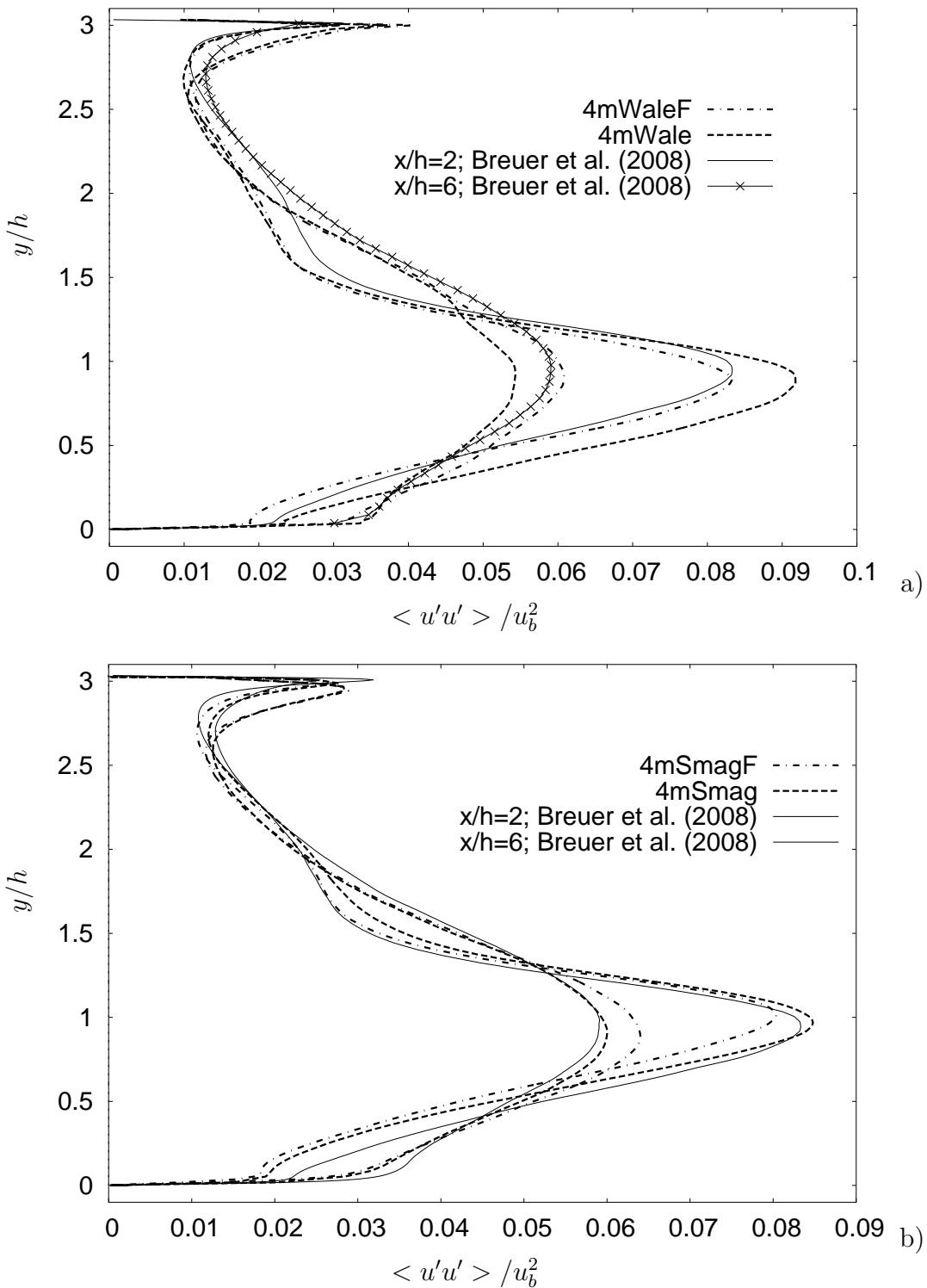
Abbildung 6.35 (b) zeigt die Reynoldsspannungen  $\langle u'u' \rangle$  für die Simulationen mit dem Standard Smagorinsky Modell. Bei beiden Positionen  $x/h = 2$  und  $x/h = 6$  zeigt sich ein ähnlicher Trend wie schon zuvor bei den Simulationen mit dem WALE Modell. Bei Position  $x/h = 2$  zeigt die Simulation ohne IB Flusskorrektur ein schwächer ausgeprägtes Maximum und bei Position  $x/h = 6$  zeigt sie ein stärkeres Maximum als die Simulation mit Flusskorrektur. Sie unterscheiden sich aber im Vergleich zu den Simulationen mit dem WALE Modell dadurch, dass hier die Simulation ohne Flusskorrektur näher an den Ergebnissen von Breuer liegt. Es wird darauf hingewiesen, dass die Unterschiede bei der Simulation mit dem WALE Modell prägnanter als bei dem hier betrachteten Smagorinsky Modell sind.

### Ergebnis für das grobe Gitter

Für das grobe Gitter werden die Simulationen mit dem Standard Smagorinsky Modell,  $1mSmagF$  und  $1mSmag$ , verglichen. Das Standard Smagorinsky Modell in Kombination mit der konservativen IB Methode zeigt auf dem groben Gitter eine bessere Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Breuer et al. [5] als das WALE Modell bzw. das dynamische Smagorinsky Modell (siehe Abschnitt 6.3.5). Für den Vergleich der turbulenten Spannungen werden



**Abbildung 6.34:** Geschwindigkeit  $\langle u \rangle$  in Strömungsrichtung und  $\langle v \rangle$  in vertikaler Richtung an den Positionen  $x/h = 0.05$  und  $x/h = 6$  für die Simulationen  $4mWaleF$  und  $4mWale$  bei  $Re = 10595$ .



**Abbildung 6.35:** Reynoldsspannungen  $\langle u'u' \rangle$  an den Positionen  $x/h = 2$  und  $x/h = 6$  für die Simulationen  $4mWaleF$ ,  $4mWale$  (a) sowie  $4mSmagF$  und  $4mSmag$  (b) bei  $Re = 10595$ .

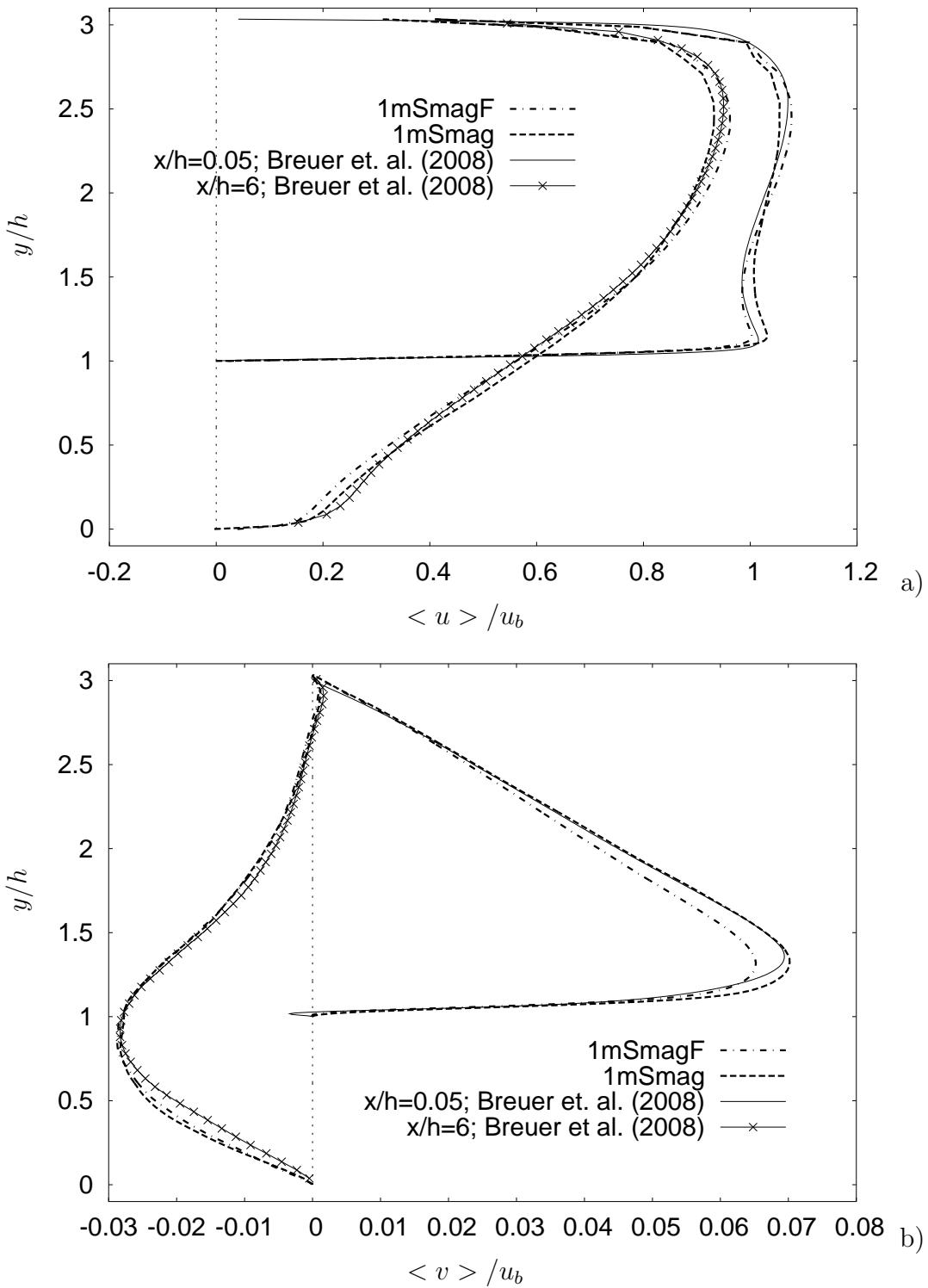
zusätzlich die Simulationen  $1mWaleF$  und  $1mWale$  zum Vergleich herangezogen. Das hier verwendete Gitter ist nicht mehr wandaufgelöst und es werden größere Unterschiede in den Ergebnissen als für das feine Gitter erwartet.

**Mittlere Geschwindigkeitsprofile** Abbildung 6.36 zeigt die Geschwindigkeitsprofile der Simulationen  $1mSmagF$  und  $1mSmag$  im Vergleich zu den Ergebnissen von Breuer et al. [5]. Bei der Geschwindigkeitskomponente in Strömungsrichtung (Abbildung 6.36 (a)) lässt sich an Position  $x/h = 0.05$  erkennen, dass die Simulation ohne Flusskorrektur ein etwas höheres Geschwindigkeitsmaximum nahe der Wand erreicht. Folglich ergibt sich ein Einfluss auf den Ablöse- und Wiederanlegepunkt und das Erholen der Strömung nach der Rezirkulationszone. Die Simulation ohne Flusskorrektur erholt sich schneller und zeigt an der Position  $x/h = 6$  einen steileren Geschwindigkeitsgradienten. Diese Beobachtung stimmt mit den Erkenntnissen für das feine Gitter überein. Auch dort zeigt sich bei beiden Simulationen der gleiche Effekt auf den Geschwindigkeitsgradienten.

