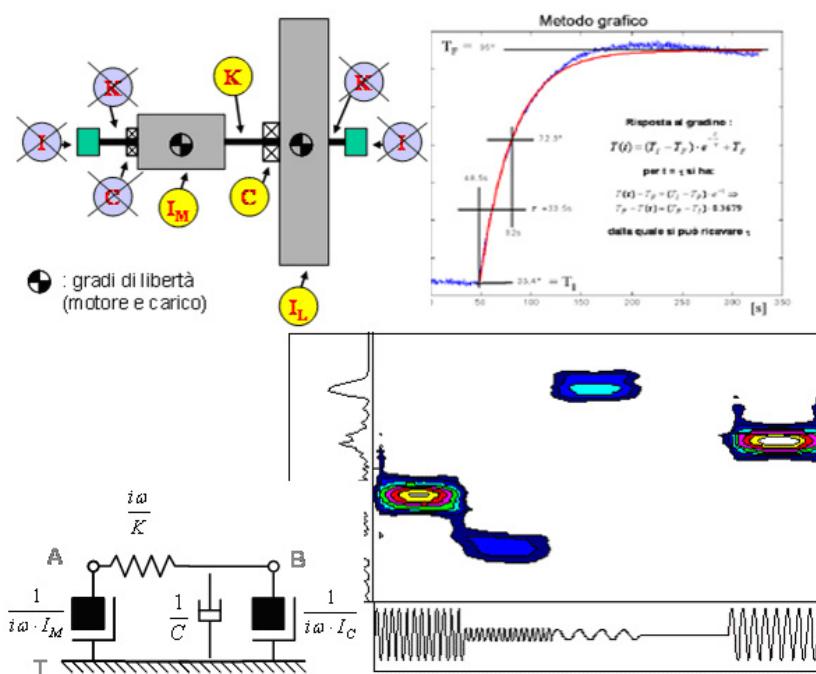


*Università di Trento*

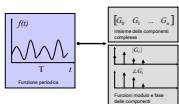
## APPUNTI DI MISURE MECCANICHE IN REGIME DINAMICO



**Mariolino De Cecco**

<https://latex.codecogs.com/eqneditor/editor.php>

Appunti per le lezioni dei corsi di “Misure Industriali Mod II e Misure, sensori ed elaborazione dei segnali“



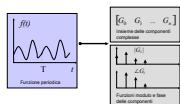
## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 2

### Indice

1.Trasformata di Fourier .....	2
1.1.Segnali tempovarianti, segnali discreti, vettori .....	2
1.2.Scomposizione di un vettore su di una base di versori orto-normali.....	3
1.3.Scomposizione di un segnale tempovariante su di una base di funzioni orto-normali.....	5
Definizione di prodotto scalare tra funzioni continue e discrete .....	5
Esempio Matlab.....	6
1.4.Alcune proprietà della trasformata di Fourier .....	17
1.5.Dimostrazione di alcune proprietà.....	18
2.Funzioni di Trasferimento .....	20
2.1.Trasformazione di un'equazione differenziale in un'equazione algebrica .....	20
2.2.Funzione di trasferimento Sinusoidale .....	22
2.2.1.Rappresentazione dello spettro di segnali campionati.....	26
2.2.2.Tabella Riassuntiva .....	32
2.3.Impiego della Funzione di trasferimento per il Filtraggio .....	33
Esempio di riduzione del rumore in alta frequenza su di un segnale di temperatura .....	34
Filtraggio Online (o in Tempo Reale).....	35
Generazione del segnale e rappresentazione del suo spettro .....	38
Filtraggio online .....	40
Filtraggio offline: manipolazione diretta dello spettro .....	41
3.Impiego della Funzione di trasferimento per la caratterizzazione di strumenti di misura - Taratura Dinamica .....	44
3.1.Tecniche nel dominio della frequenza .....	45
3.1.1.Mediante ingressi armonici variabili in frequenza .....	45
3.1.2.Mediante rapporto tra le trasformate .....	47
3.2.Tecniche nel dominio del tempo .....	50
3.2.1.Mediante ingressi canonici e modello matematico .....	50
3.3.Considerazioni sulla relazione tra costante di tempo e funzione di trasferimento .....	54
4.Compensazione (o Misura) Dinamica .....	56
4.1.Effetto dei disturbi interferenti .....	58
4.2.Misura o compensazione dinamica in tempo reale .....	59
5.Funzioni di Trasferimento, Parametri concentrati ed Impedenze Generalizzate .....	60

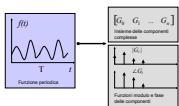


## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 3

5.1.Modellazione a Parametri Concentrati .....	60
5.2.Le Impedenze Generalizzate.....	63
5.3.Procedura per la determinazione della rete equivalente .....	66
5.3.1.Esempio di sistema per l'isolamento dalle vibrazioni.....	66
5.3.2.Esempio a tre gradi di libertà .....	69
5.3.3.Esempio di accoppiamento rotativo motore-carico.....	71
Bibliografia.....	75



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 1

### Introduzione

Nella scienza delle misure stanno esplodendo due settori apparentemente non collegati: sensori al silicio, derivanti dalle tecnologie consolidate dei *micro-chip*, stanno soppiantando i tradizionali sensori (nonostante questi ultimi possiedano qualità metrologiche nettamente superiori); nuovi strumenti di elaborazione dati (PC, DSP, processori, micro-controllori, etc), sempre più potenti ed economici, stanno promuovendo l’impiego di algoritmi sempre più complessi (reti neurali, *fuzzy sets*, *wavelets*, etc). Si pensi ai moderni smartphone che contengono diversi sensori (una IMU, Inertial Measurement Unit che contiene accelerometri e giroscopi per la misura del moto, videocamere ed in alcuni casi anche telecamere a tempo di volo per la misura in 3 dimensioni) ed un processore estremamente potente a bordo.

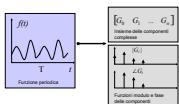
I due aspetti, oltre che essere legati allo stesso fenomeno tecnologico, sono concorrenti nello stimolare il seguente approccio: utilizzare sensori di bassa qualità accoppiati a sistemi di acquisizione ed elaborazione complessa dei dati. In altre parole, le necessità di mercato stanno spingendo verso la ricerca di sensori che sfruttino le tecnologie consolidate della lavorazione del silicio che forniscono il duplice vantaggio della produzione in larga scala e quindi basso costo e quello della estrema miniaturizzazione ed integrazione con l’elettronica di condizionamento ed elaborazione segnali che consentono di impiegare algoritmi avanzati capaci di ottenere un’accuratezza adeguata anche da misure effettuate tramite sensori di bassa qualità.

Si potrebbe citare la tecnologia dei sistemi embedded che, in maniera pervasiva, occupa gli spazi di vita quotidiana (con reti di sistemi di sorveglianza, sensori distribuiti per la domotica, etc) o industriale (reti di sensori per l’ottimizzazione della produzione e la diagnostica del processo produttivo giusto per citare alcuni esempi).

Si potrebbe aggiungere l’enorme sviluppo dell’intelligenza artificiale che si basa sulla raccolta dati, ovvero segnali generalmente variabili nel tempo.

Non da ultimo è da considerare che per le applicazioni in ambito ingegneria meccatronica si ha a che fare con sistemi autonomi di cui si vuole controllare un certo numero di stati. A tale scopo è fondamentale la misura di tali stati che, se incogniti, ovviamente non sarebbero controllabili. Ebbene in ambito automatico gli stati sono associati a parametri di misura tempovarianti da cui occorre estrapolare delle informazioni tramite elaborazione di segnali tempovarianti.

In altre parole, l'**elaborazione dei segnali** acquisiti tramite reti di sensori distribuiti o da un sistema robotico, richiedono ad un ingegnere meccatronico la capacità di elaborarli. Questo per diversi scopi quali sintetizzare una variabile da controllare, ottenere informazioni legate alla diagnostica delle macchine o semplicemente per ridurre il rumore sovrapposto al segnale.



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 2

L'obiettivo di questa dispensa è quello di fornire i rudimenti essenziali per il “signal processing” che comprendono l’elaborazione nel dominio della frequenza tramite **Trasformata di Fourier**, il concetto e la stima tramite **Taratura Dinamica** della **Funzione di Trasferimento**, la **Modellazione a Parametri Concentrati** dei sistemi meccanici e conseguente estrapolazione delle **Impedenze Generalizzate** che consentono di costruire reti analoghe a quelle elettriche per la stima delle relazioni dinamiche che intervengono nei diversi punti del meccanismo.

### 1. Trasformata di Fourier

La trasformata di Fourier trasforma il segnale dal dominio del tempo al dominio della frequenza. In altre parole una funzione del tempo viene rappresentata, tramite opportuni coefficienti, in una funzione della frequenza evidenziando quali componenti armoniche compaiono nel segnale.

Vi sono proprietà della trasformata di Fourier che ricorrono in altre trasformate quali la WT e la STFT (denominata anche trasformata di Gabor) e che sono essenziali per l’interpretazione dei risultati della trasformazione e di eventuali operazioni in frequenza quali filtri. Tali concetti sono la scomposizione di una funzione secondo una base di funzioni ortonormali e la reversibilità della trasformata.

#### 1.1. Segnali tempovarianti, segnali discreti, vettori

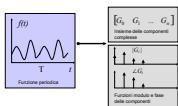
Un **segnale funzione del tempo**  $s(t)$  rappresenta un segnale reale che varia in funzione del tempo senza soluzione di continuità.

Un **segnale discreto** è un segnale campionato e quantizzato. Dunque rappresentabile tramite un **vettore**  $s = [s(1) \ s(2) \ \dots \ s(N)]$ , dove  $n = 1 \dots N$  sono gli  $N$  campioni acquisiti ad una certa frequenza di campionamento  $f_c$ .

Come vedremo quindi vi sarà una differenza tra la Trasformata di Fourier di un segnale tempovariante da quella di un segnale discreto. La prima ha un carattere ed una utilità simbolica, potremmo dire di concetto. La seconda pratica poiché tutti i segnali che si elaborano mediante processori sono discreti.

Nei prossimi sotto-paragrafi passeremo:

- dalla scomposizione di un vettore su di una base di versori ortonormali
- alla scomposizione di un segnale tempovariante periodico su una base di segnali ortonormali
- alla scomposizione di un segnale tempovariante non periodico su una base di segnali ortonormali
- alla scomposizione di un segnale discreto (ovvero un vettore) su una base di segnali discreti ortonormali (altri vettori).



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 3

Tutto ciò per comprendere cosa rappresentano le componenti del segnale nel dominio della frequenza (sia esso continuo o discreto) e, tramite il concetto di Funzione di Trasferimento, implementare le elaborazioni che si possono condurre in tale dominio. Tutto ciò consentirà di capire come gli strumenti di misura di grandezze tempovarianti si comportano con il misurando in base alle caratteristiche dinamiche riassunte proprio dalla loro funzione di trasferimento.

### 1.2. Scomposizione di un vettore su di una base di versori orto-normali

Per comprendere il concetto di scomposizione di un segnale tempovariante si può pensare al parallelo vettoriale: un vettore nel piano può essere scomposto secondo due direzioni mutuamente ortogonali. In tale maniera si ottiene la scomposizione mediante la semplice relazione del prodotto scalare :

$$\underline{v} = \alpha \underline{e}_1 + \beta \underline{e}_2 \quad (1)$$

dove  $\underline{e}_1$  ed  $\underline{e}_2$  sono i versori delle direzioni mutuamente ortogonali ( $\underline{e}_1 \cdot \underline{e}_2 = 0$ ).

Grazie alla proprietà di ortogonalità della base posso scrivere infatti:

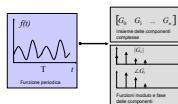
$$\begin{aligned} \alpha &= \underline{v} \cdot \underline{e}_1 = (\alpha \underline{e}_1 + \beta \underline{e}_2) \cdot \underline{e}_1 \\ \beta &= \underline{v} \cdot \underline{e}_2 \end{aligned} \quad (2)$$

che definisce l'operazione di scomposizione tramite la semplice operazione di prodotto scalare.

L'equazione 1 suggerisce di rappresentare il vettore in una maniera diversa, ovvero considerando le sole componenti lungo i due versori:

$$v = [\alpha, \beta] \quad (2')$$

tale rappresentazione consente di effettuare considerazioni sul vettore solamente tramite le sue **componenti** nelle direzioni della base ortogonale di vettori  $e_1$  ed  $e_2$ . Ovvero il vettore può essere ‘pensato’ come una ‘freccia’ nel piano oppure come insieme di componenti. Tale concetto è illustrato nella figura seguente.



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 4

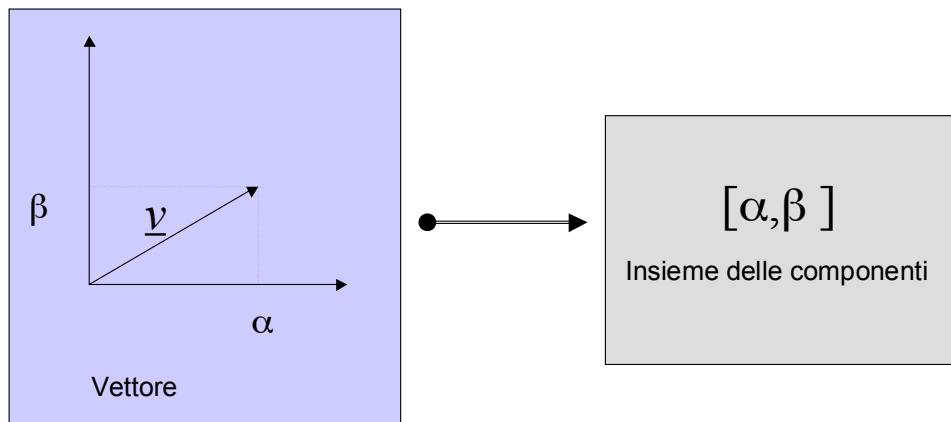


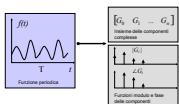
Fig. 2.1 Corrispondenza tra un vettore nel piano e l'insieme delle sue componenti lungo una coppia di versori ortogonali.

La relazione di egualanza espressa in equazione 1 garantisce la reversibilità, ovvero dati i parametri della trasformazione in componenti vettoriali lungo una coppia di direzioni ortogonali, è possibile risalire esattamente al vettore originario. Vedremo che non tutte le trasformazioni sono reversibili e che la reversibilità garantisce una corretta interpretazione delle operazioni effettuate nel dominio della trasformata. Introducendo ad esempio il concetto di filtro sulle componenti vettoriali come quell'operatore che fornisce la sola componente lungo  $e_1$ , si ottiene il valore del coefficiente  $\alpha$  che si sa essere esattamente corrispondente al vettore tolta la componente lungo l'altra direzione. Questa sembrerebbe una tautologia, ma, applicata alle trasformazioni di segnale, giustifica e fornisce la corretta interpretazione alle operazioni di manipolazione in frequenza quali il filtraggio: in una comune operazione di filtraggio passa-basso si ha la certezza di aver eliminato le componenti armoniche del segnale ad alta frequenza e di aver lasciato inalterate le rimanenti.

Dalla 1 e la 2 si ottiene:

$$\underline{v} = (\underline{v} \cdot \underline{e}_1) \cdot \underline{e}_1 + (\underline{v} \cdot \underline{e}_2) \cdot \underline{e}_2 \quad (3)$$

che riassume i concetti prima espressi.



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 5

### 1.3. Scomposizione di un segnale tempovariante su di una base di funzioni orto-normali

Per i segnali temporali vale un ragionamento analogo. Per semplicità considereremo lo sviluppo in serie invece della trasformata di Fourier in quanto da esso è poi possibile, tramite passaggio al limite, ricavare la formula della trasformata [1].

Una funzione periodica gode della proprietà che  $g(t) = g(t + nT)$  per ogni valore  $n$  intero.  $T$  è il periodo ed  $f_0 = 1/T$  è la frequenza fondamentale. Mentre  $\omega = 2\pi f$  è la pulsazione. Essa può essere scomposta in serie di Fourier:

Avendo un segnale  $s(t)$ , rappresentabile nel dominio del tempo, si può definire lo sviluppo di Fourier tramite la relazione invertibile:

$$g(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\omega_n t) \quad (4)$$

Dove  $\omega_n = 2\pi n f_0$ .

I coefficienti  $a_n$  e  $b_n$  vengono ricavati secondo le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T g(t) \cos(\omega_n t) dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T g(t) \sin(\omega_n t) dt \end{aligned} \quad (5)$$

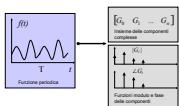
l'equazione 4 vuol dire scomporre la funzione  $g(t)$  secondo la base di funzioni **ortogonal**i armoniche.

### Definizione di prodotto scalare tra funzioni continue e discrete

Il prodotto scalare tra segnali/funzioni periodiche si definisce come:

$$g(t) \bullet f(t) = \frac{1}{T} \int_0^T g(t) \cdot f^*(t) \cdot dt \quad (6)$$

dove con  $f^*(t)$  si intende la funzione complessa coniugata di  $f(t)$  che, nel caso di funzioni reali, coincide con se stessa.



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 6

Le stesse funzioni digitalizzate  $g_k$  ed  $f_k$  consistono nei due vettori  $[g(1) \ g(2) \dots \ g(N)]$  e  $[f(1) \ f(2) \dots \ f(N)]$  e quindi si definisce **prodotto scalare tra i segnali digitalizzati**:

$$g_k \cdot f_k = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N g(i) \cdot f(i) = [g(1) \ g(2) \dots \ g(N)] \cdot [f(1) \ f(2) \dots \ f(N)]^T / N \quad (6')$$

Di seguito un esempio *matlab* di scomposizione di un'onda quadra su una base ortogonale e sua ricomposizione sulla stessa base. Poi scomposizione e ricomposizione secondo la serie di Fourier. Si noti che un'onda quadra che parte con fronte di salita esattamente con il primo campione risulta essere scomponibile solo mediante sinusoidi per cui dimenticheremo le componenti *coseno*.

### Esempio Matlab

% ONDA SINUSOIDALE:

```
f0 = 1;
fc = 1000;
Tm = 1;
t = 1/fc:(1/fc):Tm;
w0 = 2*pi*f0;
```

```
y1 = sin(w0*t);
figure(1), plot(t, y1), grid on, zoom on
```

```
N = length(t);
```

% ONDA QUADRA:

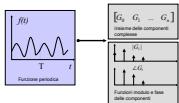
```
iin = find(y1 < 0);
OndaQuadra = ones(size(t));
OndaQuadra(iin) = -1;
figure(2), plot(t, y1, t, OndaQuadra), grid on, zoom on
ylim([-2 2]), legend('y1', 'OndaQuadra')
```

%% SCOMPONIAMO L'ONDA QUADRA IN K SINUSOIDI E  
RICOMPONIAMOLA

% Troviamo i coefficienti dell'onda quadra sulla base di K sinusoidi

```
K = 7;
```

```
comp = zeros(1, K);
```



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 7

```

for k = 1:K
    % calcolo componente del segnale lungo il segnale seno normalizzato
    comp(k) = ProdottoScalare(OndaQuadra, sin(w0*k*t)) / ...
        Norma(sin(w0*k*t));
end

```

% ricomponiamo il segnale con le K armoniche:

```

OndaQuadra_K = zeros(1, N);
for k = 1:K
    % sommo le componenti lungo i segnali seno normalizzati
    OndaQuadra_K = OndaQuadra_K + comp(k) * sin(w0*k*t) / ...
        Norma(sin(w0*k*t));
end

```

```

figure(3), plot(t, OndaQuadra, t, OndaQuadra_K), grid on, zoom on
ylim([-2 2]), legend('OndaQuadra', 'OndaQuadra ricomposta')

```

**%% SERIE DI FOURIER IN K SINUSOIDI**

```

comp = zeros(1, K);
for k = 1:K
    % calcolo coefficienti di Fourier
    comp(k) = ProdottoScalare(OndaQuadra, sin(w0*k*t)) / ...
        Norma(sin(w0*k*t)) ^ 2;
end

```

% ricomponiamo il segnale con le K armoniche:

```

OndaQuadra_K = zeros(1, N);
for k = 1:K
    % sommo le componenti di Fourier
    OndaQuadra_K = OndaQuadra_K + comp(k) * sin(w0*k*t);
end

```

```

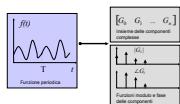
figure(4), plot(t, OndaQuadra, t, OndaQuadra_K), grid on, zoom on
ylim([-2 2]), legend('OndaQuadra', 'OndaQuadra ricomposta')

```

% Norma della funzione seno:

```
Norma(sin(w0*k*t))
```

% Norma della funzione seno^2:



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 8

$$\text{Norma}(\sin(w_0 * k * t))^2$$

% Dimostriamo che la base di funzioni seno è una base ortogonale

% (NON ortonormale in quanto non di norma unitaria)

% DA FARE: cambiare k1 e k2:

$$k1 = 1;$$

$$k2 = 1;$$

$$\text{ProdottoScalare}(\sin(w_0 * k1 * t), \sin(w_0 * k2 * t))$$

% Funzione prodotto scalare

```
function Prod = ProdottoScalare(A, B)
```

$$N = \text{length}(A);$$

$$\text{Prod} = A * B' / N;$$

end

% Funzione norma

```
function Norm = Norma(A)
```

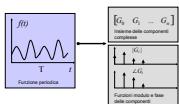
$$\text{Norm} = \sqrt{\text{ProdottoScalare}(A, A)};$$

end

In questo esempio **esercitarsi a:**

1. partite da  $K = 1$  ed incrementate di 1 alla volta. Cosa si nota?
2. Con  $f_0 = 1$ ; aumentate  $K$  fino a valori di alcune centinaia e poi vicino ai 500. Cosa succede? Esiste un numero  $K$  per cui il segnale ricomposto diviene pressoché perfettamente un'onda quadra?
3. Mostrare in un grafico i coefficienti in funzione della frequenza
4. Con  $f_0 = 4$ ; aumentate  $K$  fino ad ottenere un'onda quadra perfettamente ricomposta. Quanto vale  $K$ ? C'è qualche nesso con il teorema di Nyquist?
5. Aumentate ancora  $K$ , cosa succede? C'è, di nuovo, qualche nesso con il teorema di Nyquist? Che effetto sta subendo il segnale ricostruito?

Dall'esempio matlab in cui, per semplicità, ci siamo occupati di un caso in cui sono presenti solo componenti *seno* abbiamo compreso che lo sviluppo in serie di Fourier di un segnale tempovariante è dato dalla sommatoria pesata di componenti armoniche. Tali armoniche rappresentano una base di funzioni ortogonali ma non ortonormali.



