Filtri

Mariolino De Cecco e Paolo Bosetti

2025-02-24

Table of contents

Impiego della Funzione di trasferimento per l'elaborazione dei segnali: Filtraggio in frequenza

Un sistema dinamico lineare per il quale esiste una funzione di trasferimento sinusoidale può rappresentare diverse cose:

- **un elemento che elabora segnali**: la funzione di trasferimento non è utile solo per la soluzione di equazioni differenziali che divengo semplici equazioni algebriche, ma anche per effettuare elaborazioni sulle componenti armoniche di un generico segnale e prevedere quali armoniche conterrà l'uscita in base al suo diagramma di Bode. Tali blocchi di elaborazione possono servire per ridurre il rumore in alta frequenza (filtri passa basso), quello in bassa (filtri passa alto), etc;
- **uno strumento di misura**: la funzione di trasferimento in questo caso descrive come lo strumento modifica le componenti armoniche di un segnale da misurare (misurando) e prevedere quali armoniche conterrà l'uscita dello strumento in base al suo diagramma di Bode. Va da sé che uno strumento ideale dovrebbe far passare tutte le armoniche del misurando inalterate. Ovvero né alterate in ampiezza e neppure sfasate. In questo modo esiste una corrispondenza esatta (a meno di un fattore di conversione proporzionale) tra uscita e misurando in ingresso. Questo a volte è possibile, a volte no. Come vedremo, se uno strumento è particolarmente 'lento', esso distorcerà significativamente le ampiezze e sfaserà altrettanto significativamente le fasi delle componenti armoniche tanto più si va su in frequenza. In questi casi, per stimare correttamente il misurando, occorre invertire la funzione di trasferimento in una procedura analoga a quella vista per l'operazione di misura di una grandezza statica. Questa procedura può essere definita **Compensazione Dinamica** che vedremo in uno dei prossimi paragrafi.

Esempio di riduzione del rumore in alta frequenza su di un segnale di temperatura

Si consideri il segnale ed il modulo del suo spettro mostrate in Figure 1 (una misura di temperatura tramite PT100 su di una piastra termostatata che regola la temperatura tra due valori soglia). Se il segnale viene posto in ingresso ad un sistema che possiede una funzione di trasferimento passa basso, si ottiene un segnale in uscita con le medesime componenti in bassa frequenza mentre quelle in alta sono attenuate.

È possibile notare che il segnale in uscita non mostra più il rumore originario in alta frequenza in quanto la funzione di trasferimento ha attenuato proprio le componenti armoniche ad alta frequenza che non appartenevano ad un andamento di temperatura. La dinamica termica è infatti generalmente 'lenta'. Appartenevano, ad esempio, al rumore elettromagnetico di natura interferente.

Le tipologie di filtri sono dette

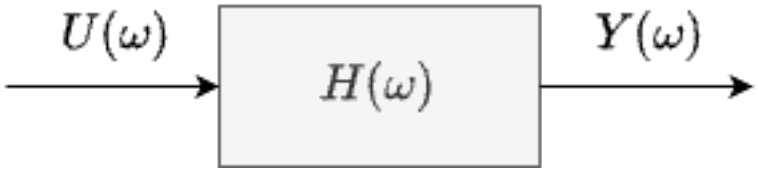


Figure 1: Rappresentazione ingresso-uscita di un sistema dinamico regolato da equazione differenziale lineare.

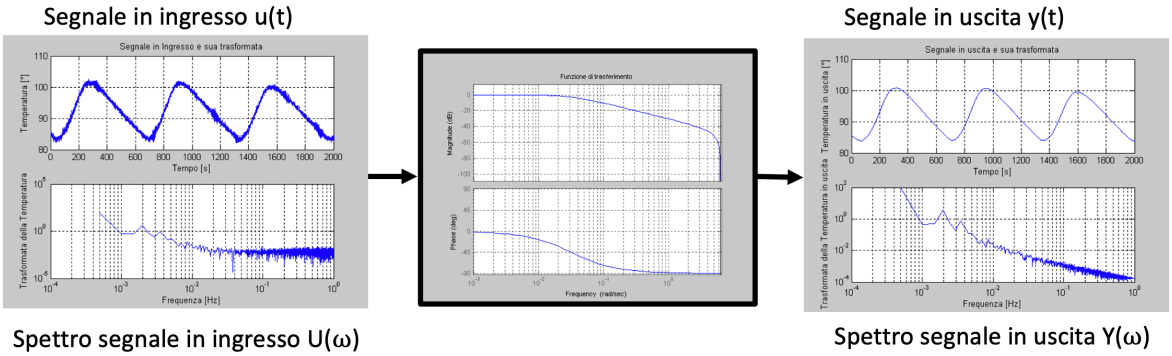


Figure 2: Schema a blocchi di un processo di riduzione delle componenti in alta frequenza. In altre parole filtraggio in alta frequenza mediante un passa-basso. Nella figura sono rappresentati i segnali d'ingresso ed uscita in funzione del tempo ed il modulo (fase omessa) del loro spettro e la funzione di trasferimento che ha elaborato l'ingresso in modulo e fase.

- **passa-basso** nel caso in cui vengano mantenute le componenti a bassa frequenza ed eliminate quelle ad lata frequenza;
- **passa-alto** nel caso contrario;
- **passa-banda** nel caso in cui vengano lasciate immutate le componenti appartenenti ad una data frequenza ed eliminate le altre;
- **elimina-banda** nel caso opposto.

L'**ordine del filtro** coincide con l'ordine del sistema lineare corrispondente al filtro e definisce, nel diagramma di Bode, la pendenza di modulo(espresso nel diagramma logaritmico in decibel per decade) ed andamento della fase. Altro parametro importante è la frequenza di taglio f_c definita come quella frequenza alla quale il segnale viene distorto in modo trascurabile, quindi:

- la massima attenuazione (o amplificazione) della potenza delle armoniche è pari al 50%, ovvero l'ampiezza viene attenuata di un fattore uno su radice di due, in termini logaritmici quindi ± 3 dB;
- lo sfasamento è pressoché lineare (introducendo eventualmente un ritardo ma non una distorsione). A tale conclusione si arriva considerando la proprietà dell'anticipo-ritardo della trasformata.

Alla frequenza di taglio corrisponde implicitamente una banda passante che sarà da 0 ad f_c nel caso di passa basso, da f_c ad infinito nel caso di passa alto.

Filtri online

Il filtro online opera direttamente sul segnale temporale elaborandolo mano mano che esso si presenta, campione dopo campione tramite una successione per ricorrenza. La dimostrazione del fatto che un sistema reale si comporta nel dominio discreto come una successione per ricorrenza la si ottiene:

- moltiplicando la trasformata di un segnale d'ingresso per la funzione di trasferimento
- antitrasformando
- discretizzando la derivata

Proviamo quanto detto con un filtro del primo ordine avente uno zero ed un polo:

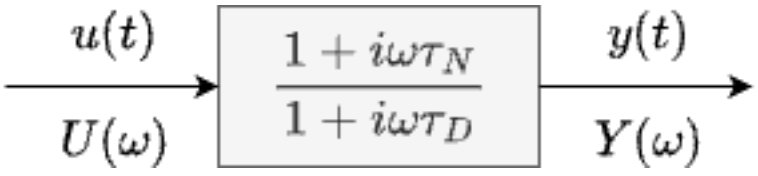


Figure 3: Filtro con un polo e uno zero

Sappiamo che:

$$Y(\omega) = \frac{1 + i\omega\tau_N}{1 + i\omega\tau_D} U(\omega)$$

da cui:

$$Y(\omega)(1 + i\omega\tau_D) = U(\omega)(1 + i\omega\tau_N)$$

quindi:

$$Y(\omega) + i\omega\tau_D Y(\omega) = U(\omega) + i\omega\tau_n U(\omega)$$

Anti-trasformando otteniamo:

$$y(t) + \dot{y}(t)\tau_D = u(t) + \dot{u}(t)\tau_N$$

e applicando la formula di Eulero per la discretizzazione (anche conosciuta come formula alle differenze finite):

$$y_k + \frac{y_k - y_{k-1}}{T_c}\tau_D = u_k \frac{u_k - u_{k-1}}{T_c}\tau_n$$

e, in definitiva:

$$y_k \left(1 + \frac{\tau_D}{T_c}\right) = y_{k-1}\frac{\tau_D}{T_c} + u_k \left(1 + \frac{\tau_N}{T_c}\right) - u_{k-1}\frac{\tau_N}{T_c}$$

che, normalizzando, diventa la seguente ricorrenza:

$$y_k = y_{k-1}\frac{\tau_D/T_c}{1 + \tau_D/T_c} + u_k \frac{\tau_N/T_c}{1 + \tau_D/T_c} + u_{k-1}\frac{\tau_N/T_c}{1 + \tau_D/T_c}$$

Che significato assumono in R i vettori `A` e `B`?

Se n_a è l'ordine del denominatore ed n_b è l'ordine del numeratore, $A = [A(1), A(2), \dots, A(n_a + 1)]$, $B = [B(1), B(2), \dots, B(n_b + 1)]$:

$$\begin{aligned} a(1)y(n) =& b(1)x(n) + b(2)x(n-1) + \cdots + b(n_b + 1)x(n - n_b) + \\ & - a(2)y(n-1) - \cdots - a(n_a + 1)y(n - n_a) \end{aligned}$$

Grazie alla normalizzazione, si impone $a(1) = 1$

Nel caso sopra citato della funzione di trasferimento con un polo ed uno zero del primo ordine i vettori A e B sono:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{\tau_D/T_c}{1 + \tau_D/T_c} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \dfrac{1 + \tau_N/T_c}{1 + \tau_D/T_c} & -\dfrac{\tau_N/T_c}{1 + \tau_D/T_c} \end{bmatrix}$$

Notare che essendo $n_a = n_b = 1$ entrambi i vettori hanno 2 elementi.

In R il comando `butter(n, fn)` restituisce i coefficienti della funzione di trasferimento di un filtro Butterworth digitale passa basso di ordine n in grado di operare in tempo reale con frequenza di taglio normalizzata alla frequenza di Nyquist f_n.

La frequenza di taglio per filtri digitali, ovvero filtri che elaborano sequenze di segnali campionati e convertiti viene solitamente normalizzata per la frequenza di Nyquist. Il motivo è semplice: un vettore corrispondente ad un segnale digitale non possiede esplicitamente informazioni circa la frequenza di campionamento per cui ha senso normalizzare il suo massimo contenuto in frequenza (ponendo quindi la fn pari ad 1) ed esprimendo i parametri di elaborazione (quali ad esempio il filtraggio) rispetto a tale valore, quindi tra 0 ed 1.

Si noti come, perdendo l'informazione circa la frequenza o tempo di campionamento è possibile ragionare equivalentemente in termini di numeri di campioni. Per la frequenza di Nyquist ad esempio l'armonica corrispondente ha 2 campioni: $f_c = 1/1$ campione, quindi $f_n = fc/2 = 1/2$ campioni, ovvero periodo 2 campioni.