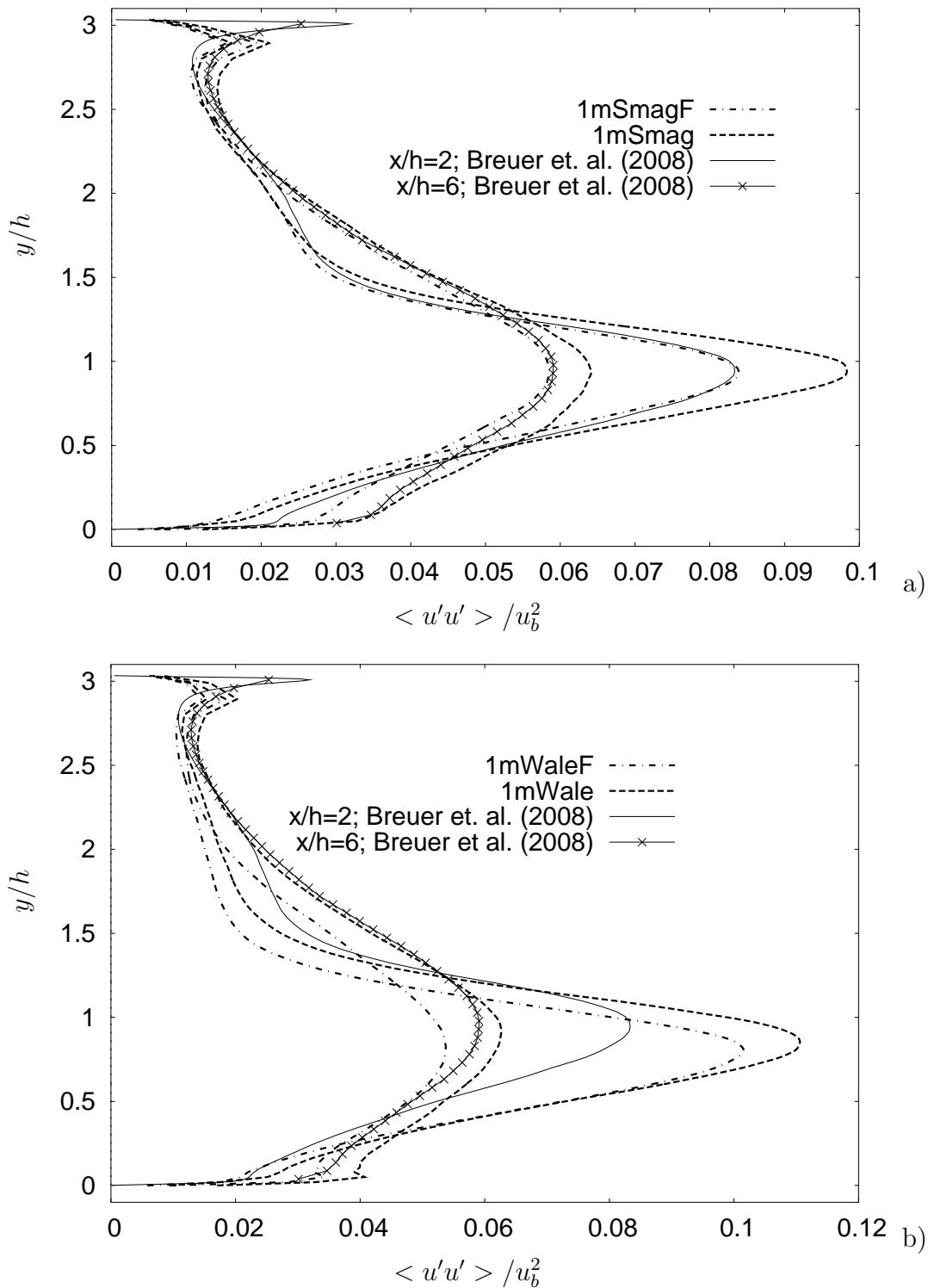
Die vertikale Geschwindigkeitskomponente ist in Abbildung 6.36 (b) zu sehen. An der Position  $x/h = 0.05$  zeigt die Simulation mit der konservativen IB Methode einen geringeren Maximalwert der Geschwindigkeit im Vergleich zu der Simulation von Breuer. An der Position  $x/h = 6$  zeigen die Simulationen mit bzw. ohne Flusskorrektur ein identisches Verhalten. Der Geschwindigkeitsgradient nahe der Wand ist bei beiden Simulationen stärker ausgeprägt als die bei den Ergebnissen von Breuer.

**Turbulente Strömungsgrößen** Abbildung 6.37 (a) zeigt die Reynoldsspannungen  $\langle u'u' \rangle$  für die Simulationen mit dem Smagorinsky Modell. Hier zeigen sich für die Simulation ohne IB Flusskorrektur deutlich höhere Maxima der Spannungen sowohl bei der Position  $x/h = 2$  als auch an der Position  $x/h = 6$ . Ohne Flusskorrektur wird das Maximum der Spannung bei  $x/h = 2$  um ca. 25% überschätzt. Abweichungen zwischen der Simulation mit Flusskorrektur und den Ergebnissen von Breuer et al. [5] sind vor allem an der Position  $x/h = 6$  nahe der Wand zu erkennen. Das deckt sich mit den Erkenntnissen auf dem feinen Gitter. Auch dort liegen die Ergebnisse der Simulation mit IB Flusskorrektur näher an den Ergebnissen von Breuer.

Abbildung 6.37 (b) zeigt die Reynoldsspannungen  $\langle u'u' \rangle$ . Aber hier werden die Simulationen mit dem WALE Modell,  $1mWaleF$  und  $1mWale$ , verglichen. An beiden Positionen  $x/h = 2$  und  $x/h = 6$  erkennt man bei der Simulation ohne Flusskorrektur höhere Maximalwerte im Vergleich zur Simulation mit Flusskorrektur. Das deckt sich mit den zuvor gemachten Beobachtungen für die Simulationen mit Smagorinsky Modell. In Hinsicht auf die Übereinstimmung mit der Simulation von Breuer et al. [5] lässt sich kein eindeutiger Trend festmachen. An Position  $x/h = 2$  liegt die Simulation ohne Flusskorrektur näher an dem Ergebnis von Breuer und bei  $x/h = 6$  die Simulation mit Flusskorrektur. Die hier beobachteten Abweichungen bewegen sich im Bereich zwischen 25% bis 30% und sind damit deutlich höher als bei den Simulationen auf dem feinen Gitter.



**Abbildung 6.36:** Geschwindigkeit  $\langle u \rangle$  in Strömungsrichtung (a) und  $\langle v \rangle$  in vertikaler Richtung (b) an den Positionen  $x/h = 0.05$  und  $x/h = 6$  für die Simulationen *1mSmagF* und *1mSmag* bei  $Re = 10595$ .



**Abbildung 6.37:** Reynoldsspannungen  $\langle u'u' \rangle$  an den Positionen  $x/h = 2$  und  $x/h = 6$  für die Simulationen  $1mSmagF$ ,  $1mSmag$  (a) sowie  $1mWaleF$  und  $1mWale$  (b) bei  $Re = 10595$ .

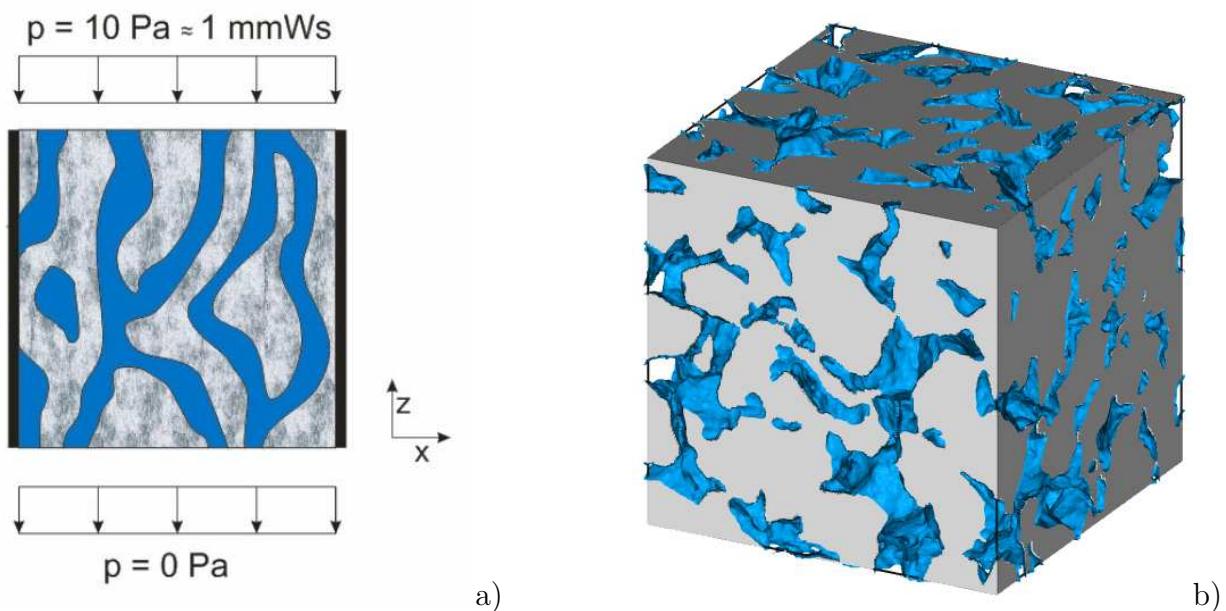
## 6.4 Strömung durch poröse Medien

In diesem Abschnitt wird die Strömung durch ein poröses Medium vorgestellt. Dabei wird die Anwendbarkeit der IB Methode mit Flusskorrektur bei sehr komplexen Geometrien gezeigt und einige Vor- und Nachteile diskutiert. Die vorgestellte Geometrie (Abbildung 6.38) entstammt einem Probekörper, der aus der porösen Asphaltsschicht einer Autobahn entnommen wurde. Die Geometrie des Körpers wurde durch eine Computer Tomographie (CT) Abtastung gewonnen und ist sehr komplex. Die Strömung innerhalb des Probekörpers ist bei den gewählten Randbedingungen laminar.

Im Folgenden wird auf die Testfall Konfiguration und die Gittererstellung eingegangen. Die Vor- und Nachteile der Gittervernetzung mit der IB Methode werden angesprochen. Anschließend werden Geschwindigkeits- und Druckfelder qualitativ beschrieben sowie Stromlinien für die laminare Strömung gezeigt. Zum Schluss wird kurz auf die Wandschubspannung innerhalb der Poren eingegangen.

Für eine weiterführende Diskussion des hier gezeigten Testfalls und der Thematik "poröser Asphalt" wird auf Haselbauer et al. [20, 53, 21] verwiesen.

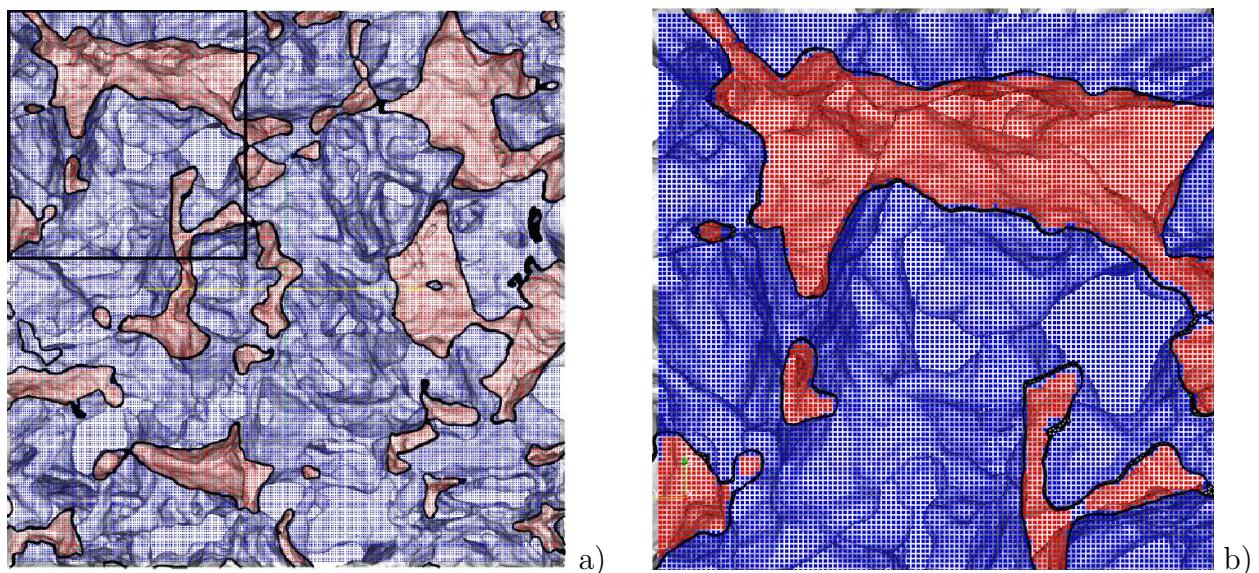
**Testfall Setup** Die Konfiguration des Testfalls wird in Abbildung 6.38 (a) gezeigt. Für die Randbedingungen an der Ober- und Unterseite ( $z$ -Richtung) des Asphaltblocks wurden in der Simulation Druckwerte vorgegeben. Es wurde hierfür angenommen, dass z.B. durch Regen eine Wassersäule in der Höhe von  $1\text{mm}$  auf der Oberfläche des Asphaltblocks entsteht und an der Unterseite Umgebungsdruck herrscht. Die Wassersäule in der Höhe von  $1\text{mm}$  entspricht einem Druck von  $10\text{Pa}$  und es ergibt sich ein Druckgefälle zwischen Ober- und Unterseite.