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 9

Si ha infatti:

$$\sin(\omega_n t) \cdot \sin(\omega_n t) = \frac{1}{T} \int_0^T \sin(\omega_n t)^2 \cdot dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 - 2\cos(2\omega_n t)}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\cos(\omega_n t) \cdot \cos(\omega_n t) = \frac{1}{T} \int_0^T \cos(\omega_n t)^2 \cdot dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 + 2\cos(2\omega_n t)}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\cos(\omega_n t) \cdot \sin(\omega_n t) = \frac{1}{T} \int_0^T \cos(\omega_n t) \cdot \sin(\omega_n t) \cdot dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\sin(2\omega_n t)}{2} = 0$$

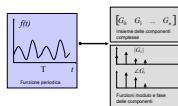
$$\cos(\omega_n t) \cdot \cos(\omega_k t) = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\cos(\omega_n t + \omega_k t) \cdot \cos(\omega_n t - \omega_k t)}{2} \cdot dt = 0 \quad n \neq k$$

$$\sin(\omega_n t) \cdot \sin(\omega_k t) = \dots = 0 \quad n \neq k$$

$$\sin(\omega_n t) \cdot \cos(\omega_k t) = \dots = 0 \quad n \neq k$$

Per ottenere una scomposizione corretta occorre introdurre al denominatore dei coefficienti il quadrato del modulo (delle componenti la base di funzioni) quindi 1/2 che, portato a numeratore, spiega il fattore 2 nelle equazioni 5.

Passiamo ora a come rappresentare le funzioni in maniera analoga a quanto facciamo con i vettori. L'equazione 4 suggerisce infatti la rappresentazione di figura 2.2, analoga a quella riportata in figura 2.1.



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 10

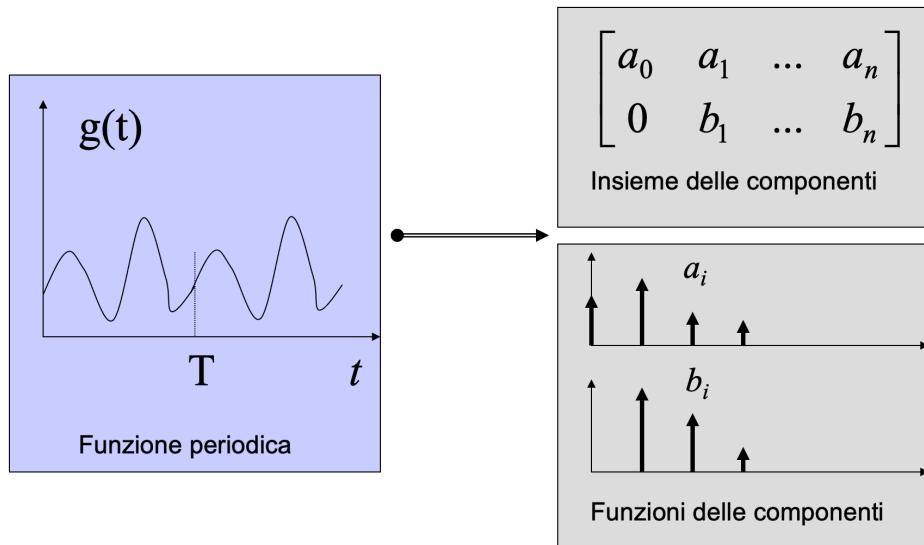


Fig. 2.2 Corrispondenza tra una funzione del tempo e l'insieme delle sue componenti secondo una base di funzioni ortonormali.

Secondo quanto rappresentato in figura 2.2 si potrebbe ragionare indifferentemente (grazie alla relazione di egualianza in equazione (4) sulla funzione del tempo oppure su due funzioni (discrete) che rappresentano le componenti della scomposizione secondo Fourier.

Esiste però una rappresentazione più significativa sia per l'analisi segnali che per la soluzione di equazioni differenziali associate a sistemi lineari. Per determinare tale rappresentazione è necessario elaborare l'equazione 4 impiegando la formula di Eulero, ovvero i **fasori**:

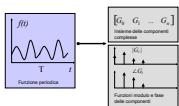
$$e^{i\omega_n t} = \cos(\omega_n t) + i \cdot \sin(\omega_n t)$$

che porta ad esprimere le funzioni armoniche seno e coseno come:

$$\cos(\omega_n t) = \frac{e^{i\omega_n t} + e^{-i\omega_n t}}{2}$$

$$\sin(\omega_n t) = \frac{e^{i\omega_n t} - e^{-i\omega_n t}}{2i}$$

le quali, sostituite nell'equazione 4, comportano:



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 11

$$g(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \frac{e^{i\omega_n t} + e^{-i\omega_n t}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \frac{e^{i\omega_n t} - e^{-i\omega_n t}}{2i}$$

$$g(t) = \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n) \cdot e^{i\omega_n t} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n) \cdot e^{-i\omega_n t}$$

dalla quale, ponendo:

$$G_0 = \frac{1}{2}a_0$$

$$G_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$$

$$G_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = G_n^*$$
(7')

si può scrivere:

$$g(t) = G_0 + \sum_{n=1}^{\infty} G_n \cdot e^{i\omega_n t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} G_n \cdot e^{i\omega_n t}$$

da cui, componendo i vari addendi, si ottiene:

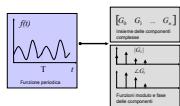
$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n \cdot e^{i\omega_n t}$$
(8)

Le componenti, ovvero quanto ognuna di tali funzioni pesa nella ricostruzione della funzione  $g(t)$  del tempo, si ricava in maniera analoga:

$$G_n = g(t) \cdot e^{i\omega_n t} = \frac{1}{T} \int_0^T g(t) \cdot (e^{i\omega_n t})^* dt = \frac{1}{T} \int_0^T g(t) \cdot e^{-i\omega_n t} dt$$
(9)

Tale rappresentazione complessa, anche definita **spettro del segnale**, ha il vantaggio di consentire un'immediata valutazione della risposta di un sistema regolato da equazioni differenziali lineari conoscendo le componenti  $G_n$  del segnale in ingresso. La dimostrazione di ciò verrà riportata tra breve nel paragrafo “Funzione di Trasferimento sinusoidale”.

In questo caso la base di funzioni è sia **ortogonale** come nel caso delle armoniche pure, ma anche **normale**:



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 12

$$e^{i\omega_n t} \cdot e^{i\omega_k t} = \frac{1}{T} \int_0^T e^{i\omega_n t} \cdot (e^{i\omega_k t})^* dt = \delta_{n,k}$$

dove  $\delta_{n,k}$  è il delta di Kroneker. Nel caso in cui  $n = k$  basta seguire i seguenti passaggi:

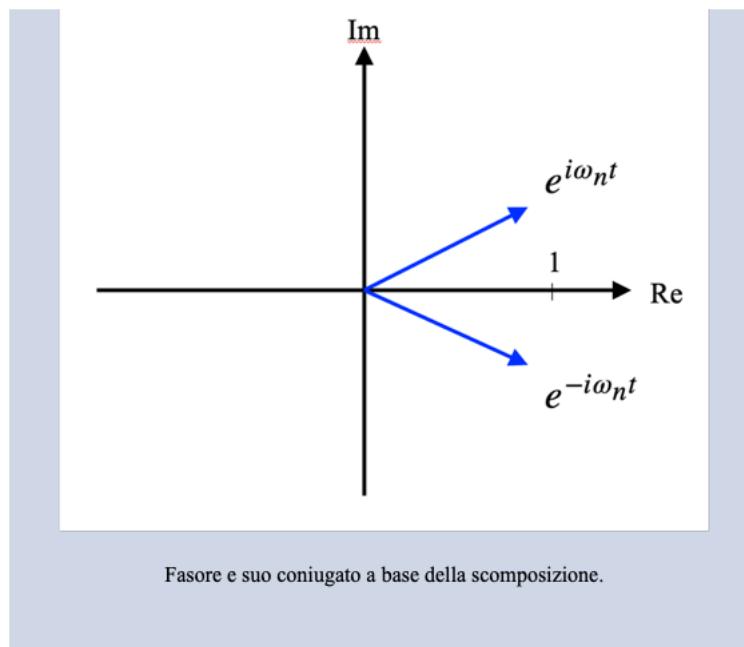
$$\begin{aligned} e^{i\omega_n t} \cdot e^{i\omega_n t} &= \frac{1}{T} \int_0^T e^{i\omega_n t} \cdot (e^{i\omega_n t})^* dt = \frac{1}{T} \int_0^T (\cos(\omega_n t) + i \sin(\omega_n t)) \cdot (\cos(\omega_n t) - i \sin(\omega_n t)) dt = \\ &\frac{1}{T} \int_0^T \cos(\omega_n t)^2 \cdot dt + \frac{1}{T} \int_0^T \sin(\omega_n t)^2 \cdot dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

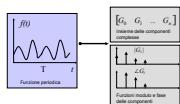
Nel caso in cui  $n \neq k$  la dimostrazione è banale se si considera l'ortogonalità delle funzioni armoniche.

E' opportuno anche notare come le **componenti  $G_{-n}$  e  $G_n$  danno vita a segnali armonici reali**. Si nota infatti che:

$$G_n \cdot e^{i\omega_n t} + G_{-n} \cdot e^{-i\omega_n t} = G_n \cdot e^{i\omega_n t} + G_n^* \cdot (e^{i\omega_n t})^* = G_n \cdot e^{i\omega_n t} + (G_n \cdot e^{i\omega_n t})^*$$

Che, andando a comporre graficamente i due fasori, fornisce la seguente rappresentazione ed il segnale corrispondente  $s_n(t) = 2 \cdot M_n \cdot \cos(\omega t + \phi_n)$ .

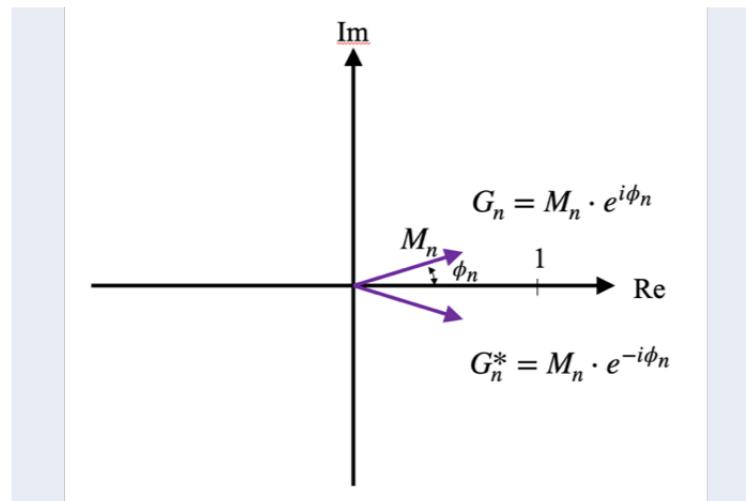




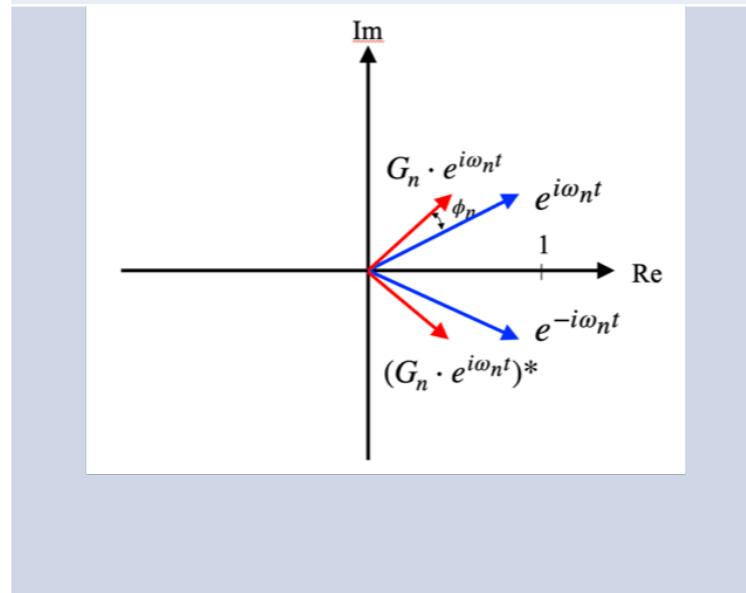
## Elaborazione e Misure in regime dinamico

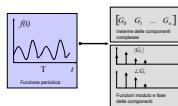
Data: 24/03/2024

Pagina: 13



Coefficiente dello sviluppo in serie di Fourier e suo coniugato.

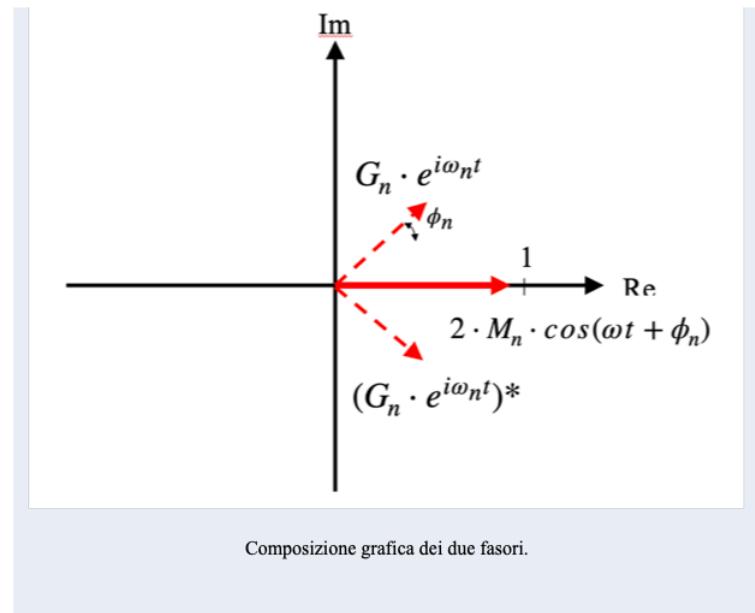




## Elaborazione e Misure in regime dinamico

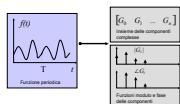
Data: 24/03/2024

Pagina: 14



La differenza tra l'espressione dell'equazione 4 e quella dell'equazione 8 è che nel primo caso si tratta di coefficienti  $a_n$  e  $b_n$  reali, nel secondo di coefficienti complessi di cui, come è schematizzato in figura 2.3, è possibile rappresentare le due funzioni modulo e fase in funzione della frequenza. Tali moduli e fasi, è facile convincersene tenendo conto dei passaggi che hanno condotto dalla formula 4 alla 11 e la rappresentazione dei fasori appena riportata, sono proprio i moduli e le fasi delle componenti armoniche che compongono il segnale  $s(t)$ .

Rappresentiamo di nuovo i segnali in maniera analoga a quanto facciamo con i vettori. L'equazione 9 suggerisce ora la rappresentazione di figura 2.3, analoga a quella riportate in figure 2.2 e 2.1.



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 15

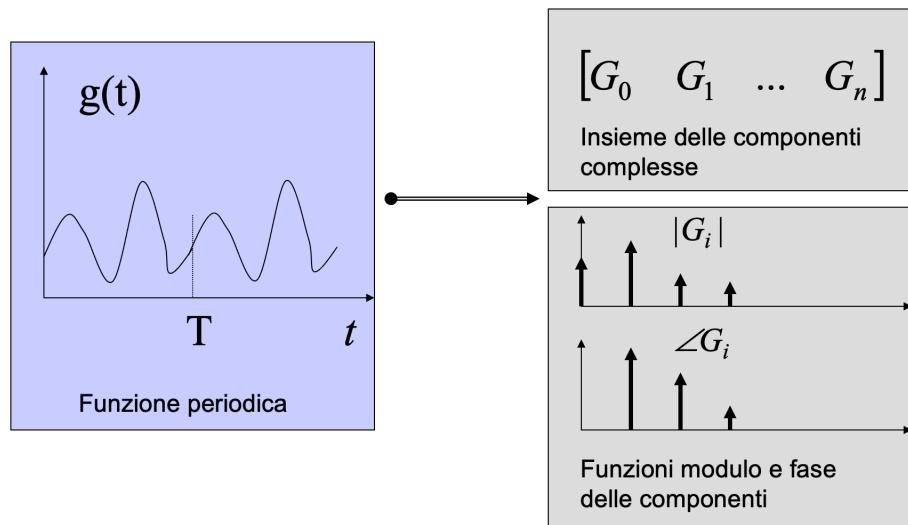


Fig. 2.3 Corrispondenza tra un segnale periodico e l'insieme delle componenti secondo una base di funzioni complesse ortonormali oppure con due funzioni discrete che rappresentano l'andamento dell'insieme dei coefficienti in modulo e fase.

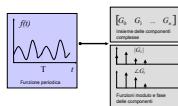
La proprietà della reversibilità, valida per l'egualianza espressa nell'equazione 4, permette di effettuare operazioni di manipolazione in frequenza, quindi di antitrasformare tornando nel dominio del tempo avendo la certezza di non aver introdotto ulteriori elaborazioni a causa della doppia trasformazione. Un classico esempio è l'operazione di filtraggio passa-basso su segnali aventi una componente additiva di rumore in alta frequenza. In tale caso l'operazione di filtraggio passa-basso assicura l'eliminazione delle sole componenti in alta frequenza ipotizzate appartenenti al rumore.

**Funzioni non periodiche possono essere immaginate come funzioni periodiche dal periodo  $T \rightarrow \infty$  e quindi la frequenza fondamentale  $f_0 \rightarrow 0$ .** Le scomposizioni di equazioni 8 e 9 assumono la forma definita come **Trasformata di Fourier**:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) \cdot e^{i\omega t} \cdot d\omega \quad (10)$$

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-i\omega t} dt \quad (11)$$

notare la convenzione impiegata per indicare la trasformata di una funzione  $g(t)$  con la lettera maiuscola, ovvero come  $G(\omega)$ .



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 16

Di seguito la **dimostrazione** delle equazioni 10 ed 11:

Se dall'equazione (9) definiamo:

$$A_n := T \cdot G_n = \int_0^T g(t) \cdot e^{-i\omega_n t} \cdot dt$$

Si noti che questo corrispondere semplicemente a modificare la definizione di prodotto scalare tra funzioni del tempo che da .

$$f(t) \cdot g(t) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot g(t)^* \cdot dt$$

Passa a:

$$f(t) \cdot g(t) = \int_0^T f(t) \cdot g(t)^* \cdot dt$$

Questo serve in quanto, dovendo tendere  $T \rightarrow \infty$  , si avrebbe uno 0 che moltiplica l'integrale. Questo viene quindi eliminato dalla definizione.

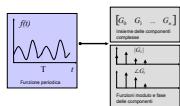
Ora facciamo tendere  $T \rightarrow \infty$  , si ottiene:

$$A_{f=\frac{n}{T}} = A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-i\omega_n t} \cdot dt$$

Questa corrisponde alla eq (11). In particolare, i coefficienti discreti  $A_n$  diventano una funzione continua della frequenza (o pulsazione) in quanto il passo tra frequenze successive diviene infinitesimo. Dunque, le **funzioni che rappresentano le componenti della scomposizione** (analoghe a quelle rappresentate in figura 2.3) non saranno più funzioni discrete, bensì continue in quanto **l'intervallo di spaziatura sulle ascisse (nel dominio della pulsazione) pari a  $2\pi/T$  tende a zero**.

Consideriamo ora l'equazione (8):

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n \cdot e^{i\omega_n t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A_n}{T} \cdot e^{i\omega_n t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \cdot e^{i\omega_n t} \cdot \frac{1}{T}$$



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 17

se facciamo tendere  $T \rightarrow \infty$   $A_N$  diviene una funzione continua della pulsazione  $A(\omega)$  per cui la sommatoria diviene un integrale ottenendo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \cdot e^{i\omega t} \cdot df = \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \cdot e^{i\omega t} \cdot \frac{2\pi}{2\pi} \cdot df = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \cdot e^{i\omega t} \cdot d\omega$$

che corrisponde all'equazione (10).

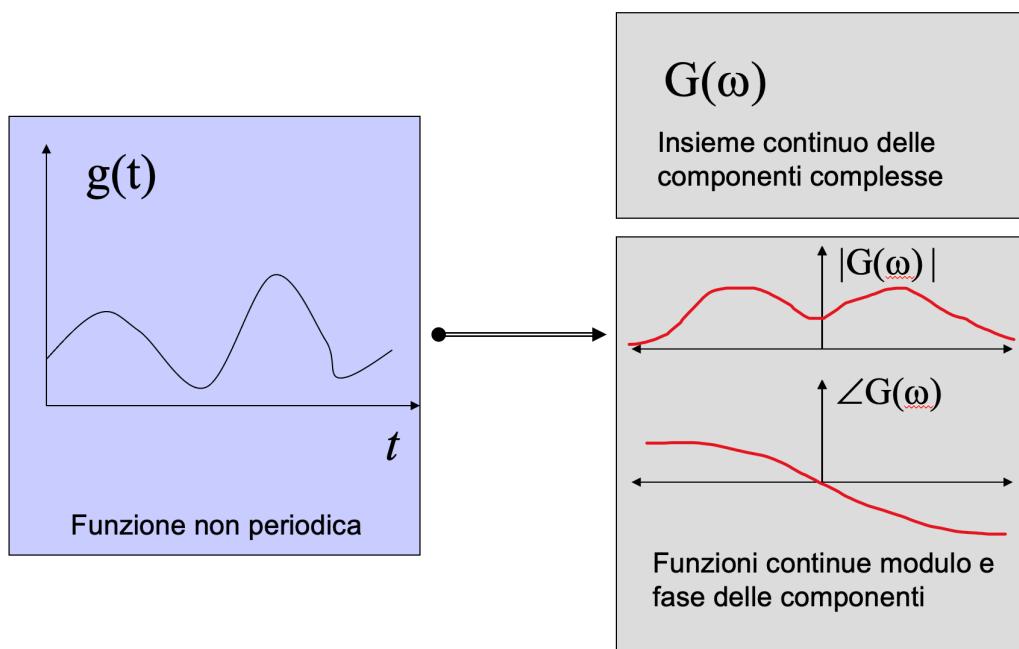
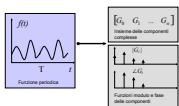


Fig. 2.3 Corrispondenza tra un segnale non periodico e l'insieme delle sue componenti secondo una base di funzioni complesse ortonormali oppure con due funzioni continue che rappresentano l'andamento dell'insieme dei coefficienti in modulo e fase.

