Лабораторная работа № 6

Решение моделей в непрерывном и дискретном времени

Сунгурова Мариян Мухсиновна

Содержание

Список иллюстраций

1 Цель работы

Основной целью данной лабораторной работы является освоение специализированных пакетов для решения задач в непрерывном и дискретном времени.

2 Задание

1. Используя JupyterLab, повторите примерыи. При этом дополните графики обозначениями осей координат, легендой с названиями траекторий, названиями графиков и т.п.

2. Выполните задания для самостоятельной работы.

3 Теоретическое введение

Julia – высокоуровневый свободный язык программирования с динамической типизацией, созданный для математических вычислений [1]. Эффективен также и для написания программ общего назначения. Синтаксис языка схож с синтаксисом других математических языков, однако имеет некоторые существенные отличия.

Для выполнения заданий была использована официальная документация Julia [2].

4 Выполнение лабораторной работы

Выполним примеры из лабораторной работы для знакомства с работой с различными моделями и способами их задания решения (рис. 4.1-4.7).

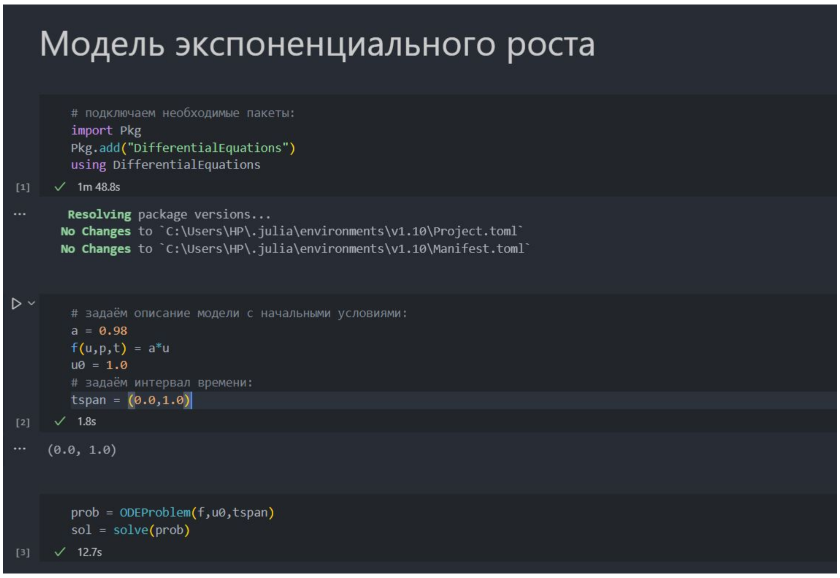

Рис. 4.1: Модель экспоненциального роста

Рис. 4.2: Модель экспоненциального роста

Рис. 4.3: Модель экспоненциального роста

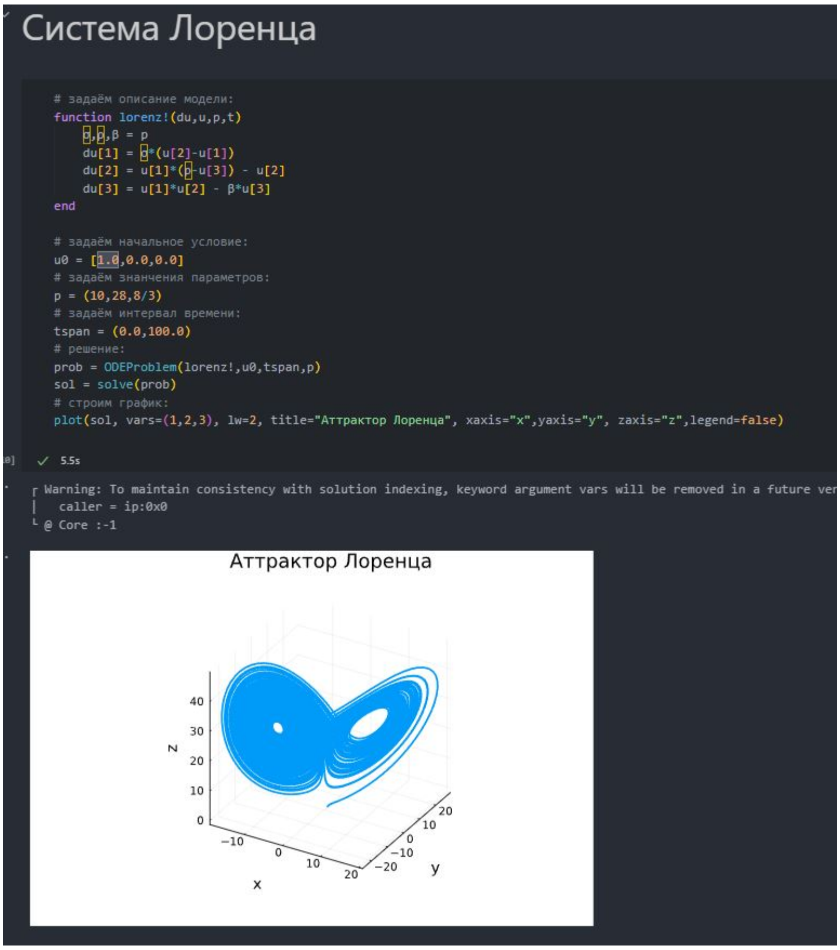

Рис. 4.4: Система Лоренца

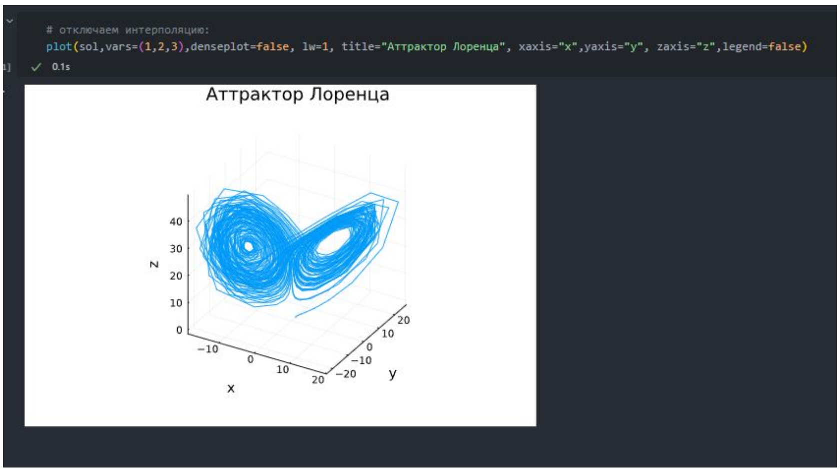

Рис. 4.5: Система Лоренца

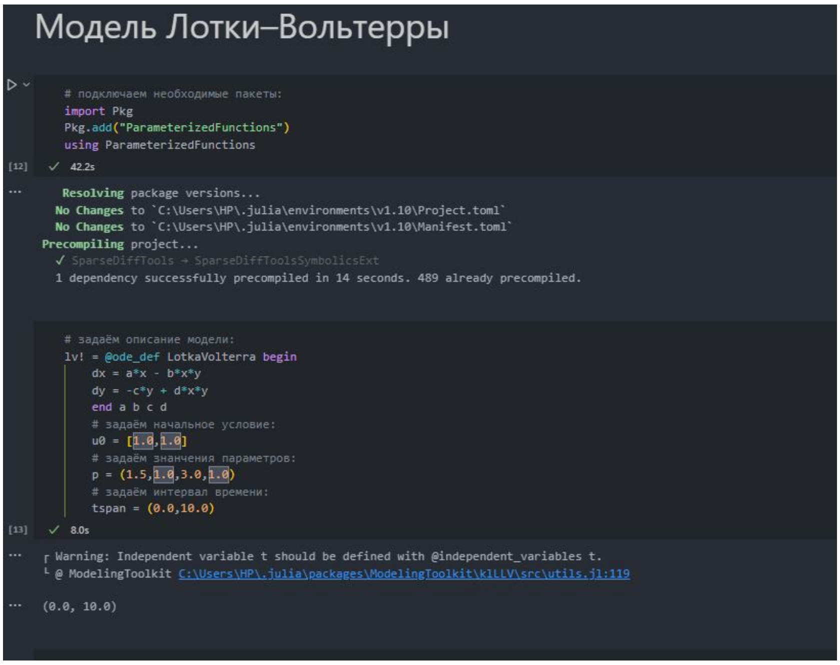

Рис. 4.6: Модель Лотки–Вольтерры

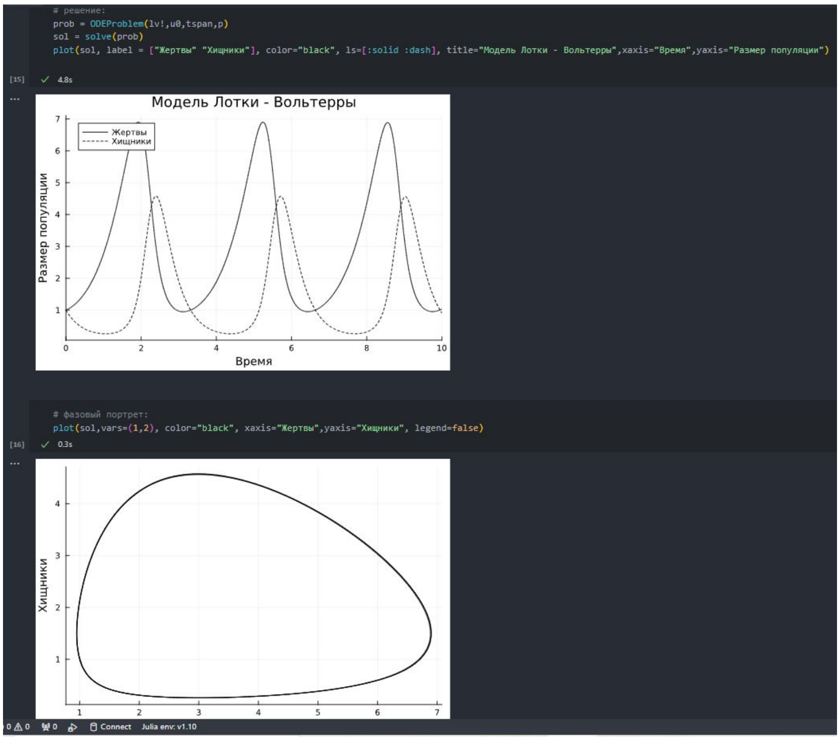

Рис. 4.7: Модель Лотки–Вольтерры

Далее перейдем к заданиям для самостоятельного выполнения.

В первом задании реализуем и проанализируем модель роста численности изолированной популяции(модель Мальтуса):

$$\dot{x} = ax, \quad a = b - c,$$

где $x(t)$ – численность изолированной популяции в момент времени t,a – коэффициент роста популяции, b – коэффициент рождаемости, c – коэффициент смертности. Построим соответствующие графики (в том числе с анимацией) (рис. 4.8-4.9).