Esempi

Riutilizziamo la funzione `signal()`:

```
signal <- function(t, pars, rad=FALSE) {
  stopifnot(is.data.frame(pars))
  if (!rad) {
    pars$phi <- pars$phi/180*pi
    pars$f <- 2*pi*pars$f
  }
  with(
    pars,
    map_dbl(t, \(t) map_vec(seq_along(w), ~ w[.]*sin(t*f[.]+phi[.])) %>% sum())
  )
}
```

Definiamo una sinusoide base con due disturbi armonici, più un disturbo normale:

```
N <- 100
pars <- tibble(
  w = c(1, 0.1, 0.3),
  f = c(1/25, 1/5, 1/3),
  phi = c(0, 0, 0)
)
```

Cominciamo con realizzare il grafico del segnale e delle sue componenti:

```r
s <- tibble(
  t = 0:N,
  s = signal(t, pars[1,]),
  y = signal(t, pars),
  yn = y + rnorm(length(t), 0, pars$w[1] / 10)
)

s %>%
  select(t, sine=s, signal=y, `signal+noise`=yn) %>%
  pivot_longer(-t) %>%
  ggplot(aes(x=t, y=value)) +
  geom_line(aes(color=name)) +
  labs(x="time (s)")
```

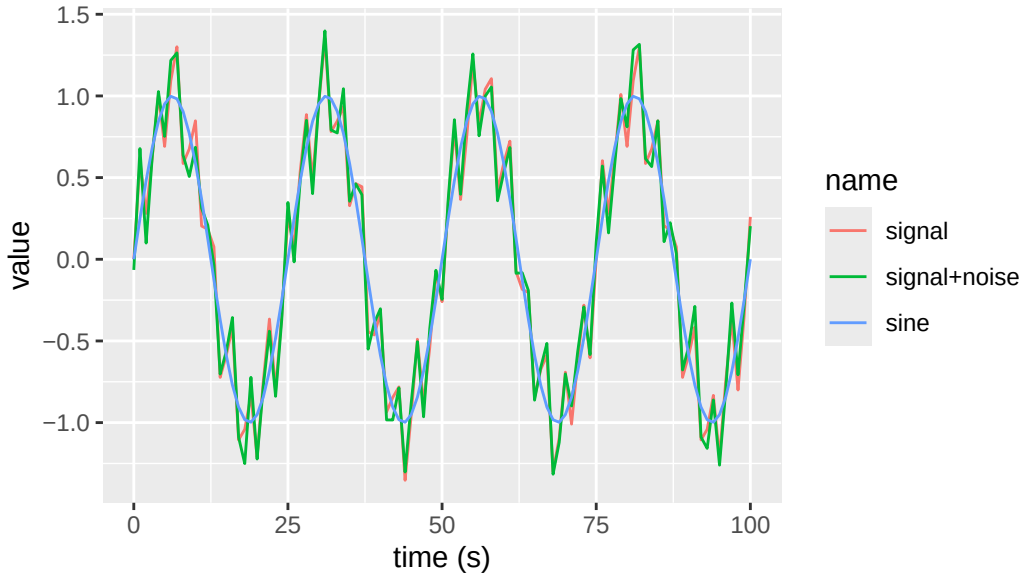


Figure 4: Segnale armonico con disturbo

La trasformata di Fourier mostra i tre picchi attesi:

```r
s %>%
  mutate(
    f = 0:(n()-1)/max(t),
    fft = fft(yn),
    intensity = Mod(fft) / n()*2,
    phase = Arg(fft)/pi*180
  ) %>%
```

```
  slice_head(n=as.integer(nrow(.)/2)) %>%
  ggplot(aes(x=f, y=intensity)) +
  geom_spoke(aes(y=0, radius=intensity, angle=pi/2)) +
  geom_point()
```

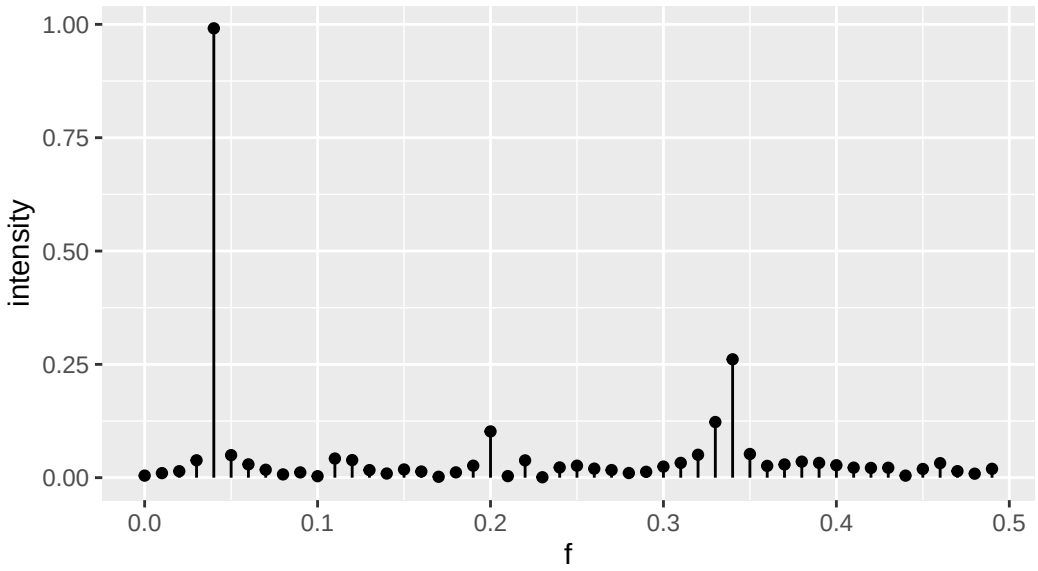


Figure 5: FFT del segnale armonico di riferimento

Il filtraggio online viene realizzato in due passi: prima si **progetta il filtro**, selezionando il tipo di filtro e i parametri che si adattano al segnale che si vuole filtrare e alla sua trasformata nel dominio delle frequenze, poi si applica il filtro al segnale.

Nel nostro caso scegliamo un filtro di tipo *Butterworth* di ordine 3:

```
ft <- 2/pars$f[1] / (1/2)
# Doppio della frequenza base
fn <- pars$f[1]*2
# Frequenza di Nyquist
fny <- 1/(s$t[2] - s$t[1]) / 2
# Frequenza di taglio
ft <- fn/fny
# Filtro Butterworth di ordine 3 con cut-off al doppio della frequenza base
# Il parametro w è normalizzato tra 0 e 1, con 1 = fny
flt <- butter(3, w=ft)
flt
```

```
$b
[1] 0.01018258 0.03054773 0.03054773 0.01018258

$a
[1]  1.0000000 -2.0037975  1.4470540 -0.3617959

attr(,"class")
[1] "Arma"
```

Come si vede, l'oggetto filtro contiene i due vettori coi coefficienti polinomiali di un modello ARMA.

La funzione `freqz()` consente di valutare le caratteristiche del filtro:

```
(fq <- freqz(flt))
```

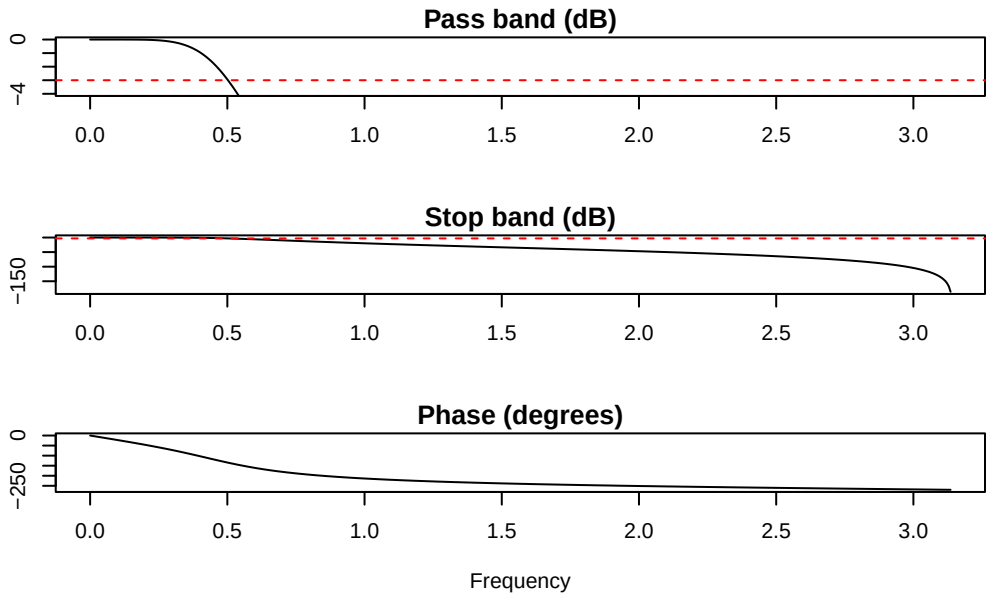


Figure 6: Caratteristiche del filtro Butterworth di ordine 3

Il grafico *Stop band* è lo stesso grafico *Pass band* ma con limiti dell'asse y più ampi, in modo da evidenziare come poco oltre 3 Hz c'è un'attenuazione completa.

Grafici simili possono essere ottenuti in `ggplot` come segue, estraendo direttamente le componenti dall'oggetto restituito da `freqz`. Si noti che la componente `fq$h` va scomposta in modulo e fase; il modulo va poi convertito in decibel (dB) e la fase va "srotolata" (`unwrap`):

```
tibble(
  h = fq$h,
  mod = 20*log10(Mod(h)),
  phase = Arg(h) %>% unwrap() / pi * 180,
  frequency = fq$w,
) %>% {
  (ggplot(., aes(x=frequency)) +
     geom_line(aes(y=mod)) +
     coord_cartesian(ylim=c(-4, 0.5)) +
     geom_vline(xintercept=ft, color="red", linetype=2) +
     labs(y="Intensity (dB)", x="")) /
  (ggplot(., aes(x=frequency)) +
     geom_line(aes(y=phase)) +
     geom_vline(xintercept=ft, color="red", linetype=2) +
     labs(y="phase (°)", x="frequency (Hz)"))
}
```

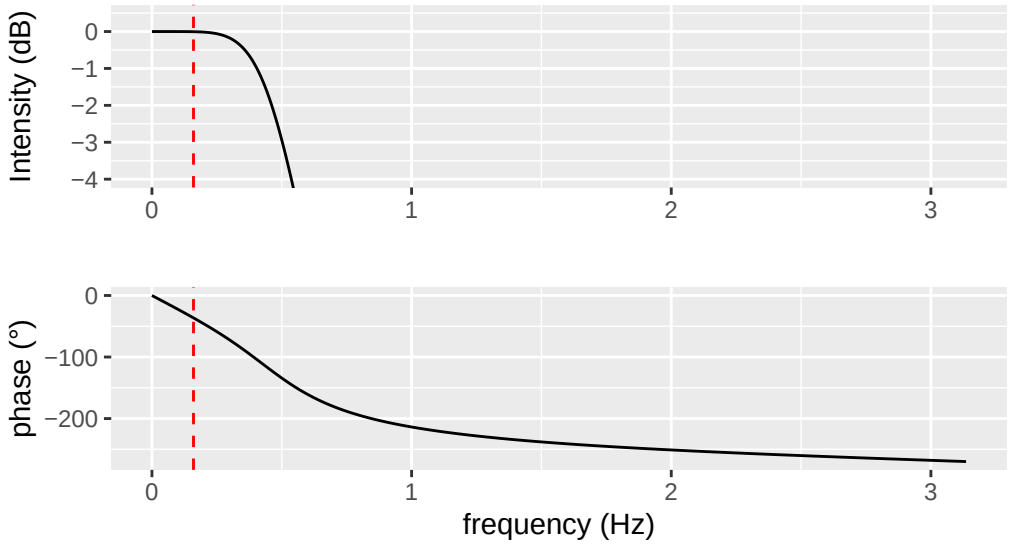


Figure 7: Caratteristiche del filtro Butterworth di ordine 3 (con GGplot)