### 1.4. Alcune proprietà della trasformata di Fourier

Proprietà	Relazione nel dominio del tempo e dello spettro
Linearità	$a \cdot x(t) + b \cdot y(t) \rightarrow a \cdot X(\omega) + b \cdot Y(\omega)$
Derivata	$\dot{x}(t) \rightarrow i\omega \cdot X(\omega)$
Integrale	$\int_0^{\xi} x(\xi) \cdot d\xi \rightarrow \frac{1}{i\omega} \cdot X(\omega)$



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 18

Proprietà	Relazione nel dominio del tempo e dello spettro
Variazione scala	$x(a \cdot t) \rightarrow \frac{1}{ a } \cdot X(\frac{\omega}{a})$
Anticipo/Ritardo	$x(t - \tau) \rightarrow X(\omega) \cdot e^{-i\omega\tau}$
Modulazione	$x(t) \cdot e^{-i\omega_o t} \rightarrow X(\omega - \omega_o)$
Convoluzione	$x(t) \otimes y(t) \rightarrow X(\omega) \cdot Y(\omega)$
Prodotto	$x(t) \cdot y(t) \rightarrow X(\omega) \otimes Y(\omega)$

### 1.5. Dimostrazione di alcune proprietà

LINEARITA':

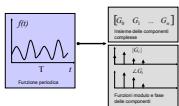
$$\begin{aligned} \Im\{a \cdot x(t) + b \cdot y(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} [a \cdot x(t) + b \cdot y(t)] \cdot e^{-i\omega t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} a \cdot x(t) \cdot e^{-i\omega t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} b \cdot y(t) \cdot e^{-i\omega t} dt = \\ &= a \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-i\omega t} dt + b \cdot \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \cdot e^{-i\omega t} dt = \\ &= a \cdot X(\omega) + b \cdot Y(\omega) \end{aligned}$$

DERIVATA:

differenziando la trasformata inversa di  $X(\omega)$  rispetto al tempo (che equivale a derivare il segnale  $x(t)$ ), si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\{x(t)\} &= \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega\right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot \frac{d}{dt}\{e^{i\omega t}\} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [i\omega \cdot X(\omega)] \cdot e^{i\omega t} d\omega = \\ &= \Im^{-1}\{i\omega \cdot X(\omega)\} \end{aligned}$$

CONVOLUZIONE:



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 19

$$\begin{aligned}
 x(t) \otimes y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot y(t - \tau) \cdot d\tau \Rightarrow \\
 \Im\{x(t) \otimes y(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot y(t - \tau) \cdot d\tau \right] \cdot e^{-i\omega t} dt = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \left[ \int_{-\infty}^{\infty} y(t - \tau) \cdot e^{-i\omega t} dt \right] \cdot d\tau = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} y(\xi) \cdot e^{-i\omega \xi} \cdot e^{-i\omega \tau} d\xi \right] \cdot d\tau = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot e^{-i\omega \tau} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} y(\xi) \cdot e^{-i\omega \xi} d\xi \right] \cdot d\tau = \\
 &= X(\omega) \cdot Y(\omega)
 \end{aligned}$$

si noti che si è sostituita la variabile  $t$  con  $t - \tau$  nell'integrale ‘interno’ nella seguente maniera:

$$\xi = t - \tau$$

$$t = \xi + \tau$$

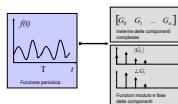
$$d\xi = dt$$

gli estremi di integrazione, essendo da  $-\infty$  a  $+\infty$  rimangono invariati.

Questa proprietà è connessa con la soluzione di equazioni differenziali lineari che nel dominio del tempo corrisponde ad una operazione di convoluzione, nel dominio della frequenza ad una semplice moltiplicazione di funzioni della frequenza.

### RITARDO / ANTICIPO

$$\begin{aligned}
 \Im\{x(t \pm t_0)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t \pm t_0) \cdot e^{-i\omega t} dt = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t') \cdot e^{-i\omega(t' \mp t_0)} dt' = \\
 &= e^{\pm i\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t') \cdot e^{-i\omega t'} dt' = \\
 &= X(\omega) \cdot e^{\pm i\omega t_0}
 \end{aligned}$$



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 20

Questa proprietà evidenzia come un ritardo/anticipo di un segnale nel tempo ha influenza solo sulla fase dello spettro mentre ne lascia invariato il modulo (il fattore esponenziale con argomento immaginario ha modulo unitario e fase pari all'argomento stesso).

Intuitivamente questo è ovvio in quanto le componenti dello sviluppo in serie saranno identiche come ampiezza mentre saranno ritardate/anticipate di  $t_0$ . Considerando una singola componente dello sviluppo inserire ad esempio:

$$a_n \cdot \cos(\omega_n(t \pm t_o)) = a_n \cdot \cos(\omega_n t \pm \omega_n t_o)$$

Che evidenzia lo sfasamento proporzionale alla pulsazione moltiplicato per  $t_o$ .

## 2.Funzioni di Trasferimento

La trasformata di Fourier, grazie alle sue proprietà, consente la manipolazione di un'equazione differenziale in modo da farla diventare un'equazione algebrica funzione di un parametro complesso: la pulsazione. Questo apre la scena ai metodi classici di signal processing quali il filtraggio, la definizione di modelli dinamici di sistemi complessi e strumenti di misura, la modellazione del rumore bianco e colorato etc.

### 2.1. Trasformazione di un'equazione differenziale in un'equazione algebrica

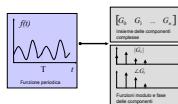
Supponiamo di avere un sistema regolato da una equazione differenziale del secondo ordine:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a \cdot \frac{dy(t)}{dt} + b \cdot y(t) = c \cdot u(t)$$

dove la  $u(t)$  è la forzante, ovvero l'ingresso, mentre la  $y(t)$  è la risposta, ovvero l'uscita.

Trasformando secondo Fourier la derivata prima e seconda dell'uscita, tenendo presente le proprietà enunciate nel §2.3, si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &\rightarrow i\omega \cdot Y(\omega) \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) &\rightarrow i\omega \cdot (i\omega \cdot Y(\omega)) \end{aligned}$$



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 21

e quindi la seguente equazione:

$$(i\omega)^2 \cdot Y(\omega) + i\omega \cdot a \cdot Y(\omega) + b \cdot Y(\omega) = c \cdot U(\omega)$$

che non è altro se non una **equazione algebrica** che può essere risolta rispetto all'uscita:

$$Y(\omega) = \frac{c}{b + i\omega \cdot a + (i\omega)^2} \cdot U(\omega)$$

Tale relazione indica che la trasformata dell'uscita del sistema è pari alla trasformata dell'ingresso moltiplicata per una funzione anch'essa della frequenza (o pulsazione) che dipende solamente dalla forma dell'equazione differenziale che regola il sistema stesso, ovvero dai parametri  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Tale funzione complessa viene definita **Funzione di Trasferimento**.

Per convenzione la funzione di trasferimento viene indicata come  $H(\omega)$  per cui la precedente relazione si scrive in forma generale:

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot U(\omega) \quad (12)$$

Dalla precedente è immediato ricavare la funzione di trasferimento come rapporto delle trasformate:

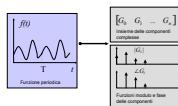
$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{U(\omega)}$$

In generale l'**uscita di un sistema lineare** si può ottenere in due maniere:

1. in frequenza: moltiplicazione della trasformata dell'ingresso per la funzione di trasferimento
2. nel tempo: convoluzione tra ingresso ed antitrasformata della funzione di trasferimento (risposta del sistema ad un impulso ideale, vedere § 3.1.2)

La funzione di trasferimento, oltre che esplicitamente ricavata dalla relazione differenziale data dalla fisica del fenomeno, può essere ricavata trasformando la risposta del sistema ad un impulso.

Per fare ciò introduciamo il concetto di *delta di Dirac* che modella **un impulso ideale**. Essa vale infinito per un tempo infinitesimo. Si definisce  $\delta(t - t_0)$  quella funzione che vale infinito per  $t = t_0$  ed è nulla altrove.



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 22

Se integrata tale funzione, avendo dominio infinitesimo ma valore infinito, risulta:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1.$$

Calcoliamone dunque la sua trasformata:

$$\delta(t) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-i\omega(t=0)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) = 1 \quad \forall \omega$$

Se quindi si impiega tale funzione come ingresso ad un generico sistema, si ottiene che  $U(\omega) = 1$  per ogni frequenza e quindi  $Y(\omega) = H(\omega)$ . Questo è il principale motivo per il quale chi si occupa di identificazione/caratterizzazione dei sistemi meccanici impiega martelletti strumentati per imporre degli impulsi sulle strutture e registrare le vibrazioni nei diversi punti di interesse per ricavare la  $h(t)$  ovvero, tramite trasformata di Fourier, la  $H(\omega)$  che lega sollecitazioni nel punto di applicazioni dell'impulso alla risposta nel punto di registrazione delle vibrazioni. Torneremo su questo argomento nel terzo paragrafo.

Nel prossimo paragrafo evidenziamo un ulteriore punto di vista sulla funzione di trasferimento che può essere vista come quella funzione che in modulo indica l'attenuazione di una qualsiasi armonica venga posta in ingresso ed in fase il suo sfasamento. Da ciò prende anche il nome di funzione di trasferimento ‘sinusoidale’.

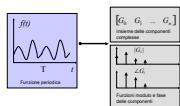
### 2.2. Funzione di trasferimento Sinusoidale

Consideriamo un sistema dinamico lineare caratterizzato da una funzione di trasferimento  $H(\omega)$ . Iniettiamo un ingresso puramente armonico di tipo sinusoidale:



Fig. ... Rappresentazione ingresso-uscita di un sistema dinamico regolato da equazione differenziale lineare.

Imponendo in ingresso  $u(t) = \sin(\omega_0 \cdot t)$  vogliamo determinare l'uscita  $y(t)$ . Vedremo che si determina in maniera immediata dalla conoscenza di modulo e fase della funzione di trasferimento in corrispondenza della pulsazione dell'ingresso.



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 23

Per determinarlo passiamo attraverso le trasformate, dunque trasformiamo l'ingresso:

$$u(t) = \sin(\omega_0 \cdot t) \quad \boxed{U(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega_0 \cdot t) \cdot (\cos(\omega \cdot t) - i \sin(\omega \cdot t)) dt}$$

Tale trasformata vale chiaramente zero  $\forall \omega \neq \omega_0$  grazie alla proprietà di ortonormalità delle funzioni armoniche. Per  $\omega = \omega_0$  ed  $\omega = -\omega_0$  occorre invece calcolarne i valori.

$$\begin{aligned} U(\omega_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega_0 \cdot t) \cdot (-i \sin(\omega_0 \cdot t)) dt = -i \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2(\omega_0 \cdot t) dt \\ &= -i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos(2\omega_0 \cdot t)}{2} dt = \frac{-i}{2} \cdot \infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U(-\omega_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega_0 \cdot t) \cdot (i \sin(\omega_0 \cdot t)) dt = i \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2(\omega_0 \cdot t) dt \\ &= i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos(2\omega_0 \cdot t)}{2} dt = \frac{i}{2} \cdot \infty \end{aligned}$$

Volendo rappresentare lo spettro della funzione seno si ha dunque il grafico che segue.

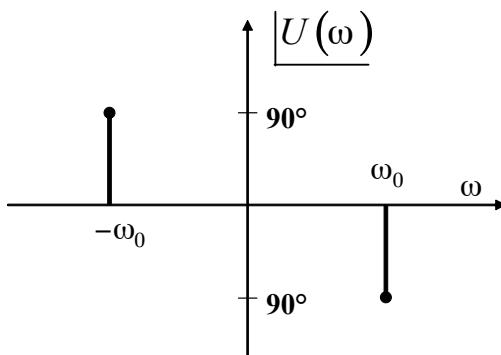
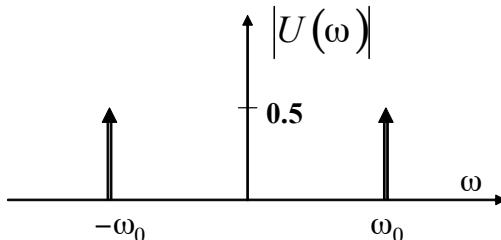
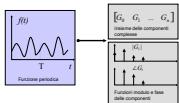


Fig. ... rappresentazione dello spettro della funzione sinusoidale. In modulo ha due componenti di valore infinito del primo ordine con modulo 0.5 (ovvero due delta di Dirac di valore 0.5). Come fase due valori antisimmetrici di  $90^\circ$  e  $-90^\circ$ . Globalmente lo spettro delle componenti a pulsazioni positive risultano essere i valori coniugati delle componenti a pulsazioni negative, come risulta anche dall'equazione 7'.



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 24

Globalmente la trasformata dell'ingresso si può scrivere quindi come somma di due delta di Dirac:

$$U(\omega) = \frac{i}{2} \cdot \delta(\omega + \omega_0) - \frac{i}{2} \cdot \delta(\omega - \omega_0)$$

Dove con delta di Dirac  $\delta(\omega - \omega_0)$  si intende la funzione che vale infinito per  $\omega = \omega_0$  ed è nulla altrove. Se integrata tale funzione, avendo dominio infinitesimo ma valore

infinito, risulta  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0) \cdot d\omega = 1$ . Se come argomento dell'integrale si ha una generica funzione  $H(\omega)$ , risulta  $\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \cdot \delta(\omega - \omega_0) \cdot d\omega = H(\omega_0)$ . Questo semplicemente perché l'infinito rappresentato dalla delta di Dirac moltiplica il valore della funzione in corrispondenza della pulsazione  $\omega_0$  facendo assumere al prodotto un valore infinito di modulo  $H(\omega_0)$  che, integrato su di un dominio infinitesimo produce un risultato finito pari al valore assunto dalla funzione in corrispondenza della pulsazione  $\omega_0$ .

A questo punto è immediato determinare il valore della trasformata dell'uscita:

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot U(\omega) = H(\omega) \cdot \left( \frac{i}{2} \cdot \delta(\omega + \omega_0) - \frac{i}{2} \cdot \delta(\omega - \omega_0) \right)$$

Che porta ad avere una somma di due delta con moduli pari al valore della funzione di trasferimento in corrispondenza dei due infiniti:

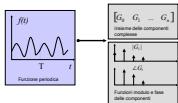
$$Y(\omega) = H(-\omega_0) \cdot \frac{i}{2} \cdot \delta(\omega + \omega_0) - H(\omega_0) \cdot \frac{i}{2} \cdot \delta(\omega - \omega_0)$$

La funzione di trasferimento può essere scomposta in modulo e fase:

$$H(\omega) = M(\omega) \cdot e^{i\Phi(\omega)}$$

Per cui si ha:

$$Y(\omega) = M(\omega_0) \cdot \frac{i}{2} \cdot \delta(\omega + \omega_0) \cdot e^{-i\Phi(\omega_0)} - M(\omega_0) \cdot \frac{i}{2} \cdot \delta(\omega - \omega_0) \cdot e^{i\Phi(\omega_0)}$$



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 25

In cui si sono semplicemente sostituiti i valori e considerata la proprietà dello spettro di un segnale reale: modulo simmetrico e fase antisimmetrica, secondo l'equazione 7'.

Considerando l'equazione di Eulero:  $e^{i\Phi(\omega_0)} = \cos(\Phi(\omega_0)) + i \cdot \sin(\Phi(\omega_0))$  si ottiene, dopo semplice manipolazione:

$$\frac{Y(\omega)}{M(\omega_0)} = \cos(\Phi(\omega_0)) \cdot \left[ \frac{i}{2} \cdot \delta(\omega + \omega_0) - \frac{i}{2} \cdot \delta(\omega - \omega_0) \right] + \sin(\Phi(\omega_0)) \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \delta(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2} \cdot \delta(\omega - \omega_0) \right]$$

Del primo termine sappiamo immediatamente calcolare l'antitrasformata avendo appena calcolato la trasformata della funzione seno. Il secondo termine è anche immediatamente antitrasformabile in quanto vale:

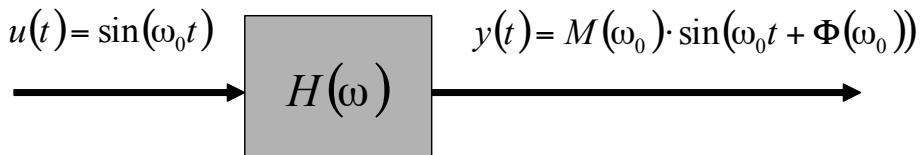
$$\cos(\omega_0 t) \boxed{\frac{1}{2} \cdot \delta(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2} \cdot \delta(\omega - \omega_0)}$$

In definitiva, quindi:

$$y(t) = M(\omega_0) \cdot \cos(\Phi(\omega_0)) \cdot \sin(\omega_0 t) + M(\omega_0) \cdot \sin(\Phi(\omega_0)) \cdot \cos(\omega_0 t)$$

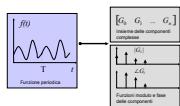
Ovvero:

$$y(t) = M(\omega_0) \cdot \sin(\omega_0 t + \Phi(\omega_0)) \quad (13)$$



Che esprime il fatto che se si pone in ingresso ad un sistema regolato da equazioni differenziali lineari un ingresso armonico di modulo unitario e pulsazione  $\omega_0$ , l'uscita sarà un'armonica di pari pulsazione  $\omega_0$  ma di modulo pari al modulo della funzione di trasferimento  $H(\omega_0)$  calcolata per la pulsazione  $\omega_0$  e sfasata della fase della funzione di trasferimento  $\Phi(\omega_0)$  calcolata per la stessa pulsazione  $\omega_0$ .

A tale risultato era possibile giungere semplicemente considerando l'equazione 12:



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 26

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot U(\omega) = M_H(\omega) \cdot e^{i\Phi_H(\omega)} \cdot M_U(\omega) \cdot e^{i\Phi_U(\omega)} \\ = M_H(\omega) \cdot M_U(\omega) \cdot e^{i(\Phi_H(\omega) + \Phi_U(\omega))}$$

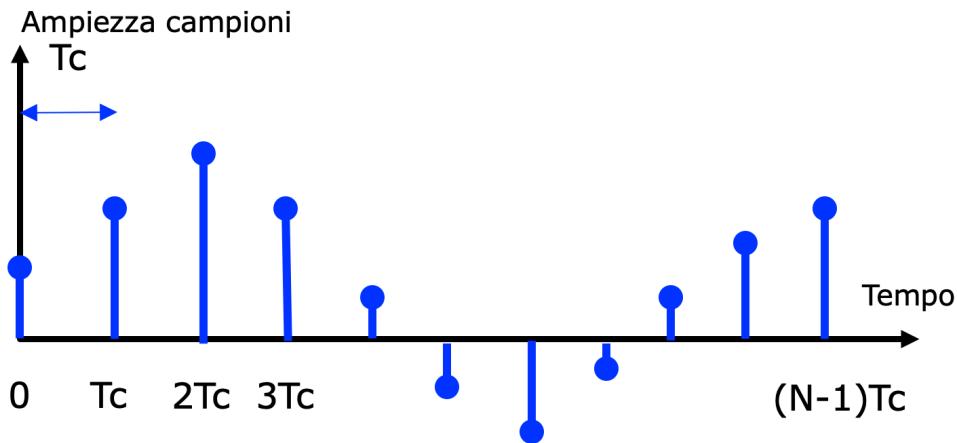
Che esprime appunto il fatto che i moduli si moltiplicano e le fasi si sommano.

### 2.2.1. Rappresentazione dello spettro di segnali campionati

Nell'elaborazione dei segnali occorre passare a **segnali di tipo discreto** poiché i dati acquisiti dal modulo di acquisizione digitale e registrati sono delle sequenze finite di valori quantizzati, ovvero dei **vettori** come già visto. Dunque, nell'elaborazione computerizzata dei segnali non si manipola un segnale  $s(t)$ , ma un vettore  $[s(1) \ s(2) \ \dots \ s(N)]$  di  $N$  valori  $s(n)$  campionati alla frequenza di campionamento  $f_c$ .

Vettore del segnale digitalizzato

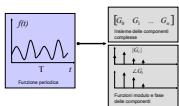
$$[s(1) \ s(2) \ s(3) \ s(4) \ \dots \ s(N-1)]$$



Segnale digitale. Rappresentazione vettoriale (in alto) e grafica dove sulle ascisse si trovano gli istanti temporali, sulle ordinate il valore quantizzato di ciascun campione.

La trasformata discreta implementata in matlab ha la seguente formulazione:

$$s(n) \rightarrow S(k) = \sum_{n=1}^N s(n) \cdot e^{-\frac{2\pi i}{N} k(n-1)} \quad k = 0 \dots N-1$$



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 27

Come era prevedibile, ciascun elemento  $S(k)$  della trasformata del segnale discreto, ovvero del vettore, si può calcolare come prodotto di due vettori:

$$S(k) = [s(1) \ s(2) \ \dots \ s(N)] \cdot [1 \ e^{-\frac{2\pi i}{N}k} \ \dots \ e^{-\frac{2\pi i}{N}kN}]^T$$

Ovvero tra il vettore corrispondente al segnale discreto ed uno dei vettori corrispondenti alla base (uno dei segnali discreti complessi  $e^{-\frac{2\pi i}{N}kn}$  base della scomposizione). Anch'essi vettori ortonormali, in altre parole facente parte dei versori nello spazio  $R^N$ .

**Si noti che per ricavare le componenti tramite prodotto scalare** definito in equazione (6') **mancava la normalizzazione /N.**

La DFT la si può scrivere evidenziando la corrispondenza tra i vettori nel dominio del tempo discreto  $s(n)$  e della frequenza discreta, ovvero lo spettro  $S(k)$ :

$$[s(1) \ s(2) \ \dots \ s(N)] \rightarrow [S(1) \ S(2) \ \dots \ S(N)]$$

Si noti come lo spettro **[S(1) S(2) ... S(N)] ha lo stesso numero di campioni N** del segnale  $[s(1) \ s(2) \ \dots \ s(N)]$ .

E' importante ora capire **cosa rappresentano i diversi coefficienti S(k)? A che frequenze corrispondono i vari k?**

**Consideriamo S(1)** che corrisponde a frequenza nulla: K parte da 0. Stiamo moltiplicando per un segnale costante  $e^0 = 1$  che possiamo immaginare come un segnale armonico avente periodo infinito (inverso della frequenza = 1/0).

Esso è pari a:

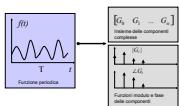
$$S(1) = S(k=0) = \sum_{n=1}^N s(n) \cdot e^0 = \sum_{n=1}^N s(n)$$

Quindi è pari alla somma dei campioni del segnale. Se, come prima evidenziato, dividiamo per il numero degli elementi /N si ottiene il valor medio.

**Consideriamo S(2):**

$$S(2) = S(k=1) = [s(1) \ s(2) \ \dots \ s(N)] \cdot [1 \ e^{-\frac{2\pi i}{N}} \ \dots \ e^{-\frac{2\pi i}{N}N}]^T = [s(1) \ s(2) \ \dots \ s(N)] \cdot [1 \ e^{-\frac{2\pi i}{N}} \ \dots \ e^{-2\pi i}]^T$$

Quindi S(2), divisa /N fornirà la componente del segnale s(n) lungo la prima armonica. Si noti infatti che l'esponenziale complesso ha fase che parte da 0 ed arriva a  $2\pi$



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 28

esattamente in N campioni eseguendo quindi un solo periodo o giro per il *fasore* corrispondente. Il periodo totale di campionamento è pari a  $(N-1) \cdot T_c$

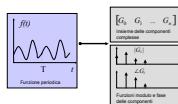
Di conseguenza la frequenza corrispondente sarà  $\frac{1}{(N-1) \cdot T_c}$ .

**Consideriamo S(3):**

$$S(3) = S(k=2) = [s(1) \ s(2) \ \dots \ s(N)] \cdot [1 \ e^{-\frac{4\pi i}{N}} \ \dots \ e^{-4\pi i}]^T$$

S(3), diviso sempre per /N è la componente del segnale s(n) lungo la seconda armonica. Si noti che l'esponenziale complesso ha fase che parte da 0 ed arriva a  $4\pi$  esattamente in N campioni eseguendo quindi due periodi o giri per il fasore corrispondente. Di conseguenza la frequenza corrispondente sarà  $\frac{2}{(N-1) \cdot T_c}$ . E così via.