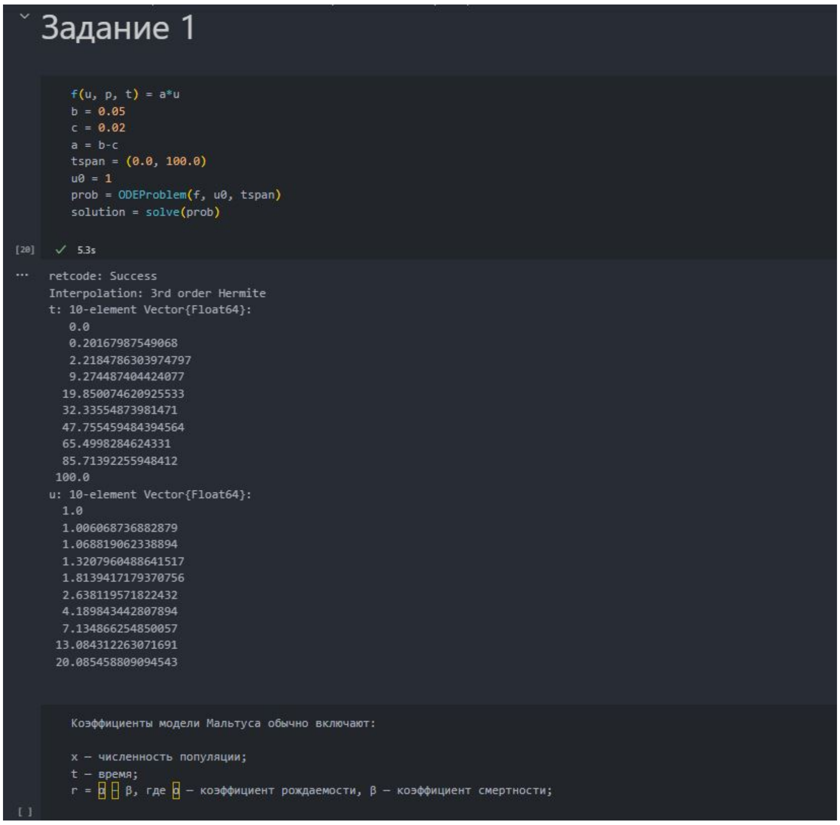

Рис. 4.8: модель Мальтуса

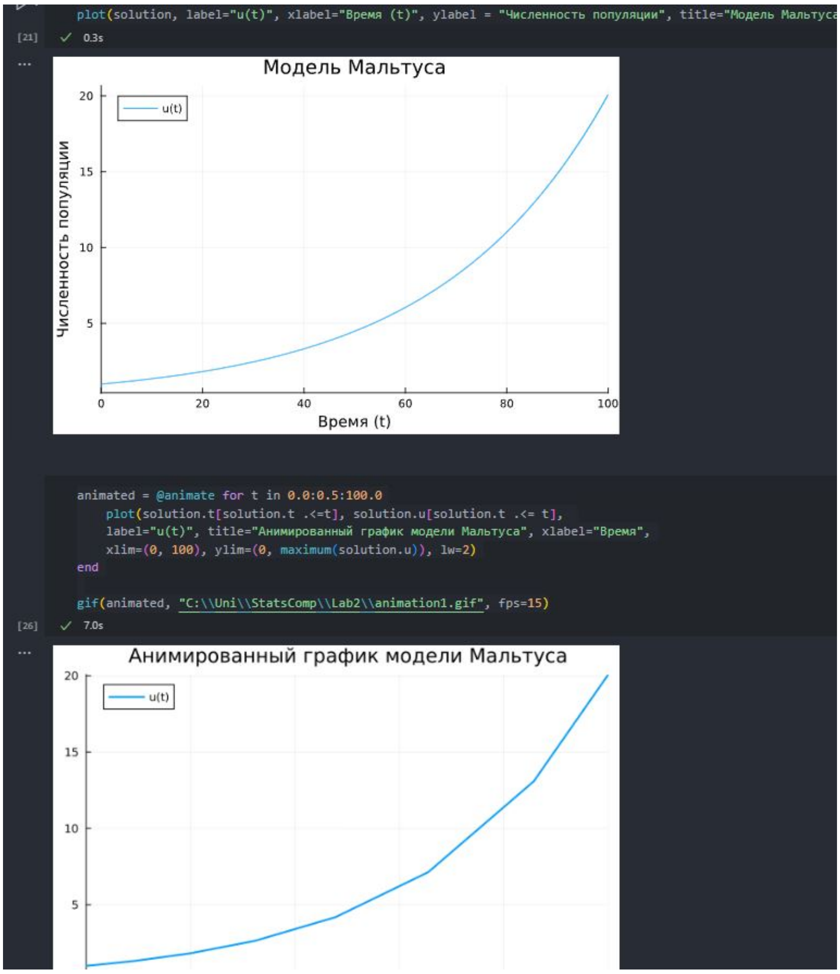

Рис. 4.9: модель Мальтуса

Далее во втором задании реализуем и проанализируем логистическую модель роста популяции:

$$\dot{x} = rx(1 - \frac{x}{k}), \quad r > 0, \quad k > 0,$$

где r – коэффициент роста популяции, k – потенциальная ёмкость экологической системы (предельное значение численности популяции). Построим соответствующие графики (в том числе с анимацией) (рис. 4.10-4.11).

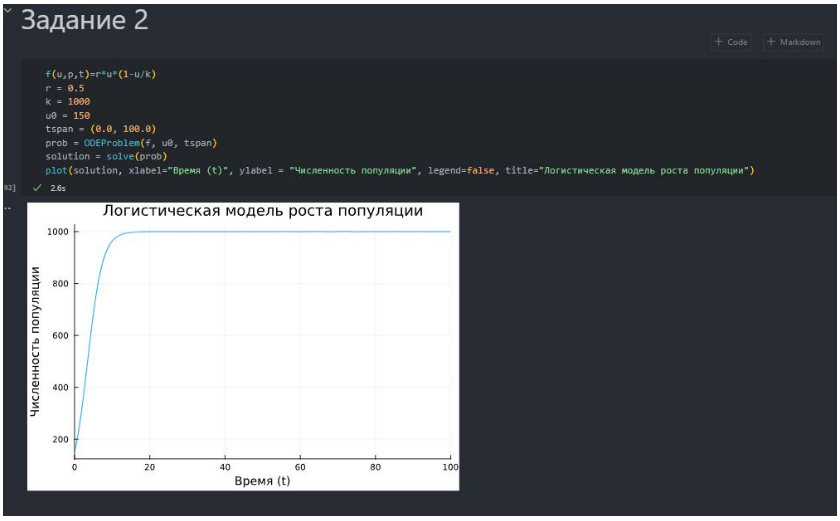

Рис. 4.10: Логистическая модель роста популяции

Анимация:

Рис. 4.11: Логистическая модель роста популяции

В заданиии номер 3 реализуем и проанализируем логистическую модель эпидемии Кермака–Маккендрика (SIR-модель):

$$
\begin{cases}
\dot{S} = -\beta IS, \\
\dot{I} = \beta IS - \gamma I, \\
\dot{R} = \gamma I,
\end{cases}
$$

где S – численность восприимчивой популяции, I – численность инфицированных, R – численность удаленной популяции (в результате смерти или выздоровления), и N — это сумма этих трёх, а β и γ - это коэффициенты заболеваемости и выздоровления соответственно (рис. 4.12).

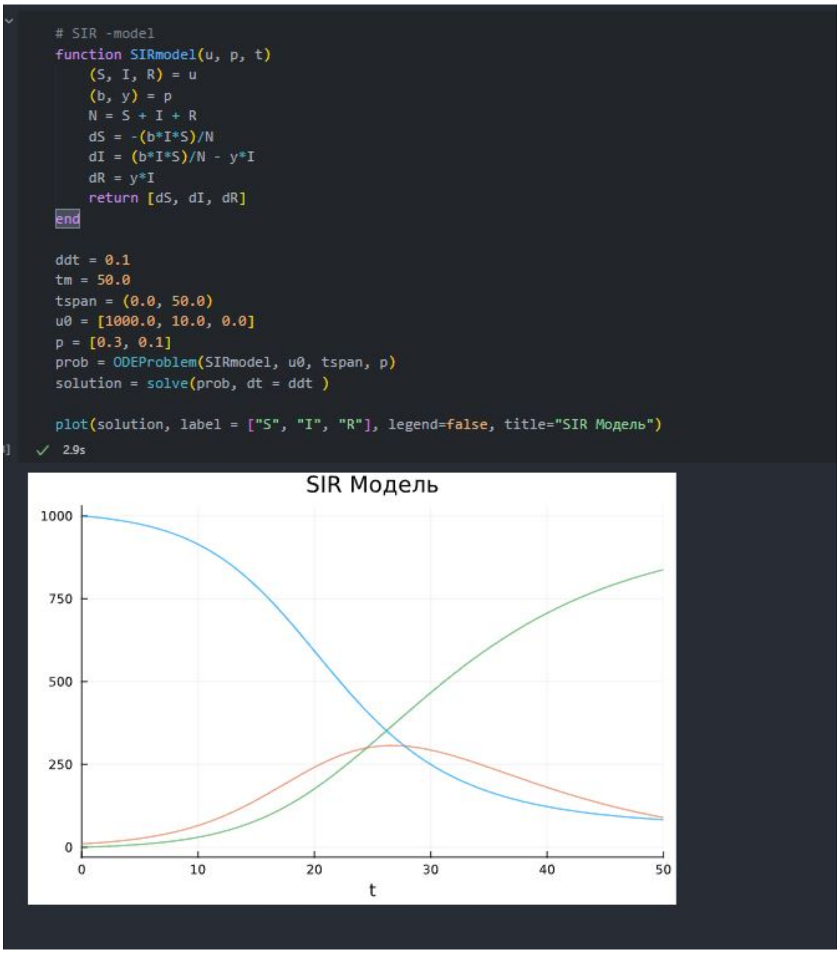

Рис. 4.12: SIR-модель

Также была реализована и анимация

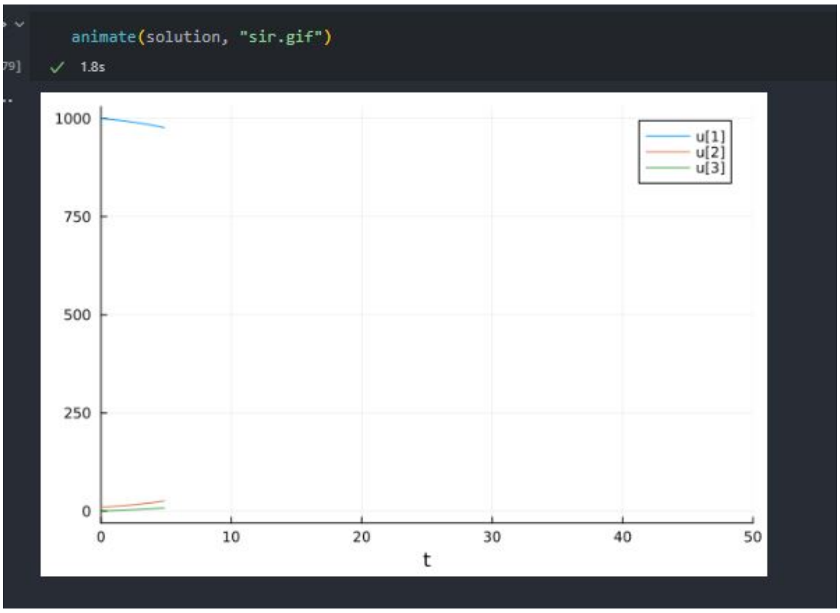

Рис. 4.13: SIR-модель

Далее в рамках четвертого задания как расширение модели SIR (Susceptible-Infected-Removed) по результатам эпидемии испанки была предложена модель SEIR (Susceptible-Exposed-Infected-Removed) (рис. 4.9).

