Chapitre 1 : Espaces vectoriels, applications linéaires et matrices

Noyau et Image d'une application linéaire

On considère $E = \mathbb{R}^2$ et $F = R^3$ munis de leurs bases canoniques respectives. Soit l'application linéaire $f : E \to F$ telle que :

$$\forall x \in E,\ f(x) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$$

- $Ker(f)$: On cherche $x \in E$ tel que $f(x) = 0_F$. Une résolution immédiate donne $x_1 = x_2$, puis $x_2 = 0$ et partant $Ker(f) = \{0_E\}$.

- $Im(f)$: le Théorème du rang assure que l'on doit trouver un s.e.v. de F de dimension $\dim(E) - \dim(Ker(f)) = 2$. D'après la définition de $Im(f)$, on a pour tout $y := (y_1, y_2, y_3) \in F$, $y \in Im(f)$ si et seulement si il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Chercher $Im(f)$ revient donc à résoudre le système d'équations suivant:

  $$\begin{cases} x_1 \ - x_2 \ = y_1 & (L_1) \\ x_1 \ + 2x_2 \ = y_2 & (L_2) \\ x_1 \ + 2x_2 \ = y_3 & (L_3) \end{cases}$$

  L_1 nous donne que $x_2 = x_1 - y_1$. On utilise ensuite la technique du pivot de Gauss : $L_2 - L_3$ donne immédiatement $y_2 = y_3$ (qui est l'équation d'un hyperplan) et L_2, L_3 sont alors vérifiées pour $x_1 = \frac{y_2+2y_1}{3} = \frac{y_3+2y_1}{3}$. On en déduit que L_1 est vérifiée pour $x_2 = \frac{y_2-y_1}{3} = \frac{y_3-y_1}{3}$. On conclut que $y \in Im(f)$ si et seulement si y est de la forme $y = (y_1, y_3, y_3)$ avec $y_1, y_3 \in \mathbb{R}$. Autrement dit,

  $$(y \in Im(f)) \iff (y \in F)$$

  où $F := \{y \in F : y = (a, b, b) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 1),\ a, b \in \mathbb{R}\}$. Il est immédiat que F est un s.e.v. de F (contient le vecteur nul, inclus dans F et stable par combinaison linéaire). Plus précisément,

  $$F = \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 1))$$

  Comme $((1, 0, 0), (0, 1, 1))$ forment une famille libre (facile à montrer), on en déduit que $((1, 0, 0), (0, 1, 1))$ est une base de F de cardinal 2. Au final:

  $$Im(f) = F \qquad \text{et } \text{Dim}(Im(f)) = \text{Dim(F)} = 2$$