Continuando in questo modo, l'ultimo valore dello spettro corrisponderebbe alla frequenza  $1/T_c$  pari alla frequenza di campionamento  $f_c$ . Ma sappiamo che ciò non è possibile. Il teorema di Nyquist assegna infatti significato alla sola banda  $0 \div f_c/2$ . È questo il motivo per cui dalla frequenza di Nyquist ( $f_c/2$ ) in poi si ha una ripetizione dello spettro tramite le componenti negative che, assieme alle corrispondenti positive, consentono di ottenere le armoniche come segnali reali.



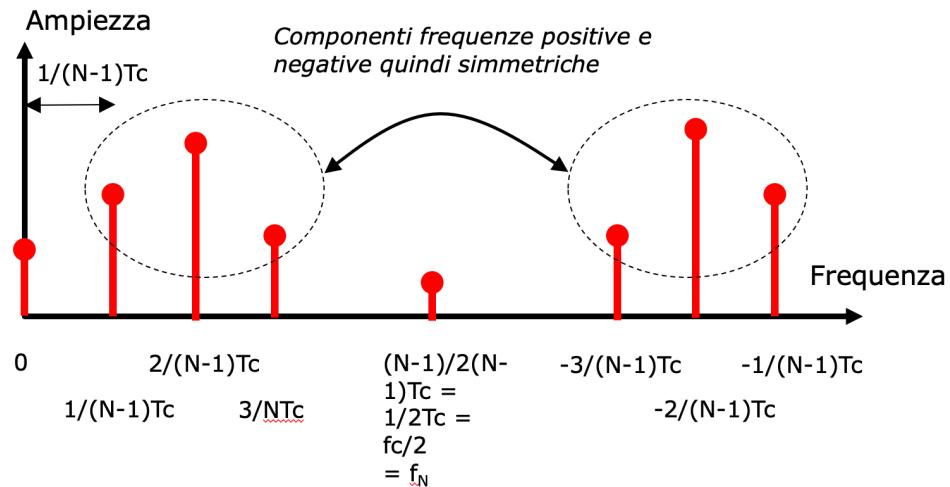
## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 29

Vettore trasformata discreta (elenco delle componenti del segnale lungo i diversi versori)

$$[S(0) \ S(1) \ S(2) \ S(3) \ \dots \ S(N/2) \ \dots \ S(N-1)]$$



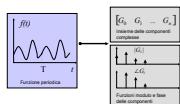
Rappresentazione dei coefficienti della scomposizione di Fourier mediante DFT. La trasformazione possiede contenuto informativo sino alla frequenza di Nyquist, oltre si ha uno specchio delle componenti (per segnali reali il modulo sarà simmetrico, la fase antisimmetrica).

## Esempio Matlab

```
% Esempio di costruzione di un segnale e calcolo della Trasformata di Fourier
Tc = 0.05;
Ttot = 5; % finestra temporale di campionamento
```

```
t = 0:Tc:(Ttot - Tc); % scala dei tempi. (Ttot-Tc) = periodo totale di campionamento
f = 2; % frequenza della componente armonica
s = sin(2*pi*f*t); % segnale discreto
N = length(s); % Numero campioni
```

```
% Plottiamo in due maniere diverse, mediante "plot" che interpola i dati e mediante
"stem" che riporta i singoli campioni discreti
figure(1), plot(t,s), title('Segnale Sinusoidale'), xlabel('Tempo [s]')
grid on
figure(2), stem(t,s), title('Segnale Sinusoidale'), xlabel('Tempo [s]')
grid on
```



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 30

% Calcoliamo la Traformata discreta mediante Fast Fourier Transform - FFT  
 $S = \text{abs}(\text{fft}(s))/N;$  % modulo della trasformata. NOTA normalizzazione /N

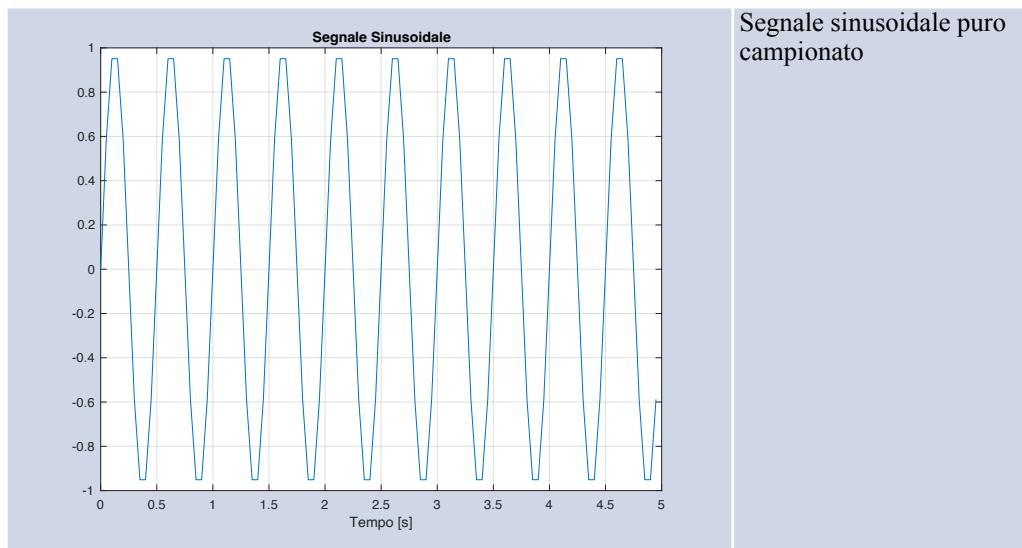
% Asse delle frequenze:

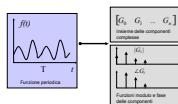
$ff = 0:(1/(T_{\text{tot}}-T_c)):(1/T_c);$

% NOTA:  $1/(T_{\text{tot}}-T_c)$  inverso del periodo totale di campionamento

```
figure(3), stem(ff(1:floor(N/2)), S(1:floor(N/2)))
title('Trasformata del Segnale Sinusoidale')
xlabel('Frequenza [Hz]', grid on, zoom on
```

% NOTA: abbiamo rappresentato solo il modulo dello spettro fino alla frequenza di Nyquist pari a 10 Hz

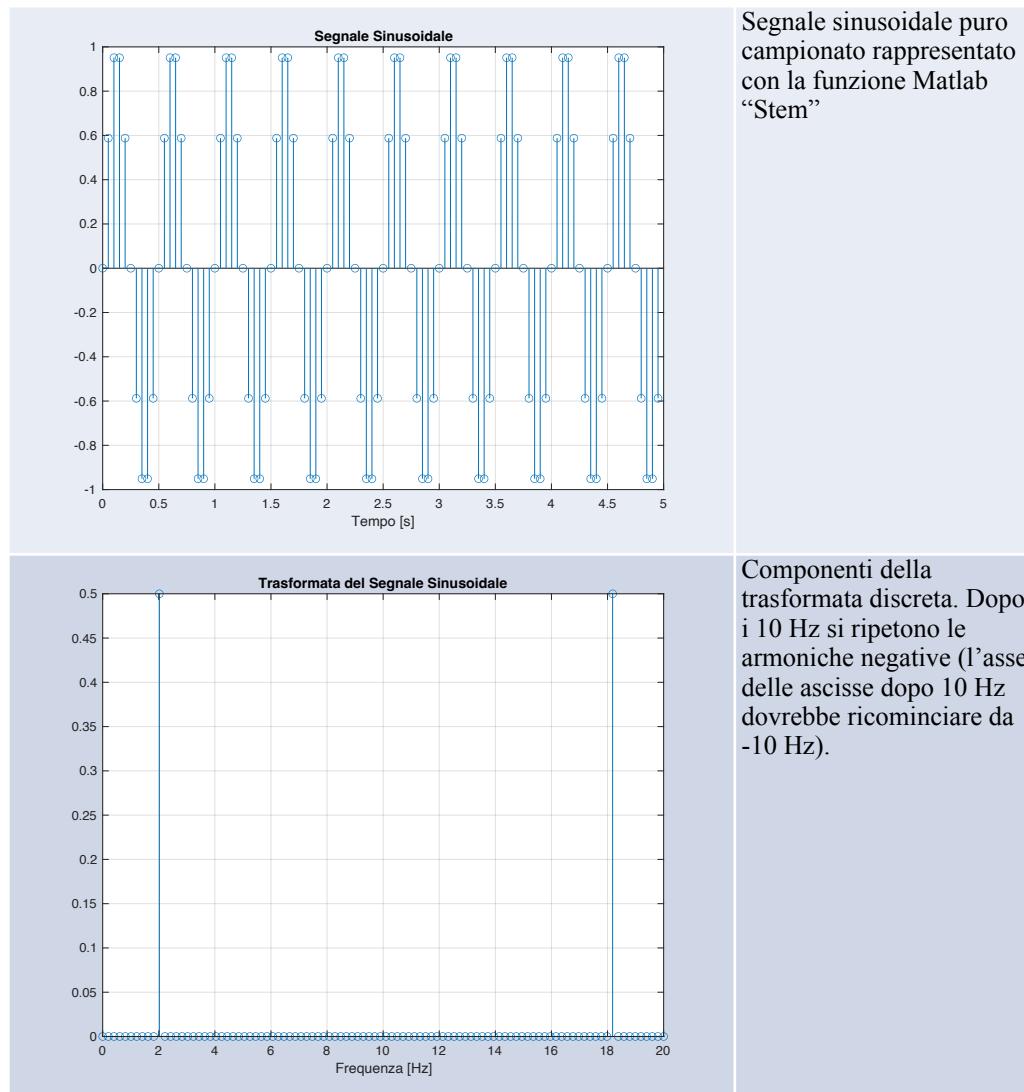




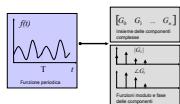
## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 31



In questo esempio si può provare ad aggiungere al segnale diverse armoniche o rumore (con il comando rand) ed osservare come cambia lo spettro del segnale.



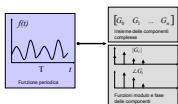
## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 32

### 2.2.2. Tabella Riassuntiva

Oggetto	Sviluppo in serie o scomposizione dell'oggetto	Calcolo coefficienti
	Anti-Trasformata	Trasformata
<b>Vettore <math>v</math></b>	$v = \alpha \cdot e_1 + \beta \cdot e_2$ dove $e_1$ ed $e_2$ sono i versori di una base con direzioni mutuamente ortogonalili	$\alpha = v \cdot e_1$ $\beta = v \cdot e_2$
<b>Segnale periodico <math>g(t)</math> nel tempo continuo (sviluppo in serie di Fourier)</b>	$g(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\omega_n t)$ dove $\omega_n = 2\pi n f_0$	$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T g(t) \cdot \cos(\omega_n t) \cdot dt$ $b_n = \frac{2}{T} \int_0^T g(t) \cdot \sin(\omega_n t) \cdot dt$
<b>Segnale periodico <math>g(t)</math> nel tempo continuo (sviluppo in serie mediante Fasori)</b>	$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n \cdot e^{i\omega_n t}$ dove $\omega_n = 2\pi n f_0$	$G_n = \frac{1}{T} \int_0^T g(t) \cdot e^{-i\omega_n t} \cdot dt$
<b>Segnale generico <math>g(t)</math>, ovvero NON periodico nel tempo continuo</b>	$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) \cdot e^{i\omega t} \cdot dt$	$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-i\omega t} \cdot dt$



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 33

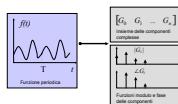
Oggetto	Sviluppo in serie o scomposizione dell'oggetto	Calcolo coefficienti
	Anti-Trasformata	Trasformata
<b>Segnale digitale</b> $s(n) = [s(1) \ s(2) \ \dots \ s(N)]$	$s(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S(k) \cdot e^{\frac{2\pi i}{N} k(n-1)}$ $n = 1 \dots N$	$S(k) = \sum_{n=1}^N s(n) \cdot e^{-\frac{2\pi i}{N} k(n-1)}$ $k = 0 \dots N-1$ <p>ciascun elemento <math>S(k)</math> si può calcolare come prodotto di due vettori:</p> $S(k) = [s(1) \ s(2) \ \dots \ s(N)] \cdot [1 \ e^{-\frac{2\pi i}{N} k} \ \dots \ e^{-\frac{2\pi i}{N} kN}]^T$ <p>la base è costituita da una serie di <math>N</math> fasori</p>

Notare che per **segnali digitali**, campionati in un intervallo di tempo finito e quantizzati, non ha senso chiedersi se siano periodici o meno. Semplicemente non lo sappiamo. In ogni caso la minima armonica contenuta vale  $1/(\text{intervallo di acquisizione})$  e ci saranno le sue multiple in modo analogo ai segnali periodici nel tempo continuo.

### 2.3. Impiego della Funzione di trasferimento per il Filtraggio

Un sistema dinamico lineare per il quale esiste una funzione di trasferimento sinusoidale può rappresentare diverse cose:

- **un elemento che elabora segnali:** la funzione di trasferimento non è utile solo per la soluzione di equazioni differenziali che divengono semplici equazioni algebriche, ma anche per effettuare elaborazioni sulle componenti armoniche di un generico segnale e prevedere quali armoniche conterrà l'uscita in base al suo diagramma di Bode. Tali blocchi di elaborazione possono servire per ridurre il rumore in alta frequenza (filtri passa basso), quello in bassa (filtri passa alto), etc;
- **uno strumento di misura:** la funzione di trasferimento in questo caso descrive come lo strumento modifica le componenti armoniche di un segnale da misurare (misurando) e prevedere quali armoniche conterrà l'uscita dello strumento in base al suo diagramma di Bode. Va da sé che uno strumento ideale dovrebbe far



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 34

passare tutte le armoniche del misurando inalterate. Ovvero né alterate in ampiezza e neppure sfasate. In questo modo esiste una corrispondenza esatta (a meno di un fattore di conversione proporzionale) tra uscita e misurando in ingresso. Questo a volte è possibile, a volte no. Come vedremo, se uno strumento è particolarmente ‘lento’, esso distorcerà significativamente le ampiezze e sfaserà altrettanto significativamente le fasi delle componenti armoniche tanto più si va su in frequenza. In questi casi, per stimare correttamente il misurando, occorre invertire la funzione di trasferimento in una procedura analoga a quella vista per l’operazione di misura di una grandezza statica. Questa procedura può essere definita **Compensazione Dinamica** che vedremo in uno dei prossimi paragrafi.

### Esempio di riduzione del rumore in alta frequenza su di un segnale di temperatura

Si consideri il segnale ed il modulo del suo spettro mostrate in figura 2.5 (una misura di temperatura tramite PT100 su di una piastra termostatata che regola la temperatura tra due valori soglia). Se il segnale viene posto in ingresso ad un sistema che possiede una funzione di trasferimento passa basso, si ottiene un segnale in uscita con le medesime componenti in bassa frequenza mentre quelle in alta sono attenuate.

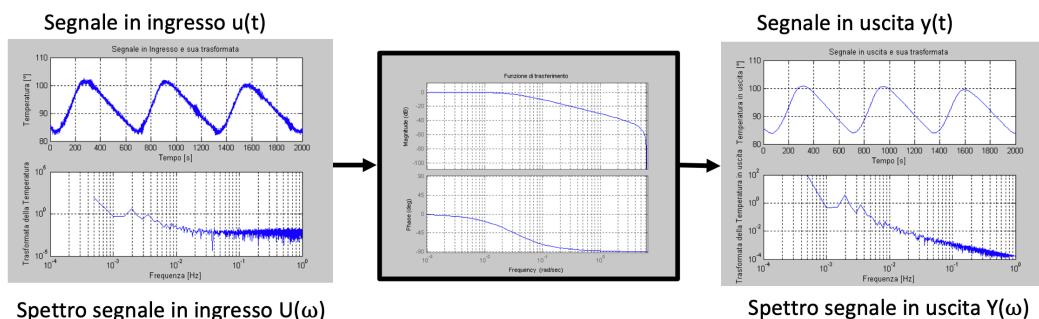
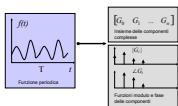


Figura 2.5 Schema a blocchi di un processo di riduzione delle componenti in alta frequenza. In altre parole filtraggio in alta frequenza mediante un passa-basso. Nella figura sono rappresentati i segnali d’ingresso ed uscita in funzione del tempo ed il modulo (fase omessa) del loro spettro e la funzione di trasferimento che ha elaborato l’ingresso in modulo e fase.

E’ possibile notare che il segnale in uscita non mostra più il rumore originario in alta frequenza in quanto la funzione di trasferimento ha attenuato proprio le componenti armoniche ad alta frequenza che non appartenevano ad un andamento di temperatura. La dinamica termica è infatti generalmente ‘lenta’. Appartenevano, ad esempio, al rumore elettromagnetico di natura interferente.

Le tipologie di filtri sono dette **passa-basso** nel caso in cui vengano mantenute le componenti a bassa frequenza ed eliminate quelle ad alta frequenza; **passa-alto** nel caso



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 35

contrario; **passa-banda** nel caso in cui vengano lasciate immutate le componenti appartenenti ad una data frequenza ed eliminate le altre; **elimina-banda** nel caso opposto. L'**ordine del filtro** coincide con l'ordine del sistema lineare corrispondente al filtro e definisce, nel diagramma di Bode, la pendenza di modulo(espresso nel diagramma logaritmico in decibel per decade) ed andamento della fase. Altro parametro importante è la **frequenza di taglio**  $f_c$  definita come quella frequenza alla quale il segnale viene distorto in modo trascurabile, quindi:

- la massima attenuazione (o amplificazione) della potenza delle armoniche è pari al 50%, ovvero l'ampiezza viene attenuata di un fattore uno su radice di due, in termini logaritmici quindi  $\pm 3 \text{ dB}$ ;
- lo sfasamento è pressoché lineare (introducendo eventualmente un ritardo ma non una distorsione). A tale conclusione si arriva considerando la proprietà dell'anticipo-ritardo della trasformata.

Alla frequenza di taglio corrisponde implicitamente una banda passante che sarà da 0 ad  $f_c$  nel caso di passa basso, da  $f_c$  ad infinito nel caso di passa alto.

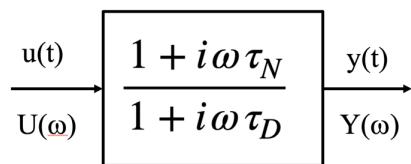
### Filtraggio Online (o in Tempo Reale)

Il **filtro online** opera direttamente sul segnale temporale elaborandolo mano mano che esso si presenta, campione dopo campione tramite una **successione per ricorrenza**.

La dimostrazione del fatto che un sistema reale si comporta nel dominio discreto come una successione per ricorrenza la si ottiene:

1. moltiplicando la trasformata di un segnale d'ingresso per la funzione di trasferimento
2. antitrasformando
3. discretizzando la derivata

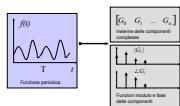
Proviamo quanto detto con un filtro del primo ordine avente uno zero ed un polo:



Sappiamo che:

$$Y(\omega) = \frac{1 + i\omega\tau_N}{1 + i\omega\tau_D} \cdot U(\omega)$$

da cui:



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 36

$$Y(\omega) \cdot (1 + i\omega\tau_D) = U(\omega) \cdot (1 + i\omega\tau_N)$$

quindi:

$$Y(\omega) + i\omega\tau_D \cdot Y(\omega) = U(\omega) + i\omega\tau_N \cdot U(\omega)$$

anti-trasformando otteniamo:

$$y(t) + \dot{y}(t) \cdot \tau_D = u(t) + \dot{u}(t) \cdot \tau_N$$

applicando la formula di Eulero per la discretizzazione (anche conosciuta come formula alle differenze finite):

$$y_k + \frac{y_k - y_{k-1}}{T_c} \cdot \tau_D = u_k + \frac{u_k - u_{k-1}}{T_c} \cdot \tau_N$$

in definitiva si ottiene:

$$y_k \cdot (1 + \frac{\tau_D}{T_c}) = y_{k-1} \cdot \frac{\tau_D}{T_c} + u_k \cdot (1 + \frac{\tau_N}{T_c}) - u_{k-1} \cdot \frac{\tau_N}{T_c}$$

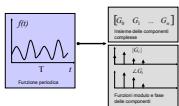
che, normalizzando, corrisponde alla seguente ricorrenza:

$$y_k = y_{k-1} \cdot \frac{\frac{\tau_D}{T_c}}{1 + \frac{\tau_D}{T_c}} + u_k \cdot \frac{1 + \frac{\tau_N}{T_c}}{1 + \frac{\tau_D}{T_c}} - u_{k-1} \cdot \frac{\frac{\tau_N}{T_c}}{1 + \frac{\tau_D}{T_c}}$$

**Che significato assumono in Matlab i vettori A e B?**

Se na è l'ordine del denominatore ed nb è l'ordine del numeratore.  $A = [A(1) A(2) \dots A(na+1)]$ ,  $B = [B(1) B(2) \dots B(nb+1)]$ .

$$\begin{aligned} a(1)y(n) &= b(1)x(n) + b(2)x(n-1) + \dots + b(n_b+1)x(n-n_b) \\ &\quad - a(2)y(n-1) - \dots - a(n_a+1)y(n-n_a). \end{aligned}$$



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 37

Grazie alla normalizzazione, si impone  $a(1) = 1$

Nel caso sopra citato della funzione di trasferimento con un polo ed uno zero del primo ordine i vettori A e B sono:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\tau_D}{T_c} \\ 1 + \frac{\tau_D}{T_c} & \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\tau_N}{T_c} & -\frac{\tau_N}{T_c} \\ 1 + \frac{\tau_D}{T_c} & 1 + \frac{\tau_D}{T_c} \end{bmatrix}$$

Notare che essendo  $na = nb = I$  entrambi i vettori hanno 2 elementi.

In Matlab il comando ***[B, A] = butter(n, fn)*** restituisce i coefficienti della funzione di trasferimento di un filtro Butterworth digitale passa basso di **ordine n** in grado di operare in tempo reale con frequenza di taglio normalizzata alla frequenza di Nyquist fn.

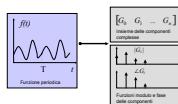
La frequenza di taglio per filtri digitali, ovvero filtri che elaborano sequenze di segnali campionati e convertiti viene solitamente **normalizzata per la frequenza di Nyquist**. Il motivo è semplice: un vettore corrispondente ad un segnale digitale non possiede esplicitamente informazioni circa la frequenza di campionamento per cui ha senso normalizzare il suo massimo contenuto in frequenza (ponendo quindi la fn pari ad 1) ed esprimendo i parametri di elaborazione (quali ad esempio il filtraggio) rispetto a tale valore, quindi tra 0 ed 1.