Il filtro può poi essere applicato con `filter()`:

```
s %>%
  mutate(
    sflt = flt %>% filter(yn)
  ) %>%
```

```
  select(t, `signal+noise`=yn, sine=s, filtered=sflt) %>%
  pivot_longer(-t) %>%
  ggplot(aes(x=t, y=value)) +
  geom_line(aes(color=name)) +
  labs(x="time (s)")
```

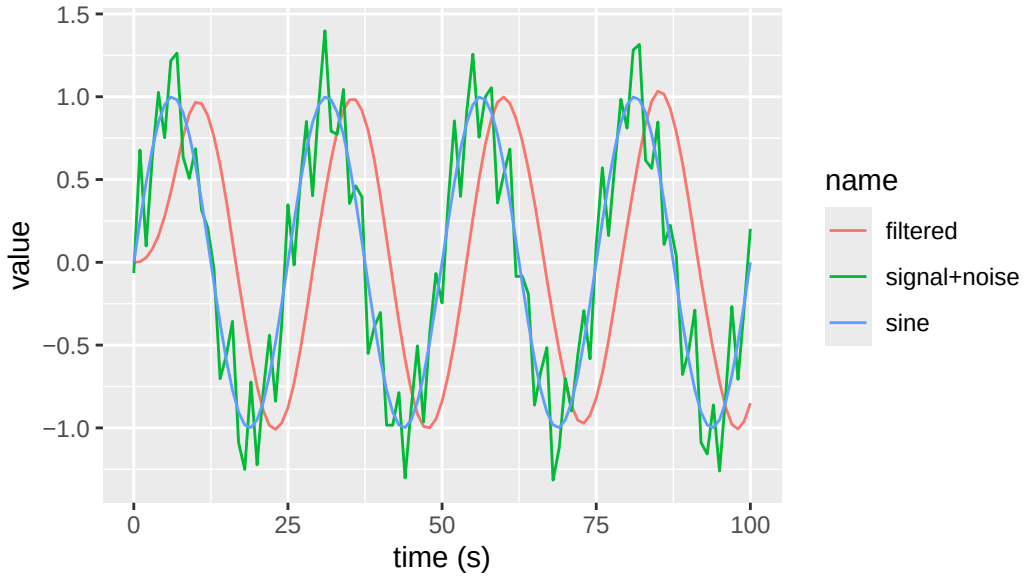


Figure 8: Segnale di riferimento filtrato

Come si vede, il filtro ripulisce sia il disturbo casuale che le armoniche con frequenza superiore alla frequenza di taglio 0.16 Hz., seppure **introducendo un ritardo di fase**.

Per eliminare il ritardo, se il filtro è applicato **offline**, si può ricorrere a `filtfilt()` al posto di `filter()`: questa funzione applica il filtraggio in avanti e indietro, compensando quindi il ritardo:

```
s %>%
  mutate(
    sflt = flt %>% filtfilt(yn)
  ) %>%
  select(t, `signal+noise`=yn, sine=s, filtered=sflt) %>%
  pivot_longer(-t) %>%
  ggplot(aes(x=t, y=value)) +
  geom_line(aes(color=name)) +
  labs(x="time (s)")
```

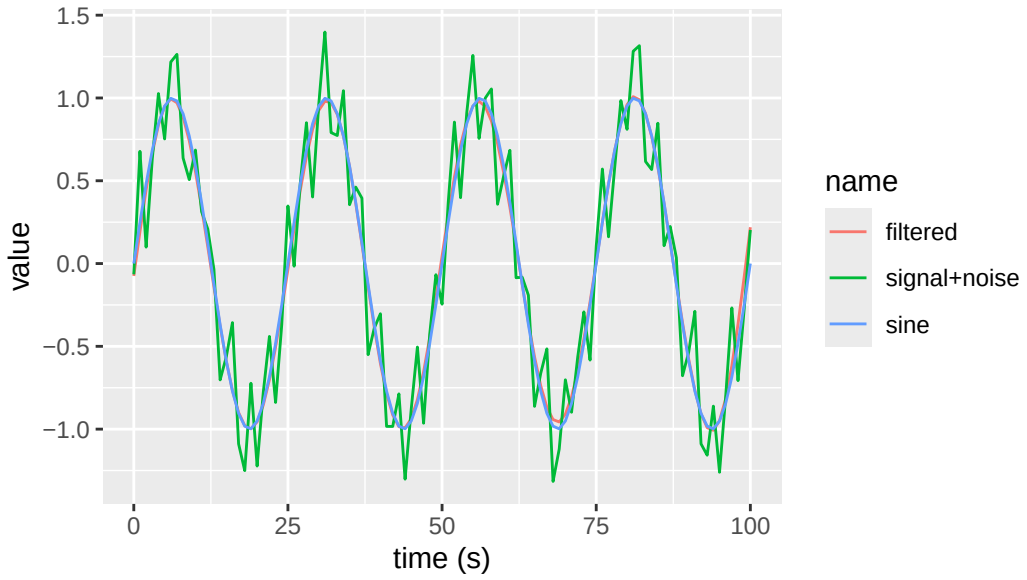


Figure 9: Segale di riferimento filtrato in avanti e indietro, eliminando il ritardo

Ricorsione

Il vantaggio dei filtri online è che possono essere calcolati direttamente durante l'acquisizione di un segnale, grazie al fatto che il filtro è esprimibile come una formula di ricorsione.

La funzione `butter()` restituisce infatti un filtro in forma dei coefficienti di un modello ARMA(p, q), per cui è possibile calcolare la nuova osservazione filtrata y_n in funzione delle precedenti osservazioni:

$$a_1 y_n + a_2 y_{n-1} + \cdots + a_{n_a} y_{n-p+1} = b_1 x_n + b_2 x_{n-1} + \cdots + b_{n_b} x_{n-q+1}$$

dove le y_i sono i valori filtrati, le x_i i valori originari, e i due vettori `A` e `B` contengono i termini a_i e b_i, con $a_1 = 1$. Quindi:

$$y_n = b_1 x_n + b_2 x_{n-1} + \cdots + b_{n_b} x_{n-n_b+1} - \left(a_2 y_{n-1} + \cdots + a_{n_a} y_{n-n_a+1}\right) \tag{1}$$

Per un filtro Butterworth di ordine m, si ha che $p = q = m$ e i vettori `A` e `B` hanno entrambi $m + 1$ elementi.

È facile implementare la Equation 1 in un qualsiasi linguaggio di programmazione. Ad esempio in R definiamo una funzione che prende in ingresso una tabella, una nuova osservazione e il filtro (con le componenti ARMA A e B), e restituisce la stessa tabella con una riga in più (con il nuovo campione e il valore filtrato con la Equation 1). L'inizializzazione della formula ricorsiva viene fatta con una tabella vuota (o `NA`):

```r
my_filter <- function(t = NA, sample, flt) {
  # Inizializzazione o aggiornamento tabella:
  if (!is.data.frame(t) || nrow(t) == 0)
    t <- tibble(i=1, x=sample, y=0)
  else
    t <- add_row(t, i = tail(t, 1)$i + 1, x=sample)
  A <- flt$a
  B <- flt$b
  n <- nrow(t)
  nb <- min(n, length(B))
  # Termini Moving Average:
  MA <- rev(B[1:nb]) * tail(t$x, nb)
  # Termini Auto-Regressive:
  AR <- rev(A[1:nb]) * tail(t$y, nb)
  # Nuova osservazione filtrata:
  t$y[n] <- sum(MA) - sum(AR, na.rm=TRUE)
  return(t)
}
```

In questo modo il filtro può essere applicato **un'osservazione alla volta**, e per questo si chiama *filtro online*: può cioè essere aggiornato durante l'acquisizione del segnale, pena ovviamente un ritardo sul segnale filtrato:

```r
tibble() %>%
  my_filter(1, flt) %>%
  my_filter(2, flt) %>%
  my_filter(3, flt) %>%
  my_filter(4, flt) %>%
  my_filter(5, flt) %>%
  my_filter(5, flt) %>%
  my_filter(5, flt) %>%
  kable()
```

i	x	y
1	1	0.0101826
2	2	0.0713167
3	3	0.2503604
4	4	0.6058080
5	5	1.1625457
6	5	1.8998389

i	x	y
7	5	2.7409252

Utilizziamolo sul segnale originale è più evidente il ritardo:

```
filtered_signal <- tibble()

for (sample in s$yn) {
  filtered_signal <- my_filter(filtered_signal, sample, flt)
}

filtered_signal %>%
  ggplot(aes(x=i)) +
  geom_line(aes(y=y), color="red") +
  geom_line(aes(y=x))
```

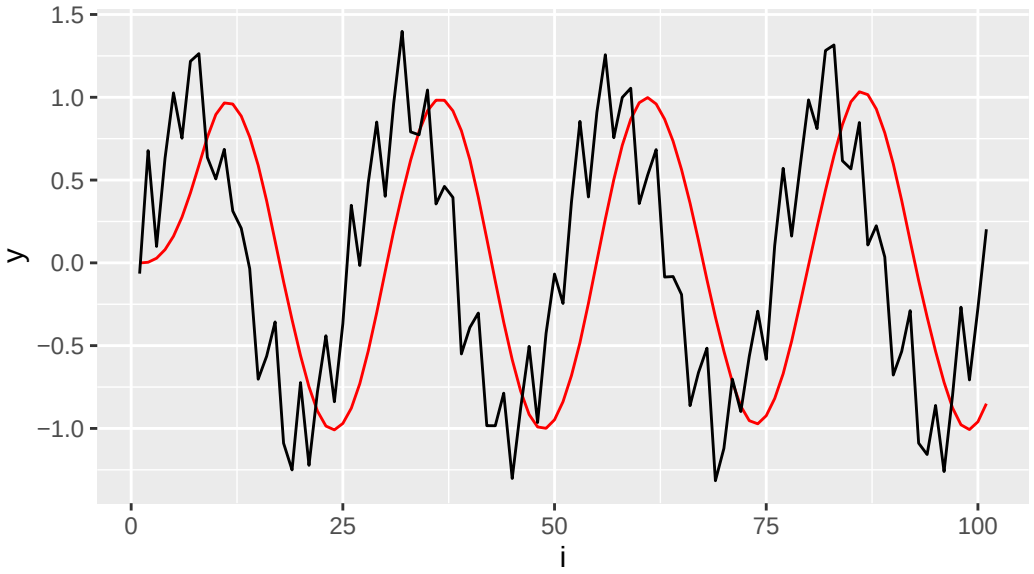


Figure 10: Segnale di riferimento filtrato con la funzione `my_filter()`

Sfruttando la programmazione funzionale di `purrr`:

```
s$yn %>%
  reduce(\(tbl, obs) my_filter(tbl, obs, flt), .init=tibble()) %>%
  ggplot(aes(x=i)) +
```

```
  geom_line(aes(y=y), color="red") +
  geom_line(aes(y=x))
```