**Abbildung 6.38:** Konfiguration der Simulation mit Angabe der Randbedingungen: Druckrandbedingung oben und unten sowie Haftbedingung an den Seiten (a). Geometrie aus CT Abtastung der Asphaltprobe (b) (Die Geometrie wurde hier bereits vernetzt).

Für die Randbedingungen an den Seiten wurden reibungsbehaftete Wände gesetzt. Das entspricht einer festen Einspannung des Probekörpers wie es für die Testvorrichtung im Versuch verwirklicht wurde (siehe dazu auch [20, 53, 21]). Die Asphaltgeometrie aus der CT Abtastung ist in Abbildung 6.38 (b) zu sehen. Für die Simulation wird ein Rechengebiet mit den Abmessungen  $30 \times 30 \times 30 \text{ mm}$  simuliert.

**Kartesisches Berechnungsgitter** Das numerische Berechnungsgitter besteht aus  $256^3 = 16.8$  Millionen äquidistanten Gitterzellen. Damit beträgt die Zellgröße in allen drei Raumrichtungen  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.117 \text{ mm}$ . Ein zweidimensionaler Schnitt mit  $256^2$  Zellen ist in Abbildung 6.39 (a) gezeigt. Abbildung 6.39 (b) zeigt einen vergrößerten Ausschnitt. Vor dem Hintergrund der Asphaltgeometrie markieren rote und blaue Punkte die offenen und blockierten Berechnungszellen. In der Vergrößerung (Abbildung 6.39 (b)) ist zu erkennen, dass auch die kleinste Pore in dem Schnitt noch mit mehreren Gitterpunkten (ca. 4-8 Punkte) aufgelöst ist. Die größten hier gezeigten Poren sind mit ca. 20-50 Punkten aufgelöst. Das Verhältnis von offenen zu blockierten Zellen ergibt sich für den Probekörper zu 22%. In Abbildungen 6.39 (a) und (b) lässt sich das Ergebnis für die Porösität qualitativ auch für den 2D-Schnitt nachvollziehen. Für das Blockieren der Berechnungszellen wurde der Füllalgorithmus (siehe Kapitel 3) angewendet. Der gewählte Startpunkt für den Füllalgorithmus muss innerhalb einer für das Fluid offenen Pore liegen. Für den Fall, dass die Porenstrukturen alle zusammenhängend sind, ist ein Startpunkt ausreichend. Hier ist das nicht der Fall und man muss für den Füllalgorithmus weitere Startpunkte angeben. Vollständig abgeschlossene Poren innerhalb des Körpers werden trotzdem nicht erkannt und sind auch für die Berechnung nicht von Interesse, da keine Strömung stattfindet.



**Abbildung 6.39:** 2D Schnitt durch das numerische Berechnungsnetz (a). Die kartesischen Berechnungszellen sind durch Punkte angedeutet. Blaue Punkte sind Berechnungszellen innerhalb der Geometrie, rote innerhalb einer Pore. Im Hintergrund wird die Asphalt Geometrie gezeigt. Im Ausschnitt (b) ist die Auflösung einer Pore zu sehen.

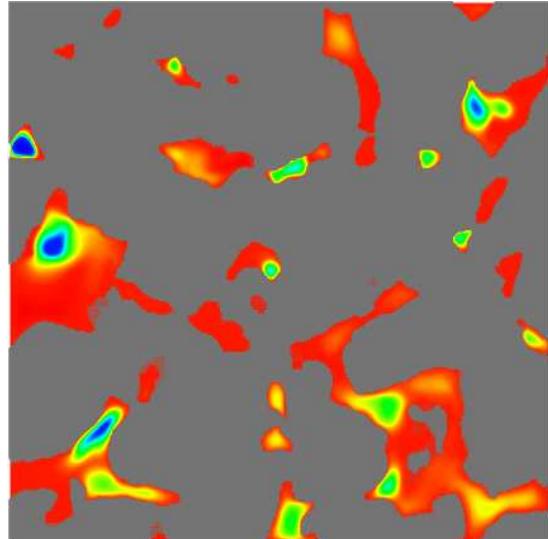
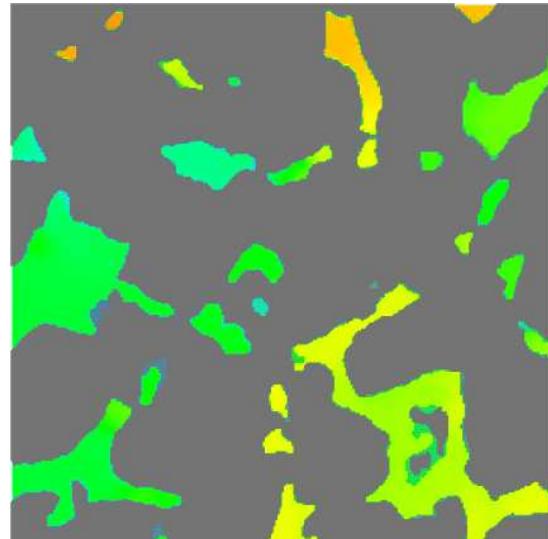
**Vor- und Nachteile der IB Vernetzung** Die Geometrie der porösen Asphaltstruktur aus der CT Abtastung besteht aus ca.  $3.8 \cdot 10^6$  Dreiecken und  $11.4 \cdot 10^6$  Punkten und ergibt eine Datei mit ca. 1GB Speicherbedarf. Die Vernetzung einer derartigen Geometrie ist bei Simulationsprogrammen mit unstrukturierten, körperangepassten Gittern aufwendig. Bei der IB Methode liegt der Vorteil darin, dass die Geometrie einfach in das kartesische Gitter eingetaucht wird und nur ein Startpunkt für das Blockieren der Berechnungszellen angegeben werden muss. Die Bestimmung der Zellen innerhalb des Fluids und des Körpers läuft durch den Füllalgorithmus auch für diese komplexe Geometrie vollständig automatisch ab.

Durch die Verwendung eines strukturierten äquidistanten Gitters bietet das Blocken der Berechnungszellen einen weiteren Vorteil. Die Information über den Anteil an offenen und geschlossenen Zellen in dem Rechengebiet ist automatisch vorhanden. Damit ist bereits die Information über den Anteil an offenen und geschlossen Poren im Gesamtkörper bekannt.

Es wird an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass das kleine Verhältnis von offenen zu blockierten Zellen auch bedeutet, dass für 78% der Zellen keine Berechnung der Strömung nötig wäre. Diese Zellen werden aber weiterhin im Algorithmus verwendet, wobei deren Einfluss auf die Strömungslösung durch Multiplikation mit Null ausgeschlossen wird. Der offensichtliche Nachteil des zusätzlichen Rechnenaufwands wird durch zwei Vorteile ausgeglichen. (i) Die Zeit für das Vernetzen der Geometrie ist im Falle der IB sehr kurz und verläuft vollkommen automatisch. (ii) Die schnellen und effizienten Algorithmen auf dem kartesischen Gitter bleiben auch bei Verwendung der IB Methode erhalten. In vielen Fällen kann man damit rechnen, dass ein Simulationsprogramm basierend auf kartesischen Gittern um den Faktor vier bis fünf schneller ist als ein Simulationsprogramm basierend auf unstrukturierten oder kurvilinearen Gittern. Dabei hängt der Geschwindigkeitsvorteil bei der IB Methode stark von der Anzahl der offenen und geschlossenen Zellen ab. Unter Umständen ergibt sich wie in diesem Beispiel ein deutlicher Überschuss an Zellen, die nicht für die Berechnung genutzt werden (ca. 78%).

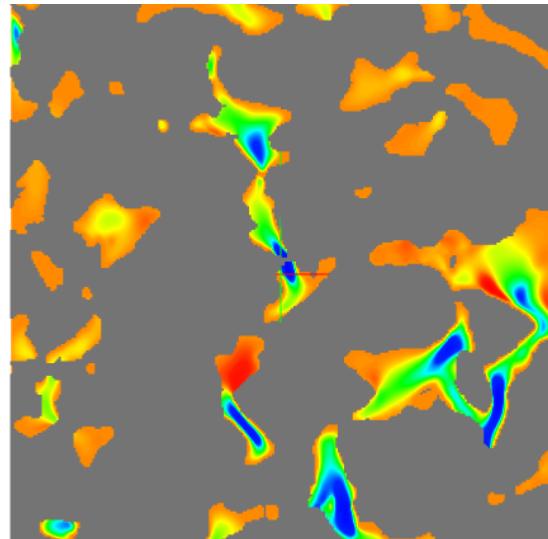
**Geschwindigkeitsfelder und Druckverteilung** Die Komponente des resultierenden laminaren Geschwindigkeitsfelds und die zugehörige Druckverteilung werden in Abbildungen 6.40 jeweils für zwei unterschiedliche Schnitte gezeigt. Der erste Schnitt (Abbildung 6.40 (a) und (b)) verläuft durch die Mitte des Körpers in einer Draufsicht (z-Richtung). Deutlich zu erkennen sind die Porenstrukturen und die inhomogene Geschwindigkeitsverteilung innerhalb einer Pore bei der hier gewählten Gitterauflösung. Zwischen den einzelnen Poren werden ebenfalls Geschwindigkeitsunterschiede beobachtet. Es werden sogar Poren beobachtet (Abbildung 6.40 (a)), innerhalb derer positive Geschwindigkeit in z-Richtung herrscht. Es kann also innerhalb der Porenkanäle dazu kommen, dass die Strömung nach oben abgelenkt wird. Das lässt auf eine sehr komplexe Struktur der Porenkanäle schließen. Der zweite Schnitt (Abbildung 6.40 (c)) verläuft durch die Mitte des Körpers in einer Seitenansicht. Auch hier ist eine deutliche inhomogene Verteilung der Geschwindigkeit zu erkennen.