Si noti come, perdendo l'informazione circa la frequenza o tempo di campionamento è **possibile ragionare equivalentemente in termini di numeri di campioni**. Per la frequenza di Nyquist ad esempio l'armonica corrispondente ha 2 campioni:  $fc = 1 / 1$  campione, quindi  $fn = fc / 2 = 1 / 2$  campioni, ovvero periodo 2 campioni.

Per comprendere meglio i concetti enunciati impieghiamo un esempio Matlab tramite un *live script*.

## Filtraggio Online ed Offline

Il filtro online opera direttamente sul segnale temporale elaborandolo mano a mano che esso si presenta, campione dopo campione tramite una successione per ricorrenza. La dimostrazione del fatto che si ha una successione per ricorrenza la si ottiene:



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 38

- moltiplicando la trasformata di un segnale per una funzione di trasferimento del primo ordine
- antitrasformando
- discretizzando la derivata

Vi sono diverse tipologie di filtri già disponibili in matlab.

Il filtro offline invece opera come segue:

- calcola la FFT
- applica una maschera che riduce le componenti indesiderate
- antitrasforma

## Generazione del segnale e rappresentazione del suo spettro

```
close all
clear all
clc
```

Generazione del Segnale

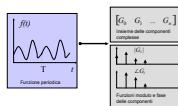
```
K = 0:1:100;
ss = length(K);
T0 = 25;
s = sin(2*pi*K/T0); % periodo T0 campioni
```

Calcolo e Rappresentazione della Trasformata

```
s_FFT = fft(s);
```

Plot del segnale e dello spettro corrispondente:

```
figure(1)
subplot(2,1,1), plot(K , s ), ylabel('Segnale armonico')
grid on, xlabel('Campioni')
subplot(2,1,2), stem(abs(s_FFT)/ss), ylabel('Modulo dello Spettro')
xlim([0 101]), xlabel('Campioni')
grid on, zoom on
```



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 39

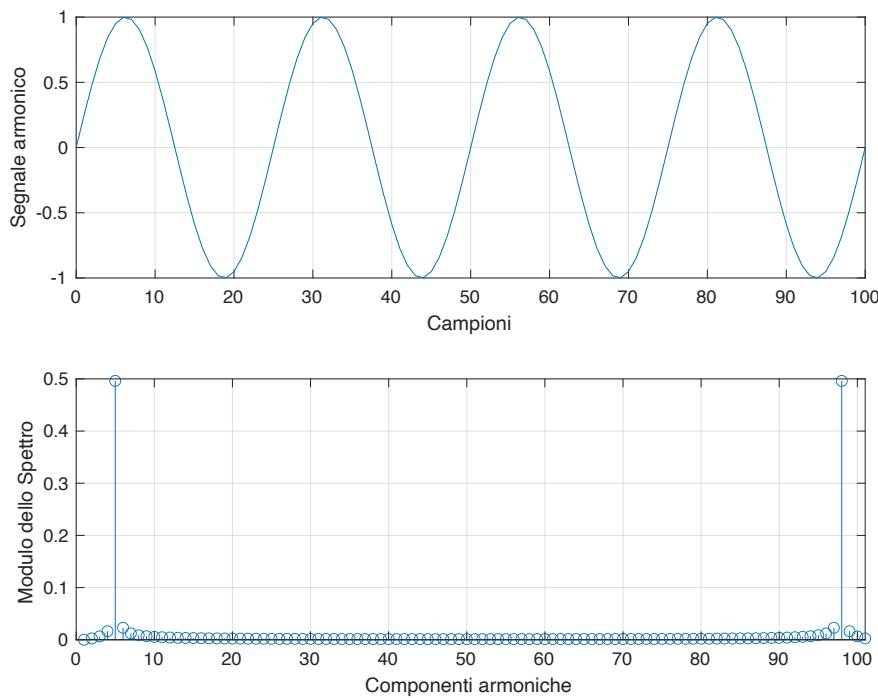


Figura - Segnale originario e modulo dello spettro. Si nota come sia presente una armonica corrispondente al 5° campione dello spettro. Tale campione corrisponde al coefficiente S(4) di periodo 1/4 del totale (100 campioni / 4 = 25 campioni) come del resto risultante dalla definizione della variabile T0 = 25

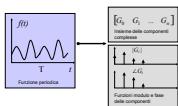
Aggiunta di Rumore

```
s = s + 0.1*sin(2*pi*K/5) + 0.3*sin(2*pi*K/3) + 0.1*randn(size(K));
```

```
s_FFT = fft(s);
```

Plot del segnale e dello spettro corrispondente:

```
figure(2)
subplot(2,1,1), plot(K , s ), ylabel('Segnale armonico con rumore')
grid on, xlabel('Campioni')
subplot(2,1,2), stem(abs(s_FFT)/ss), ylabel('Modulo dello Spettro')
xlim([0 101]), xlabel('Campioni')
grid on, zoom on
```



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 40

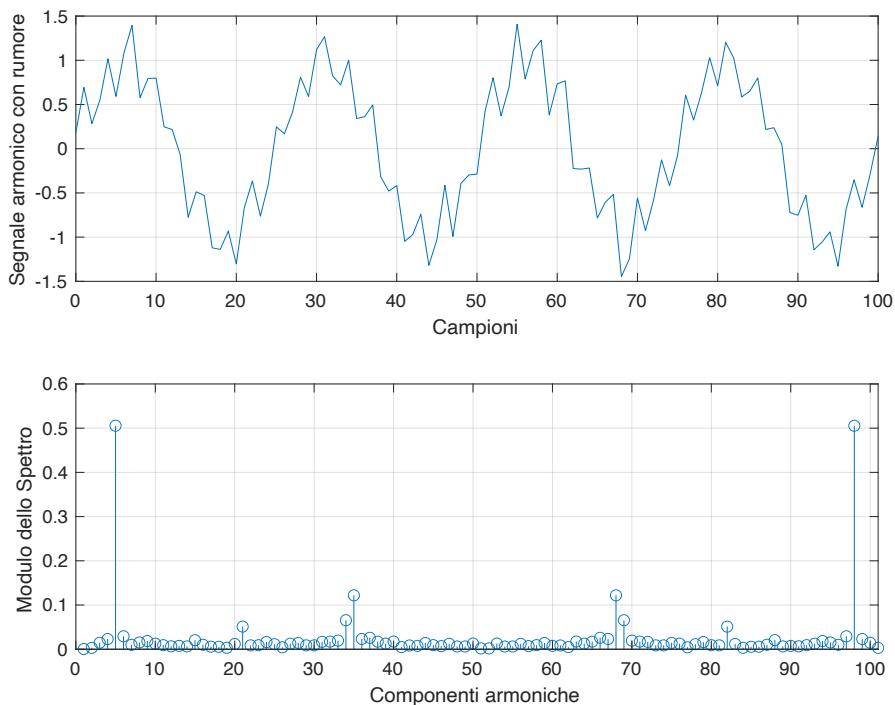


Figura - Segnale originario corrotto da rumore (un'armonica di periodo 3 campioni ed una di 5 più rumore bianco) e modulo dello spettro. Si nota come siano ora presenti tre armoniche. Oltre a quella originaria sul 5° campione dello spettro, ora compaiono una sul 21 esimo ed una sul 34 esimo. Tali armoniche corrispondono ai coefficienti:  $S(20)$  di periodo  $1/20$  del totale (100 campioni / 20 = 5 campioni);  $S(33)$  di periodo  $1/33$  del totale (100 campioni / 22 = 3 campioni).

### Filtraggio online

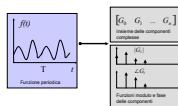
```

fT = (2 / T0) / (1/2);
% Frequenza di taglio riferita alla fN (pari a 1 / 2)
% doppia rispetto alla frequenza dell'armonica 1/T0

[B,A] = butter(3, fT) ;
s_Fonline = filter(B, A, s) ;

figure, plot(K,s, 'b', K,sin(2*pi*K/T0), 'c', K,s_Fonline , 'r')
grid on, xlabel('Campioni')
legend('Segnale con rumore', 'Segnale Originario' , 'Segnale Filtrato')

```



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 41

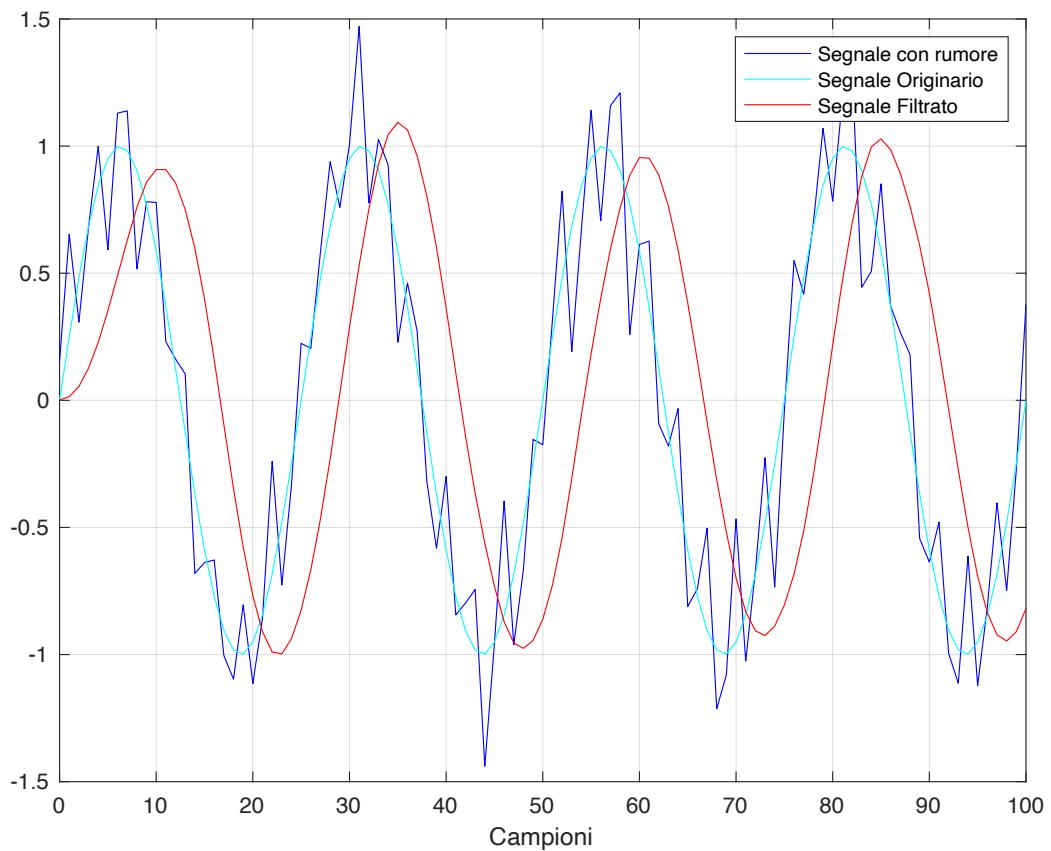


Figura - Segnale originale, corrotto da rumore e filtrato. Si nota l'effetto di ritardo introdotto dal filtro.

### Filtraggio offline: manipolazione diretta dello spettro

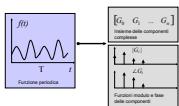
Il filtro offline opera come segue:

- calcola la FFT di un segnale registrato
- applica allo spettro ottenuto una maschera di qualsiasi natura, anche non lineare, in grado di ridurre le componenti indesiderate
- antitrasforma per ottenere il segnale filtrato

### Vantaggi del filtraggio offline:

1. si può applicare una maschera corrispondente al modulo della funzione di trasferimento e fase pari a zero. In altre parole **è possibile filtrare le componenti desiderate senza introdurre alcun ritardo**. Cosa non possibile nei filtri in tempo reale;

2. È possibile applicare maschere di qualsiasi natura e modello matematico, in altre parole anche maschere non lineari. Nel caso dei filtri in tempo reale



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 42

progettati a partire da sistemi lineari è possibile invece solo applicare andamenti regolati da funzioni di trasferimento contenenti zeri e poli del primo o del secondo ordine.

Costruzione del filtro in frequenza

```

% Si costruisce la parte corrispondente alle frequenze positive:
filtro = exp(-0.01 * (0:floor(ss/2)).^2); % Notare che e' un vettore reale

% Si aggiunge la parte corrispondente alle frequenze negative (in coda e invertita)
% facendo attenzione al fatto che il primo campione deve corrispondere alla
% continua mentre l'ultimo alla prima componente negativa (ovvero la componente
% continua non si ripete nello spettro)
filtroNeg = fliplr(filtro);
filtroNeg = filtroNeg(1:end-1);
filtro = [filtro filtroNeg];

```

Filtro Post Processing:

```
sfft_F = s_FFT .* filtro;
```

Per la rappresentazione, costruiamo la base delle frequenze come si usa fare da -inf a +inf

```
f = 0: floor(length(K)/2);
fplot = [f -fliplr(f(2:end))];
```

```
figure, plot(fplot, filtro, fplot, abs(s_FFT)/ss, fplot, abs(sfft_F)/ss)
xlabel('Componenti armoniche')
```

```
figure, plot(1: floor(length(K)/2), filtro(1: floor(length(K)/2)))
hold on
```

```
stem(abs(s_FFT(1: floor(length(K)/2)))/ss)
stem(abs(sfft_F(1: floor(length(K)/2)))/ss, 'c')
xlabel('Componenti armoniche (solo positive)')
```

```
grid on
```

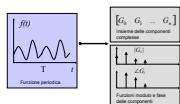
```
legend('Caratteristica in frequenza del filtro', 'Trasformata del segnale Originario', 'Trasformata del segnale Filtrato')
```

Calcoliamo il risultato nel tempo del filtraggio mediante antitrasformata

```
s_F = ifft(sfft_F);
```

Rappresentazione del segnale corrotto da rumore, di quello filtrato e di quello originario

```
figure, plot(K,s, 'b', K,sin(2*pi*K/T0), 'c', K,s_F, 'r')
legend('Segnale con rumore', 'Segnale Originario', 'Segnale Filtrato')
```



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 43

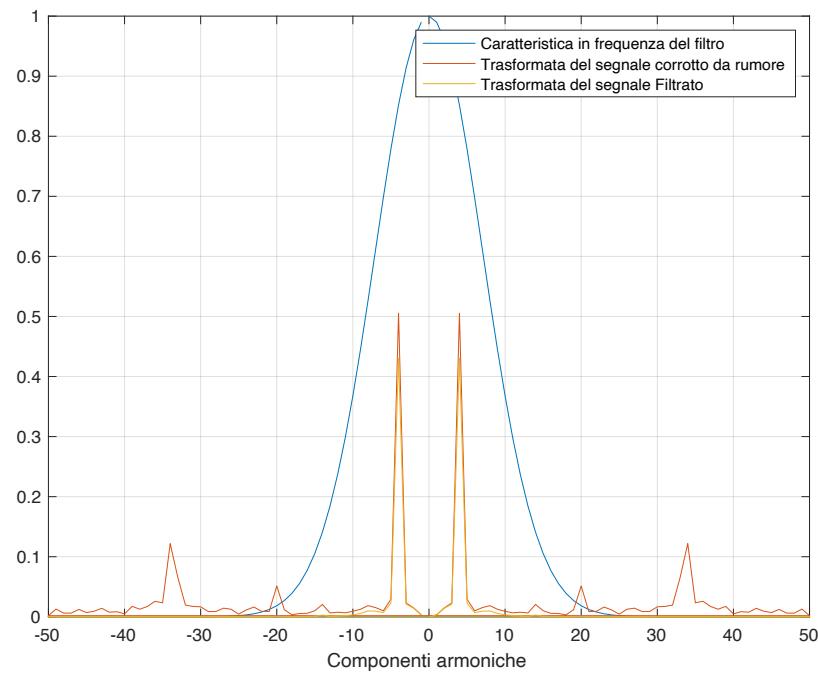
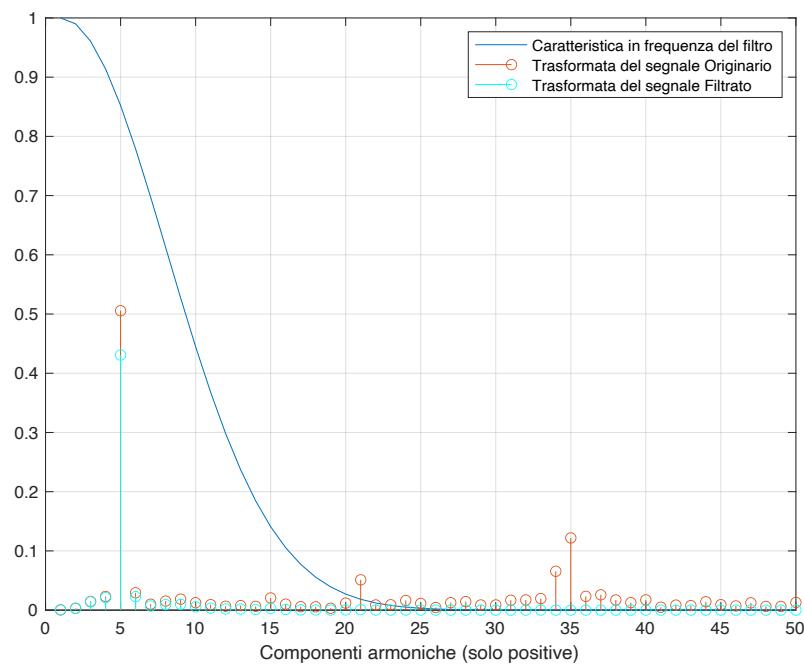
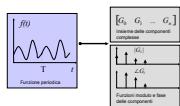


Figura - caratteristica in frequenza del filtro e spettri del segnale corrotto da rumore e filtrato.





## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 44

Figura - caratteristica in frequenza del filtro e spettri del segnale corrotto da rumore e filtrato. Zoom su componenti positive dello spettro.

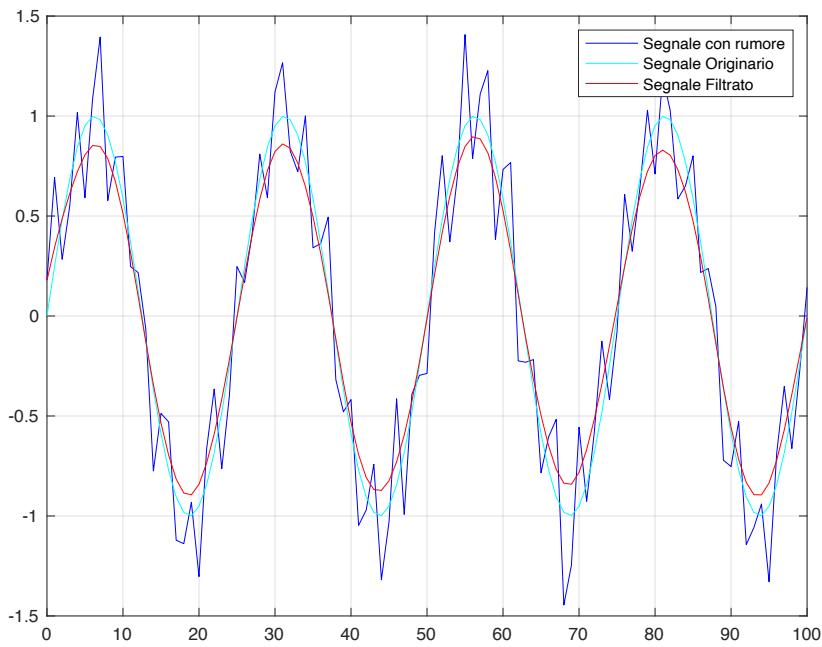
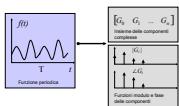


Figura - Segnale originale, corrotto da rumore e filtrato. Si nota una leggera attenuazione ma nessun effetto di ritardo. L'attenuazione è dovuta al fatto che la maschera adottata, un'esponenziale che parte da 1 a frequenza nulla e decade a 0 dopo alcuni campioni, in corrispondenza della quarta armonica è diversa da 1. Si potrebbe ovviamente impiegare maschere diverse che si mantengono pari a 1 per tutte le armoniche desiderate e decadono per quelle di rumore. Si potrebbe anche impiegare delle maschere 'digitali' ovvero che valgono 1 o 0 ma producono effetti indesiderati: è semplice provarle e percepire l'effetto.

### 3. Impiego della Funzione di trasferimento per la caratterizzazione di strumenti di misura - Taratura Dinamica

L'operazione di stima della funzione di trasferimento di uno strumento di misura prende il nome di taratura dinamica. È l'operazione duale della taratura statica in cui viene stimata la relazione, di solito polinomiale, che lega il misurando con l'uscita dello strumento supposta in condizioni statiche. Nel caso statico tale relazione è una funzione che può essere lineare o non lineare. Nel caso dinamico è invece una equazione differenziale che, per dare vita ad una funzione di trasferimento, ovvero ad una relazione analitica funzione della frequenza, deve essere lineare. In tali condizioni infatti, l'equazione differenziale, mediante trasformazione di Fourier, diviene una relazione algebrica e quindi rappresentabile tramite funzione di trasferimento. La funzione di



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 45

trasferimento  $H(\omega)$  è una funzione complessa della frequenza il cui modulo rappresenta come vengono amplificate od attenuate le varie componenti armoniche del segnale e la cui fase rappresenta come esse vengano sfasate. In definitiva, l'operazione di taratura dinamica di un sistema di misura ha come obiettivo quello di determinare una funzione complessa in modulo e fase ed i suoi parametri caratteristici.

In generale ci si trova di fronte a due casi:

1. non si conosce il modello matematico né i parametri del sistema di misura;
2. il modello matematico è noto ma non i suoi parametri.

In generale, nel primo caso occorre determinare la funzione di trasferimento direttamente nel suo dominio, ovvero in frequenza in quanto nulla è noto a priori. Nel secondo, essendo noto il modello matematico, ovvero l'equazione differenziale che regola la relazione tra le funzioni di ingresso e di uscita, è possibile impostare ingressi semplici (anche detti canonici, ad esempio il gradino) di cui sia nota la funzione di uscita in maniera parametrica in modo da identificarne i parametri mediante tecniche nel dominio del tempo.

### 3.1. Tecniche nel dominio della frequenza

Si dividono in due famiglie:

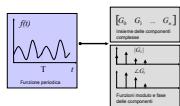
- mediante ingressi armonici, la cui frequenza viene fatta variare nel campo di interesse, e misura simultanea di ingresso ed uscita;
- mediante l'impiego di un ingresso dotato di tutte le armoniche di interesse e calcolo del rapporto tra la trasformata dell'uscita e quella dell'ingresso. Di tale tecnica esistono due sottocasi: ingresso impulsivo ed ingresso casuale.

#### 3.1.1. Mediante ingressi armonici variabili in frequenza

Nel paragrafo 2.5 abbiamo visto come l'uscita corrispondente ad un ingresso armonico sia anche essa armonica di ampiezza pari all'ampiezza dell'ingresso moltiplicata per il modulo della funzione di trasferimento calcolata in corrispondenza della frequenza dell'armonica stessa e sfasata rispetto all'ingresso di un angolo pari alla fase della funzione di trasferimento calcolata sempre in corrispondenza della frequenza dell'armonica.