$$\begin{cases} \dot{S} = -\frac{\beta}{N} IS, \\ \dot{E} = \frac{\beta}{N} IS - \delta E, \\ \dot{I} = \delta E - \gamma I, \\ \dot{R} = \gamma I, \end{cases}$$

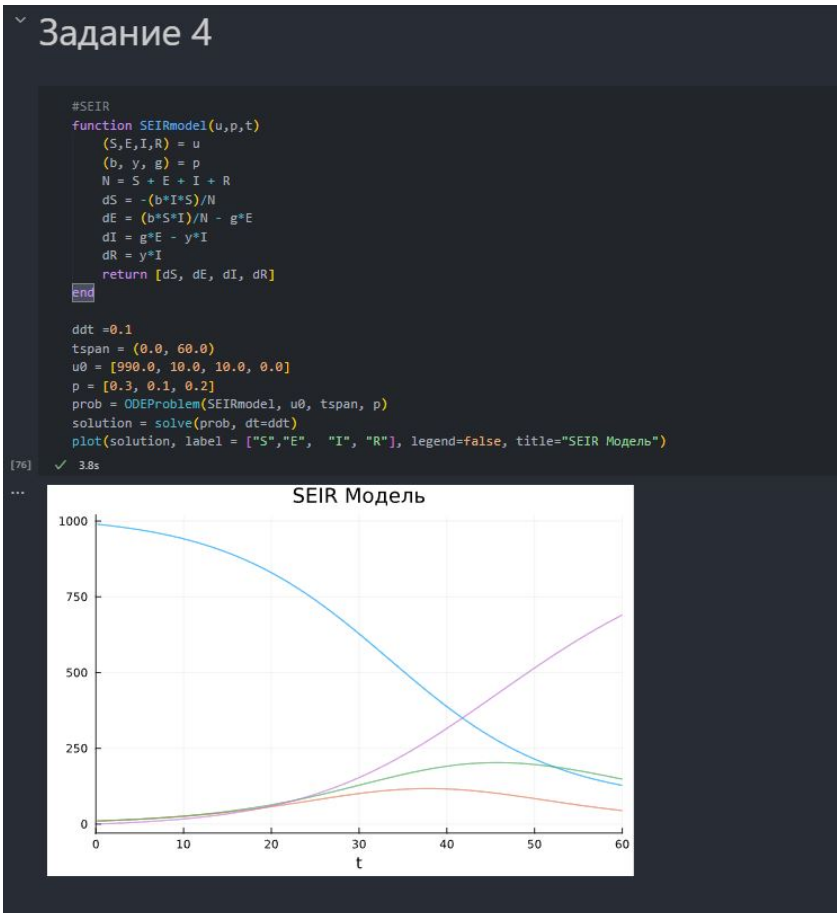

Рис. 4.14: SEIR-модель

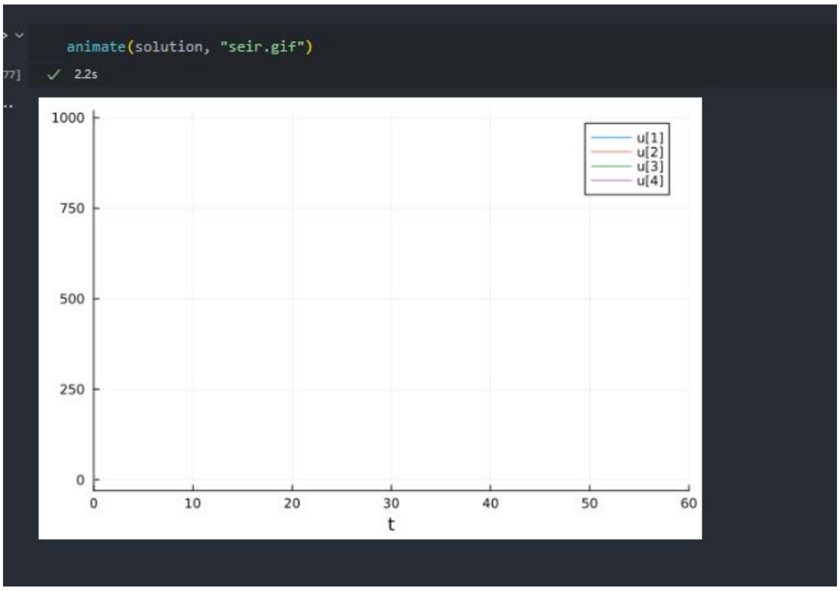

Рис. 4.15: SEIR-модель

В задании номер 5 для дискретной модели Лотки–Вольтерры:

$$\begin{cases} X_1(t+1) = aX_1(t)(1 - X_1(t)) - X_1(t)X_2(t), \\ X_2(t+1) = -cX_2(t) - dX_1(t)X_2(t). \end{cases}$$

с начальными данными $a = 2, c = 1, d = 5$ найдем точку равновесия. Получим и сравним аналитическое и численное решения (рис. 4.16).