Im Druckfeld spiegelt sich die inhomogene Geschwindigkeitsverteilung im xy-Schnitt (Abbildung 6.40 (b)) wider. Es zeigt keinen konstanten Wert wie es für die hydrostatische Druckverteilung der Fall wäre. Ein hoher Druckwert kann hier auf einen Staupunkt bzw. Porenende

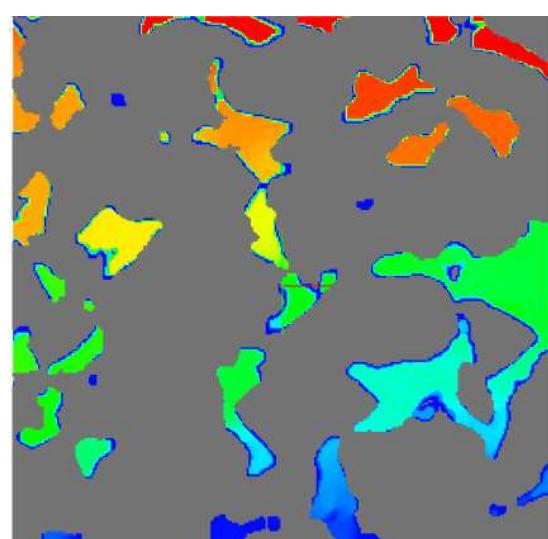
xy-Schnitt: Geschwindigkeit w [ $mm/s$ ]xy-Schnitt: Druck p [ $Pa$ ]

a)

b)

xz-Schnitt: Geschwindigkeit w [ $mm/s$ ]

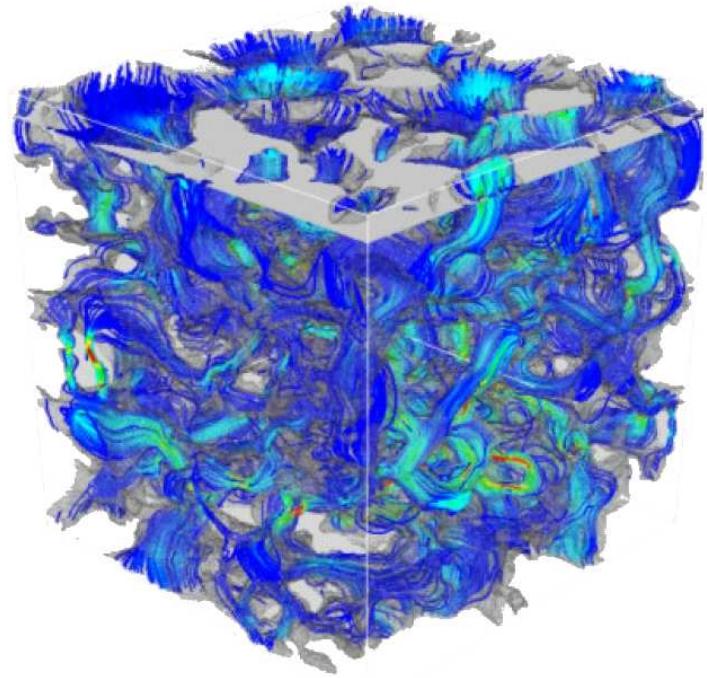
c)

xz-Schnitt: Druck p [ $Pa$ ]

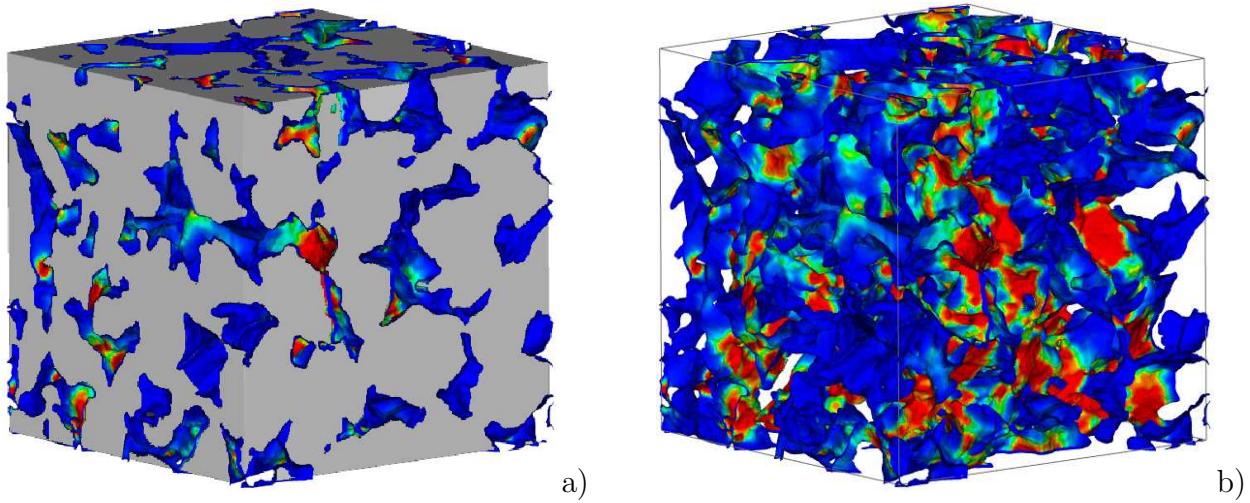
d)

**Abbildung 6.40:** Schnitte durch die Mitte des Asphaltblocks. Abbildungen (a) und (b) zeigen einen xy-Schnitt (Draufsicht) und Abbildungen (c) und (d) zeigen einen xz-Schnitt (Seitenansicht) jeweils für die w Geschwindigkeitskomponente in z-Richtung und den Druck P.  $w_{min} = -80mm/s$  (blau) und  $w_{max} = 12mm/s$  (rot);  $p_{min} = 0Pa$  (blau) und  $p_{max} = 10Pa$  (rot).

hindeuten. Im xz-Schnitt (Abbildung 6.40 (d)) kann man trotz Abweichungen annähernd die hydrostatische Druckverteilung erkennen.



**Abbildung 6.41:** Stromlinien der laminaren Durchströmung. Die Farbe der Stromlinien ist durch den Betrag des Geschwindigkeitsvektors vorgegeben. Hohe Geschwindigkeiten entlang einer Stromlinie sind rot.  $|\vec{u}|_{min} = 0 \text{ mm/s}$  (blau) und  $|\vec{u}|_{max} = 20 \text{ mm/s}$  (rot).



**Abbildung 6.42:** Qualitative Darstellung der gefilterten Wandschubspannung. Bereiche mit hoher Wandschubspannung sind rot. Darstellung mit ausgefülltem Körpervolumen (a) und ausschließlich mit benetzter Oberflächengeometrie (b).

**Stromlinien und Wandschubspannung** Einen weiteren Einblick in die komplexe Struktur der Poren liefert Abbildung 6.41. Hier werden Stromlinien gezeigt, die beginnend von der Oberseite des Testkörpers in Richtung Unterseite verlaufen. Die Farbkodierung der Stromlinien zeigt Bereiche mit hoher und niedriger absoluter Fluidgeschwindigkeit. Wie zuvor diskutiert, sieht man hier bestätigt, dass die Strömung in vielen Kanälen stark umgelenkt wird oder sogar lokal nach oben verläuft. Neben dem Verlauf der Stromlinien gibt auch die Wandschubspannung qualitativ weiteren Aufschluss über die Strömung (vgl. Abbildungen 6.42 (a) und (b)).

**Massenerhaltung** Für die hier behandelte Simulation wurde die IB Methode mit Flusskorrektur verwendet. Um die Einhaltung der Konservativität am IB Rand zu überprüfen, wurde auch für diesen Testfall der Massenfluss am Einström- und Ausströmrand überprüft. Die Massenerhaltung wird bis auf numerische Genauigkeit erfüllt und wird hier nicht als Zahlenwert angegeben. Damit wird gezeigt, dass die IB Methode mit Flusskorrektur für sehr komplexe Geometrien anwendbar ist.

## 6.5 Erkenntnisse aus den dreidimensionalen Testfällen

In den vorausgegangenen Abschnitten wurden dreidimensionale Testfälle turbulenter und laminarer Strömungen untersucht. Ziele waren: Die Validierung der Feinstrukturmodelle am Beispiel turbulenter Kanalströmung, die Berechnung hoch aufgelöster Daten aus Direkten Numerischen Simulationen und Gobstruktursimulationen der Kanalströmung mit Hügeln und die Demonstration der Anwendbarkeit der IB Methode mit Flusskorrektur für eine Konfiguration mit komplexer Geometrie. Folgende Ergebnisse wurden gewonnen.

**Validierung der Feinstrukturmodelle** Für die turbulente Kanalströmung wurden das Standard Smagorinsky Modell, das dynamische Smagorinsky Modell und das WALE Modell untersucht. Sowohl für das WALE Modell als auch für das dynamische Modell wurde bestätigt, dass die zeitlich gemittelte Wirbelviskosität  $\langle \nu_t \rangle$  proportional zu  $y^{+3}$  nahe der Wand abnimmt. In Hinsicht auf das zeitlich gemittelte Geschwindigkeitsprofil folgt die Simulation mit dem WALE Modell am genauesten den Referenzdaten von Moser et al. [41]. Damit ist das WALE Modell gleichzeitig ein exaktes und effizientes Modell, da es vom Rechnungsaufwand vergleichbar mit dem Smagorinsky Modell ohne dynamische Prozedur ist [42].

**DNS der Kanalströmung mit Hügeln** Die Ergebnisse für die DNS bei  $Re = 2800$  und  $Re = 5600$  wurden mit Simulationen von Breuer et al. [5] und Experimenten von Rapp [52] verglichen. Die Unterschiede zwischen den numerischen Simulationen sind gering. Das Experiment zeigt etwas größere Abweichungen bei der vertikalen Geschwindigkeitskomponente und den Reynoldsspannungen. Die Übereinstimmung kann aber als zufriedenstellend betrachtet werden, da auch im Experiment Unsicherheiten bei den niedrigen Reynoldszahlen existieren.

Hier wurde die IB Methode mit Punktwerten und die Interpolation mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate verwendet. Es kann davon ausgegangen werden, dass der Effekt der fehlenden IB Flusskorrektur vernachlässigbar ist, da der erste Gitterpunkt in der viskosen Unterschicht liegt. Auch Tremblay et al. [68, 69, 70] findet mit der IB Methode mit Punktwerten bei DNS und wandaufgelöster LES gute Übereinstimmung mit Experimenten. Es wird angemerkt, dass bereits bei der zweidimensionalen Kanalströmung (Kapitel 5.3) festgestellt wurde, dass der Massenfehler mit zunehmender Gitterauflösung abnimmt. Der Vollständigkeit halber wird hier beispielsweise auf Peller et al. [47] sowie Manhart et al. [32] verwiesen, wo einige der hier vorgestellten DNS Daten für die Untersuchung turbulenter Grenzschichten verwendet werden.

**Grobstruktursimulation der Kanalströmung mit Hügeln** Die Ergebnisse der Grobstruktursimulation mit dem WALE Turbulenzmodell und der IB Methode mit Flusskorrektur (*4mWaleF*) bei  $Re = 10595$  wurde mit numerischen Ergebnissen von Fröhlich et al. [14] und Breuer et al. [5] sowie mit experimentellen Ergebnissen von Rapp [52] verglichen. Die Übereinstimmung der numerischen Ergebnisse ist gut. Simulation *4mWaleF* zeigt lediglich eine etwas schwächer ausgebildete Rezirkulationszone. Im Vergleich zum Experiment ist die Übereinstimmung zufriedenstellend. Sowohl Simulation *4mWaleF* als auch die Simulationen von Breuer und Fröhlich zeigen ein etwas höheres Geschwindigkeitsmaximum nahe der Hügelspitze.

ze (siehe auch Breuer et al. [5]) und eine Strömung, die sich später von der Ablösung erholt. Bemerkenswert ist bei allen Simulationen, dass die Form der Profile und die Lage der Maximalwerte immer gut mit dem Experiment übereinstimmen.