Se l'ingresso è pari a  $u(t) = \sin(\omega_0 t)$ , l'uscita è  $y(t) = M(\omega_0) \cdot \sin(\omega_0 t + \Phi(\omega_0))$  e la funzione di trasferimento in corrispondenza dell'armonica  $\omega_0$  è proprio  $M(\omega_0) \cdot e^{j\Phi(\omega_0)}$ . Facendo variare la pulsazione (o la frequenza) dell'armonica dell'ingresso è possibile costruire per punti la funzione di trasferimento in funzione della frequenza.

In figura 3.1 è rappresentata una schematizzazione del metodo in cui sono indicate le funzioni armoniche di ingresso ed uscita, le relative ampiezze ed i parametri temporali da



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 46

misurare per rappresentare modulo e fase della funzione di trasferimento in corrispondenza della pulsazione dell'armonica imposta in ingresso.

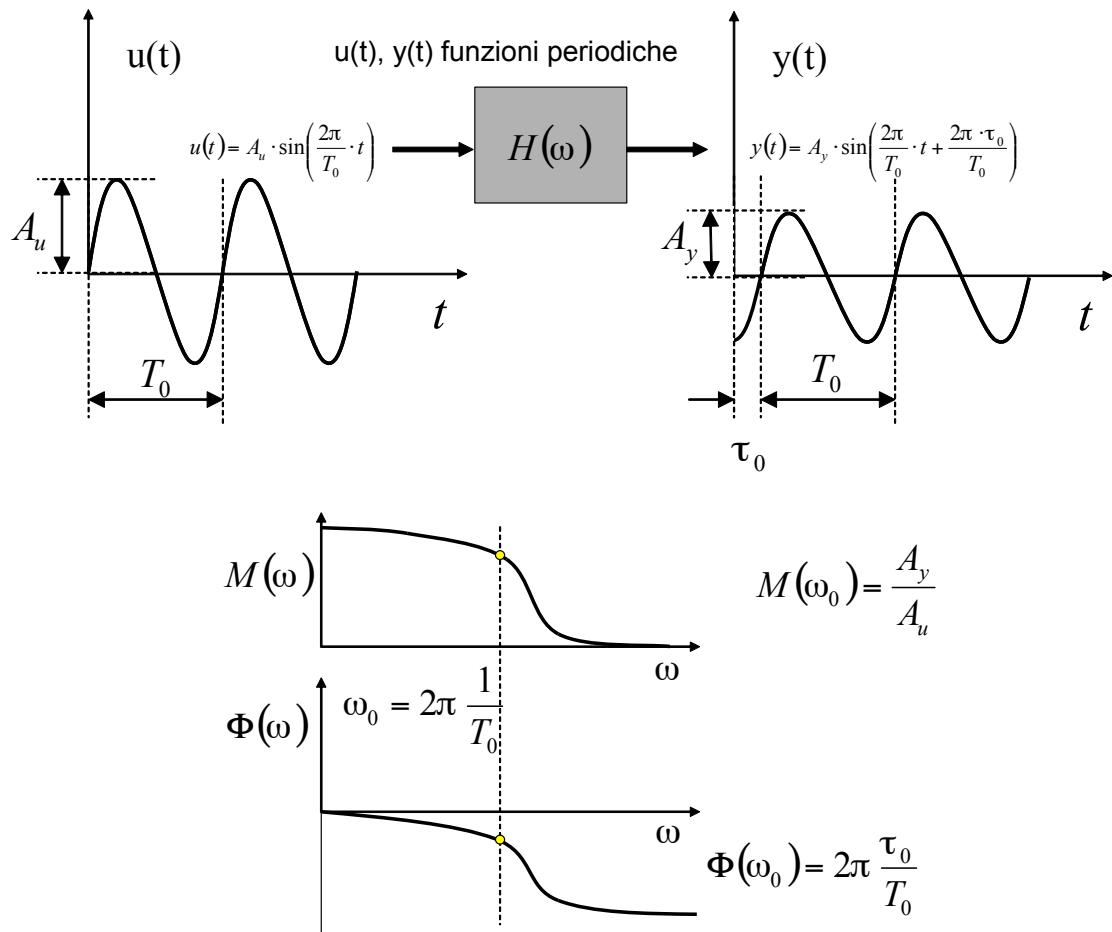
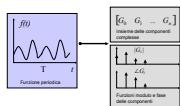


Fig. 3.1 Costruzione della funzione di trasferimento per punti mediante ingressi armonici puri.

Tale tecnica, concettualmente molto semplice, è praticabile solo quando la grandezza di ingresso, ovvero il misurando, è possibile generarlo sotto forma di una armonica pura. Tipicamente nel caso elettrico mediante generatori di funzione che producono segnali in tensione molto aderenti alla rappresentazione di una armonica pura. E nel caso meccanico mediante eccitatori elettrodinamici che producono moti armonici in spostamento, velocità ed accelerazione.

Esistono grandezze per le quali tale tecnica sarebbe di difficile impiego. Non esiste ad esempio un modo pratico ed accurato di generare una sinusoida in temperatura.



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 47

### 3.1.2. Mediante rapporto tra le trasformate

Un segnale impulsivo ideale possiede tutte le armoniche. Se calcoliamo infatti la trasformata dell'impulso rappresentato come delta di Dirac, avremo:

$$u(t) = \delta(t) \quad U(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-i\omega t} dt = 1 \quad \forall \omega$$

Ovvero la trasformata di un ingresso impulsivo ideale ha modulo unitario e fase nulla per tutte le frequenze. Risulta quindi essere particolarmente indicato per ricavare la funzione di trasferimento. Ricordando infatti quanto detto nel paragrafo **Error!**

**Reference source not found.:**

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot U(\omega)$$

E quindi in questo caso:

$$Y(\omega) = H(\omega)$$

Ovvero risulta sufficiente impostare un ingresso impulsivo, registrare l'uscita  $y(t)$  e calcolarne la trasformata secondo Fourier.

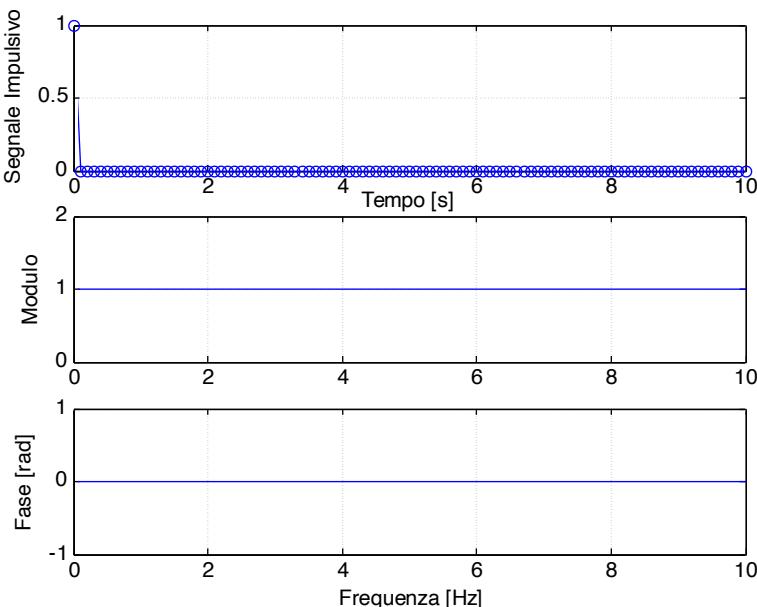
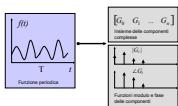


Fig. 3.2 Segnale impulsivo discreto in funzione del tempo, modulo e fase della sua trasformata in funzione della frequenza.



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 48

Proviamo a mescolare le fasi della trasformata dell'impulso assegnando valori casuali tra  $-2\pi$  e  $2\pi$  invece del valore nullo come per l'impulso. Il risultato è sorprendente: da un segnale assolutamente ‘ordinato’ come può essere definito l’impulso, si ottiene un segnale assolutamente casuale che apparentemente non ha nulla in comune con quello originario. In realtà sappiamo che conserva la proprietà di avere modulo costante pari all’unità.

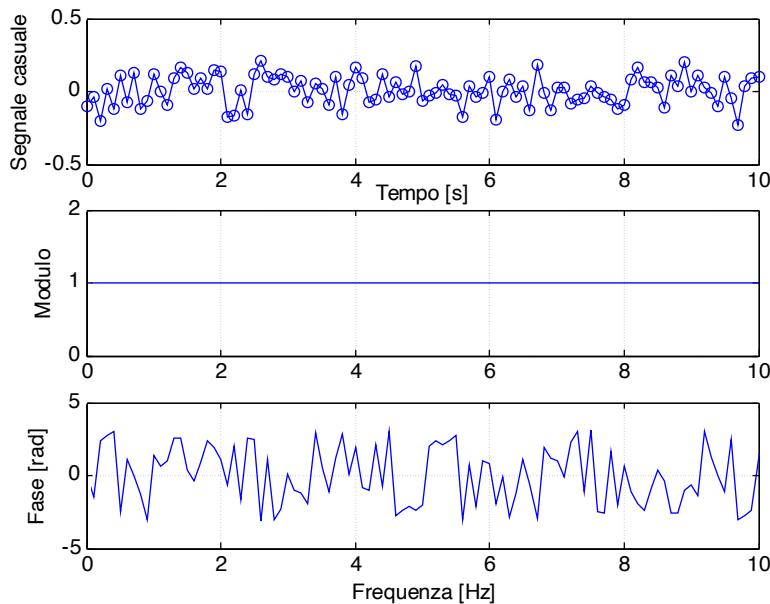


Fig. 3.3 Segnale casuale in funzione del tempo, modulo e fase della sua trasformata in funzione della frequenza.

Grazie al fatto che conserva la proprietà di avere modulo costante e pari all’unità, se  $Y(\omega) = M_Y(\omega) \cdot e^{i\Phi_Y(\omega)}$ , avremo:

$$Y(\omega) = M_H(\omega) \cdot e^{i\Phi_H(\omega)} \cdot M_U(\omega) \cdot e^{i\Phi_U(\omega)} = M_H(\omega) \cdot e^{i\Phi_H(\omega)} \cdot e^{i\Phi_U(\omega)} = M_H(\omega) \cdot e^{i(\Phi_H(\omega) + \Phi_U(\omega))}$$

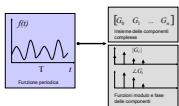
e quindi

$$M_H(\omega) = M_Y(\omega)$$

Per ottenere la fase della funzione di trasferimento occorrerà ovviamente determinare la differenza di fase tra uscita ed ingresso.

È chiaro che segnali impulsivi o casuali potrebbero avere valori dei moduli diversi dall’unità, in tale caso basterà dividere per tale valore.

In altre parole, anche un segnale casuale che ha la capacità di variare tra un istante ed il successivo il proprio valore in maniera del tutto scorrelata con il precedente, possiede



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 49

tutte le armoniche di ugual valore. L'andamento di un segnale casuale di questo tipo viene comunemente chiamato rumore bianco, analogamente alla luce bianca che possiede tutte le lunghezze d'onda del visibile in ugual misura.

Ad esempio nel caso meccanico è possibile applicare un ingresso di tipo impulsivo mediante un martello strumentato ed un ingresso di tipo casuale mediante un eccitatore elettrodinamico noto in termini anglosassoni come *shaker* comunemente impiegato per test di vibrazioni.

Anche in questo caso esistono grandezze per le quali tale tecnica sarebbe di difficile impiego. Non esiste ad esempio un modo pratico ed accurato di generare impulsi di portata fluidica.

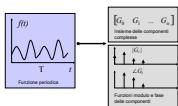
Si potrebbe pensare di impiegare un segnale qualsiasi in ingresso e ricavare la funzione di trasferimento mediante la nota relazione:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{U(\omega)}$$

Tale procedura è in linea di principio percorribile con il vincolo di non impiegare segnali che posseggano anche poche armoniche pressoché nulle nel campo di frequenza di interesse. Supponiamo infatti che la componente dell'ingresso per  $\omega_b$  sia quasi pari a zero. Poiché nella fase di registrazione dei segnali sarà certamente sovrapposto qualche effetto interferente, moduli e fasi saranno affetti da un'incertezza non necessariamente proporzionale ai valori delle componenti stesse, per cui:

$$M_H(\omega_b) = \frac{M_Y(\omega_b) \pm \varepsilon_Y}{M_U(\omega_b) \pm \varepsilon_U} \approx \left| \frac{\varepsilon_Y}{\varepsilon_U} \right|$$

Ovvero, con elevata probabilità, il modulo della funzione di trasferimento in corrispondenza di  $\omega_b$  verrebbe stimato in maniera totalmente errata. Questo vale anche per la fase anche se in tale caso si ha una relazione di sottrazione. Inoltre, se un'armonica ha ampiezza limitata, risulta molto difficile determinarne il valore sia del modulo che della fase.



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 50

### 3.2. Tecniche nel dominio del tempo

#### 3.2.1. Mediante ingressi canonici e modello matematico

Per illustrare questo secondo caso impieghiamo un esempio. Consideriamo una sonda PT100 per la misura della temperatura (figura 3.4). Essa avrà una energia pari a  $E = M \cdot c \cdot T$ , mentre il flusso di calore tra la sonda e l'ambiente (un fluido) in cui essa viene immersa è pari a  $P = \alpha \cdot A \cdot (T_F - T)$ . Per  $M$  si intende la massa della sonda, per  $c$  il suo calore specifico, per  $T$  la temperatura della sonda, per  $T_F$  la temperatura del fluido, per  $\alpha$  il coefficiente di scambio termico (convettivo o conduttivo che sia, considerato costante), per  $A$  l'area equivalente. Poiché il flusso di calore rappresenta l'energia trasmessa nell'unità di tempo, ovvero la potenza entrante nel sistema sonda (positivo quando la temperatura del fluido è maggiore), è immediato ricavare la relazione differenziale che esiste tra le variabili sopra indicate:

$$\frac{dE}{dt} = P$$

e quindi:

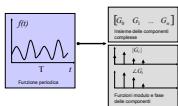
$$M \cdot c \cdot \frac{dT}{dt} = \alpha \cdot A \cdot (T_F - T)$$

Tale relazione differenziale lineare, mediante trasformazione secondo Fourier, diviene una relazione algebrica tra l'ingresso  $T_F(\omega)$  che rappresenta il misurando e l'uscita  $T(\omega)$  che rappresenta la variabile proporzionale all'uscita (proporzionale al valore della resistenza letta dalla centralina di condizionamento PT100 realizzata mediante ponte di Wheatstone o lettura a 4 fili):

$$H(\omega) = \frac{T(\omega)}{T_F(\omega)} = \frac{1}{1 + i\omega \frac{Mc}{\alpha A}}$$

Effettuare la taratura dinamica vuol dire determinare il rapporto  $\frac{Mc}{\alpha A}$  che ha le dimensioni di un tempo e per questo viene indicato con il simbolo  $\tau$ .

Si potrebbe procedere con un ingresso armonico, impulsivo o casuale, ma nel caso della variabile temperatura questo non è molto agevole. Si preferisce usare invece l'ingresso canonico gradino in cui la temperatura del fluido a contatto con la sonda passi improvvisamente da un valore  $T_I$  ad un valore  $T_F$ . Questa operazione è facilmente ottenibile prendendo la sonda dalla sua custodia a temperatura ambiente ed inserendola in



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 51

un fluido (od in un alloggiamento di un corpo solido, ad esempio una piastra termostatata) a temperatura diversa e costante. L'operazione di inserimento non sarà ovviamente istantanea ma sicuramente molto più veloce della risposta della sonda, per cui sarà possibile considerarla istantanea. Non lo sarebbe se considerassimo un fenomeno elettrico come ad esempio la capacità tra due corpi che ha tempi di risposta di gran lunga più veloci rispetto al fenomeno termico. Si suppone che il fluido a temperatura costante non venga perturbato dall'inserimento della sonda.

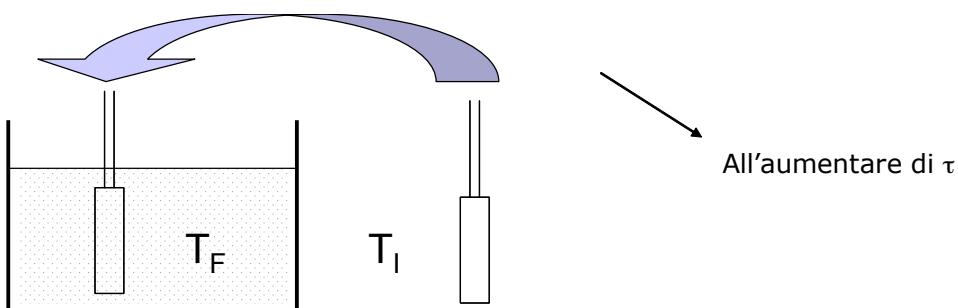


Fig. 3.4 ingresso a gradino ‘termico’: la sonda da temperatura ambiente  $T_I = 30^\circ$  viene inserita all’interno di un fluido a temperatura  $T_F = 100^\circ$ . A destra la soluzione dell’equazione differenziale che risulta tanto più rapida quanto minore è la costante di tempo  $\tau$ .

La soluzione dell’equazione differenziale è nota in forma chiusa per ingressi canonici:

$$T(t) = (T_I - T_F) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + T_F$$

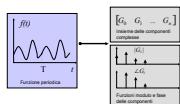
Da questa è possibile ricavare il parametro  $\tau$  della funzione di trasferimento mediante tre metodologie:

1. intercetta della costante di tempo sull’andamento esponenziale;
2. interpolazione lineare dopo linearizzazione mediante calcolo del logaritmo;
3. interpolazione mediante il modello stesso della soluzione.

### Primo metodo:

manipolando la soluzione dell’equazione differenziale si ottiene:

$$\begin{aligned} T(\tau) &= (T_I - T_F) \cdot e^{-1} + T_F \\ T_F - T(\tau) &= (T_F - T_I) \cdot 0.368 \end{aligned}$$



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 52

Da cui è possibile ricavare la costante di tempo direttamente mediante intercetta sull'andamento esponenziale (figura 3.5).

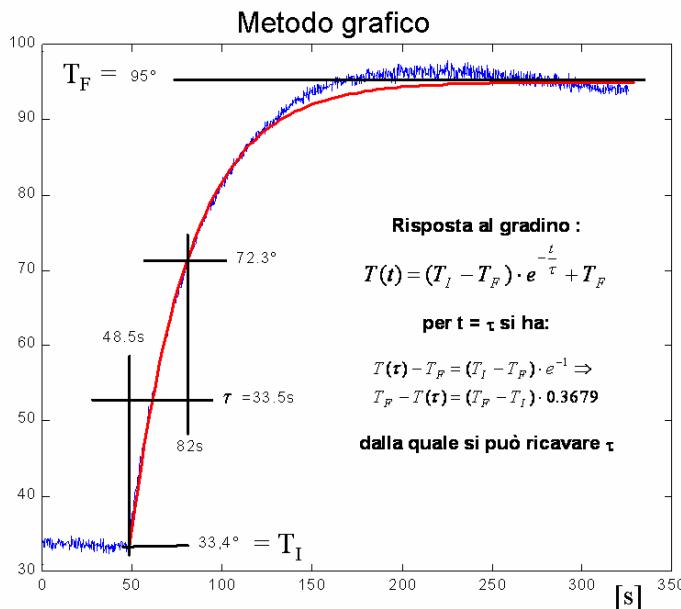


Fig. 3.5 Andamento sperimentale dell'uscita di una sonda PT100 inserita all'interno di una piastra termostatata.

### Secondo metodo:

È anche possibile linearizzare la soluzione dell'equazione differenziale in maniera molto semplice:

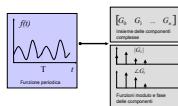
$$T(t) = (T_I - T_F) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + T_F \Rightarrow$$

$$\frac{T(t) - T_F}{T_I - T_F} = e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow$$

$$\ln\left(\frac{T(t) - T_F}{T_I - T_F}\right) = -\frac{t}{\tau}$$

Da questa ultima relazione, supponendo di aver campionato l'andamento temporale dell'uscita con frequenza  $f_c$  pari a  $1/T_c$ , si otterranno i seguenti dati sperimentali:

$$\ln\left(\frac{T(k \cdot T_c) - T_F}{T_I - T_F}\right) = -\frac{k \cdot T_c}{\tau} \quad \forall k = 0 \dots N$$



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 53

L'andamento segue quindi una retta con coefficiente angolare negativo pari a  $-T_c/\tau$ . Mediante interpolazione lineare con modello privo di coefficiente costante, è possibile ricavare l'inverso della costante di tempo.

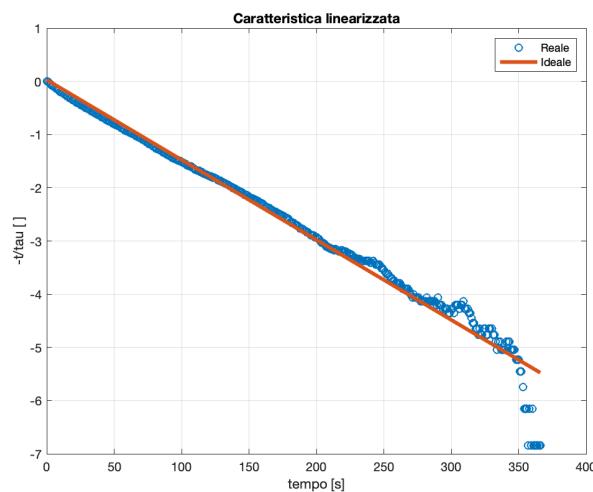


Fig. 3.6 Linearizzazione dell'andamento dell'uscita di una sonda PT100 inserita all'interno di una piasta termostatata.

### Terzo metodo:

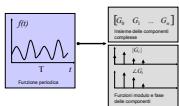
Poichè i due metodi appena discussi valgono soltanto per sistemi del primo ordine è necessario avere a disposizione metodi più generali allorquando il modello del sistema di misura sia di ordine maggiore.

Seguendo sempre lo stesso esempio, consideriamo di aver campionato l'andamento temporale dell'uscita con frequenza  $f_c$  pari a  $1/T_c$ , si otterranno, teoricamente, i seguenti dati sperimentali:

$$T(k \cdot T_c) = (T_I - T_F) \cdot e^{-\frac{k \cdot T_c}{\tau}} + T_F$$

Il primo termine a sinistra della relazione di uguaglianza rappresenta i dati sperimentali  $T_k^S$  campionati e quindi disponibili in forma digitale nella memoria del sistema di acquisizione. Il secondo rappresenta l'andamento teorico in funzione del tempo. Si tratta di una funzione non lineare del tempo ad un solo parametro incognito  $\tau$ , che può essere determinato mediante operazione di interpolazione ai minimi quadrati.

In pratica occorre minimizzare la somma dei residui al quadrato tra dati sperimentali e previsione del modello che risulta una funzione di  $\tau$ :



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 54

$$\Phi(\tau) = \sum_{k=0}^N \left( T_k^S - (T_I - T_F) \cdot e^{-\frac{k \cdot T_c}{\tau}} - T_F \right)^2$$

Nel caso di modelli matematici di ordine maggiore i parametri saranno più di uno quindi la minimizzazione sarà multivariabile. La procedura perfettamente analoga.