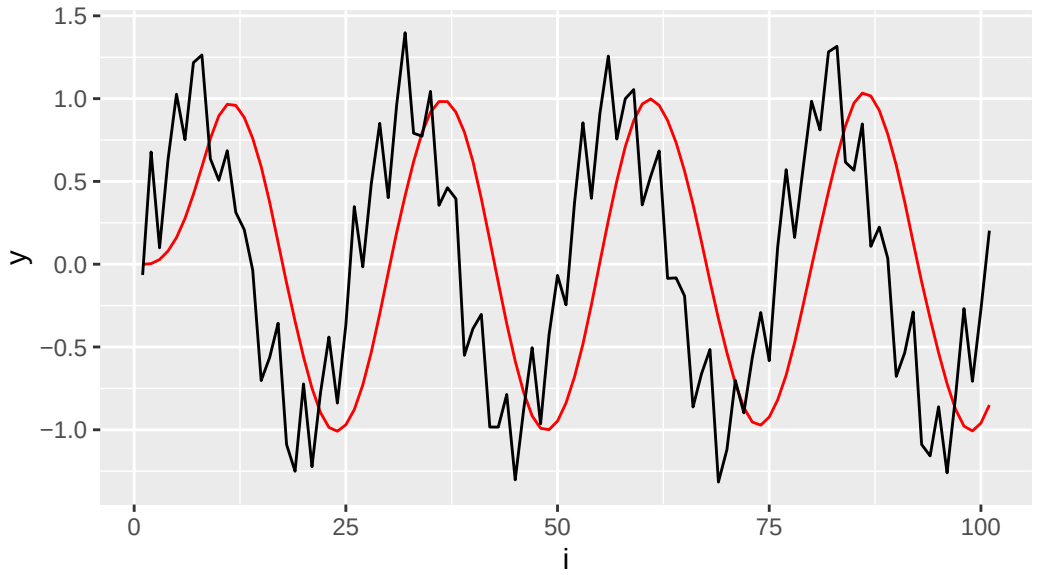


Figure 11: Segnale di riferimento filtrato con la funzione `my_filter()`, usando `purrr`

Filtri IIR e FIR

Tra i filtri online c'è un'importante differenza, che classifica filtri *Infinite Impulse Response (IIR)* e filtri *Finite Impulse Response (FIR)*: considerando un impulso unitario:

$$y(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geqslant 0 \end{cases}$$

le due classi di filtri si comportano come segue:

- **IIR**: sono filtri con memoria infinita: il valore filtrato dell'impulso mantiene memoria di ogni osservazione precedente e quindi non si stabilizza mai a 1 (seppure avvicinandosi sempre più). Corrispondono a **filtri ARMA**, in cui la parte AR ha un numero di coefficienti maggiore di uno;
- **FIR**: sono filtri con memoria limitata: dopo un numero di osservazioni pari alla memoria del filtro il valore filtrato è uguale a 1. Corrispondono a **filtri MA** (che ha memoria **finita**), un cui manca la parte AR (che ha memoria **infinita**).

Osserviamo la risposta al gradino dello stesso filtro `flt` sopra definito:

```r
tibble(i=1:100, x=1) %>%
  mutate(xf = filter(flt, x)) %>%
  pivot_longer(-i, names_to = "signal") %>%
  ggplot(aes(x=i)) +
  geom_line(aes(y=value, color=signal))
```

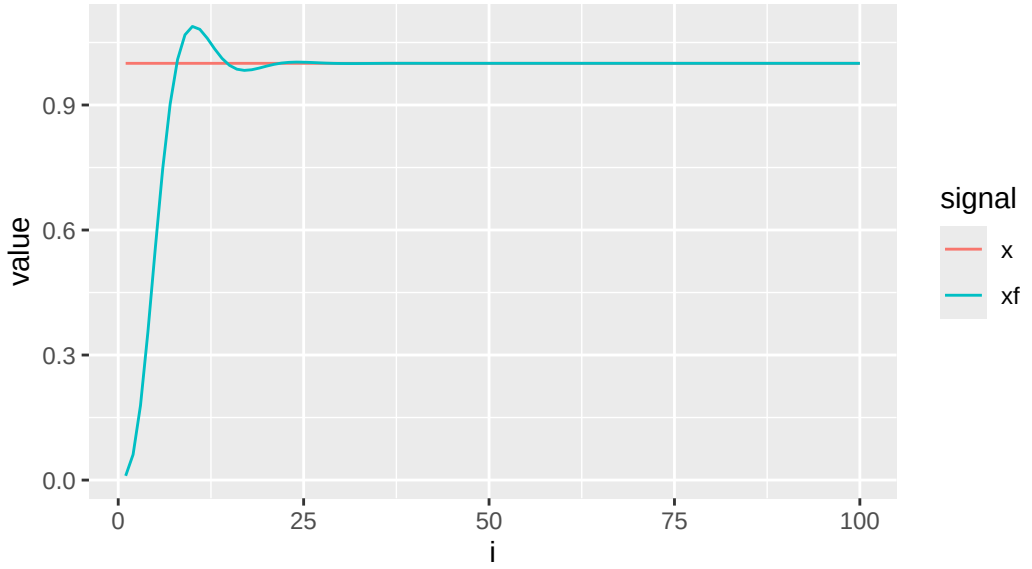


Figure 12: Risposta all'impulso di un filtro **IIR**

Se osserviamo un dettaglio della parte finale (`i>80`), possiamo verificare come in realtà il segnale filtrato non si stabilizzi mai a 1:

```r
tibble(i=1:100, x=1) %>%
  mutate(xf = filter(flt, x)) %>%
  dplyr::filter(i>80) %>%
  pivot_longer(-i, names_to = "signal") %>%
  ggplot(aes(x=i)) +
  geom_line(aes(y=value-1, color=signal)) +
  scale_y_continuous(
    n.breaks = 10,
    labels = scales::label_scientific(digits=6)
  )
```

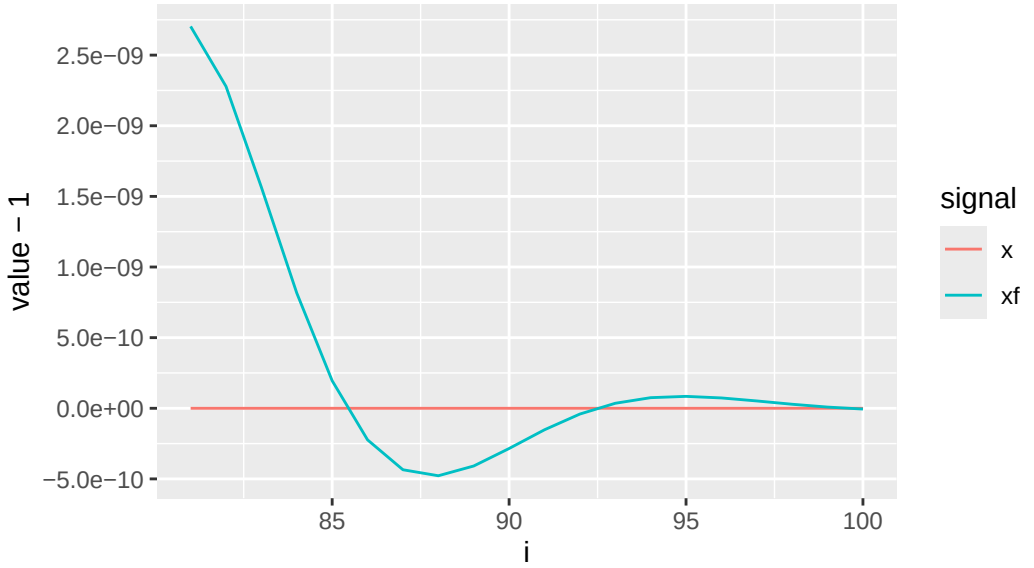


Figure 13: Risposta all'impulso di un filtro **IIR** (dettaglio)

Ora creiamo invece un filtro FIR di ordine 3, con la stessa frequenza di taglio, osservando come possa essere rappresentato da un modello MA con 4 termini (3+1):

```
(flt_fir <- fir1(3, w=ft))
```

```
[1] 0.04355854 0.45644146 0.45644146 0.04355854
attr(,"class")
[1] "Ma"
```

Le caratteristiche del filtro sono le seguenti:

```
freqz(flt_fir)
```

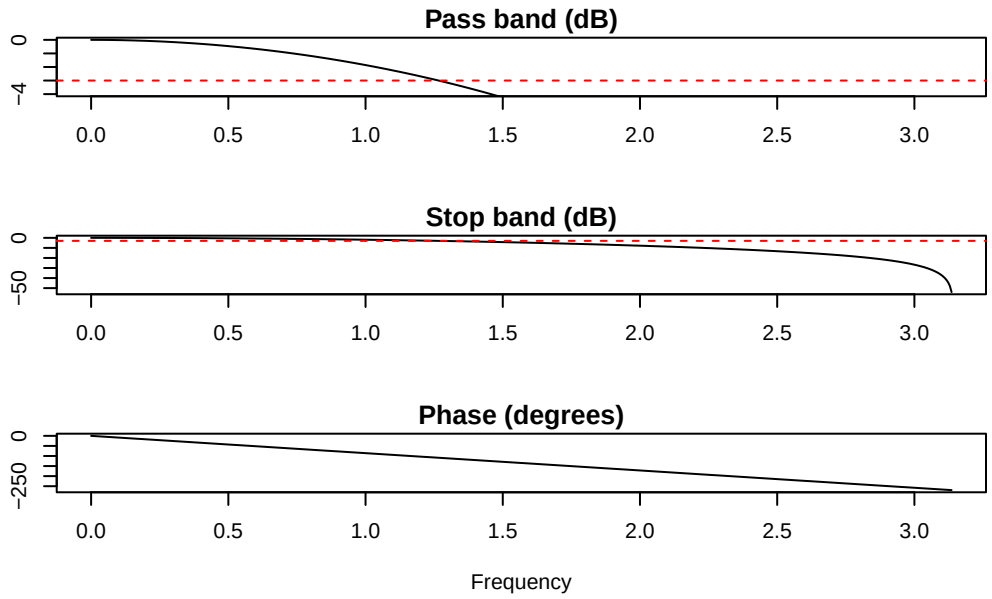


Figure 14: Caratteristiche di un filtro FIR di ordine 3

Si noti, in particolare, che la fase è lineare: ciò è un vantaggio perché può essere facilmente utilizzata per **compensare il ritardo**, come si vedrà più sotto.