Im Vergleich mit den DNS Simulationen bei den niedrigeren Reynoldszahlen  $Re = 2800$  und  $Re = 5600$  lassen sich folgende Beobachtungen für das Strömungsverhalten in Abhängigkeit der Reynoldszahl festhalten (vgl. auch Breuer et al. [5]). Die Maximalwerte der Wandschubspannung nehmen mit zunehmender Reynoldszahl ab. Der Ablösepunkt bleibt nahezu konstant, während der Wiederanlegepunkt variiert. Es wird erwähnt, dass mit Hilfe der Daten von Breuer et al. [5] für weitere kleinere Reynoldszahlen zu sehen ist, dass sich bei  $Re = 1400$  sogar ein Sprung im Verlauf der Wiederanlegepunkte über der Reynoldszahlen ergibt. Weil für die Wiederanlegepunkte kein eindeutiger Trend auszumachen ist, wird auch beim Druckverlauf kein eindeutiger Trend beobachtet. Aus dem Verlauf der Wandschubspannung ist weiter zu schließen, dass eine weitere Rezirkulationszone auf der Hügelspitze existiert, die bei den niedrigeren Reynoldszahlen nicht beobachtet wurde.

Für den Einfluss der Feinstrukturmodelle wurde das Standard Smagorinsky Modell, das dynamische Smagorinsky Modell und das WALE Modell mit der fein aufgelösten Grobstruktursimulation von Breuer et al. [5] verglichen. Zusätzlich wurden zwei unterschiedlichen Gitter untersucht, um den Effekt der Feinstrukturviskosität auf einem wandaufgelösten und einem nicht-wandaufgelösten Gitter darzustellen. Die Ergebnisse der Simulation mit dem WALE Modell auf dem feinen Gitter zeigen die größte Übereinstimmung mit der Simulation von Breuer. Auf dem groben Gitter zeigt überraschender Weise das Standard Smagorinsky Modell die besten Ergebnisse.

Das Smagorinsky Modell wurde ohne physikalisch korrekte Wanddämpfung (z.B. Van Driest Dämpfung) verwendet. Damit lässt sich erklären, dass die Simulation mit dem Smagorinsky Modell auf dem wandaufgelösten Gitter der Simulation mit dem WALE Modell unterlegen ist. Wie gezeigt wurde, ist der Verlauf der zeitlich gemittelten Wirbelviskosität beim Smagorinsky Modell im Gegensatz zum WALE Modell nahe der Wand unphysikalisch und das Ergebnis für das feine Gitter zu erwarten. Für das nicht wandaufgelöste Gitter überrascht das gute Ergebnis für das Smagorinsky Modell. Der erste Gitterpunkt des groben Gitters liegt an manchen Positionen bereits in der Pufferschicht eines turbulenten Grenzschichtprofils und der Einsatz eines Wandmodells wäre physikalisch notwendig. Auch Temmerman et al. [64] beschreibt in seiner Arbeit einen wesentlichen Einfluss der Wandmodellierung auf die Ergebnisse. Deshalb wird hier der Effekt des Smagorinsky Modells als Glückstreffer betrachtet, der in seiner Wirkung dem eines Wandmodells ähnelt. Zusätzlich wird angemerkt, dass das Zusammenspiel zwischen Wandfunktion, Feinstrukturmodellierung und Diskretisierungsschema sehr delikat und bisher nicht befriedigend gelöst ist [13]. Bereits für die Feinstruktursimulation selbst sowie das Diskretisierungsschema sind die Unsicherheiten bei nicht wandaufgelösten Gittern enorm, da der zu modellierende Anteil an turbulenter kinetischer Energie nicht mehr zu vernachlässigen ist.

Es wurde der Einfluss der IB Methode auf das Strömungsverhalten untersucht. Dazu wurden Simulationsergebnisse der IB Methode mit Punktwerten und der IB Methode mit Flusskorrektur verglichen. Für die feine Gitterauflösung stimmen die Ergebnisse der Simulation mit Flusskorrektur am besten mit der Referenzlösung von Breuer et al. [5] überein.

Folgende weitere Aussagen lassen sich machen. Die Simulationen ohne Flusskorrektur zeigen bei beiden Gitterauflösungen ein erhöhtes Geschwindigkeitsmaximum nahe der Wand bei

$x/h = 0.05$ . Als Folge davon zeigt sich an der Position  $x/h = 6$  auch eine Grenzschicht, die sich schneller von der Ablösung erholt. Bei den Profilen der turbulenten Spannung  $\langle u'u' \rangle$  ergibt sich ein konsistenter Trend für beide Gitter für die Position  $x/h = 6$ . Dort sind bei beiden Gitterauflösungen die turbulenten Spannungen in den Simulationen ohne IB Flusskorrektur höher als mit Flusskorrektur. Für die getrennte Betrachtung der beiden Gitter ergibt sich sogar an beiden Positionen  $x/h = 2$  und  $x/h = 6$  ein konsistenter Trend für unterschiedliche Turbulenzmodelle. Auf dem feinen Gitter ist das Maximum der Reynoldsspannungen  $\langle u'u' \rangle$  für die Simulation mit der IB Methode mit Flusskorrektur sowohl für das Smagorinsky als auch für das WALE Modell bei  $x/h = 2$  niedriger und bei  $x/h = 6$  höher als bei der Simulation ohne Flusskorrektur. Auf dem groben Gitter zeigt die Simulation mit Flusskorrektur an beiden Positionen ein höheres Maximum als die Methode ohne Flusskorrektur. Einen Hinweis auf einen möglichen Einfluss der Flusskorrektur oder deren Fehlen zeigte sich bereits bei dem zweidimensionalen Kanaltestfall in Abschnitt 5.3. Dort wurde ebenfalls ein Einfluss der IB Methode auf die Reynoldsspannungen festgestellt.

In Hinsicht auf den Vergleich der Simulationsergebnisse mit den Ergebnissen von Breuer et al. [5] wird festgehalten, dass die konservative IB Methode auf dem feinen Gitter in Kombination mit dem WALE Modell die beste Übereinstimmung aller Grobstruktursimulationen erzielt.

**Strömung durch poröse Medien** Für die Strömung durch ein poröses Medium wurde die laminare Durchströmung eines Asphaltblocks gewählt. Das Simulation wurde mit der IB Methode mit Flusskorrektur durchgeführt. Ein Vorteil des IB Verfahrens gegenüber einem Programm mit unstrukturierten Gitter liegt in der Gittererzeugung. Das Blocken der Zellen innerhalb des Körpers wird vollkommen automatisch durchgeführt. Die Strömung in den komplexen Porenkanälen wurde erfolgreich simuliert und das Strömungsfeld diskutiert. Es wurde weiterhin gezeigt, dass auch bei diesem geometrisch komplexen Testfall die Massenerhaltung bis auf Maschinengenauigkeit erfüllt wird.

# 7 Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurden zwei Immersed Boundary Methoden vorgestellt und für komplexe turbulente Strömungen angewandt. Für die IB Verfahren wurden Stabilität, Genauigkeit und Massenerhaltung am IB Rand untersucht. Die IB Methode mit Flusskorrektur wurde in dieser Arbeit entwickelt und der IB Methode mit Punktewerten gegenübergestellt. Mit Hilfe der IB Methoden wurden hoch aufgelöste DNS Simulationen für die Kanalströmung mit Hügeln erzeugt und mit Ergebnissen aus der Literatur verglichen. Weitere Grobstruktursimulationen der Kanalströmung mit unterschiedlichen Turbulenzmodellen wurden in Hinsicht auf die IB Methoden diskutiert. Das WALE Turbulenzmodell wurde in dieser Arbeit als Alternative zum dynamischen Smagorinsky Modell implementiert und getestet. Im Folgenden werden die Ergebnisse zusammengefasst und ein Ausblick auf zukünftige Entwicklungen gegeben.

**Zusammenfassung** Es wurden zwei IB Methoden vorgestellt. Die erste beruht auf einer punktuellen Interpolation bzw. Extrapolation der IB Randbedingung. Bei der zweiten Methode wird zusätzlich eine Flusskorrektur am IB Rand vorgenommen, um die Massenerhaltung zu gewährleisten. Für die erste Methode sind unterschiedliche Interpolations- und Extrapolationsverfahren möglich. Sie wurden in Hinsicht auf Stabilität und Genauigkeit anhand der eindimensionalen Konvektionsgleichung getestet. Es wurde festgestellt, dass mit Hilfe der Interpolation der kleinsten Fehlerquadrate stabile Interpolationen höherer Ordnung konstruiert werden können als mit der Lagrange Interpolation. Weiterhin zeigte sich, dass bei der Interpolation eher instabile Konfigurationen auftreten als bei der Extrapolation. Dieses Ergebnis wurde mit der zweidimensionalen Stabilitätsanalyse bestätigt. Dabei war es mit Hilfe der zweidimensionalen Analyse möglich, den Einfluss der Massenerhaltung am IB Rand auf die Stabilität zu untersuchen. Es wurde gezeigt, dass die Massenerhaltung am IB Rand für die vorgestellte Konfiguration einen positiven Einfluss auf die Stabilität hat. Hier betrachtete instabile Eigenformen, die bei der IB Methode mit Punktewerten auftraten, wurden bei der IB Methode mit Flusskorrektur vollständig gedämpft. Die Analyse einer dieser Eigenform gab zusätzlich Aufschluss über die Topologie der Strömung in der instabilen Konfiguration. Sie zeigt Massenfluss über den IB Rand, der bei der IB Methode mit Flusskorrektur nicht möglich ist und deshalb gedämpft wird und Instabilitäten vermeidet.

Weiterhin wurden drei numerische Eigenschaften der IB Methode an zweidimensionalen Testfällen getestet: Konvergenz in Raum und Zeit sowie die Massenerhaltung am IB Rand. Es konnte gezeigt werden, dass die Konvergenzordnung des numerischen Lösers mit dem IB Verfahren erhalten bleibt. Die Testfälle zeigten die erwartete Genauigkeit zweiter Ordnung im Raum und dritter Ordnung in der Zeit. Dabei wurde das Runge-Kutta Zeitschrittverfahren für die IB Randbedingung erweitert und der Algorithmus im Detail beschrieben. Hier ergibt sich für das IB Verfahren mit Flusskorrektur die Verwendung von Punktewerten für die Impulsbilanz und Flusswerten für die Druckkorrektur. Diese Dualität ist eine Erweite-

rung der IB Methode mit Punktwerten, die sowohl für die Impulserhaltung als auch für die Druckkorrektur Punktwerte verwendet. Neben der Konvergenzordnung wurde an einer zweidimensionalen Kanalströmung mit Hindernis gezeigt, dass bei der IB Methode mit Punktwerten und groben Rechengittern ein Massenfehler auftritt, der nicht zu vernachlässigen ist. Dieser nimmt aber mit zunehmend feinem Gitter ab. Bei der IB Methode mit Flusskorrektur wurde bestätigt, dass die Massenerhaltung bis auf Maschinengenauigkeit erfüllt wird.

Die DNS Ergebnisse der turbulenten Kanalströmung mit Hügeln bei  $Re = 2800$  und  $Re = 5600$  bestätigen, dass der Massenfehler bei feinen, wandaufgelösten Rechengittern und der IB Methode mit Punktwerten zu vernachlässigen ist. Die Ergebnisse zeigen gute Übereinstimmung mit numerischen (Breuer et al. [5]) und experimentellen Ergebnissen (Rapp [52]) aus der Literatur. Es wird festgehalten, dass die hier vorgestellten DNS Ergebnisse etwas mehr vom Experiment abweichen als von den numerischen Ergebnissen aus der Literatur. Dabei wurden in Rapp [52] für die hier betrachteten Reynoldsnummern auch mögliche Unsicherheiten im Experiment diskutiert. Weiterhin wurde für die DNS Simulation bei  $Re = 5600$  gezeigt, dass die gewählte Gitterauflösung nahe der Wand im viskosen Bereich  $y^+ \approx 1$  liegt und im Simulationsgebiet die Gitterauflösung für die ausgewählten Positionen maximal Faktor 2.2 größer ist als die Kolmogorov Länge. Für die Untersuchung der Strömungsphysik dienen die hoch aufgelösten DNS Ergebnisse, beispielsweise in Peller et al. [47] oder Manhart et al. [32], als Datenbasis.

