

Algèbre

Martin Mugnier

DD ENSAE-HEC, 2019

Chapitre 3: Réduction d'endomorphismes, partie 2

1 Réduction d'endomorphismes : suite

2 Décomposition des noyaux et des sous-espaces caractéristiques

Réduction d'endomorphismes

Proposition

Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont exactement ses coefficients diagonaux.

A priori il y a un seul vecteur propre évident : e_1 pour une matrice triangulaire supérieure.

Un **polynôme annulateur** P d'un endomorphisme u est un polynôme qui vérifie $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ (i.e $\forall x \in E, P(u)(x) = 0_E$).

Proposition (Polynôme annulateur et valeurs propres)

Si λ est valeur propre de u et $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ alors λ est racine de P .

Réduction d'endomorphismes : Triangularisation

On considère un espace vectoriel de dimension finie.

Définition (Endomorphisme triangularisable)

On dit qu'un endomorphisme u est triangularisable si et seulement si il existe une base E sur laquelle u est représenté par une matrice triangulaire.

Théorème

u est triangularisable si et seulement si son polynôme caractéristique P_c est scindé, soit $P_c(X) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - X)$, où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les n valeurs propres non nécessairement distinctes de u .

Réduction d'endomorphismes : suite

Théorème

Si P_c est scindé alors $\text{Trace}(u) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ et $\det(u) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$, où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les n valeurs propres non nécessairement distinctes de u .

Théorème

En notant $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . On a donc l'équivalence entre

- 1 La matrice A est triangularisable (i.e semblable à une matrice triangulaire)*
- 2 L'endomorphisme canoniquement associé à A dans \mathbb{K}^n est triangularisable*
- 3 Le polynôme caractéristique de A est scindé.*

Note : Dans \mathbb{C} , tout polynôme est scindé, donc toute matrice est trigonalisable dans \mathbb{C} .

Théorème de décomposition des noyaux

Théorème (Théorème de décomposition des noyaux)

Soient P_1, \dots, P_p p polynômes premiers entre eux, et $P = \prod_{i=1}^p P_i$. Alors

$$\text{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^p \text{Ker}(P_i(u))$$

Définition (Sous-espaces caractéristiques ou spectraux)

Soit λ une valeur propre de u de multiplicité $m(\lambda)$ alors

$N(\lambda) = \text{Ker}\left((u - \lambda \text{Id}_E)^{m(\lambda)}\right)$ est un s.e.v de E appelé sous espace caractéristique associé à la valeur propre λ

Sous-espaces caractéristiques ou spectraux

Théorème

Si u admet p valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ et que $P_c(X) = \prod_{i=1}^p (\lambda_i - X)^{m(\lambda_i)}$ et si on note $\forall i = 1, \dots, p$, u_i l'application définie sur $N(\lambda_i)$ par $\forall x \in N(\lambda_i)$, $u_i(x) = u(x)$, alors

- 1 $(u_i - \lambda_i \text{Id}_{N(\lambda_i)})^{m(\lambda_i)} = 0_{N(\lambda_i)}$ et $u(N(\lambda_i)) \subset N(\lambda_i)$
- 2 $\dim(N(\lambda_i)) = m(\lambda_i)$
- 3 Le polynôme caractéristique de u_i est donné par $P_c^{u_i}(X) = (\lambda_i - X)^{m(\lambda_i)}$.
- 4 Il existe une base de E sur laquelle u est représentée par une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} T_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ 0 & 0 & & T_p \end{pmatrix}$$

où T_i sont triangulaires supérieures.

Endomorphisme induit sur un sous-espace stable

Proposition

Si u est un endomorphisme diagonalisable de E et F est un sous espace vectoriel de E stable par u , alors l'endomorphisme induit sur F par u est diagonalisable.