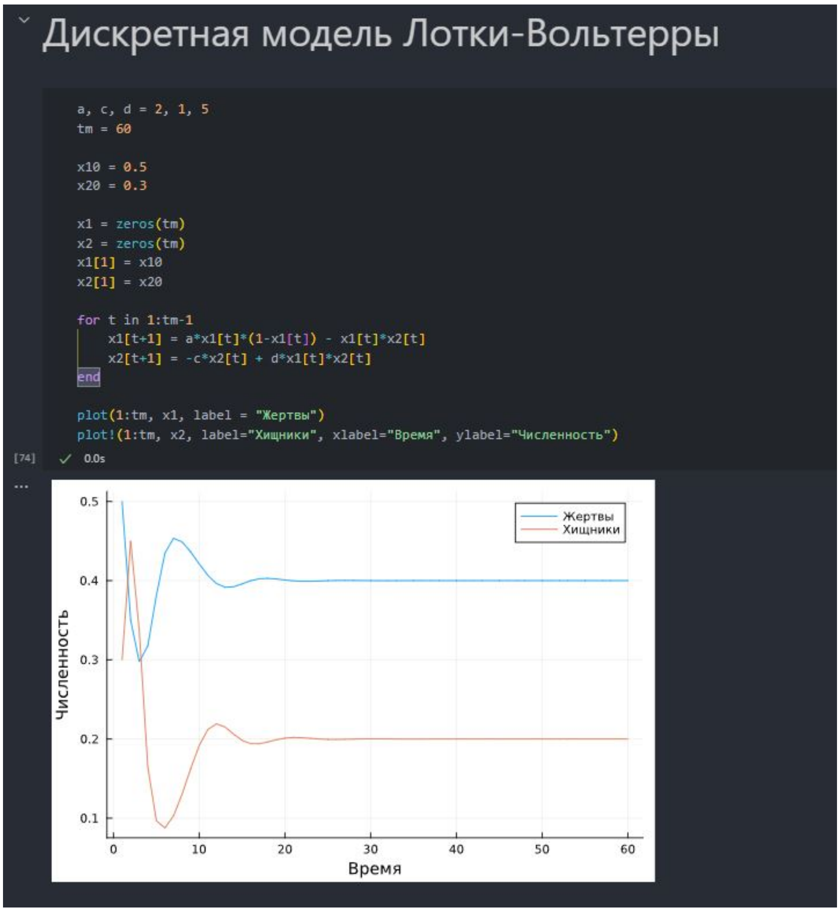

Рис. 4.16: Дискретная модель Лотки–Вольтерры

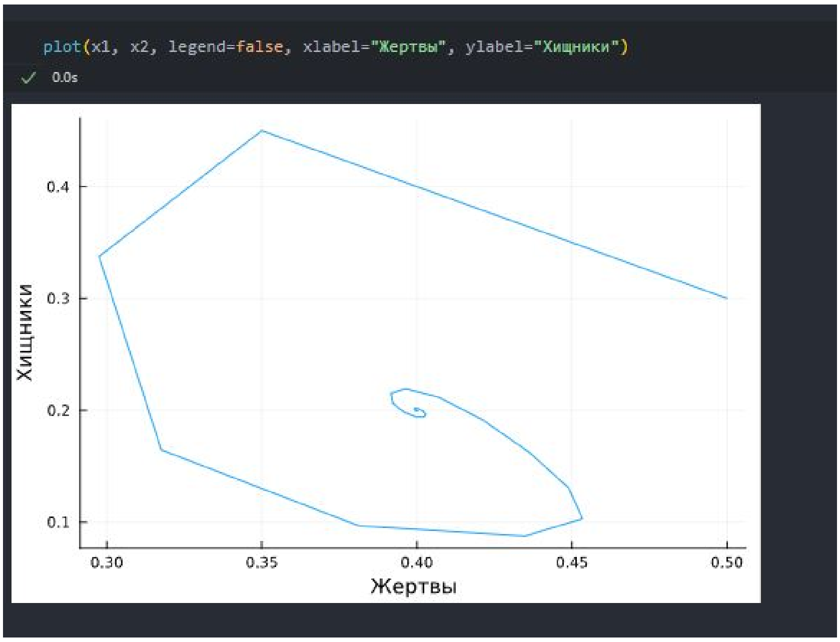

Рис. 4.17: Дискретная модель Лотки–Вольтерры

Реализуем на языке Julia модель отбора на основе конкурентных отношений:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta x y, \\ \dot{y} = \alpha y - \beta x y, \end{cases}$$

В задании 6 Построим соответствующие графики (в том числе с анимацией) и фазовый портрет (рис. 4.18-4.19).

Рис. 4.18: Модель отбора на основе конкурентных отношений

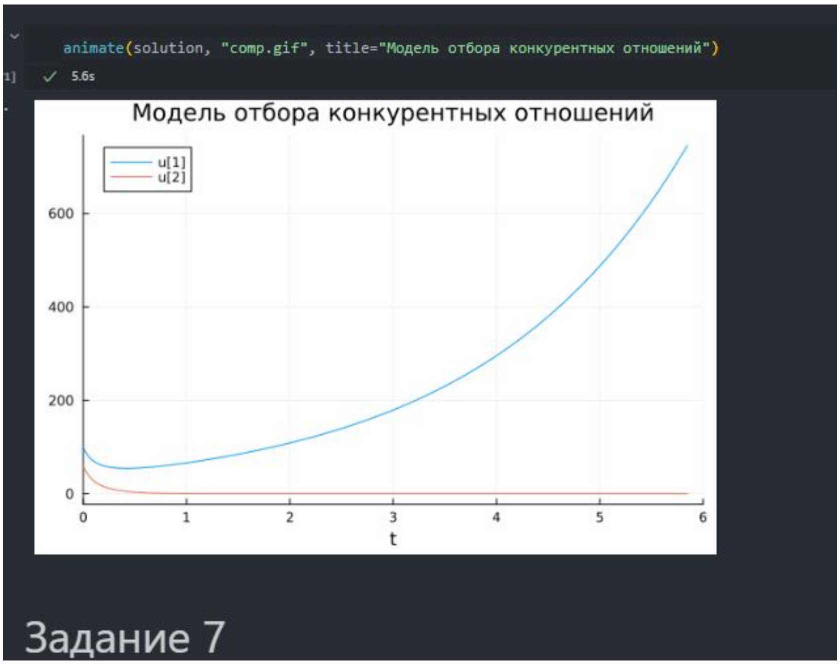

Рис. 4.19: Модель отбора на основе конкурентных отношений

Реализуем на языке Julia модель консервативного гармонического осциллятора:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 = 0, x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = y_0.$$

В задании 7 построим соответствующие графики (в том числе с анимацией) и фазовый портрет (рис. 4.13-4.14).