Weiterhin wurde die Kanalströmung mit Hilfe der Grobstruktursimulation bei der Reynoldszahl  $Re = 10595$  berechnet. Dabei wurden mit dem WALE Modell und der IB Methode mit Flusskorrektur gute Ergebnisse in Übereinstimmung mit der Simulation von Breuer et al. [5] erzielt. Auch die Übereinstimmung mit dem Experiment von Rapp [52] ist zufriedenstellend.

Im Vergleich mit den DNS Simulationen bei den niedrigeren Reynoldsnummern  $Re = 2800$  und  $Re = 5600$  lassen sich Reynoldszahleneffekte untersuchen. (vgl. auch Breuer et al. [5]). Hierzu werden Daten von Breuer et al. [5] für den Vergleich herangezogen, die zusätzliche Ergebnisse für weitere Reynoldsnummern zeigen. Somit lässt sich beispielsweise das Ablöse- und Wiederanlegeverhalten über der Reynoldszahl verfolgen. Hier wird deutlich, dass sich die Positionen der Hauptablöse- und Wiederanle gepunkte nicht linear über der Reynoldszahl verhalten und bei  $Re = 1400$  sogar einen Sprung aufweisen. Dass die Ablöse- und Wiederanle gepunkte keinen eindeutigen Trend aufweisen, zeigt die Komplexität der Strömung. Folglich zeigt auch der Druckverlauf an der Wand keine Gesetzmäßigkeit in Abhängigkeit der Reynoldszahl. Neben dem dominanten Ablösepunkt, der bei allen Reynoldsnummern vorhanden ist, zeigen Simulationen von Breuer et al. [5] bei  $Re = 10595$  einen weiteren Ablösepunkt, der bei allen niedrigeren Reynoldsnummern noch nicht beobachtet wurde. Allerdings konnte hierfür ein eindeutiger Trend mit steigender Reynoldszahl festgestellt werden, der sich in den DNS Ergebnissen bestätigt: Die Wandschubspannung nimmt stetig ab, bis bei  $Re = 10595$  die Ablösung schließlich auftritt. Dadurch ist es unwahrscheinlich, dass diese Ablöseblase ein numerischer Artefakt ist.

Die Kanalströmung mit Hügeln ist eine sehr komplexe, turbulente Strömung, deren Simulation eine Herausforderung für die numerische Strömungsmechanik und die Turbulenzmodellierung darstellt. Hier wurden für die Grobstruktursimulation zwei Gitterauflösungen und drei Feinstrukturmodelle untersucht: Das Smagorinsky Modell, das dynamische Smagorinsky Modell und das WALE Modell. Zusätzlich wurden die numerische Randbehandlung mit der

IB Methode mit Punktwerten und der IB Methode mit Flusskorrektur verglichen. Wie zuvor erwähnt werden mit dem WALE Modell auf dem wandaufgelösten Berechnungsgitter die besten Ergebnisse im Vergleich zu den Ergebnissen von Breuer et al. [5] erzielt. Dabei zeigt das WALE Modell die physikalisch richtige Wandbehandlung und reduziert die Wirbelviskosität in Wandnähe proportional zu  $y^{+3}$ .

Das Smagorinsky Modell zeigt auf dem Gitter, das nicht mehr wandaufgelöst ist, die beste Übereinstimmung mit den Daten aus der Literatur. Hier wird aber angeführt, dass weder die Wandbehandlung des Smagorinsky Modells richtig ist, noch ein adäquates Wandmodell verwendet wurde. Aus diesen Gründen wird vermutet, dass sich hier zwei Fehler gegenseitig kompensieren. Beispielsweise könnte die fehlerhafte Wandbehandlung des Smagorinsky Modells eine vergleichbare Wirkung wie ein Wandmodell haben.

In Hinsicht auf die IB Methoden wird festgehalten, dass auf dem feinen Gitter die IB Methode mit der Flusskorrektur die beste Übereinstimmung mit den Daten aus der Literatur zeigt. Auf dem groben Gitter ist der Unterschied nicht eindeutig. Zwei durchgängige Trends können aber für beide Gitter beobachtet werden: (i) Das Geschwindigkeitsmaximum nahe der Hügelspitze ist bei der IB Methode ohne Flusskorrektur ausgeprägter und die Strömung erholt sich schneller von der Ablösung. (ii) Die Reynoldsspannungen  $\langle u'u' \rangle$  zeigen den gleichen Trend für unterschiedliche Turbulenzmodelle. Das Verhältnis der Maxima der Reynoldsspannungen zwischen Simulation mit unterschiedlichen IB Methoden ist trotz unterschiedlicher Turbulenzmodelle jeweils für das betrachtete Gitter vergleichbar. So zeigen beispielsweise auf dem groben Gitter die Simulationen ohne Flusskorrektur immer größere Maxima als die Simulationen mit Flusskorrektur.

Nach der Anwendung der IB Methoden für komplexe turbulente Strömungen wurde die Funktion der IB Methode mit Flusskorrektur an einer komplexen Geometrie getestet. Hierfür wurde die laminare Strömung durch einen porösen Asphaltblock simuliert. Hier konnte gezeigt werden, dass die konservative IB Methode für dreidimensionale komplexe Geometrien anwendbar ist und weiterhin die Massenerhaltung erfüllt.

Es wird hier betont, dass die IB Methode mit Flusskorrektur eine Erweiterung der IB Methode mit Punktwerten ist und keine wesentlichen Modifikationen am zu Grunde liegenden kartesischen Löser erfordert. Bis auf die zusätzliche Berechnung der Massenflüsse und der Flusskorrektur über blockierte Randzellen, sind die Modifikationen am kartesischen Löser vergleichbar mit der IB Methode mit Punktwerten. Dadurch unterscheidet sich das hier vorgestellte IB Verfahren von den meisten bekannten IB Verfahren, da es mehrere Eigenschaften verbindet. (i) Es kommt ohne wesentliche Modifikationen des kartesischen Löser bzw. der numerischen Diskretisierung aus. (ii) Es erfüllt grundlegende numerische Eigenschaften wie z.B. die Massenerhaltung am IB Rand. Für die hier vorgestellten IB Verfahren wurden räumliche und zeitliche Konvergenz sowie die Massenerhaltung überprüft und bestätigt. Hier wird Mittal und Iaccarino [36] angeführt, nach deren Beobachtungen bei den meisten IB Methoden nicht klar ist, welche Einschränkungen in Hinsicht auf z.B. Massenerhaltung am IB Rand bestehen. (iii) Das IB Verfahren mit Flusskorrektur ist für beliebig komplexe turbulente Strömungen anwendbar. In dieser Arbeit wurden sowohl DNS Simulationen und Grobstruktursimulationen einer komplexen turbulenten Strömung als auch die laminare Strömung durch eine sehr komplexe Geometrie berechnet. Im Vergleich dazu zeigt sich beispielsweise für das Verfahren von Dröge [9], das durch eine geschickte numerische Diskretisierung ebenfalls massenerhaltend ist, dass die Erweiterung auf beliebig komplexe dreidimensionale Geometrien aufwendig [9] ist.

**Ausblick** Es wurden zwei Beobachtungen gemacht. (i) Besonders wichtig ist die Konservativität der IB Methode am IB Rand bei groben Gittern. Hier wurde an einem einfachen Testfall gezeigt, dass der Fehler in der Massenerhaltung bei der IB Methode mit Punktewerten bei Gittervergrößerung zunimmt. So ist neben der Massenerhaltung auch die Erfüllung weiterer Konservativitätseigenschaften am IB Rand als zukünftige Arbeit denkbar. Beispielsweise die Konservativität der Impulsflüsse am IB Rand wäre eine konsequente Fortführung der hier begonnenen Arbeit. (ii) Neben der Konservativität der IB Methode bei groben Gittern spielt auch die Modellierung der wandnahen Strömung bei turbulenten Grenzschichten eine Rolle. Bei der Grobstruktursimulation der Kanalströmung mit Hügeln wurde für das grobe Berechnungsgitter ein starker Einfluss der Wandbehandlung (wie auch in Temmerman et al. [64]) festgehalten. Für eine korrekte Behandlung der IB Wand bei einer groben Auflösung wäre beispielsweise eine Wandfunktion notwendig.

Damit ist anschaulich klar, dass eine konservative Randbehandlung einen Vorteil für die Implementierung von Wandfunktionen bzw. Modellen bietet. Werden Wandmodelle eingesetzt, sind die Berechnungsgitter nahe der Wand grob aufgelöst und die fehlende Konservativität bei der IB Methode mit Punktewerten kann eine mögliche Fehlerquelle darstellen.

Ergebnisse für eine mögliche Implementierung der Werner und Wengle Wandfunktion für den wandnahen Bereich bis  $y^+ = 11$  wurden bereits in [47] für die IB Methode mit Punktewerten vorgestellt. Dabei wurde das Werner und Wengle [77] Modell um den Druckgradienten in Strömungsrichtung erweitert, um komplexen Strömungen mit Ablösung Rechnung zu tragen. Wie zuvor erwähnt, wird die Konservativität am IB Rand zunehmend wichtiger, wenn die Gitterauflösung im logarithmischen Bereich der Grenzschicht liegt. Für diese Berechnungsgitter, deren Gitterweite in Wandnähe über  $y^+ = 11$  liegt, müssen Wandfunktionen für den logarithmischen Bereich vorhanden sein, die auch bei komplexen Strömungen mit Druckgradient anwendbar sind. Hierfür werden beispielsweise in [32] Skalierungen untersucht, die basierend auf der Wandschubspannung und dem Druckgradienten universelle Geschwindigkeitsprofile und Reynoldsspannungen vorhersagen. Daraus sollen verbesserte Wandmodelle für den logarithmischen Bereich abgeleitet werden.

Die Implementierung eines Wandmodells in der IB Methode mit Flusskorrektur ist eine notwendige Weiterentwicklung, um die Simulation turbulenter Strömungen in komplexen Geometrien mit vertretbarem Rechenaufwand durchführen zu können. In den meisten geometrisch komplexen Testfällen ist es nicht möglich, die Geometrie an allen relevanten Stellen mit vertretbarem Aufwand bis in den Bereich der viskosen Grenzschicht aufzulösen.

