Números Reais

→ Números naturais $\mathbb{N}$

Chama-se conjunto dos números naturais, $\mathbb{N}$, o conjunto

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Duas operações fundamentais são definidas: adição e multiplicação, com as seguintes propriedades.

→ Adição
- Associativa: $(a+b)+c = a+(b+c)$
- Comutativa: $a+b = b+a$
- Elemento neutro: $a+0 = a$

→ Multiplicação
- Associativa: $(ab)c = a(bc)$
- Comutativa: $ab = ba$
- Elemento neutro: $a \cdot 1 = a$

→ Distributiva da multiplicação em relação à adição

$$a(b+c) = ab + ac$$

→ Números inteiros $\mathbb{Z}$

O conjunto dos números inteiros, $\mathbb{Z}$, é definido por

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

Há três subconjuntos notáveis

1) $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N}$
2) $\mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$
3) $\mathbb{Z}^* = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$

Neste conjunto, também temos as operações adição e multiplicação. As propriedades definidas para $\mathbb{N}$ também são válidas para $\mathbb{Z}$. Aqui, temos mais a seguinte propriedade

→ Elemento simétrico ou oposto para a adição

$$a + (-a) = 0$$

Em $\mathbb{Z}$, temos a definição da operação de subtração: $a - b = a + (-b)$

→ Números racionais $\mathbb{Q}$

O conjunto dos números racionais, $\mathbb{Q}$, é formado pelas frações a/b, em que $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$. Neste conjunto, também temos as operações de adição e multiplicação, definidas abaixo:

→ Adição: $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ab + bc}{b.d}$

→ Multiplicação: $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$

Temos também a relação de igualdade:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc$$

Relembrando, na fração a/b, a é o numerador e b é o denominador.

A seguir, apresentamos algumas propriedades relacionadas às operações de adição e multiplicação.

→ $$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$$

→ $$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$$

→ $$\frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b}$$

→ $$\frac{a}{b} + \left(\frac{-a}{b}\right) = 0$$

→ $$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right)$$

→ $$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$$

→ $$\frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$$

→ $$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}$$

→ Elemento simétrico / inverso para a multiplicação

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1 \quad , \text{ para } a/b \neq 0$$

Agora, podemos definir a operação de divisão

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

→ Números irracionais $\mathbb{I}$

O conjunto dos números irracionais é composto pelos números que não podem ser representados por frações a/b. São esses os números com infinitas casas decimais que não se repetem. Por exemplo:

$\pi = 3,14159\ldots$

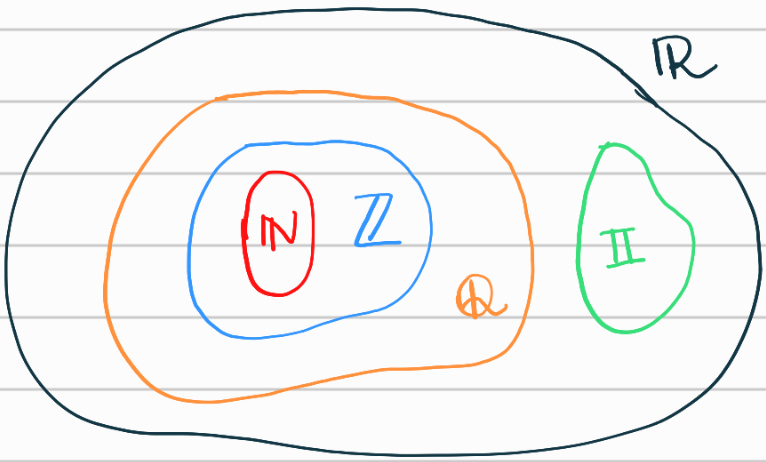
$e = 2,71828\ldots$

$\sqrt{2} = 1,414213\ldots$

→ Números reais $\mathbb{R}$

O conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, é formado pela união dos números racionais $\mathbb{Q}$ e irracionais $\mathbb{I}$. Assim como nos outros conjuntos, a adição e subtração são operações definidas em $\mathbb{R}$ assim como as propriedades apresentadas para $\mathbb{Q}$.

De forma esquemática, temos



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$

Valor absoluto

Seja x um número real, definimos o <u>módulo</u> (ou valor absoluto) de x por

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geqslant 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Logo, $|x| \geqslant 0$ para todo número x real.