La risposta al gradino è la seguente, notando che dopo tre osservazioni il filtro è identico al segnale:

```
tibble(i=1:100, x=1) %>%
  mutate(xf = filter(flt_fir, x)) %>%
  pivot_longer(-i, names_to = "signal") %>%
  ggplot(aes(x=i)) +
  geom_line(aes(y=value, color=signal))
```

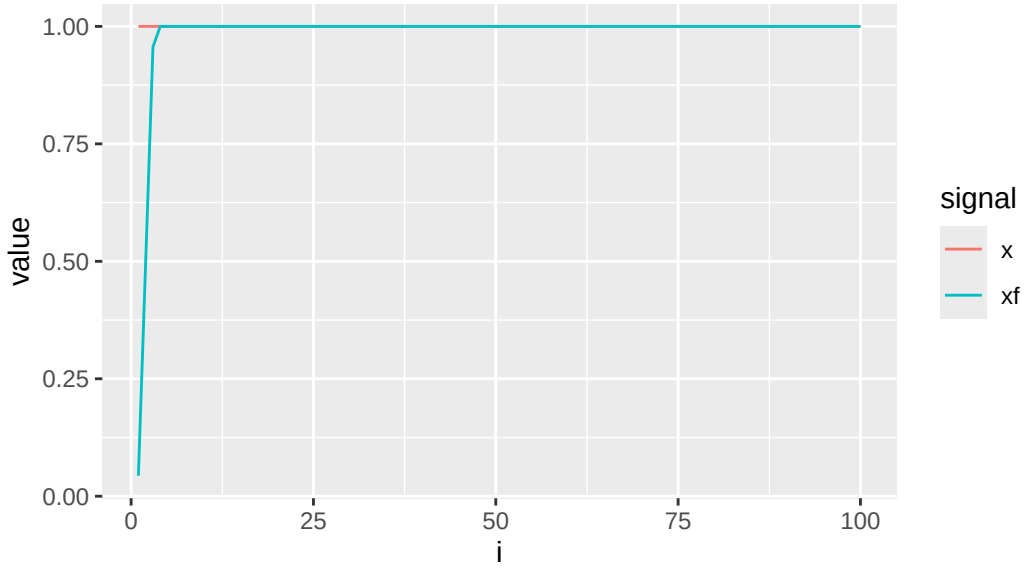


Figure 15: Risposta all'impulso di un filtro **FIR**

Vediamo come si comporta un filtro FIR sul segnale armonico di riferimento. Anzitutto notiamo come la caratteristica del filtro FIR sia meno aggressiva del filtro IIR a parità di banda e di ordine. Pertanto utilizziamo un filtro di ordine superiore:

```
flt_fir <- fir1(6, w=ft)
s %>%
  mutate(
    sflt = flt_fir %>% filter(yn)
  ) %>%
  select(t, `signal+noise`=yn, sine=s, filtered=sflt) %>%
  pivot_longer(-t) %>%
  ggplot(aes(x=t, y=value)) +
  geom_line(aes(color=name)) +
  labs(x="time (s)")
```

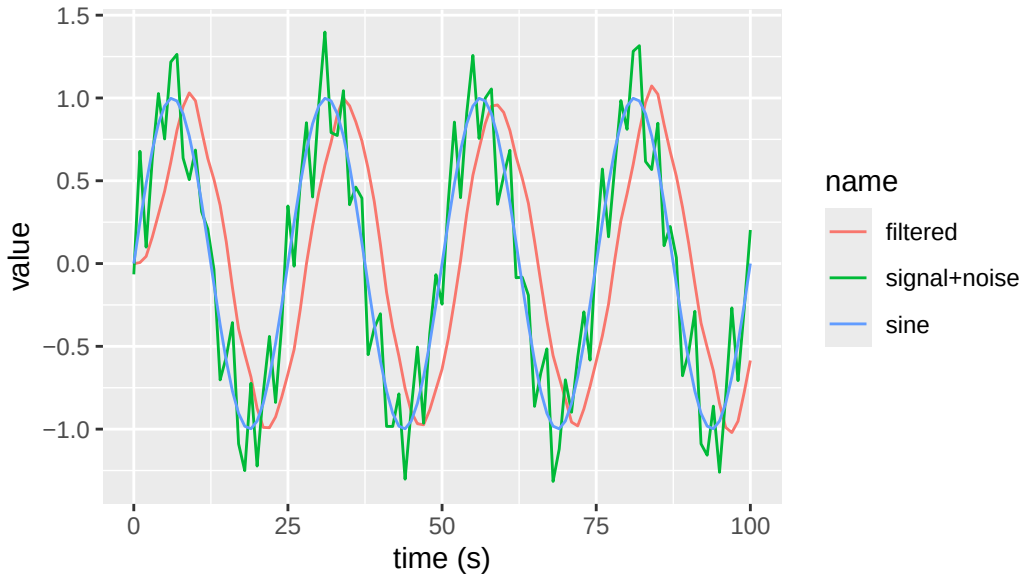


Figure 16: Segnale di riferimento filtrato con filtro FIR

Dato che il ritardo di fase è lineare, è facile compensarlo: la funzione `grpdelay()` valuta il ritardo, e la funzione `lead()` (cioè `lag()` per ritardi negativi) lo compensa:

```
flt_fir <- fir1(6, w=ft)
delay <- grpdelay(flt_fir)$gd %>% mean() %>% round() %>% as.integer()

s %>%
  mutate(
    sflt = flt_fir %>% filter(yn),
    sflt_nd = sflt %>% lead(delay)
  ) %>%
  select(t, `signal+noise`=yn, signal=s, `filtered nd`=sflt_nd) %>%
  pivot_longer(-t) %>%
  ggplot(aes(x=t, y=value)) +
  geom_line(aes(color=name)) +
  labs(x="time (s)")
```

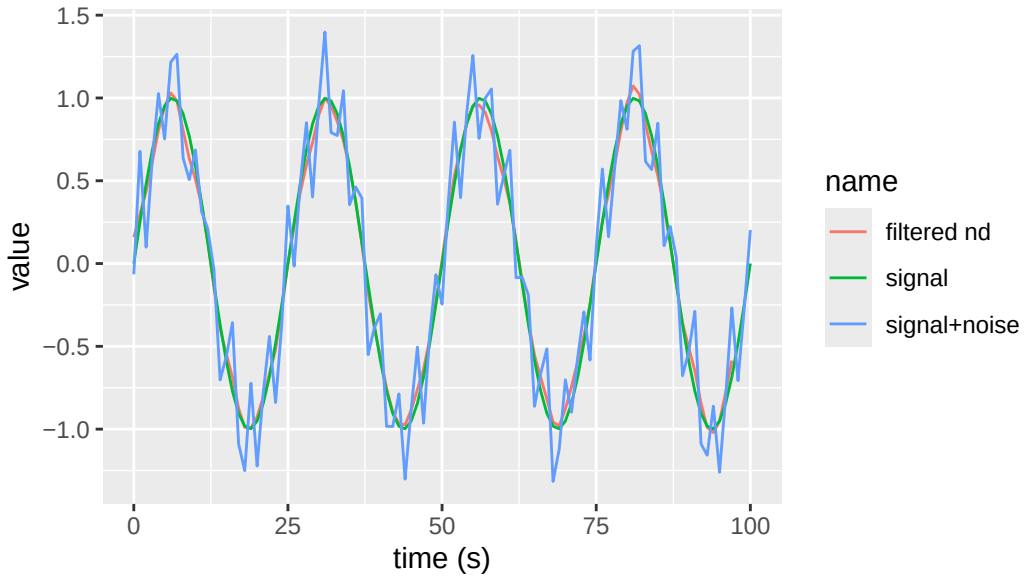


Figure 17: Segnale di riferimento filtrato con filtro FIR, ritardo compensato

Ovviamente, la compensazione del ritardo rende un filtro FIR **offline**: se così non fosse, ci consentirebbe di conoscere il futuro.

Stabilità

Come abbiamo visto un filtro può essere rappresentato come un processo ARMA. In quanto tale, può presentare problemi di stabilità. Un filtro è detto **stabile** se la sua risposta al gradino decade a zero indefinitamente, e viceversa.

Per verificare la stabilità di un filtro lo si converte in formato *zero-pole-gain*, un formato che rappresenta il filtro come radici dei polinomi al numeratore della funzione di trasferimento (*zeroes*) e come radici del polinomio al denominatore (*poles*):

```
# poles
1/(polyroot(flt$a)) %>% zapsmall() %>% rev()
```

```
[1] 0.5913983+0.0000000i 0.7061996+0.3362227i 0.7061996-0.3362227i
```

```
# zeroes
1/(polyroot(flt$b)) %>% zapsmall() %>% rev()
```

```
[1] -1+0i -1+0i -1+0i
```

Mediante `gsignal` è più semplice convertire il filtro in formato `Zpg`:

```
flt %>% as.Zpg()
```

```
$z
[1] -1.0000016-2.850647e-06i -1.0000016+2.850647e-06i -0.9999967+0.000000e+00i

$p
[1] 0.5913984+0.0000000i 0.7061996-0.3362227i 0.7061996+0.3362227i

$g
NULL

attr(,"class")
[1] "Zpg"
```

Un filtro è stabile quando tutti i poli sono all'interno del cerchio unitario sul piano immaginario:

```
circle <- function(r=1, x0=0, y0=0, n=100, phi = 0) {
  tibble(
    i = 0:n,
    theta = i * 2*pi / n,
    x = x0 + r*cos(theta + phi),
    y = y0 + r*sin(theta + phi)
  )
}

flt %>% as.Zpg() %>% {
  tibble(
    zr = Re(.$z),
    zi = Im(.$z),
    pr = Re(.$p),
    pi = Im(.$p)
  )} %>%
  ggplot() +
  geom_point(aes(x=zr, y=zi), shape=21) +
  geom_point(aes(x=pr, y=pi), shape=4) +
  geom_path(data=circle(), aes(x=x, y=y), color="red") +
  coord_equal() +
  labs(x="Real", y="Imaginary", title="Zero-Pole diagram")
```

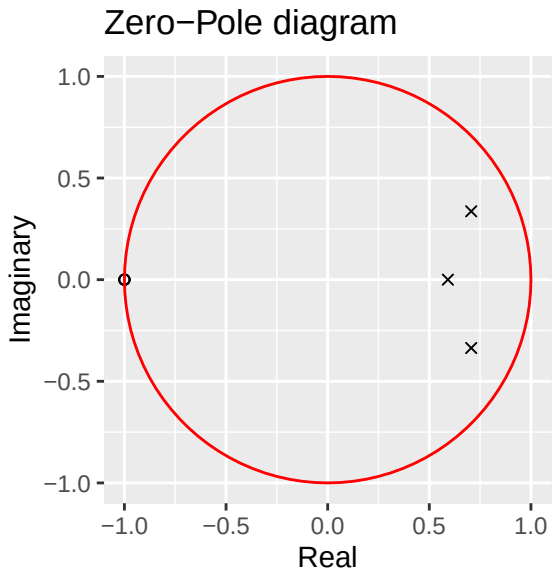


Figure 18: Grafico *zero-pole* per fil filtro IIR

Filtri offline

Se non è necessario applicare il filtro durante l'acquisizione ma si può farlo *ex-post*, è possibile ricorrere alla trasformata di Fourier. Il processo è il seguente:

1. Si calcola la FFT del segnale (**senza applicare una finestra**)
2. Si definisce una *funzione maschera* che, moltiplicata per lo spettro, riduca o annulli le bande di frequenza che si desidera attenuare
3. si calcola la **trasformata inversa** della trasformata moltiplicata per la maschera.