# Literaturverzeichnis

- [1] G. P. Almeida und M. V. Heitor. Wake flows behind two dimensional model hills. *Expl. Thermal Fluid Sci.*, 7:87–101, 1993.
- [2] F. Baetke. *Numerische Berechnung der turbulenten Umströmung eines kubischen Körpers*. PhD thesis, Tech. Univ. München, 1986.
- [3] E. Balaras. Modeling complex boundaries using an external force field on fixed Cartesian grids in large-eddy simulations. *Computers & Fluids*, 33:375–404, 2004.
- [4] M. Berger und M. Aftosmis. Aspects (and spect ratios) of Cartesian mesh methods. In *Proc. 16th. Int. Conf. Numer. Methods Fluid Dyn.* Springer-Verlag, 1998.
- [5] M. Breuer, N. Peller, Ch. Rapp, und M. Manhart. Flow over periodic hills - numerical and experimental study over a wide range of Reynolds numbers. *Computers and Fluids*, doi:10.1016/j.compfluid.2008.05.002, 2008.
- [6] M. Carpenter, D. Gottlieb, und S. Abarbanel. The stability of numerical boundary treatments for compact high-order finite-difference schemes. *J. of Comp. Phys.*, 108:272–295, 1993.
- [7] M.H. Carpenter, D. Gottlieb, und S. Abarbanel. The stability of numerical boundary treatments for compact high-order finite-difference schemes. *NASA Tech. Report*, 1991.
- [8] D. Clarke, M. Salas, und H. Hassan. Euler calculations for multi-element airfoils using Cartesian grids. *AIAA*, 24:1128–1135, 1986.
- [9] M. Dröge. *Cartesian-Grid Methods for Turbulent Flow Simulation in Complex Geometries*. PhD thesis, Rijksuniversiteit Groningen, 2006.
- [10] M. Dröge und R. Verstappen. A new symmetry-preserving Cartesian-grid method for computing flow past arbitrarily shaped objects. *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, 47:979–985, 2005.
- [11] E.A. Fadlun, R. Verzicco, P. Orlandi, und J. Mohd-Yusof. Combined immersed-boundary finite-difference methods for three-dimensional complex flow situations. *J. Comp. Phys.*, 161:35–60, 2000.
- [12] J.H. Ferziger und M. Perić. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer, Berlin, 2nd edition, 1997.
- [13] J. Fröhlich. *Large Eddy Simulation turbulenter Strömungen*. B.G. Teubner Verlag, GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden, 2006.
- [14] J. Fröhlich, C. P. Mellen, W. Rodi, L. Temmerman, und M. Leschziner. Highly resolved large-eddy simulation of separated flow in a channel with streamwise periodic constrictions. *J. Fluid Mech.*, 526:19–66, 2005.
- [15] M. Germano, U. Piomelli, P. Moin, und W.H. Cabot. A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. *Phys. Fluids A*, 3(7):1760–1765, 1991.
- [16] S. Ghosal und P. Moin. The basic equations for the large eddy simulation of turbulent flows in complex geometry. *J. Comp. Phys.*, 118:24–37, 1995.
- [17] D. Goldstein, R. Handler, und L. Sirovich. Modeling a no-slip boundary with an external force field. *J. Comp. Phys.*, 105:354–366, 1993.

- [18] D. Gottlieb, M. Gunzburger, und E. Turkel. On the numerical boundary treatment of hyperbolic systems for finite difference and finite element methods. *J. of the Society for Industrial and Applied Mathematics on Numerical Analysis (SIAM)*, 19(4):671–682, 1982.
- [19] C. Hartel. *Turbulent flows: direct numerical simulation and large-eddy simulation*, S. 283–338. Peyret, R., Academic Press, London, 1996.
- [20] M. Haselbauer. Influence of flow conditions in porous asphalts on pollution and cleaning. In *International Safer Roads Conference*, Cheltenham, 2008.
- [21] M. Haselbauer und M. Manhart. Flow conditions in porous asphalt layers. In *ISAP International Symposium on Asphalt Pavements and Environment*, Zürich, 2008.
- [22] G. Iaccarino und R. Verzicco. Immersed boundary technique for turbulent flow simulations. *Appl. Mech. Rev.*, 56(3):331–347, 2003.
- [23] Y.L. Jang, L. Temmerman, und M.A. Leschziner. Investigations of anisotropy-resolving turbulence models by reference to highly-resolved les data for separated flow. In *ECCOMAS Computational Fluid Dynamics Conference*. ECCOMAS (European Community on Computational Methods in Applied Sciences), 2001.
- [24] M. Jischa. *Konvektiver Impuls-, Warme- und Stoffaustausch*. Vieweg, Braunschweig, 1982.
- [25] J. Kim, D. Kim, und Choi H. An immersed-boundary finite-volume method for simulations of flow in complex geometries. *J. Comp. Phys.*, 171:132–150, 2001.
- [26] M.P. Kirkpatrick, S.W. Armfield, und J.H. Kent. A representation of curved boundaries for the solution of the navier-stokes equations on a staggered three-dimensional Cartesian grid. *J. Comp. Physics*, 184:1–36, 2003.
- [27] M. Lai und C. Peskin. An immersed boundary method with formal second-order accuracy and reduced numerical viscosity. *J. Comp. Phys.*, 160:705–719, 2000.
- [28] A. Leonard. Direct numerical simulation of turbulent flows. In T. B. Gatski, M. Y. Hussaini, und J. L. Lumley, (Hrsg.), *Simulation and Modeling of turbulent flows*, S. 79–108. Oxford University Press, New York, Oxford, 1996.
- [29] S. Majumbar, G. Iaccarino, und P. Durbin. *RANS solvers with adaptive structured boundary non-conforming grids*, 353–366 of *Annual Research Briefs*. Center of Turbulence Research, Stanford, 2001.
- [30] M. Manhart. Direkte numerische Simulation – ein Werkzeug zur Vorhersage und Analyse komplexer turbulenter Strömungen. Habilitationsschrift, Fakultät für Maschinenwesen, Technische Universität München, 2001.
- [31] M. Manhart. A zonal grid algorithm for DNS of turbulent boundary layers. *Computers and Fluids*, 33(3):435–461, 2004.
- [32] M. Manhart, N. Peller, und C. Brun. Near-wall scaling for turbulent boundary layers with adverse pressure gradient. *Theor. Comput. Fluid Dynam.*, 22(3-4):243–260, DOI: 10.1007 / s00162-007-0055-0, 2008.
- [33] C. P. Mellen, J. Fröhlich, und W. Rodi. Large-eddy simulation of the flow over periodic hills. In *16th IMACS World Congress*, Lausanne, Switzerland, 2000.
- [34] C. Meneveau und T.S. Lund. On the lagrangian nature of the turbulence energy cascade. *Phys. Fluids*, 6(8):2820–2825, 1994.
- [35] C. Meneveau, T.S. Lund, und W.H. Cabot. A Langrangian dynamic subgrid-scale model of turbulence. *J. Fluid Mech.*, 319:353–385, 1996.
- [36] R. Mittal und G. Iaccarino. *Immersed Boundary Methods*, 37 of *Annu. Rev. Fluid.*

- Mech.* Annual Review, 2005.
- [37] R. Mittal, V. Seshadri, und H.S. Udaykumar. Flutter, tumble and vortex induced autorotation. *Theor. Comp. Fluid Dyn.*, 17:165–170, 2004.
  - [38] J. Mohd-Yusof. *Combined Immersed-Boundary / B-spline method for simulations of flow in complex geometries*, 317-327 of *Annual Research Briefs*. Center of Turbulence Research, Stanford, 1997.
  - [39] P. Moin und K. Mahesh. Direct numerical simulation: a tool in turbulence research. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 30:539–578, 1998.
  - [40] K. W. Morton. Stability of finite difference approximations to a diffusion-convection equation. *Int. J. for Num. Methods in Eng.*, 15:677–683, 1980.
  - [41] R.D. Moser, J. Kim, und N.N. Mansour. Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to  $Re_\tau = 590$ . *Phys. Fluids*, 11(4):943–945, April 1999.
  - [42] F. Nicoud und F. Ducros. Subgrid-scale stress modelling based on the square of the velocity gradient tensor. *Flow, Turbulence and Combustion*, 62:183–200, 1999.
  - [43] S.V. Patankar. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Series in Computational Methods in Mechanics and Thermal Sciences. McGraw-Hill, New York, 1980.
  - [44] N. Peller. Beschreibung von komplexen Geometrien mit der 'Immersed Boundary' Technik. Master's thesis, Fachgebiet Strömungsmechanik, TU-München, 2003.
  - [45] N. Peller, A. Le Duc, F. Tremblay, und M. Manhart. High-order stable interpolations for Immersed Boundary Methods. *Int. J. for Num. Meth. Fluids*, 52(11):1175–1193, DOI: 10.1002/fld.1227, 2006.
  - [46] N. Peller und M. Manhart. Turbulent Channel Flow with Periodic Hill Constrictions. In H.J. Rath, C. Holze, H.-J. Heinemann, R. Henke, und H. Hönliger, (Hrsg.), *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*, 92, 504-512. Springer, 2006.
  - [47] N. Peller, M. Manhart, M. Petrovan Boiarciuc, und C. Brun. Near-wall scaling for incompressible and compressible flows. In Eric Cancès und Jean-Frédéric Gerbeau, (Hrsg.), *Proceedings of ESAIM*, 16, S. 114–132, DOI: 10.1051/proc:2007015, Februar 2007.
  - [48] C.S. Peskin. Flow patterns around heart valves : a numerical method. *J. Comp. Phys.*, 10:252–271, 1972.
  - [49] U. Piomelli und E. Balaras. Wall-layer models for large-eddy simulation. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 34:349–374, 2002.
  - [50] S. B. Pope. *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
  - [51] L. Prandtl. Bericht über untersuchungen zur ausgebildeten turbulenz. *ZAMM*, 5:136, 1925.
  - [52] C. Rapp. *Experimentell Studie der turbulenten Strömung über periodische Hügel*. PhD thesis, Technische Universität München, 2009.
  - [53] O. Ripke, Alber. S., M. Haselbauer, und C. Recknagel. Improving porous asphalt by research on the clogging process. In *4th Euroasphalt and Eurobitume Congress*, Copenhagen, 2008.
  - [54] P. Sagaut. *Large eddy simulation for incompressible flows – an introduction*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2002.
  - [55] E.M. Saiki und S. Biringen. Numerical simulation of a cylinder in uniform flow: application of a virtual boundary method. *J. Comp. Phys.*, 123:450–465, 1996.
  - [56] H. Schade. *Kontinuumstheorie strömender Medien*. Springer, Berlin, 1970.
  - [57] H. Schlichting. *Grenzschicht-Theorie*. G. Braun, Karlsruhe, 1982.

- [58] U. Schumann. Subgrid scale model for finite difference simulations of turbulent flows in plane channels and annuli. *J. Comp. Phys.*, 18:376–404, 1975.
- [59] J. Smagorinsky. General circulation experiments with the primitive equations. *Monthly Weather Rev.*, 91:99–164, 1963.
- [60] A. Sommerfeld. *Mechanik der deformierbaren Medien*. Bd. II. Harry Deutsch, Thun, Frankfurt/M., (Vorlesungen über Theoretische Physik edition, 1978.
- [61] Herbert L. Stone. Iterative solution of implicit approximations of multidimensional partial differential equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 5(3):530–558, 1968.
- [62] J. Sucec. Practical stability analysis of finite difference equations by the matrix method. *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, 24:679–687, 1987.
- [63] L. Temmerman und M. A. Leschziner. Large eddy simulation of separated flow in a streamwise periodic channel constriction. In A. Lindborg, E. Johansson, J. Eaton, J. Humphrey, N. Kasagi, M. Leschziner, und M. Sommerfeld, (Hrsg.), *Turbulence and Shear Flow Phenomena*, S. 399–404, Stockholm, Juni 27-29 2001. KTH.
- [64] L. Temmerman, M. A. Leschziner, C. P. Mellen, und J. Fröhlich. Investigation of wall-function approximations and subgrid-scale models in Large Eddy Simulation of separated flow in a channel with periodic constrictions. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 24:157–180, 2003.
- [65] H. Tennekes und J.L. Lumley. *A first course in turbulence*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1972.
- [66] F. Tessicini, G. Iaccarino, M. Fatica, M. Wang, und R. Verzicco. Wall modeling for large-eddy simulation using an immersed boundary method. *Center of Turbulence Research, Annual Research Briefs*, S. 181–187, 2002.
- [67] F. Tremblay. *DNS and LES of flow around circular cylinders*. PhD thesis, Technische Universität München, München, 2001.
- [68] F. Tremblay, M. Manhart, und R. Friedrich. DNS of flow around a circular cylinder at a subcritical Reynolds number with Cartesian grids. In C. et al. Dopazo, (Hrsg.), *Advances in Turbulence VIII*, S. 659–662, Barcelona, 2000. Eighth European Turbulence Conference, CIMNE.
- [69] F. Tremblay, M. Manhart, und R. Friedrich. DNS and LES of flow around a circular cylinder at a subcritical Reynolds number with Cartesian grids. In R. Friedrich und W. Rodi, (Hrsg.), *LES of complex transitional and turbulent flows*, S. 133–150, Dordrecht, 2001. Kluwer Academic Publishers.
- [70] F. Tremblay, M. Manhart, und R. Friedrich. Les of flow around a circular cylinder at a high subcritical reynolds number. In B. Geurts, R. Friedrich, und O. Metais, (Hrsg.), *Direct and Large-Eddy Simulation IV*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.
- [71] F. Tremblay, M. Manhart, und R. Friedrich. Large-eddy simulations of high Reynolds number flow around a circular cylinder. In S. Wagner, W. Hanke, A. Bode, und F. Durst, (Hrsg.), *High Performance Computing in Science and Engineering, Munich 2002*, S. 71–80. LRZ, KONWIHR, Springer Verlag, 2003.
- [72] D.J. Tritton. *Physical fluid dynamics*. Oxford University Press, 1988.
- [73] Y.H. Tseng und J.H. Ferziger. A ghost-cell immersed boundary method for flow in complex geometry. *J. Comp. Phys.*, 192:593–623, 2003.
- [74] R. Verzicco, J. Mohd-Yusof, P. Orlandi, und D. Harworth. Les in complex geometries using boundary body forces. In *Proceedings of the summer program 1998*, S. 171–186. Center for Turbulence Research, 1998.