Intervalos

Intervalos são subconjuntos, uma coleção específica de números dentro do conjunto dos números reais. Considerando dois números reais a e b, com $a < b$. Temos os possíveis intervalos

→ Intervalo fechado

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$

→ Intervalo aberto

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$

→ Intervalo semiaberto

$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$

$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

→ Intervalos infinitos

$[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a\}$

$(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

$(-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$

$(-\infty,a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

Frações

O quociente de a por b, onde $b \neq a$, representador por a/b é definido por

$$\text{numerador} \rightarrow \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$$
$$\text{denominador} \rightarrow$$

a/b também é denominado de fração ou razão.

→ Igualdade

Sendo $b \neq 0$ e $d \neq 0$, temos que

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{se e somente se} \quad ad = bc$$

→ Regra de sinais

- $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$
- $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$

→ Soma de frações

- $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ → mesmo denominador ($c \neq 0$)
- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{b \cdot d}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$

→ Produto de frações

Se $b \neq 0$ e $d \neq 0$,

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

→ Quociente de frações

Se $b \neq 0$, $d \neq 0$ e $c \neq 0$,

$$\frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Potências, raízes e logaritmo

→ Potências de expoente natural

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{n \text{ vezes}}$$

→ Operações

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- $(a\,b)^n = a^n \cdot b^n$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

→ Potência de expoente inteiro

Para qualquer $a \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$, temos

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$$

→ Raízes

Seja a um número positivo, e m e n números naturais. Desta forma, temos

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

→ Logaritmo

Sendo a e b números reais positivos com $b \neq 1$, chamamos de logaritmo de a na base b o expoente real x ao qual se eleva b para obter a, ou seja,

$$\log_b a = x \longleftrightarrow b^x = a \quad , \text{ com } a > 0, b > 0, b \neq 1$$

Os números 10 e e são bases especiais:

$$\log_{10} x = \log x$$

$$\log_e x = \ln x$$

Pela definição, temos

- $\log_b 1 = 0 \rightarrow b^0 = 1$
- $\log_b b = 1 \rightarrow b^1 = b$
- $\log_b b^m = m$
- $b^{\log_b a} = a \longrightarrow$ sendo $x = \log_b a$, $b^x = a$

Agora, apresentamos algumas propriedades operatórias

- $\log_b (a \cdot c) = \log_b a + \log_b c$
- $\log_b \left(\frac{a}{c}\right) = \log_b a - \log_b c$

- $\log_b a^m = m \log_b a$

Polinômios

De forma geral, um polinômio na variável x é indicado por $p(x)$ e é definido por uma soma de monômios.

↳ Monômios são termos algébricos cujo coeficiente é real e os expoentes são naturais.

↳ Exemplos: $7x^2$, $5xz$, x^6y^7, ...

→ **Soma e subtração:** para somar ou subtrair polinômios, deve-se somar ou subtrair apenas termos semelhantes (mesmas variáveis com os mesmos coeficientes)

- $(6x^3 + 2x^2 - 3x + 1) + (2x^3 - 4x^2 + 2x - 2) = (6+2)x^3 + (2-4)x^2 + (-3+2)x + (1-2)$

$$= 8x^3 - 2x^2 - x - 1$$

→ **Multiplicação:** é necessário realizar a multiplicação entre todos os termos.

- $(2x + y)(x^3 + 3x + 1) = 2x(x^3 + 3x + 1) + y(x^3 + 3x + 1)$

$$= 2x.x^3 + 2x.3x + 2x.1 + y.x^3 + y.3x + y.1$$

$$= 2x^4 + 6x^2 + 2x + yx^3 + 3xy + y$$

→ **Divisão:** em uma divisão, temos

$$\boxed{\frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} = \text{quociente} + \frac{\text{resto}}{\text{divisor}}} \rightarrow \begin{array}{l|l} \text{dividendo} & \text{divisor} \\ \cline{2-2} \vdots & \text{quociente} \\ \text{resto} & \end{array}$$

Abaixo, mostramos uma divisão do polinômio $5x^3+4-3x$ por x^2-x+1.

1) $5x^3+4-3x = 5x^3+0x^2-3x+4$

2)
$$\begin{array}{rrrr|l} 5x^3 & +0x^2 & -3x & +4 & x^2-x+1 \\ \hline -5x^3 & +5x^2 & -5x & & 5x+5 \\ \hline 0 & +5x^2 & -8x & +4 & \\ & -5x^2 & +5x & -5 & \\ \hline & 0 & -3x & -1 & \end{array}$$

3)
$$\boxed{\frac{5x^3-3x+4}{x^2-x+1} = 5x+5 + \frac{(-3x-1)}{x^2-x+1}}$$

Equações

Uma equação é uma igualdade que se verifica apenas para valores específicos das variáveis. Por exemplo, a igualdade

$$3x+2=5$$

só é válida quando $x=1$.