Vediamo ad esempio il caso di un segnale ottenuto da un elettrocardiogramma, con frequenza di 256 Hz per una durata di 10 s, disponibile nel data frame `gsignal::signals`:

```
signals %>%
  mutate(
    t = seq(0, 10, length.out=n()),
  ) %>%
  ggplot(aes(x=t, y=ecg)) +
  geom_line() +
  labs(color="segnale", x="tempo (s)", y="tensione (µV)")
```

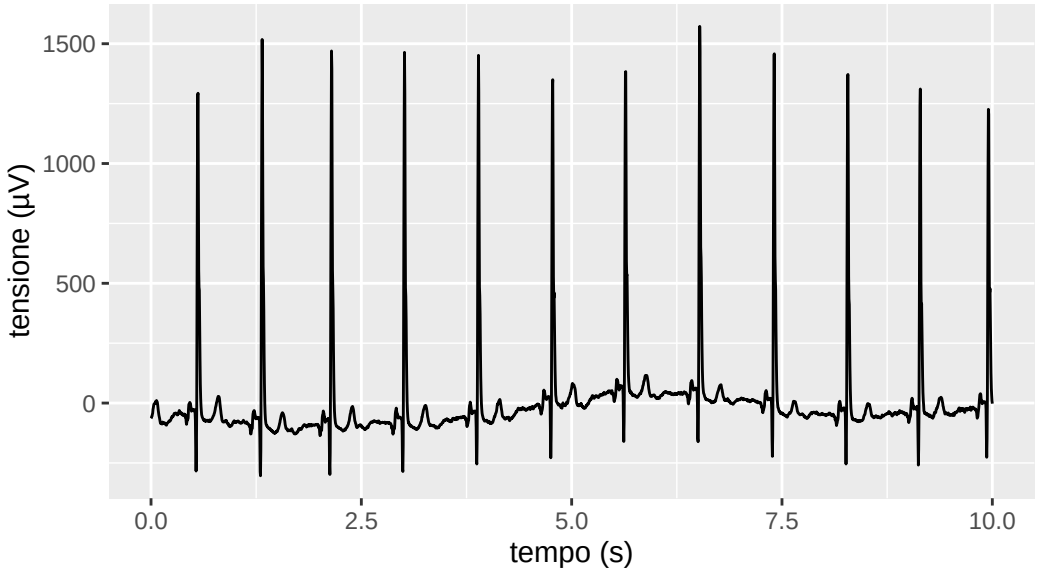


Figure 19: Segnale di elettrocardiogramma

Osserviamo il modulo della trasformata: decidiamo di filtrare le frequenze sopra 10 Hz.

```
signals %>%
  mutate(
    i = (1:n())-1,
    t = seq(0, 10, length.out=n()),
    f = i / max(t),
    fft = fft(ecg),
    intensity = Mod(fft) / n() * 2
  ) %>%
  ggplot(aes(x=f)) +
  geom_line(aes(y=intensity)) +
  scale_x_continuous(minor_breaks = scales::minor_breaks_n(11)) +
  labs(x="frequenza (Hz)", y="tensione (µV)")
```

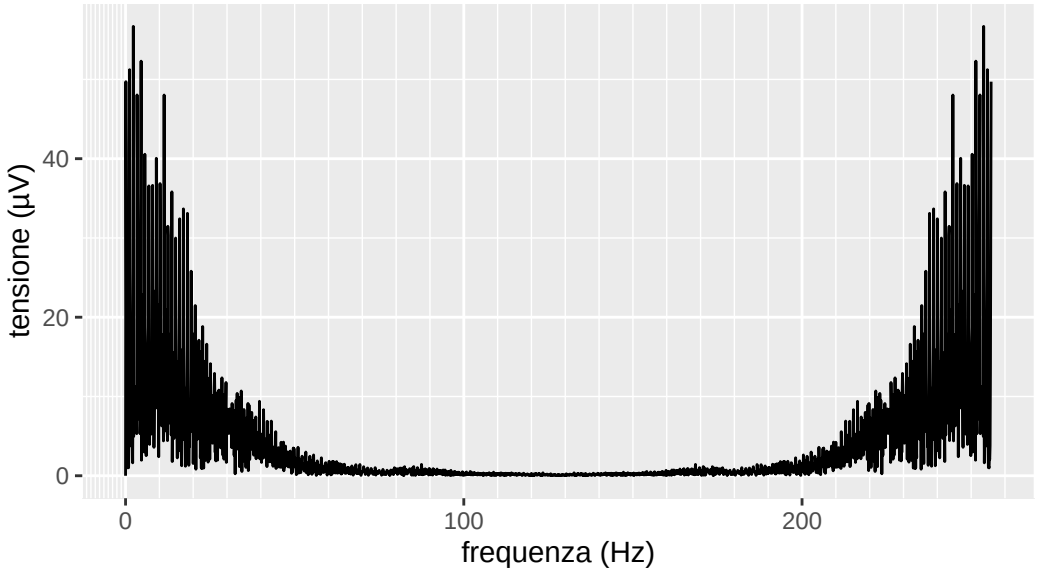


Figure 20: FFT del segnale ECG

Per farlo definiamo una funzione filtro mediante una gaussiana `dnorm()` (anche se potremmo usare altre funzioni a piacere, a seconda del risultato desiderato). Si noti che la funzione maschera deve essere **simmetrica attorno alla frequenza di Nyquist** come lo è la trasformata.

```
width <- 8
off <- 0
sig <- signals %>%
  mutate(
    i = (1:n())-1,
    t = seq(0, 10, length.out=n()),
    f = i / max(t),
    filter =
      (dnorm(f, mean=off, sd=width) + dnorm(f, mean=max(f)-off, sd=width)) /
      dnorm(0, mean=0, sd=width),
    fft = fft(ecg),
    fft_f = fft * filter,
    intensity = Mod(fft) / n() * 2,
    intensity_f = Mod(fft_f) / n() * 2,
    phase = Arg(fft)/pi*180
  )

sf <- 30
sig %>%
```

```
  ggplot(aes(x=f)) +
  geom_line(aes(y=intensity)) +
  geom_line(aes(y=filter*sf), color="red") +
  scale_x_continuous(minor_breaks = scales::minor_breaks_n(11)) +
  scale_y_continuous(
    sec.axis = sec_axis(~ . / sf, name = "filter")
  )+
  labs(x="frequenza (Hz)", y="tensione (µV)")
```

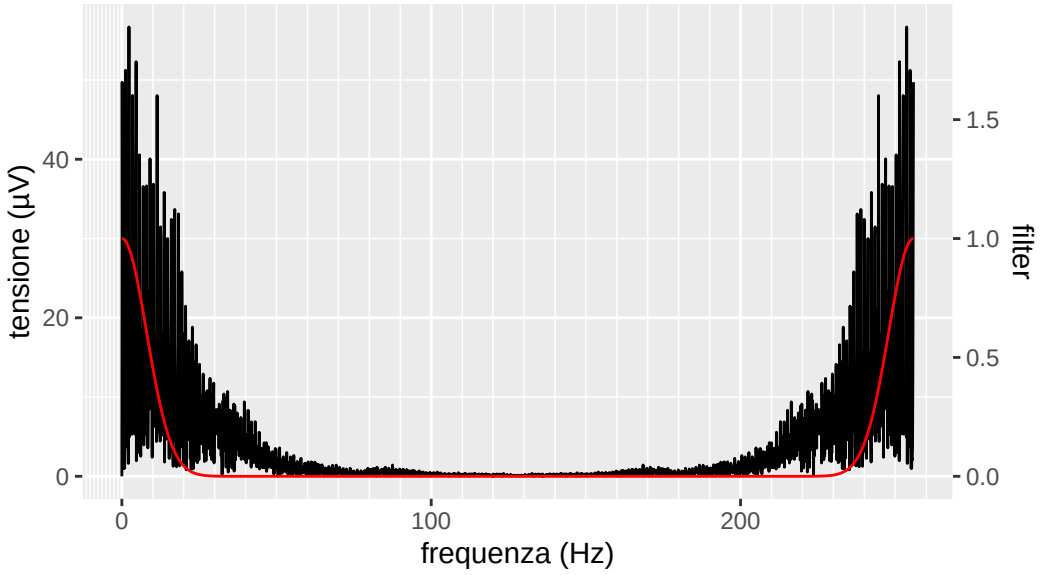


Figure 21: FFT del segnale ECG e funzione maschera (in rosso)

La funzione maschera è stata riscalata in modo da valere 1 al suo massimo. Inoltre, l'ultimo grafico riporta la maschera sul secondo asse verticale, per leggibilità.

La trasformata moltiplicata per la maschera risulta:

```
sig %>%
  ggplot(aes(x=f)) +
  geom_line(aes(y=intensity_f)) +
  geom_line(aes(y=filter*sf), color="red") +
  scale_x_continuous(minor_breaks = scales::minor_breaks_n(11)) +
  scale_y_continuous(
    sec.axis = sec_axis(~ . / sf, name = "filter")
  )+
  labs(x="frequenza (Hz)", y="tensione (µV)")
```

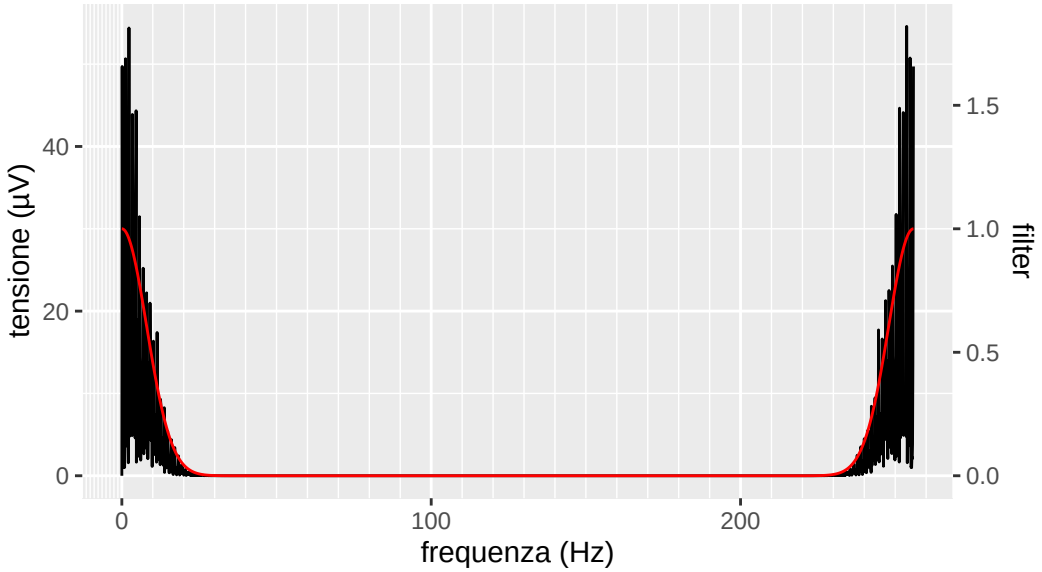


Figure 22: FFT del segnale ECG con applicata la funzione maschera

A questo punto possiamo anti-trasformare la trasformata mascherata, per ottenere il segnale filtrato e **privo di ritardo**:

```
sig %>%
  mutate(
    ecg_f = Re(ifft(fft_f))
  ) %>%
  select(t, ECG=ecg, `ECG (filt.)`=ecg_f) %>%
  pivot_longer(-t) %>%
  ggplot(aes(x=t)) +
  geom_line(aes(y=value, color=name)) +
  coord_cartesian(xlim=c(0,2), ylim=c(-200, 200)) +
  labs(color="segnale", x="tempo (s)", y="tensione (µV)")
```

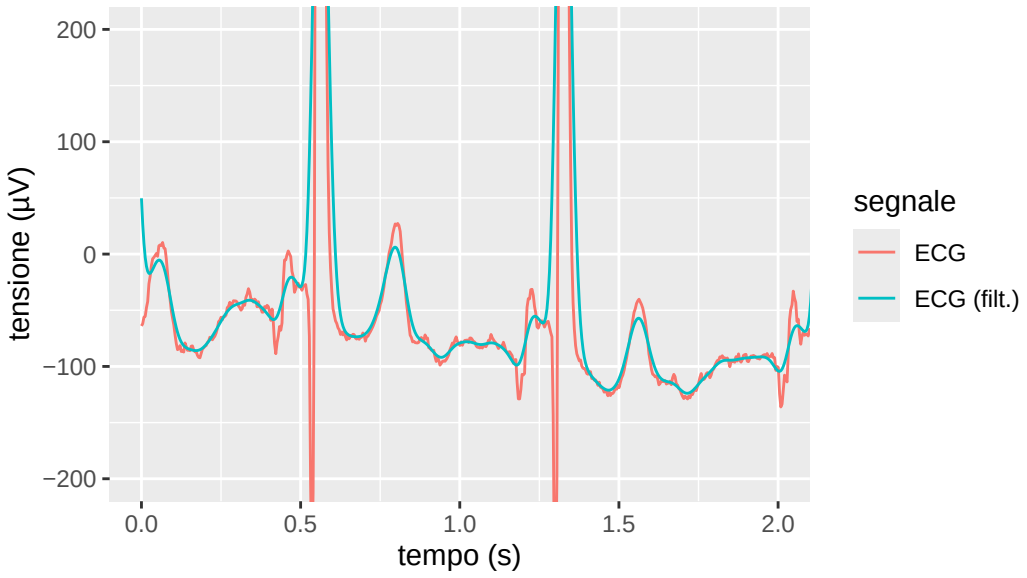


Figure 23: Segnale ECG filtrato (dettaglio)

Si noti che la anti-trasformata restituisce un segnale complesso, per cui è necessario scartare la parte immaginaria.