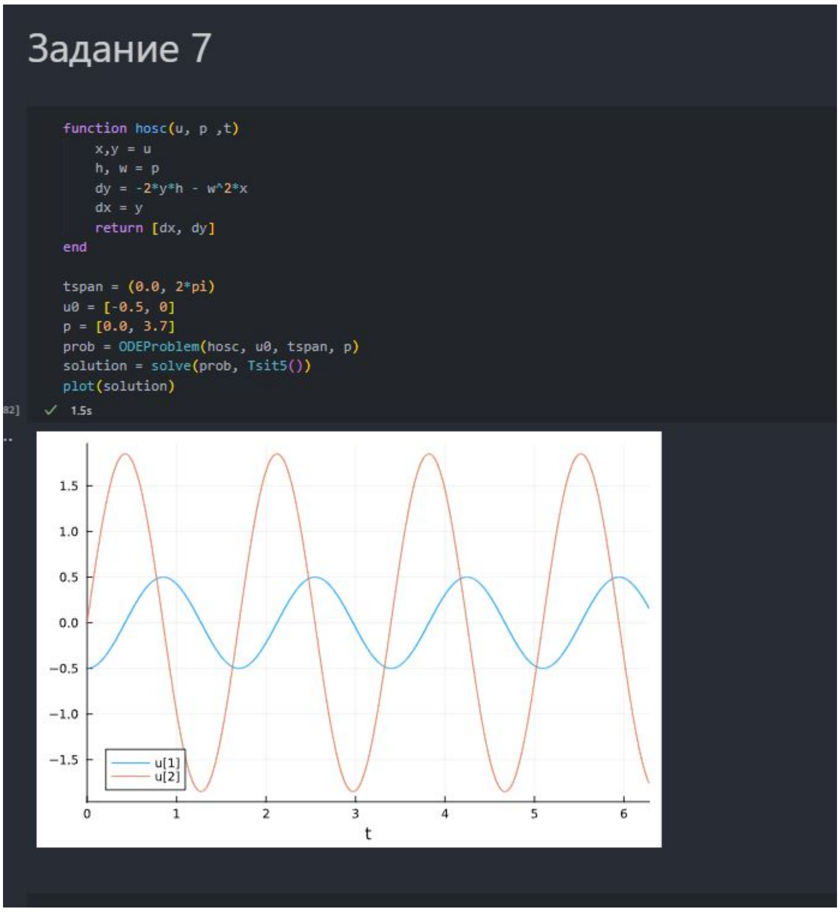

Рис. 4.20: Модель консервативного гармонического осциллятора

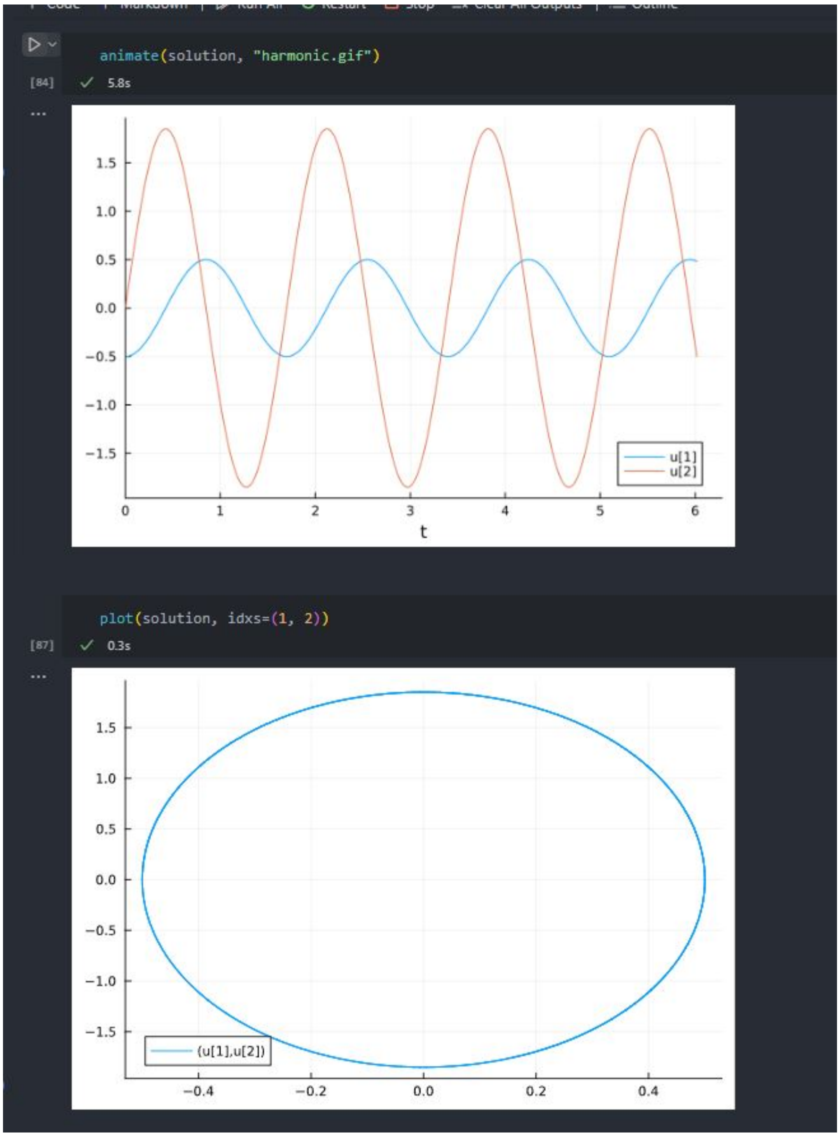

Рис. 4.21: Модель консервативного гармонического осциллятора

Реализуем на языке Julia модель свободных колебаний гармонического осциллятора:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 = 0, x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = y_0.$$

Построим соответствующие графики (в том числе с анимацией) и фазовый портрет (рис. 4.15-4.16).