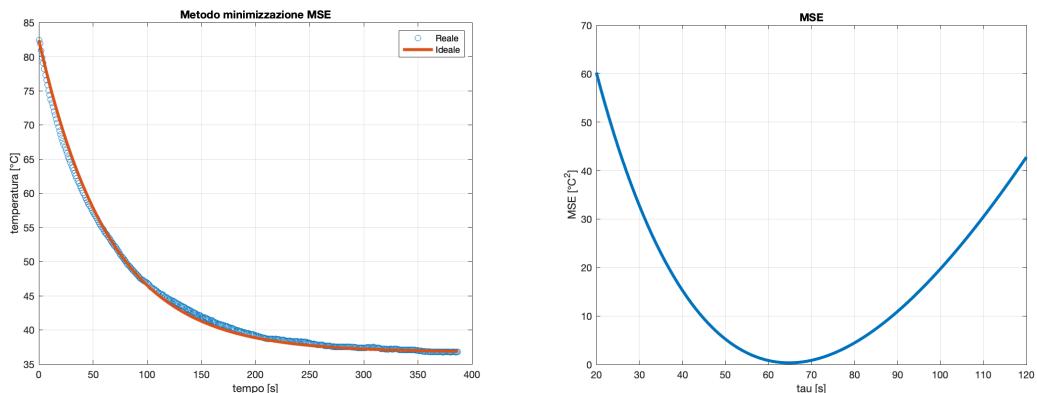
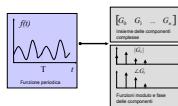


Fig. Esempio di andamento dell’interpolazione ai minimi quadrati e della funzione costo (MSE - Mean Square Errors) nella taratura di una PT100 nel caso di un gradino negativo (estrazione della sonda da un fluido caldo ed inserimento in un fluido a temperatura ambiente).

### 3.3. Considerazioni sulla relazione tra costante di tempo e funzione di trasferimento

Supponiamo di avere a disposizione una sonda PT100 per la quale risulta dalla operazione di taratura dinamica una costante di tempo pari a 10 s ed una sonda la cui costante è stata stimata 2 s. in figura 3.7 vengono riportati gli andamenti della risposta al gradino e della funzione di trasferimento in modulo e fase. Che relazione sussiste tra l’andamento temporale della risposta al gradino e l’andamento della funzione di trasferimento?



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 55

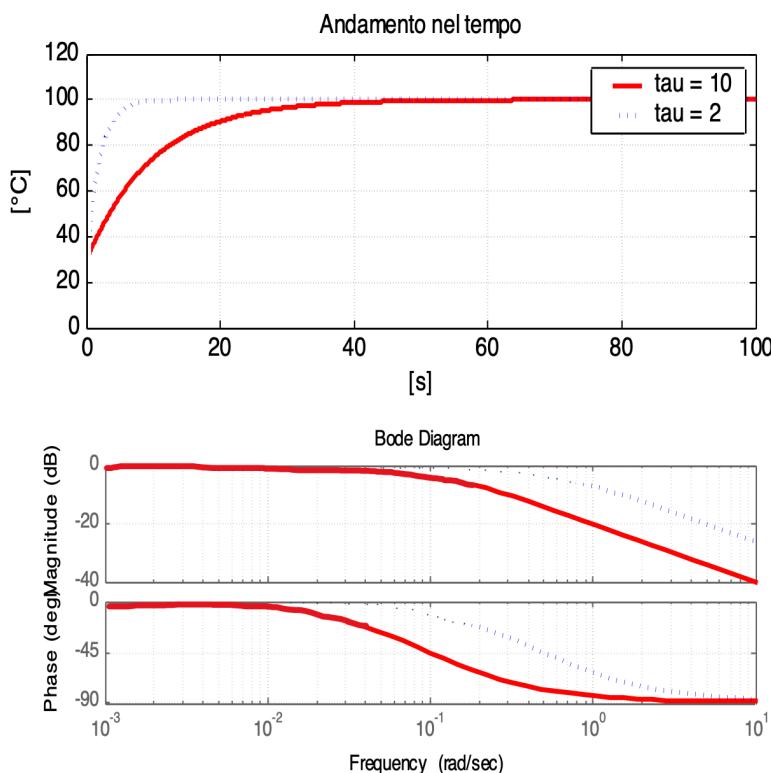
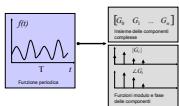


Fig. 3.7 Andamenti della risposta al gradino e della funzione di trasferimento in modulo e fase per due sonde PT100 di cui una con costante di tempo pari a 10 s e l'altra 2 s. Notare che gli andamenti della funzione di trasferimento sono riportati in scala logaritmica secondo la convenzione dei diagrammi di Bode, dunque 0 corrisponde ad 1 nel modulo per le basse frequenze.

Come visto nel § 3.2, quanto più  $\tau$  è piccola tanto più rapida sarà la risposta dello strumento. In relazione alla funzione di trasferimento, quanto più  $\tau$  è piccola tanto maggiore sarà  $1/\tau$  che rappresenta la frequenza alla quale il modulo della funzione di trasferimento è pari a  $1/\sqrt{2}$  ed oltre la quale il valore si attenua sempre più (rif. Tracciamento dei diagrammi di Bode).

In altri termini quanto più  $\tau$  è piccola tanto più ampio sarà il campo di frequenze in cui la funzione di trasferimento ha modulo unitario. Poiché la funzione di trasferimento in modulo è pari al rapporto tra il modulo delle trasformata dell'uscita rispetto al modulo della trasformata dell'ingresso, quanto maggiore è tale campo di frequenze (**banda passante**) tanto maggiore è il numero di armoniche che vengono mantenute invariate nel passaggio tra ingresso ad uscita al sistema sonda di temperatura. In definitiva, facendo riferimento anche al § 2.1 ed alla figura 2.4, se l'uscita possiede un maggior numero di armoniche il suo andamento sarà dotato di variazioni più repentine, ovvero più rapido.



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 56

### 4. Compensazione (o Misura) Dinamica

In base a quanto visto nel paragrafo precedente si evince che, dato un sistema dinamico regolato da equazioni differenziali lineari, la caratteristica che determina in base alla forzante l'uscita è la funzione di trasferimento.

In un sistema di misura **la forzante/ingresso**  $u(t)$  è il **misurando**, mentre l'uscita corrisponde con il segnale che lo strumento restituisce. È proprio tramite la conoscenza della funzione di trasferimento che è possibile, avendo a disposizione l'uscita dello strumento, stimare il misurando e quindi effettuare l'operazione di misura (anche detta compensazione dinamica). Oppure verificare che l'andamento dell'uscita riproduce con un sufficiente grado di accuratezza l'andamento dell'ingresso a meno di eventuali ritardi. Tale condizione si verifica quando le armoniche dell'ingresso vengono tutte moltiplicate per lo stesso fattore di amplificazione (modulo della funzione di trasferimento) e sfasate in maniera trascurabile, oppure sfasate in maniera lineare con la pulsazione. La banda in frequenza in cui tale condizione si verifica viene definita banda passante.

Se le armoniche sono sfasate in maniera lineare con la pulsazione si ottiene infatti (eq. 13):

$$y(t) = M(\omega) \cdot \sin(\omega \cdot t + \Phi(\omega)) = M(\omega) \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot \omega) = M(\omega) \cdot \sin(\omega \cdot (t - k)) \quad \forall \omega$$

che non è altro se non un semplice ritardo. Nel caso in cui lo sfasamento non fosse lineare si avrebbe invece un rimescolamento delle armoniche che produrrebbe una distorsione del segnale.

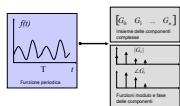
Come evidente dalla figura seguente, nel caso di uno zero del primo ordine il modulo è approssimabile con 1 per pulsazioni basse rispetto a  $\frac{1}{\tau}$  (prima di una decade prima). La fase è pari ad  $\text{atan}(\omega \cdot \tau)$ . A sua volta la funzione arcotangente è approssimabile con la seguente serie di Taylor valida nell'intervallo  $-1, 1$ :

$$\text{atan}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cdot x^{2k+1}$$

Dunque, per  $x$  molto piccoli si può approssimare al primo ordine, ovvero:

$$\text{atan}(x) \cong x$$

Quindi la fase, per valori di pulsazione/frequenza bassi, la possiamo approssimare con  $\omega \cdot \tau$  che porta ad avere un'uscita pari a:



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 57

$$y(t) = M(\omega) \cdot \sin(\omega t + \Phi(\omega)) = \sin(\omega t + \omega \tau) = \sin(\omega(t + \tau))$$

Ovvero un anticipo esattamente uguale alla costante di tempo. Nel caso di un polo del primo ordine, poiché il termine si trova al denominatore il modulo sarà invertito (quindi approssimabile con 1) come la fase che sarà approssimabile con  $-\omega \cdot \tau$  che porterà ad un ritardo esattamente uguale alla costante di tempo.

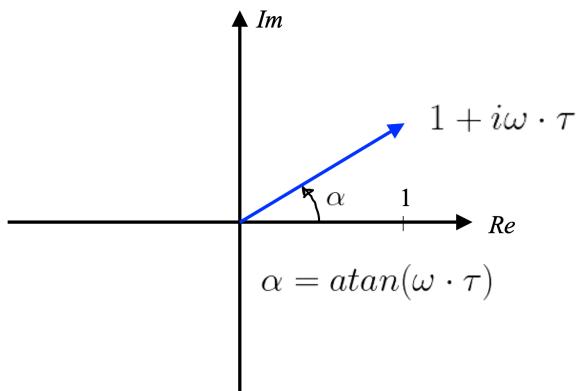


Fig. Fase di uno zero del primo ordine.

Nel caso in cui il misurando sia fuori dalla banda passante è possibile **Stimar**lo avendo a disposizione l'uscita ed a patto di compensare le attenuazioni e gli sfasamenti non lineari conoscendo la funzione di trasferimento.

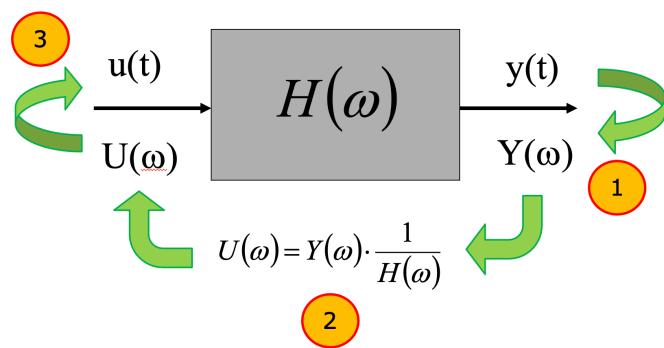
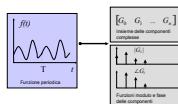


Fig. 3.2 Relazione funzionale tra l'ingresso allo strumento di misura (misurando  $u(t)$ ) e la sua uscita  $y(t)$ .



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 58

I passaggi per la misura o compensazione dinamica avendo a disposizione l'intero segnale d'uscita (ipotizzando di operare in posto processing/offline) sono i seguenti:

1. l'uscita dello strumento viene trasformata secondo Fourier ottenendo  $Y(\omega)$
2. Invertendo la funzione di trasferimento si ottiene  $U(\omega) = H^{-1}(\omega) \cdot Y(\omega)$
3. antitrasformando si ottiene  $u(t)$

### 4.1. Effetto dei disturbi interferenti

Altro effetto da considerare allorquando si effettua la compensazione dinamica è quello degli ingressi di disturbo. In particolare di quelli di tipo interferente che possono essere schematizzati come mostrato in figura 3.3. Nel caso in cui l'effetto di tali ingressi sia importante ed abbia componenti in frequenza sino a frequenze molto elevate, l'operazione di compensazione dinamica rischia di amplificare il rumore piuttosto che ricostituire le armoniche originarie del misurando.

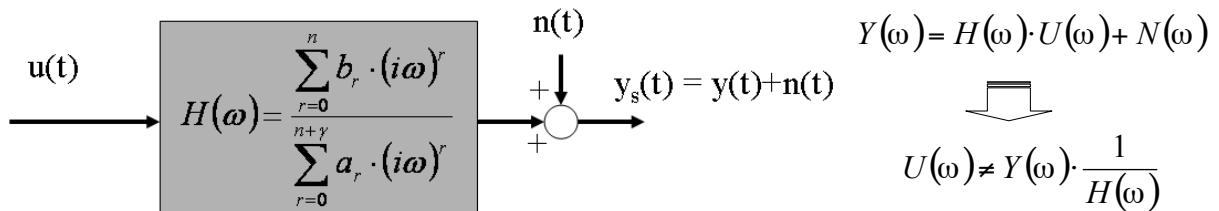
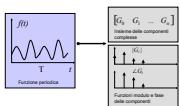


Fig. 3.3 Relazione funzionale tra l'ingresso allo strumento di misura (misurando  $u(t)$ ) e la corrispondente uscita  $y(t)$  in presenza di ingresso interferente.

Gli ingressi interferenti casuali e ad ampia dinamica sono spesso causati da interferenze elettromagnetiche, rumore termico, errori di quantizzazione nella conversione analogico-digitale. Tali effetti vengono anche definiti rumore, e, nel caso abbia componenti in frequenza molto ampie, ovvero su tutto il dominio delle frequenze di interesse, viene definito rumore bianco (dall'analogia con le onde elettromagnetiche che, nel caso contengano tutte le lunghezze d'onda, la luce corrispondente risulta bianca).

Il problema risiede nel fatto che, essendo un qualsiasi sistema reale passa-basso (ovvero sicuramente dopo una certa frequenza provoca un'attenuazione), il suo opposto sarà una funzione di trasferimento che tende ad amplificare in maniera sempre maggiore le frequenze elevate. Poiché il rumore che è presente nelle applicazioni pratiche si avvicina spesso al rumore bianco, l'amplificazione delle componenti armoniche elevate provoca una ricostruzione del misurando in cui le componenti di rumore ad elevata frequenza sono notevolmente amplificate:



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 59

$$U(\omega) = H^{-1}(\omega) \cdot Y(\omega) - H^{-1}(\omega) \cdot N(\omega)$$

Per risolvere tale problematica occorre preventivamente effettuare un filtraggio passa-basso sui dati acquisiti in modo da ridurre il rumore ad ampia banda, ovvero  $N(\omega)$  dove  $H^{-1}(\omega)$  diviene molto elevata.

### 4.2. Misura o compensazione dinamica in tempo reale

E' possibile elaborare il risultato della misura (ad esempio l'uscita ddi una PT100) mediante un sistema che ha funzione di trasferimento opposta a quella dello strumento di misura:

$$H'(\omega) = \frac{Y'(\omega)}{U'(\omega)} = 100 \cdot i\omega + 1$$

da cui:

$$Y'(\omega) = 100 \cdot i\omega \cdot U'(\omega) + U'(\omega)$$

ed antitrasformando si ottiene:

$$y'(t) = 100 \cdot \frac{d}{dt} u'(t) + u'(t)$$

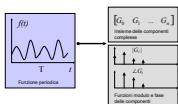
Aggiungendo un sistema che in uscita ha il segnale di ingresso più 100 (pari alla costante di tempo) volte la derivata dell'ingresso si ottiene la stima del misurando.

Nel caso di elaborazione tramite calcolatore occorre considerare il campionamento e l'approssimazione delle derivate mediante differenze finite (con la formula di eulero ad esempio) che porta ad ottenere:

$$y_k = 100 \cdot \frac{u_k - u_{k-1}}{T_c} + u_k$$

Da cui la ricorrenza:

$$y_k = \left(1 + \frac{100}{T_c}\right) \cdot u_k - \frac{100}{T_c} \cdot u_{k-1}$$



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 60

### 5. Funzioni di Trasferimento, Parametri concentrati ed Impedenze Generalizzate

Nel paragrafo 2.4 abbiamo visto come è possibile impiegare la trasformata per convertire un'equazione differenziale in un'equazione algebrica.

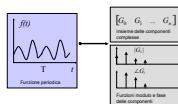
In questo paragrafo verranno mostrati i principi della modellazione di sistemi meccanici a parametri concentrati e la loro conversione in schemi alle impedenze generalizzate.

La modellazione a parametri concentrati consente di semplificare la modellazione di strutture meccaniche. L'impiego delle impedenze generalizzate utilizza la trasformata di Fourier e consente ulteriormente di:

- evitare di impostare equazioni differenziali:** grazie al fatto che si ragiona nel dominio della frequenza le relazioni differenziali verranno direttamente sostituite dalle corrispondenti relazioni algebriche;
- determinare le funzioni di trasferimento mediante metodologie analoghe all'analisi dei circuiti elettrici:** verranno determinate reti equivalenti mediante la connessione di elementi meccanici basilari: masse, molle e smorzatori.

#### 5.1. Modellazione a Parametri Concentrati

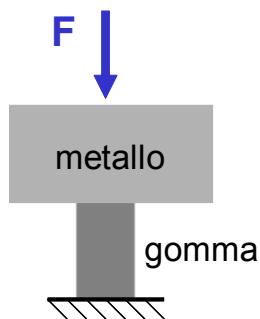
Nel caso di strutture meccaniche è possibile ragionare in termini di parametri distribuiti od in termini di parametri concentrati. Confrontando il primo rispetto al secondo caso si ottengono relazioni matematicamente molto più semplici ed intuitive a patto di trascurare gli effetti modali e l'analisi delle vibrazioni. Allorquando i fenomeni di interesse non siano connessi con le vibrazioni modali, è auspicabile una trattazione semplificata che riduce i teoricamente infiniti gradi di libertà del continuo (ogni punto di una struttura ha una velocità diversa rispetto a tutti gli altri punti) in un numero molto limitato in modo da poter trattare il problema mediante relazioni matematiche esplicite. Quando ciò non è lecito l'alternativa è quella di suddividere la struttura in un numero molto grande (ma comunque finito) di parti (ciascuno dotato di un grado di libertà g.d.l.) modellando il contatto mediante molle e smorzatori che tengono conto delle caratteristiche del materiale e quindi determinano le relazioni matematiche la cui soluzione viene determinata non più 'a mano', ma per via numerica tramite calcolatore impiegando i cosiddetti codici agli elementi finiti - FEM.



Data: 24/03/2024  
Pagina: 61

## Elaborazione e Misure in regime dinamico

### SCHEMA MECCANICO



1: sistema meccanico costituito da una massa metallica appoggiata su di un supporto di gomma.

Si considera solamente il moto in direzione verticale.

### DISAGGREGAZIONE DEL SISTEMA

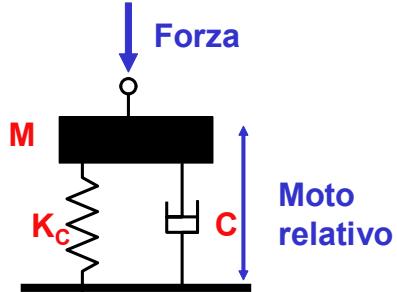


2: semplificazione del sistema.

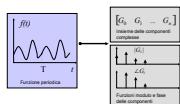
Il blocco metallico equivale ad una massa se si trascura la sua deformazione.

Il supporto in gomma equivale ad una molla ed uno smorzatore se si trascura la sua massa (oppure la si accorda al blocco metallico).

### SCHEMA A PARAMETRI CONCENTRATI



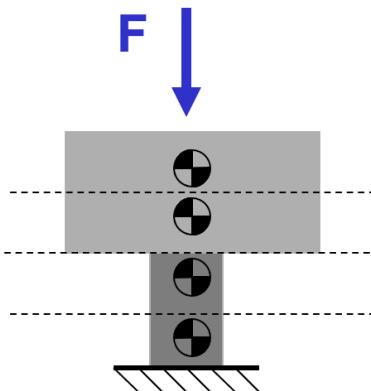
3: si considera il moto della massa rispetto alla base della struttura supponendo che tutti i punti si muovono verticalmente allo stesso modo: si semplificano tutti i gradi di libertà del modello reale in un solo grado di libertà e si concentra la modellazione in soli tre parametri (che per questo si dicono concentrati) massa M, smorzatore C e molla K.



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

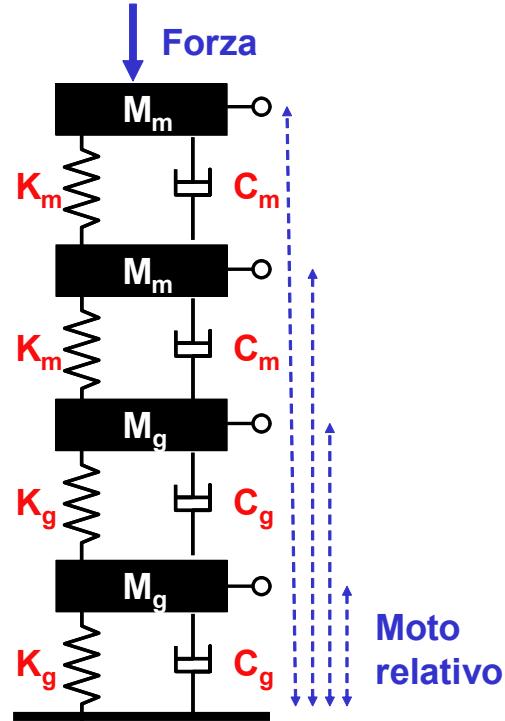
Data: 24/03/2024

Pagina: 62



: grado di libertà: tutti i punti della struttura da esso rappresentati posseggono la stessa velocità e fluisce la stessa forza

Invece che considerare i blocchi metallico e di gomma come unità auto contenute ed a se stanti, si considera che è possibile un moto relativo tra le facce del blocco metallico ed (analogamente) che il moto verticale della gomma può essere diverso nella parte superiore rispetto a quella inferiore.

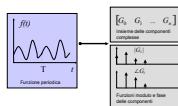


Ogni g.d.l. corrisponde ad un nodo (od un terminale) che rappresenta una parte della struttura il cui moto viene considerato globalmente riferito ad un punto fisso (tipicamente l'origine di un sistema inerziale) ed il cui moto relativo è influenzato dai parametri rigidezza e smorzamento.

Ad ogni nodo risulta essere solidale una massa di entità pari alla parte di struttura considerata muoversi assieme e corrispondente al relativo grado di libertà.

Il modello a 4 g.d.l. non è più significativo né accurato, bensì sarebbe più corretto concludere che è semplicemente più complicato del modello ad un singolo grado di libertà. Per ottenere infatti un modello in grado di predire le vibrazioni strutturali occorre introdurre molti altri g.d.l. (in un modo analogo al passaggio da uno a quattro g.d.l.) e quindi richiedere l'assistenza del calcolatore e dei codici agli elementi finiti.

Mentre ogni grado di libertà corrisponde ad un nodo dello schema meccanico, ogni parametro regola la relazione differenziale che sussiste tra una coppia di nodi (o g.d.l.). Ad esempio il parametro massa regola la relazione tra l'accelerazione e la forza come  $f = M \cdot a$ . Una rigidezza impone  $f = K \cdot x$ , uno smorzamento viscoso  $f = C \cdot v$ .