ESERCIZIO: cambiare i valori di `off` e `width` per osservare come modificando la maschera cambia il segnale filtrato.

Taratura dinamica

Termocoppia

Consideriamo il caso di una sonda PT100 immersa repentinamente in un bagno termostatato. La temperatura della sonda raggiunge quella del bagno secondo la legge:

$$T(t) = (T_i - T_f)e^{-\frac{t}{\tau}} + T_f \tag{2}$$

Sappiamo che $T_i = 33.4$ °C, $T_f = 95$ °C e stimiamo che l'immersione inizi a $t_0 = 50$ s.

```
ggplot(temp, aes(x=t, y=T)) +
  geom_line() +
  geom_line(aes(y=Tn), color="red", linewidth=1/3) +
  labs(x="tempo (s)", y="temperatura (°C)")
```

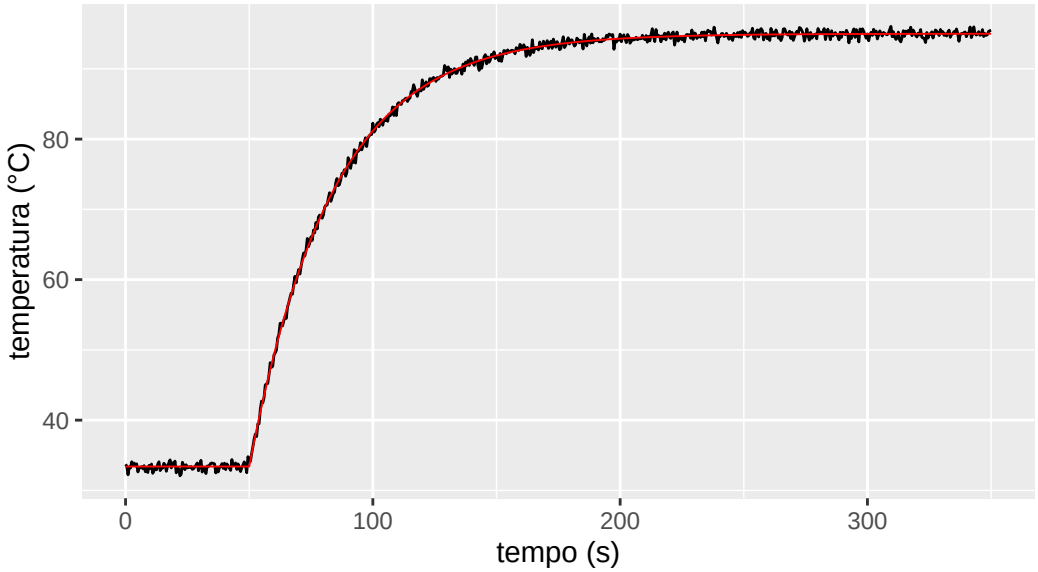


Figure 24: Acquisizione con termocoppia PT100. In rosso la nominale

Primo metodo: intercetta

Secondo la Equation 2, a $t = \tau$ si ha che $T(\tau) = (T_i - T_f)e^{-1} + T_f$, cioè:

$$\begin{aligned} T_f - T(\tau) &= (T_f - T_i)e^{-1} && (3)\\ &= (95 - 33.4) \cdot 0.368 && (4)\\ &= 61.6 \cdot 0.368 && (5)\\ &= 22.661 && (6) \end{aligned}$$

cioè $T(\tau) = 72.339$ °C. In grafico:

```
Ttau <- Tf - (Tf - Ti)*exp(-1)

ggplot(temp, aes(x=t, y=T)) +
  geom_line() +
  geom_hline(yintercept = Ttau, color="blue") +
  labs(x="tempo (s)", y="temperatura (°C)")
```

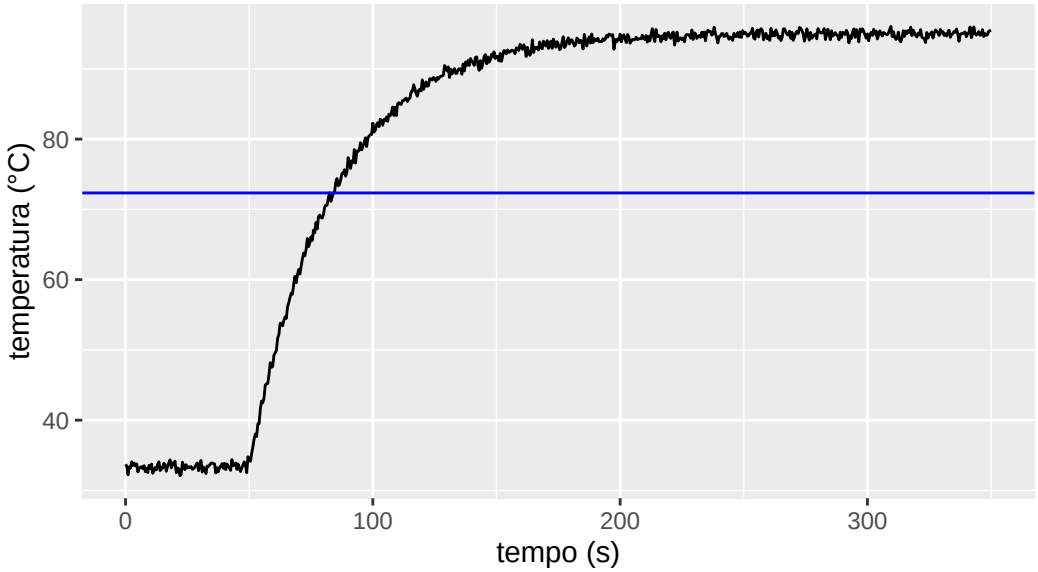


Figure 25: Identificazione della temperatura $T(\tau)$

Cioè risulta graficamente che τ è la distanza tra l'inizio del transitorio e l'intersezione con la linea blu. Sui dati:

```
temp %>%
  select(t, T) %>%           # solo le colonne t e T
  mutate(t = t - 50) %>%     # traslo i tempi all'inizio
  dplyr::filter(T<Ttau) %>% # solo i valori < Ttau
  slice_tail(n=1) %>%        # prendo solo l'ultima riga
  knitr::kable()
```

t	T
34	72.23968

Secondo metodo: linearizzazione

La Equation 2 può essere linearizzata così:

$$\frac{T(t) - T_f}{T_i - T_f} = e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{7}$$

$$\ln\left(\frac{T(t) - T_f}{T_i - T_f}\right) = \ln(e^{-\frac{t}{\tau}}) \tag{8}$$

$$\ln\left(\frac{T(t) - T_f}{T_i - T_f}\right) = -\frac{t}{\tau} \tag{9}$$

Posso riorganizzare i dati come segue:

```
temp.l <- temp %>%
  select(t, T) %>%
  mutate(t = t - 50) %>%
  dplyr::filter(t>0 & t < 100) %>%
  mutate(y = log((T-Tf)/(Ti - Tf))) %>%
  dplyr::filter(!is.nan(y))

temp.lm <- temp.l %>% lm(y~t-1, data=.)
temp.lm %>% summary()
```

```
Call:
lm(formula = y ~ t - 1, data = .)

Residuals:
      Min        1Q    Median        3Q       Max
-0.255386 -0.022350  0.003092  0.024430  0.304246

Coefficients:
    Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
t -2.981e-02  8.794e-05    -339   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.07153 on 198 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9983,    Adjusted R-squared:  0.9983
F-statistic: 1.149e+05 on 1 and 198 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

```
tau <- round(-1/temp.lm$coefficients, 1)
cat(paste("tau:", tau))
```

```
tau: 33.5
```

```
temp.l %>%
  ggplot(aes(x=t, y=y)) +
  geom_smooth(method="lm", formula = y~x-1) +
  geom_point(size=0.5) +
  labs(x="tempo (s)",
       y=latex2exp::TeX("$\\log_{10}(\\frac{T-T_f}{T_i-T_f})$ (T in °C)"))
```

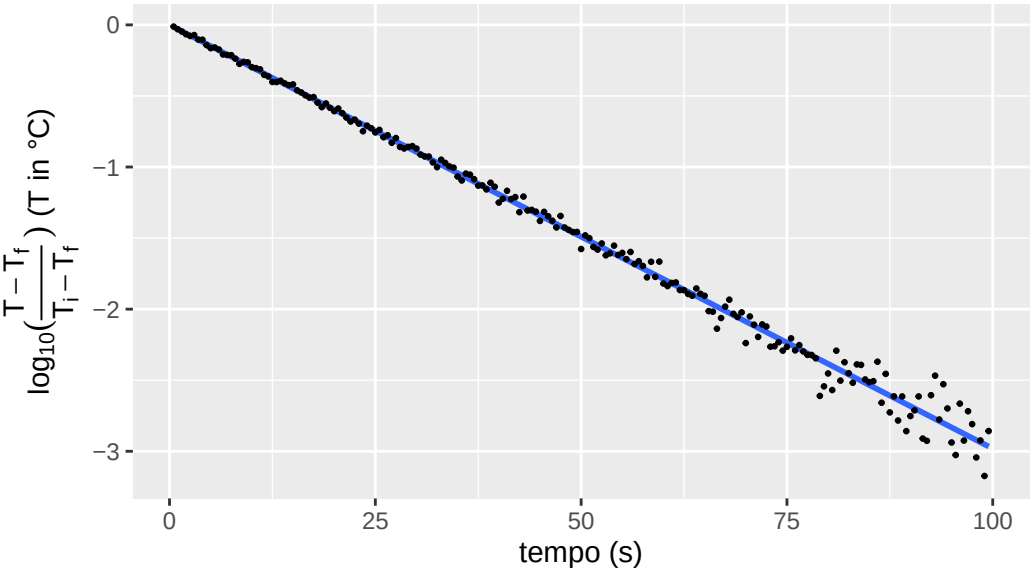


Figure 26: Regressione del modello dopo linearizzazione

Terzo metodo: regressione non-lineare

Con il terzo metodo si usa la regressione non-lineare ai minimi quadrati per ottenere direttamente tutti e tre i parametri T_i, T_f, τ:

```
temp.l <- temp %>%
  select(t, T) %>%
  mutate(t = t - 50) %>%
  dplyr::filter(t>0)

fit <- nls(T~(Ti - Tf)*exp(-t/tau) + Tf,
    data = temp.l,
    start = list(
```

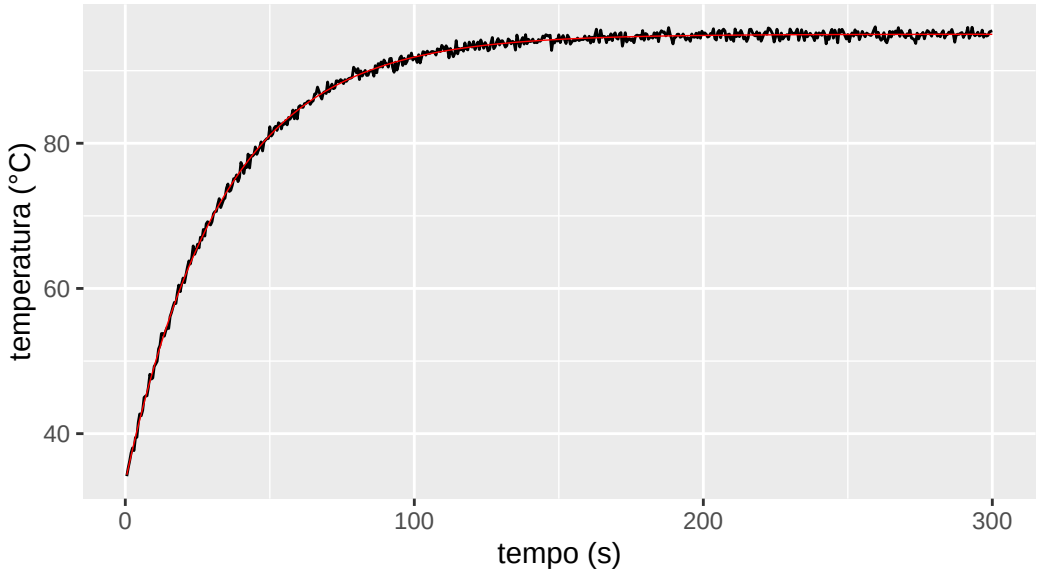
```
      Ti=30,
      Tf=100,
      tau=10
    ))

fit
```

```
Nonlinear regression model
  model: T ~ (Ti - Tf) * exp(-t/tau) + Tf
   data: temp.l
   Ti    Tf   tau
33.42 95.01 33.63
 residual sum-of-squares: 157.4

Number of iterations to convergence: 5
Achieved convergence tolerance: 2.517e-07
```

```
temp.l %>%
  modelr::add_predictions(fit, var="fit") %>%
  ggplot(aes(x=t, y=T)) +
  geom_line() +
  geom_line(aes(y=fit), color="red", linewidth=1/4) +
  labs(x="tempo (s)", y="temperatura (°C)")
```



Si notino i valori iniziali approssimativi passati per i tre parametri.

I vantaggi di questo terzo metodo sono:

- non è necessario stimare **soggettivamente** T_i e T_f, ma vengono identificati direttamente dalla regressione
- definendo il modello per parti (cioè costante per $t < t_i$), è possibile identificare anche t_i (lo si lascia per esercizio)
- mediante il metodo bootstrap è possibile ottenere gli intervalli di confidenza su tutti e tre i parametri (lo si lascia per esercizio)

Per contro, è computazionalmente più complesso, mentre il primo e al limite anche il secondo metodo possono essere applicati anche "a mano".

> **Esercizio**
>
> Definire una funzione piecewise costante fino a T_i e poi esponenziale e regredire tale funzione, identificando anche T_i

Considerazioni sulla relazione tra costante di tempo e funzione di trasferimento

> **Important**
>
> Mancano pagine 53-54.

Compensazione o misura dinamica

> **Important**
>
> Mancano pagine 55-58.

Determinazione Funzioni di Trasferimento mediante Parametri Concentrati ed Impedenze Generalizzate

> **!** Important
>
> Mancano pagine 66-81, ma i due esempi originariamente in tabella sono qui riportati per esteso nel capitolo seguente.

Funzioni di trasferimento

Di seguito, anziché utilizzare la funzione `gsignal::bodeplot()`, che usa la vecchia interfaccia per i grafici, utilizzeremo una funzione da noi definita, `ggbodeplot()`, basata su `ggplot2`. La definizione di questa funzione non è essenziale.

ggbodeplot function

```
library(control)
library(signal)

ggbodeplot <- function(tf, fmin=1, fmax=1e4, df=0.01) {
  # vector of points for each order of magnitude (OOM):
  pts <- 10^seq(0, 1, df) %>% tail(-1)
  # vector of OOMs:
  ooms <- 10^(floor(log10(fmin)):ceiling(log10(fmax)-1))
  # combine pts and ooms:
  freqs <- as.vector(pts %o% ooms)
  # warning: bode wants pulsation!
  bode(tf, freqs*2*pi) %>% {
    tibble(f=.$w/(2*pi), `magnitude (dB)`=.$mag, `phase (deg)`=.$phase)} %>%
    pivot_longer(-f) %>%
    ggplot(aes(x=f, y=value)) +
    geom_line() +
    scale_x_log10(
      minor_breaks=scales::minor_breaks_n(10),
      labels= ~ latex2exp::TeX(paste0("$10^{", log10(.), "}$"))) +
    facet_wrap(~name, nrow=2, scales="free") +
    labs(x="frequency (Hz)")
}
```

Esempio: sistema per isolamento da vibrazioni.

Con il metodo delle impedenze generalizzate si ottiene:

$$H(i\omega) = \frac{V_{\text{out}}(i\omega)}{V_{\text{in}}(i\omega)} = \frac{Ci\omega + K}{M(i\omega)^2 + Ci\omega + K} \tag{10}$$

La frequenza naturale del sistema è $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{M}}$, e l'attenuazione comincia a $\sqrt{2}f_0$.

Possiamo definire la funzione di trasferimento in Equation 10 con la funzione `control::tf()`, che prende come due argomenti due vettori con i coefficienti della Equation 10, in ordine decrescente di grado della variabile $i\omega$:

```
M <- 10
K <- 1000
C <- 50

# Frequenza naturale:
f0 <- 1/(2*pi) * sqrt(K/M)

tf(c(C, K),c(M, C, K)) %>%
  ggbodeplot(fmin=0.1, fmax=100) +
  geom_vline(xintercept=c(1, sqrt(2)) * f0, color="red", linetype=2) +
  labs(title=paste(
    "Natural frequency:", round(f0, 2), "Hz",
    " - Isolation: >", round(sqrt(2)*f0, 2), "Hz"))
```

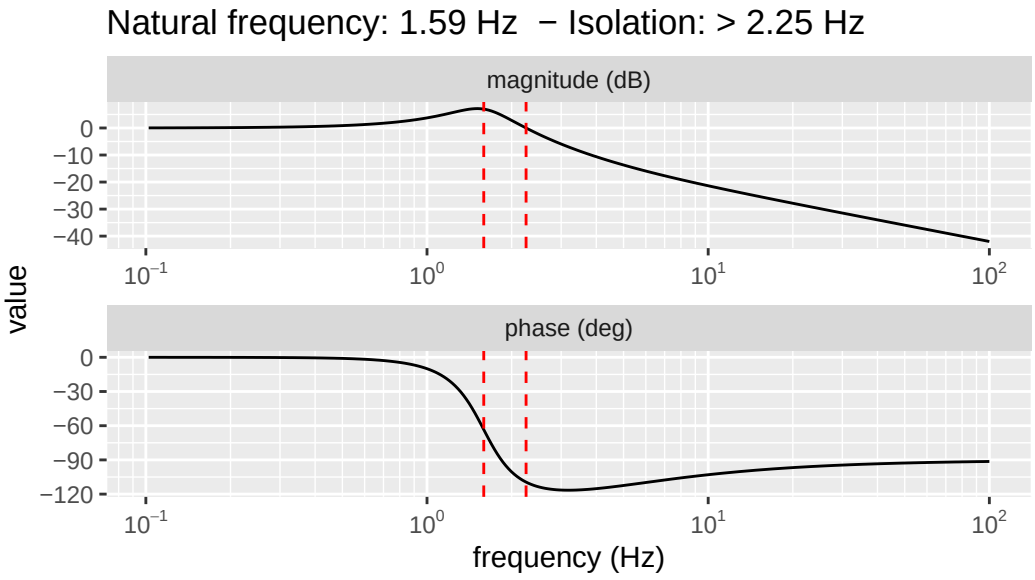


Figure 27: Bode plot per il sistema di isolamento da vibrazioni

Si noti che lo stesso risultato si ottiene a partire dalle equazioni della dinamica del sistema, effettuando la trasformata di Laplace $\mathcal{L}$:

$$M\ddot{y} + C\dot{y} + Ky = C\dot{x} + Kx \tag{11}$$

$$\downarrow \mathcal{L}\left(\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}\right) = s^n X(s) \tag{12}$$

$$Ms^2Y(s) + CsY(s) + KY(s) = CsX(s) + KX(s) \tag{13}$$

dalla quale otteniamo l'espressione per la funzione di trasferimento:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Cs + K}{Ms^2 + Cs + K}$$

che corrisponde alla Equation 10 a meno della sostituzione $s = i\omega$.

Esempio: accoppiamento rotativo motore-carico.

Con il metodo delle impedenze generalizzate si ottiene:

$$H(i\omega) = \frac{1}{I_c(i\omega)^2 + Ci\omega + K} = \frac{1}{I_c/K(i\omega)^2 + C/Ki\omega + 1}$$

La frequenza naturale può essere ottenuta con la funzione `control::damp()`, campo `omega`:

```
Ic <-  10e-3
K <-  5000
C <-  1

H <- tf(1,c(Ic/K, C/K, 1))
H.d <- damp(H, doPrint=FALSE)

H %>%
  ggbodeplot(fmin=10, fmax=1e4) +
  geom_vline(xintercept=c(1, sqrt(2)) * H.d$omega[1]/(2*pi), color="red", linetype=2) +
  labs(title=paste(
    "Natural frequency:", round(f0, 2), "Hz",
    " - Isolation: >", round(sqrt(2)*f0, 2), "Hz"))
```

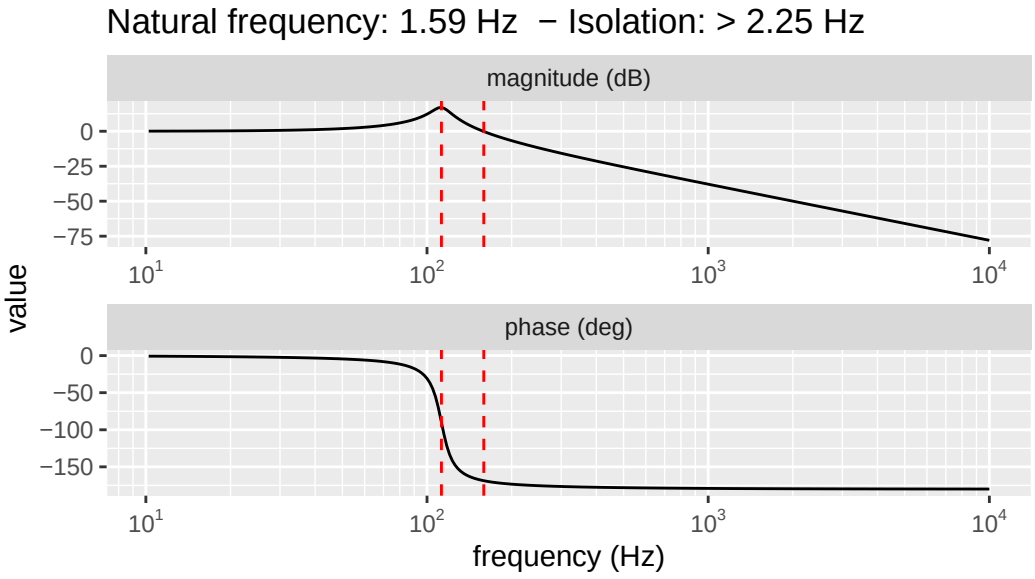


Figure 28: Bode plot per l'accoppiamento rotativo