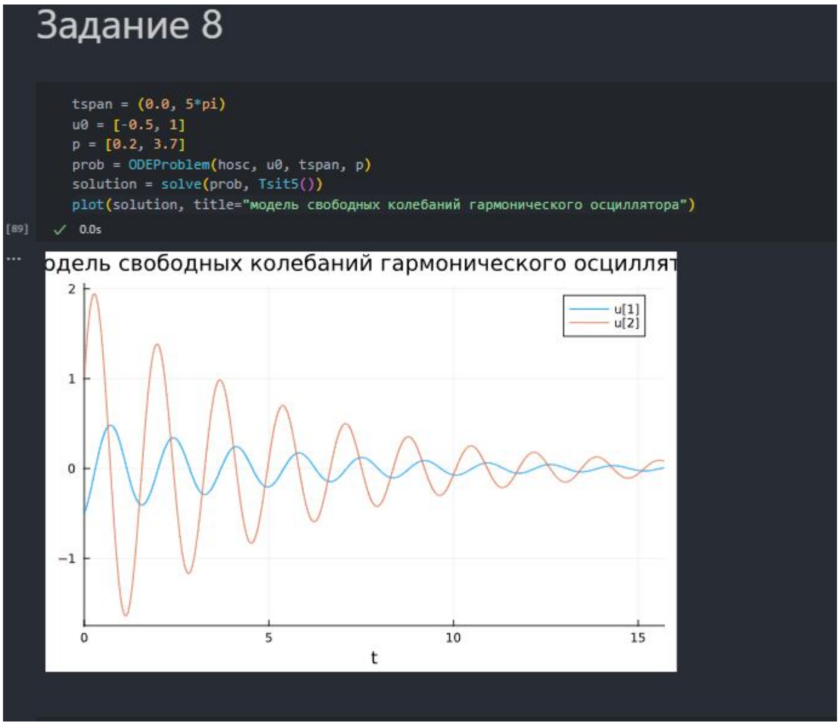

Рис. 4.22: Модель свободных колебаний гармонического осциллятора

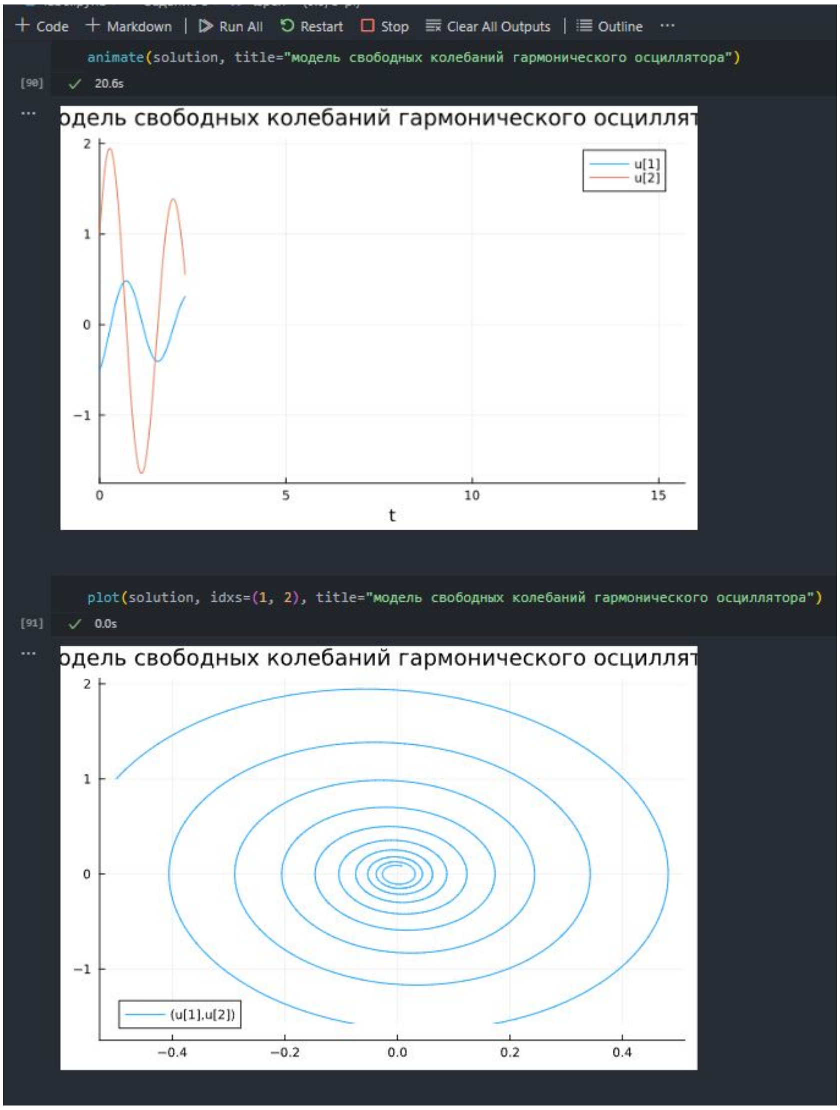

Рис. 4.23: Модель свободных колебаний гармонического осциллятора

5 Выводы

В результате выполнения данной лабораторной работы были освоены специализированные пакеты для решения задач в непрерывном и дискретном времени.

Список литературы

1. JuliaLang [Электронный ресурс]. 2024 JuliaLang.org contributors. URL: https://julialang.org/ (дата обращения: 11.10.2024).
2. Julia 1.11 Documentation [Электронный ресурс]. 2024 JuliaLang.org contributors. URL: https://docs.julialang.org/en/v1/ (дата обращения: 11.10.2024).