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 63

Se si esprime tutto in relazione della velocità si ottengono le seguenti relazioni differenziali:

- $f = M \cdot \dot{v}$
- $f = C \cdot v$
- $f = K \cdot \int_0^t v(\xi) \cdot d\xi$

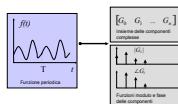
### 5.2. Le Impedenze Generalizzate

Il concetto dell'impedenza è molto usata nell'ambito delle reti elettriche in cui ogni elemento (resistenza, capacità, induttanza) corrisponde ad una impedenza che altro non è se non una relazione algebrica nel dominio della frequenza che lega la trasformata della variabile di sforzo tensione alla trasformata della variabile di portata intensità di corrente elettrica. Il prodotto della variabile di sforzo per la variabile di portata corrisponde alla potenza che fluisce attraverso il componente elettrico. La variabile di sforzo assume un valore che va sempre riferito tra due terminali (differenza di potenziale tra due punti diversi del circuito); la variabile di portata assume invece un valore che fluisce da un terminale all'altro attraverso l'elemento considerato (resistenza, capacità, ...). L'impedenza elettrica è il rapporto tra la trasformata della variabile di sforzo (tensione) e la trasformata della variabile di portata (corrente).

Nell'ambito meccanico esistono gli stessi componenti di base che permettono di definire e risolvere reti equivalenti alle impedenze generalizzate: massa, molla e smorzatore. La differenza sostanziale è che risulta essere tecnologicamente molto più difficile realizzare componenti di base meccanici che posseggono le proprietà di solamente un elemento costituivo. Si pensi ad esempio di voler realizzare un elemento puramente smorzatore; si può realizzare un cilindro entro il quale scorre un pistone, non si riuscirà mai però a realizzare un elemento per il quale la massa sia realmente trascurabile. Tutto ciò vale anche per i componenti elettrici: una resistenza possiede sempre componenti capacitive ed induttive, in percentuali però molto più basse rispetto a quelle che si possono ottenere in ambito meccanico.

La conseguenza di quanto appena osservato è che nei sistemi meccanici coesistono le proprietà costitutive che vanno modellate a seconda dello scopo a cui l'analisi in corso mira. Tale fase è proprio la modellazione a parametri concentrati discussa nel paragrafo 6.1.

In altre parole non esistono fisicamente delle reti meccaniche come esistono reti elettriche, ma bisogna ricondursi ad esse identificando i gradi di libertà ed i parametri più significativi che entrano in gioco nel sistema e soprattutto in base alla analisi da



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 64

effettuare: se si devono studiare effetti connessi con la propagazione delle vibrazioni di una struttura continua occorre prendere in considerazione molti gradi di libertà ed impiegare codici agli elementi finiti.

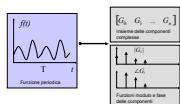
Parallelamente al caso elettrico esiste la variabile di sforzo velocità e la variabile di portata forza. Anche in questo caso il prodotto della variabile di sforzo per la variabile di portata corrisponde alla potenza che fluisce attraverso il componente meccanico. La velocità è la variabile di sforzo in quanto il suo valore è sempre riferito tra due punti (se è assoluta si intende comunque riferita ad un sistema inerziale); la forza è una variabile di portata (e non di sforzo come suggerirebbe il suo nome) in quanto fluisce tra due punti o terminali ovvero si trasferisce da una nodo all'altro del sistema (si pensi all'equilibrio statico di una struttura caricata sulla sommità, le forze attraverso gli elementi strutturali definiscono il fluire della forza attraverso la struttura).

L'impedenza meccanica è il rapporto tra la trasformata della variabile di sforzo (velocità) e la trasformata della variabile di portata (forza).

Numerosi altri fenomeni fisici, purchè lineari, possono essere trattati mediante le reti di impedenze generalizzate: fenomeni meccanici rotativi, pneumatici, termici, etc. (si faccia riferimento alla tabella). Per ognuno di tali fenomeni è valido il vincolo che stabilisce che il prodotto della variabile di sforzo per la variabile di portata costituisce la potenza in gioco.

La condizione di linearità per poter applicare le impedenze generalizzate è fondamentale in quanto l'impedenza è definita tramite trasformazione secondo Fourier. Sotto tale vincolo i fenomeni di non-linearità devono essere trascurati per cui ad esempio è possibile considerare l'attrito viscoso, ma è necessario trascurare l'attrito secco che introduce una relazione non lineare. Nel caso in cui tali fenomeni abbiano un peso tale da rendere prive di significato le considerazioni tratte mediante analisi alle impedenze generalizzate, occorre abbandonare l'approccio qui analizzato per l'impiego di codici di calcolo numerico. È da sottolineare che la sintesi e la comprensione raggiungibile mediante la trasformazione con Fourier, l'uso delle impedenze generalizzate e le reti corrispondenti non sono prerogativa delle soluzioni numeriche.

Fenomeno fisico	Variabile di sforzo	Variabile di portata	
Elettrico	Tensione	Corrente	
Meccanico	Velocità	Forza	
Meccanico rotazionale	Velocità angolare	Coppia	
Pneumatico	Differenza di pressione	Portata volumetrica	



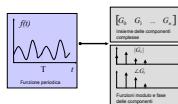
## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 65

Parametro e simbolo corrispondente	Relazione differenziale	Relazione nel dominio delle trasformate	Impedenza generalizzata	NOTA
	$f = M \cdot \dot{v}$	$F(\omega) = M \cdot i\omega \cdot V(\omega)$	$Z_M(\omega) = \frac{V(\omega)}{F(\omega)} = \frac{1}{i\omega \cdot M}$	Il moto di una massa è sempre riferito ad un sistema inerziale
	$f = C \cdot v$	$F(\omega) = C \cdot V(\omega)$	$Z_C(\omega) = \frac{V(\omega)}{F(\omega)} = \frac{1}{C}$	Il moto di uno smorzatore è sempre riferito tra due estremi
	$f = K \cdot \int v$	$F(\omega) = K \cdot \frac{1}{i\omega} \cdot V(\omega)$	$Z_K(\omega) = \frac{V(\omega)}{F(\omega)} = \frac{i\omega}{K}$	Il moto di una molla è sempre riferito tra due estremi

La differenza sostanziale tra le impedenze elettriche e le impedenze meccaniche è che, mentre per le prime la variabile di sforzo può essere sempre riferita a due terminali qualsiasi, per le seconde c'è il caso particolare della massa il cui moto è sempre riferito ad un sistema inerziale. Questo caso particolare va sempre tenuto a mente nel determinare le reti equivalenti ma, come si vedrà più avanti, consente di semplificare notevolmente il compito.



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 66

### 5.3. Procedura per la determinazione della rete equivalente

La procedura può essere sintetizzata nei seguenti passi:

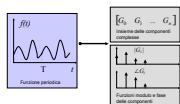
1. **Determinazione dei gradi di libertà** e dei **parametri concentrati** necessari a descrivere il fenomeno/sistema
2. **Schema impedenze generalizzate** con riportati:
  - a. i gradi di libertà ovvero i nodi corrispondenti
  - b. i parametri concentrati ovvero le impedenze corrispondenti
  - c. le grandezze di sforzo e portata del generatore (tipicamente l'ingresso) e del g.d.l. di interesse (tipicamente l'uscita)
3. **risoluzione circuito** per ricavare le relazioni dinamiche (funzioni di trasferimento) cercate e poterle rappresentare tramite diagramma di Bode

#### 5.3.1. Esempio di sistema per l'isolamento dalle vibrazioni

Si consideri un sistema meccanico costituito da una base metallica sottoposta a sollecitazione (ad esempio un sisma), uno strato di gomma ed un blocco di metallo che rappresenta lo strumento che si vuole disaccoppiare dal moto. Nel caso in cui si voglia analizzare quali componenti armoniche vengono trasmesse allo strumento ma non interessa andare a considerare l'accoppiamento con i modi di vibrare dello stesso strumento, è possibile operare come di seguito illustrato.

Di seguito alcuni esempi della procedura nei suoi passaggi fondamentali.

Passo	Schema	Descrizione
	<p>metallo gomma Base metallica molto sottile</p>	<p>Si consideri un sistema meccanico costituito da una base metallica molto sottile sottoposta a sollecitazione vibrazionale, uno strato di gomma ed un blocco di metallo (che rappresenta lo strumento che si vuole disaccoppiare dalle vibrazioni).</p>

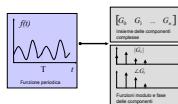


## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 67

<b>1</b> <p><b>●</b> : gradi di libertà (blocco metallico e base)</p>	<p>Nel sistema meccanico considerato è possibile trascurare le deformazioni delle parti metalliche (e quindi rigidezza ed attrito) e considerare la deformazione dello strato in gomma.</p> <p>I <b>gradi di libertà</b> da assegnare sono:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- moto della base (le cui parti si suppone abbiano lo stesso identico moto)</li> <li>- moto del blocco metallico (idem)</li> </ul> <p>In questa ottica i <b>parametri</b> da considerare sono: massa del blocco metallico, rigidezza ed attrito della gomma.</p> <p>Possono essere invece trascurati:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- massa della base</li> <li>- massa della gomma</li> <li>- deformabilità e smorzamento blocco metallico</li> </ul>
<b>2a</b> 	<p>Per ricavare lo <b>schema alle impedenze generalizzate</b> si parte dal disegnare i nodi corrispondenti ai gradi di libertà ed il riferimento inerziale terra.</p> <p>È utile disegnare a parte i parametri in gioco (massa, molla e smorzatore) e collocarli uno ad uno nei passaggi successivi.</p>
<b>2b</b> 	<p>Il moto di una massa è sempre riferito al sistema inerziale terra T per cui relativo parametro M viene disposto tra il nodo B (a cui sono considerate solidali tutte le sue parti) ed il nodo T.</p>
<b>2b</b> 	<p>Il moto dello smorzatore C è un moto relativo tra i due capi a cui è fisicamente connesso: A e B.</p>

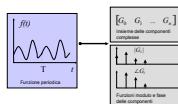


## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 68

2b		Il moto della molla $K_f$ è un moto relativo tra i due capi a cui è fisicamente connesso: A e B.
2c		Nello schema si deve avere cura affinché tutte le variabili di sforzo e portata siano rappresentate assieme ai parametri in gioco.
2c		
3		A questo punto risulta agevole ricavare le relazioni in frequenza che sussistono tra le grandezze in gioco. Potrebbero essere analizzate ad esempio le relazioni: $\frac{V_{BT}(\omega)}{V_{AT}(\omega)}, \frac{V_{BT}(\omega)}{F(\omega)}, \frac{V_{AT}(\omega)}{F(\omega)}$
3	$\frac{V_{BT}(\omega)}{V_{AT}(\omega)} = \frac{Z_2(\omega)}{Z_1(\omega) + Z_2(\omega)} = \frac{\frac{1}{i\omega \cdot M}}{\frac{1}{i\omega \cdot M} + \frac{K}{i\omega} + C}$	Sfruttando la regola del partitore di variabile di sforzo (in analogia elettrica partitore di tensione), si ricava la relazione che sussiste tra la velocità imposta alla base (nodo A) e la velocità risultante sul sistema (nodo B) entrambe riferite ad un sistema inerziale.
3	$\frac{V_{BT}(\omega)}{V_{AT}(\omega)} = \frac{\frac{1}{i\omega \cdot M}}{\frac{1}{i\omega \cdot M} + \frac{1}{K} + C} = \frac{\frac{K}{i\omega} + C}{\frac{K}{i\omega} + C + i\omega \cdot M}$	
3	$\frac{V_{BT}(\omega)}{V_{AT}(\omega)} = \frac{\frac{K}{i\omega} + C}{\frac{K}{i\omega} + C + i\omega \cdot M} = \frac{K + i\omega \cdot C}{K + i\omega \cdot C + (i\omega)^2 \cdot M}$	



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

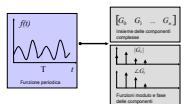
Data: 24/03/2024

Pagina: 69

<p>3</p> $\frac{V_{BT}(\omega)}{V_{AT}(\omega)} = \frac{K + i\omega \cdot C}{K + i\omega \cdot C + (i\omega)^2 \cdot M} = \frac{1 + i\omega \cdot \frac{C}{K}}{1 + i\omega \cdot \frac{C}{K} + \left( \frac{i\omega}{\sqrt{\frac{K}{M}}} \right)^2}$	
	<p>Mediante i comandi matlab seguenti si traccia il diagramma della funzione di trasferimento <math>\frac{V_{BT}(\omega)}{V_{AT}(\omega)}</math>.  <math>M = 10, K = 1000, C = 50</math>  <math>H = tf([C/K 1], [M/K C/K 1])</math>  <math>bode(H), grid</math></p> <p>Dal diagramma risulta evidente come le armoniche a bassa frequenza passano inalterate, quelle ad alta vengono attenuate e dunque la propensione del sistema all'isolamento delle vibrazioni. È anche chiaro che occorre progettare il sistema in maniera da ridurre la risonanza.</p>

### 5.3.2. Esempio a tre gradi di libertà

Passo	Schema	Descrizione

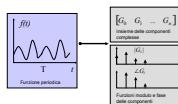


## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 70

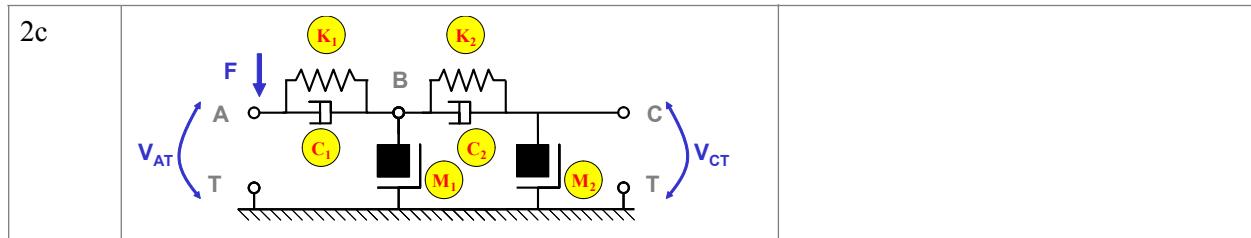
1	<p>Diagram of a two-story frame system. A horizontal force <math>F</math> acts on the base. Masses <math>M_1</math> and <math>M_2</math> are located at the top joints. At each joint, there are two degrees of freedom (indicated by a circle with a cross). The vertical displacement is denoted by <math>C_1</math> and <math>C_2</math>, and the horizontal displacement by <math>K_1</math> and <math>K_2</math>.</p>	
2a	<p>Diagram of a two-story frame system with a fixed base <math>T</math>. Masses <math>M_1</math> and <math>M_2</math> are located at the top joints. At each joint, there are two degrees of freedom (indicated by a circle with a cross). The vertical displacement is denoted by <math>C_1</math> and <math>C_2</math>, and the horizontal displacement by <math>K_1</math> and <math>K_2</math>.</p>	
2b	<p>Diagram of a two-story frame system with a fixed base <math>T</math>. Masses <math>M_1</math> and <math>M_2</math> are located at the top joints. At each joint, there are two degrees of freedom (indicated by a circle with a cross). The vertical displacement is denoted by <math>C_1</math> and <math>C_2</math>, and the horizontal displacement by <math>K_1</math> and <math>K_2</math>.</p>	
2b	<p>Diagram of a two-story frame system with a fixed base <math>T</math>. Masses <math>M_1</math> and <math>M_2</math> are located at the top joints. At each joint, there are two degrees of freedom (indicated by a circle with a cross). The vertical displacement is denoted by <math>C_1</math> and <math>C_2</math>, and the horizontal displacement by <math>K_1</math> and <math>K_2</math>.</p>	
2b	<p>Diagram of a two-story frame system with a fixed base <math>T</math>. Masses <math>M_1</math> and <math>M_2</math> are located at the top joints. At each joint, there are two degrees of freedom (indicated by a circle with a cross). The vertical displacement is denoted by <math>C_1</math> and <math>C_2</math>, and the horizontal displacement by <math>K_1</math> and <math>K_2</math>. A dashed circle highlights a subsystem involving joints <math>A</math> and <math>B</math>.</p>	



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

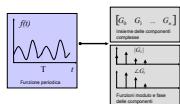
Pagina: 71



### 5.3.3. Esempio di accoppiamento rotativo motore-carico

Di seguito viene illustrata la procedura in tutti i suoi passaggi fondamentali.

Passo	Schema	Descrizione
	<p>Carico</p> <p>cuscinetti</p> <p>Motore (rotore)</p> <p>encoder</p> <p>Alberi trasmissione</p> <p>encoder</p> <p>Riferimento fisso o inerziale (ipotizzato coincidente con la struttura portante)</p>	<p>Si abbia un sistema costituito da un motore con encoder che pilota un carico a cui è montato un secondo encoder.</p> <p>In figura sono rappresentati solamente gli elementi rotanti:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- rotore del motore</li> <li>- carico rotante</li> <li>- alberi di trasmissione</li> <li>- cuscinetti (in cui sono indicati gli estremi connessi con le parti rotanti e quelli connessi con la terra ovvero il sistema inerziale)</li> </ul>

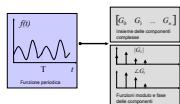


## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 72

1	<p>Diagram illustrating a motor-load system. The system consists of a motor with inertia <math>I_M</math> connected to a transmission shaft, which then connects to a load with inertia <math>I_L</math>. There are three degrees of freedom (DOFs) indicated: <math>I</math> at the motor end, <math>C</math> at the transmission shaft, and <math>K</math> at the load end. A legend below the diagram states: <math>\bullet</math> : gradi di libertà (motore e carico).</p>	<p>In un sistema motore-carico uno dei fenomeni rilevanti è l'oscillazione torsionale dell'albero motore.</p> <p>I gradi di libertà da assegnare sono:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- moto del rotore (tutte le parti solidali con rotore ed encoder motore hanno lo stesso identico moto)</li> <li>- moto del carico (tutte le parti solidali con carico ed encoder carico hanno lo stesso identico moto)</li> </ul> <p>I parametri da considerare sono: inerzia del motore e del carico, rigidezza dell'albero motore, effetto di attrito del cuscinetto che supporta il carico.</p> <p>Possono essere trascurati:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- rigidezze alberi di trasmissione encoder poco sollecitati;</li> <li>- attrito cuscinetti che supportano il motore (meno sollecitati rispetto a quelli che supportano il carico)</li> <li>- inerzie dei dischi encoder (molto minori rispetto alle inerzie di motore e carico)</li> <li>- inerzie alberi di trasmissione</li> </ul>
2a	<p>Schematic diagram of a mechanical system. Points A and B are free ends. Point T is a fixed support. A spring connects point B to a mass. A damper is connected between point B and a vertical spring, which in turn connects to a fixed base. Inertias <math>I_M</math> and <math>I_L</math> are associated with the motor and load respectively.</p>	
2b	<p>Schematic diagram of a mechanical system. Points A and B are free ends. Point T is a fixed support. A spring connects point B to a mass. A damper is connected between point B and a vertical spring, which in turn connects to a fixed base. Inertias <math>I_M</math> and <math>I_L</math> are associated with the motor and load respectively.</p>	

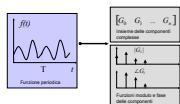


## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 73

2b		
2b-c		Nello schema si deve avere cura affinché tutte le variabili di sforzo e portata siano rappresentate assieme ai parametri in gioco.
2c		
3		A questo punto risulta agevole ricavare le relazioni in frequenza che sussistono tra le grandezze in gioco. Potrebbero essere analizzate ad esempio le relazioni: $\frac{\Omega_{BT}(\omega)}{\Omega_{AT}(\omega)}, \frac{\Omega_{BT}(\omega)}{T(\omega)}, \frac{\Omega_{AT}(\omega)}{T(\omega)}$
3	$\frac{\Omega_{BT}(\omega)}{\Omega_{AT}(\omega)} = \frac{Z_1(\omega)}{Z_1(\omega) + Z_2(\omega)} = \frac{\frac{1}{C + i\omega \cdot I_C}}{\frac{i\omega}{K} + \frac{1}{C + i\omega \cdot I_C}}$	Consideriamo la prima funzione che rappresenta la relazione che sussiste tra la misura dinamica dell'encoder posto sul carico e l'encoder solidale al motore.
3	$\frac{\Omega_{BT}(\omega)}{\Omega_{AT}(\omega)} = \frac{K}{K + i\omega \cdot C + (i\omega)^2 \cdot I_C}$	
3	$\frac{\Omega_{BT}(\omega)}{\Omega_{AT}(\omega)} = \frac{1}{1 + i\omega \cdot \frac{C}{K} + (i\omega)^2 \cdot \frac{I_C}{K}}$	Funzione di trasferimento in forma canonica

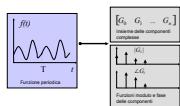


## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 74

3		<p>Mediante i comandi matlab seguenti si traccia il diagramma della funzione di trasferimento <math>\frac{\Omega_{BT}(\omega)}{\Omega_{AT}(\omega)}</math>.</p> <pre>Im = 40e-6; Ic = 10e-3; K = 5000; C = 1; H = tf([1], [Ic/K C/K 1]) figure, bode(H), grid</pre> <p>Dal diagramma risulta evidente come le armoniche a bassa frequenza risultano identiche per entrambi gli encoder, mentre le armoniche ad alta frequenza, seppur presenti nel nodo motore, vengono ridotte a livello del carico (tale effetto è comunemente conosciuto come effetto volano).</p>
	$\Omega_{AT}(\omega) \xrightarrow{\quad} \frac{1}{1 + i\omega \cdot \frac{C}{K} + (i\omega)^2 \cdot \frac{I_C}{K}} \xrightarrow{\quad} \Omega_{BT}(\omega)$	<p>Supponiamo di voler stimare il moto angolare del motore ma di disporre solamente dell'encoder solidale al carico.</p> <p>Si rappresenta il sistema corrispondente alla funzione di trasferimento appena determinata.</p>
		<p>Si acquisisce l'andamento nel tempo della velocità angolare del carico</p>
	$\omega_{BT}(t) \circ \bullet \Omega_{BT}(\omega)$	<p>Si trasforma secondo Fourier l'andamento temporale acquisito (se campionato mediante l'algoritmo numerico ottimizzato Fast Fourier Transform FFT)</p>
	$\Omega_{AT}(\omega) = \Omega_{BT}(\omega) \cdot \left( 1 + i\omega \cdot \frac{C}{K} + (i\omega)^2 \cdot \frac{I_C}{K} \right)$	<p>Si ricava la trasformata dell'andamento di velocità angolare del motore moltiplicando per l'inverso della funzione di trasferimento.</p>
		<p>Si antitrasforma</p>



## Elaborazione e Misure in regime dinamico

Data: 24/03/2024

Pagina: 75

### Bibliografia

- [1] F. Angrilli, Misure Meccaniche e Termiche, Cedam 2005
- [2] <http://fourier.eng.hmc.edu/e101/lectures/handout3/node2.html>
- [3] <http://fourier.eng.hmc.edu/e101/lectures/Fourier/>