- [75] H. Werner. *Grobstruktursimulation der turbulenten Strömung über eine querliegende Rippe in einem Plattenkanal bei hoher Reynoldszahl*. PhD thesis, Technische Universität München, München, 1991.
- [76] H. Werner und H. Wengle. Large-eddy simulation of turbulent flow over a square rib in a channel. In H.H. Fernholz und H.E. Fiedler, (Hrsg.), *Advances in Turbulence*, 2, S. 418–423. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [77] H. Werner und H. Wengle. Large-eddy simulation of turbulent flow over and around a cube in a plate channel. In F. et al. Durst, (Hrsg.), *Turbulent Shear Flows 8*, S. 155–168, Berlin, 1993. Springer.
- [78] J. H. Williamson. Low-storage Runge-Kutta schemes. *J. Comupt. Physics*, 35(48), 1980.

# A Anhang

## A.1 Hügelgeometrie

Auf die Hügelhöhe  $h$  bezogen ergibt sich die Geometrie der Flanke eines Hügels. Beide Flanken des Hügels sind symmetrisch. Die Geometrie beginnt hier wie in Abschnitt 6.2 auf der Hügelspitze.

für  $x \in [0h; 0.3214h]$ :

$$z(x) = \min(1; 1 + 0 \cdot x + 2.42010^{-4} \cdot x^2 - 7.58810^{-5} \cdot x^3);$$

für  $x \in [0.3215h; 0.5h]$ :

$$z(x) = 0.8955 + 3.48410^{-2} \cdot x - 3.62910^{-3} \cdot x^2 + 6.74910^{-5} \cdot x^3;$$

für  $x \in [0.5h; 0.7143h]$ :

$$z(x) = 0.9213 + 2.93110^{-2} \cdot x - 3.23410^{-3} \cdot x^2 + 5.80910^{-5} \cdot x^3;$$

für  $x \in [0.7144h; 1.071h]$ :

$$z(x) = 1.445 - 4.92710^{-2} \cdot x + 6.95010^{-4} \cdot x^2 - 7.39410^{-6} \cdot x^3;$$

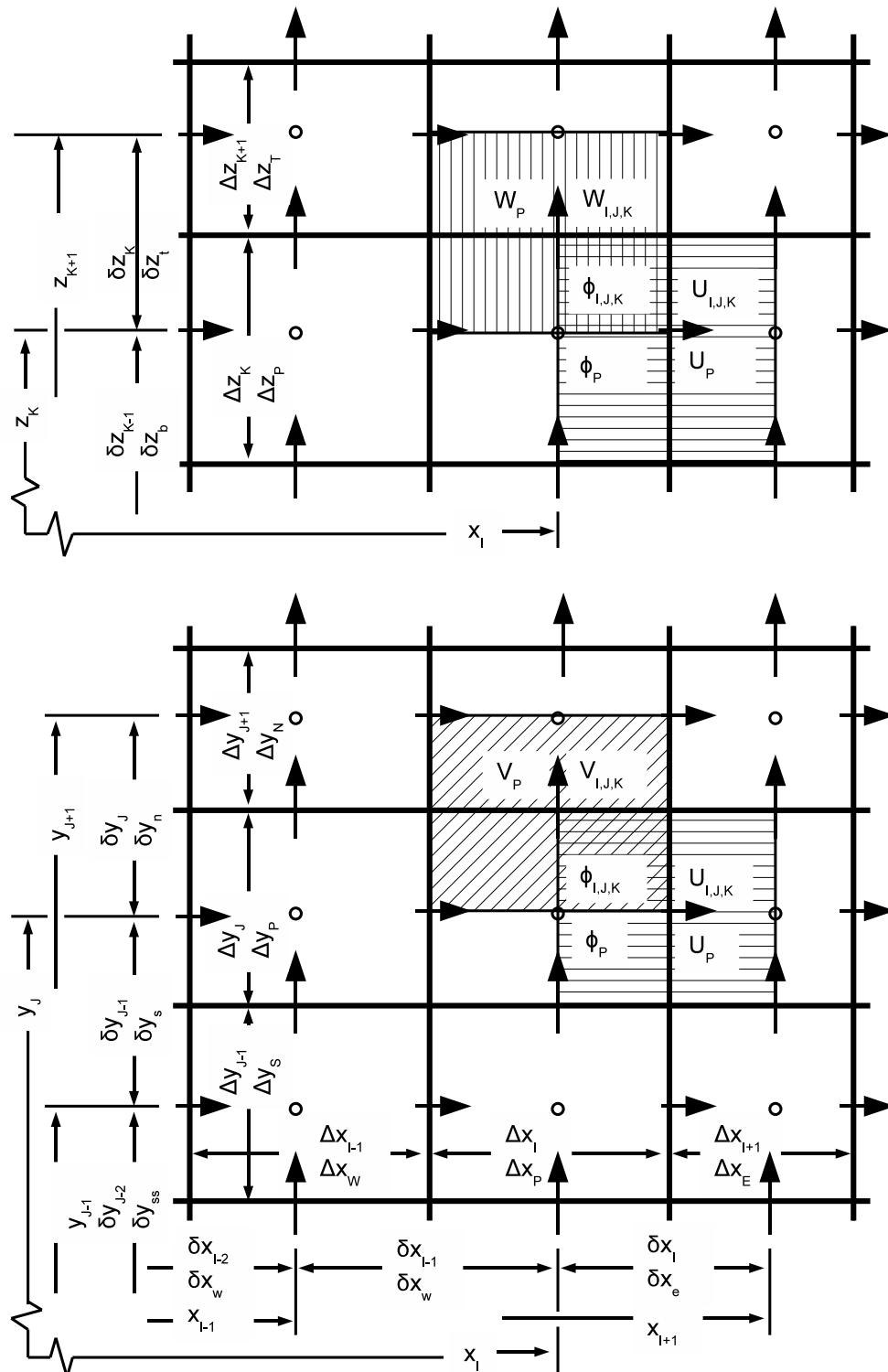
für  $x \in [1.0721h; 1.429h]$ :

$$z(x) = 0.6401 + 3.12310^{-2} \cdot x - 1.98810^{-3} \cdot x^2 + 2.24210^{-5} \cdot x^3;$$

für  $x \in [1.429; 1.929h]$ :

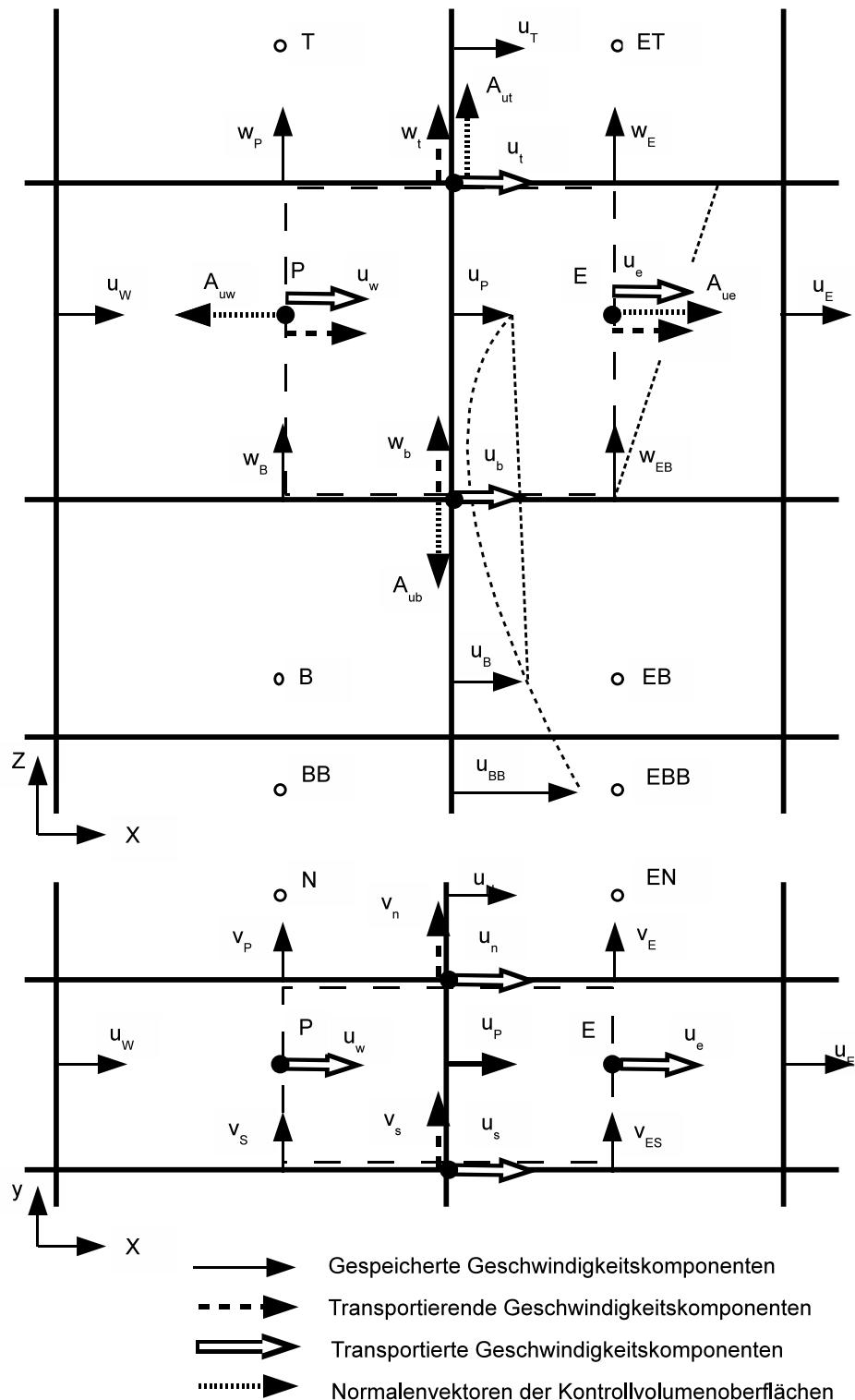
$$z(x) = \max(0; 2.0139 - 7.18010^{-2} \cdot x + 5.87510^{-4} \cdot x^2 + 9.55310^{-7} \cdot x^3);$$

## A.2 Indizierung der Gittergrößen und Variablen



**Abbildung A.1:** Indizierung der Gittergrößen und Zellgrößen in der Umgebung einer Basiszelle (Druckzelle mit Variable  $\phi$ ) mit zugehörigen versetzten Impulszellen ( $U, V, W$ ) nach Werner [75] und Baetke [2].

### A.3 Illustration der diskreten Impulsgleichung



**Abbildung A.2:** Illustration der diskreten Impulsgleichung am Beispiel der  $u$ -Komponente nach Werner [75]