→ Um número é dito ser raiz de uma equação se ele torna a igualdade verdadeira quando substituído no lugar da variável/incógnita

→ Equação de primeiro grau

$$ax + b = 0 \longrightarrow \boxed{x = -\frac{b}{a}}$$

→ Equação de segundo grau

$$ax^2 + bx + c = 0 \longrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Inequações

A inequação é uma desigualdade expressa nas formas

$$f(x) > c, \quad f(x) < c, \quad f(x) \geq c, \quad f(x) \leq c.$$

Sendo f uma função e c um número real, a solução de uma inequação é o conjunto de números reais que a satisfazem.

→ Regras básicas

1) Adição e subtração: a adição ou subtração nos dois lados da inequação não altera o sentido da desigualdade.

2) multiplicação por um número positivo: multiplicar os dois lados da inequação por um número positivo

não muda o sentido da desigualdade.

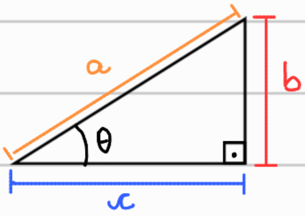
3) Multiplicação por um número negativo: multiplicar ambos os lados da inequação por um número negativo inverte o sentido da desigualdade.

4) Inversão: inverter dois lados positivos de uma inequação também inverte o sinal de desigualdade.

Exemplo: $\frac{a}{b} < c \longrightarrow \frac{b}{a} > c$.

Trigonometria

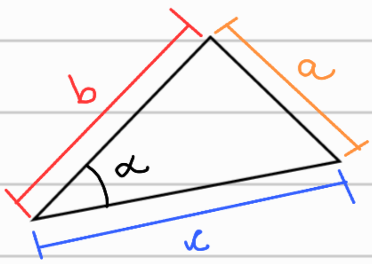
→ Triângulo retângulo



$$\boxed{\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{a}}\;,\;\boxed{\cos\theta = \frac{c}{a}}\;,\;\boxed{tg\,\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{b}{a}}$$

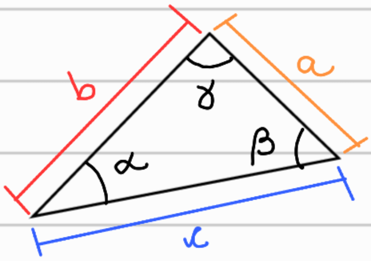
$$\boxed{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1}$$

→ Lei dos cossenos



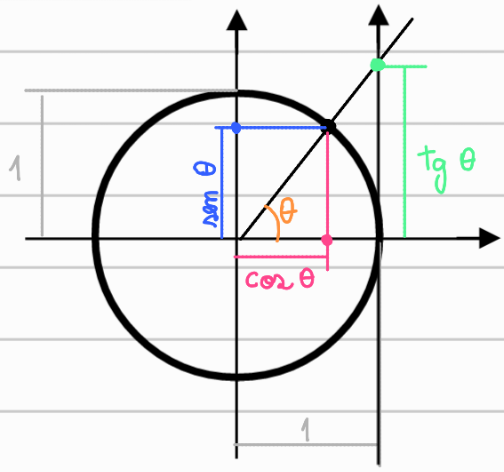
$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$$

→ Lei dos senos



$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

→ Círculo unitário



→ Algumas identidades

→ $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

→ $\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen} a \cos b \pm \cos a \operatorname{sen} b$

→ $\cos^2 a = \dfrac{1 + \cos 2a}{2}$

→ $\operatorname{sen}^2 a = \dfrac{1 - \cos 2a}{2}$

→ Funções inversas

$\boxed{\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}}$, $\boxed{\operatorname{cossec}\theta = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}}$, $\boxed{\operatorname{cotg}\theta = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\theta}}$

Funções Hiperbólicas

→ Seno hiperbólico: $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$

→ Cosseno hiperbólico: $\cosh x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$

→ Tangente hiperbólica: $\operatorname{tgh} x = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$

→ Secante hiperbólica: $\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x} = \dfrac{2}{e^{x} + e^{-x}}$

→ Cossecante hiperbólica: $\operatorname{cossech} x = \dfrac{1}{\operatorname{senh} x} = \dfrac{2}{e^{x} - e^{-x}}$

→ Cotangente hiperbólica: $\operatorname{cotgh} x = \dfrac{1}{\operatorname{tgh} x} = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$

$$\boxed{\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1}$$