Algèbre

Martin Mugnier

DD ENSAE-HEC, 2019

Chapitre 5: Endomorphismes symétriques et Projections orthogonales

Endomorphismes symétriques et diagonalisation

Définition

On dit qu'un endomorphisme est symétrique ou autoadjoint pour $< .,. >$ *ssi*

$$\forall x, y \in E, \quad < u(x), y >=< x, u(y) > .$$

Proposition

u est symétrique ssi sa matrice représentative dans une base orthonormée pour $< .,. >$ *est symétrique.*

Endomorphismes symétriques et diagonalisation

Proposition

Si u est symétrique alors son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$.

Théorème ("Théorème spectral")

Si u est symétrique pour $< .,. >$ alors u est diagonalisable en base orthonormale, i.e.

$$E = \oplus_{\lambda \in Sp(u)} Ker(u - \lambda Id)$$

Endomorphismes symétriques, réduction

Soit u symétrique pour $< .,. >$, pour trouver une base de vecteurs propres :

- On détermine les p valeurs propres distinctes, racines du polynôme caractéristique de u, et leur multiplicité
- Pour tout $i = 1, \ldots, p$, on détermine une base $\mathcal{B}_i$ de $E(\lambda_i)$
- Pour tout $i = 1, \ldots, p$, on orthogonalise $\mathcal{B}_i$ pour $< .,. >$ en $\mathcal{B}'_i = (\epsilon^i_k)_{k \in I}$, puis normalise la base

$$\forall k \in I, \quad u^i_k = \frac{\epsilon^i_k}{\|\epsilon^i_k\|}$$

  et on obtient $\widetilde{\mathcal{B}}_i$ une base orthonormale pour $<,>_{|E(\lambda_i)\times E(\lambda_i)}$.
- On pose finalement $\widetilde{\mathcal{B}}_E = \cup_{i=1}^p \widetilde{\mathcal{B}}_i$ qui est une base orthogonale de E pour $<,>$ car $E = \oplus_{i=1}^p E(\lambda_i)$ et si u symétrique pour $<,>$ et si λ_i et λ_j sont deux valeurs propres distinctes de u alors $E(\lambda_i) \perp E(\lambda_j)$.

Matrice définie positive

Soit A une matrice symétrique, matrice représentative de u_A. On définit la forme bilinéaire symétrique

$$\varphi_A : \begin{array}{rcl} E \times E & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & < u_A(x), y > \end{array}$$

ϕ_A est la forme quadratique associée à φ_A.

Définition

A est semi définie positive ssi ϕ_A est semi définie positive.
A est définie positive ssi ϕ_A est définie positive.

Matrice définie positive

Théorème (Caractérisation des matrices définies positives)

- *Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les n valeurs propres (non nécessairement distinctes) de A alors*

$$\max(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \max_{x \in E, x \neq 0_E} \frac{\phi_A(x)}{\|x\|^2} = \max_{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X \neq 0} \frac{X^\top A X}{X^\top X}$$

- *A est semi définie positive ssi toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles*
- *A est définie positive ssi toutes ses valeurs propres sont strictement positives*

Projecteur orthogonal

Soit $(E, <, >)$ espace préhilbertien réel, F un sev de E tel que $F \oplus F^\perp = E$.

Définition

Le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$, noté p_F est appelé projecteur orthogonal sur F ou projection orthogonale sur F.

En tant que projecteur linéaire, p_F vérifie

Proposition

- $\forall a \in E,\ p_F(a) \in F$ *et* $a - p_F(a) \in F^\perp$
- $p_{F^\perp} = Id_E - p_F$
- $p_F \circ p_F = p_F$ *et* $p_{F^\perp} \circ p_{F^\perp} = p_{F^\perp}$
- $p_F \circ p_{F^\perp} = 0_{\mathcal{L}(E)}$ *et* $p_{F^\perp} \circ p_F = 0_{\mathcal{L}(E)}$
- $Sp(p_F) = \{0, 1\}$ *avec* $E(0) = F^\perp$ *et* $E(1) = F$
- *si E euclidien, alors p_F est diagonalisable et* $Trace(p_F) = dim(F)$

Rappel projecteur linéaire

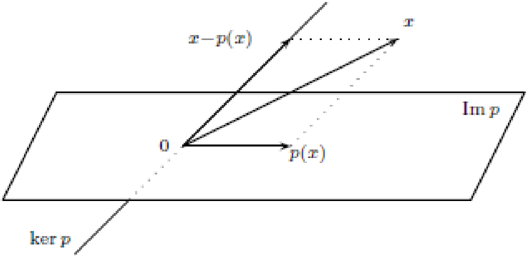


Figure pour projecteur orthogonal deux slides après !

Résultats importants

Définition

Soit $a \in E$, la distance de a à F est définie par

$$d(a, F) = \inf_{x \in F} \|x - a\|$$

Proposition

Pour tout $x \in F$ on a

$$\|x - a\| = d(a, F) \Leftrightarrow a - x \in F^{\perp}$$

et il existe au plus un élément de F qui vérifie cette assertion.

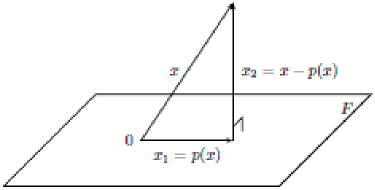
Résultats importants

Théorème

Soit $a \in E$, il existe une unique solution x^* au problème

$$\inf_{x \in F} \|x - a\|$$

et $x^* = p_F(a)$.



non seulement $x_2 \perp x_1$

mais $x_2 \perp F$

Résultats importants

On considère $(E, <, >)$ un espace euclidien.

Proposition

Si $\{f_1, \ldots, f_p\}$ *est une base de* F *orthogonale pour* $<,>_{|F\times F}$ *alors*

$$\forall a \in E, \quad p_F(a) = \sum_{i=1}^{p} \frac{< a, f_i >}{\|f_i\|^2} f_i$$

Proposition (Projection orthogonale sur une droite vectorielle)

Si $y \in E \setminus \{0_E\}$ *alors*

$$\forall a \in E, \quad p_{Vect(\{y\})}(a) = \frac{< a, y >}{\|y\|^2} y$$

Résultats importants

On considère $(E, <, >)$ un espace euclidien.

Proposition (Théorème des trois perpendiculaires)

Si F, G *sev de* E, *et* G *sev de* F *alors*

$$p_G \circ p_F = p_G$$

Proposition

Soient $F_1, \dots, F_p$, p *sev de* E *deux à deux orthogonaux et* $F = \oplus_{i=1}^{p} F_i$ *alors*

$$p_F = p_{F_1} + \cdots + p_{F_p}$$

Proposition (Théorème de Frish-Waugh)

Si G *est un s.e.v de* F *alors*

$$p_F = p_G + p_{F \cap G^{\perp}}$$

Représentation matricielle de la projection orthogonale

On considère $(E, <,>)$ un espace euclidien de dimension n, $\mathcal{B}_E = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base **orthonormée** de E et $\mathcal{B}_F = \{f_1, \dots, f_p\}$ une base de F telle que

$$\forall j = 1, \dots, p, \quad f_j = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} e_k.$$

La $<,>$ matrice de Gram de $\{f_1, \dots, f_p\}$ est donnée par $\Omega_p = (< f_i, f_j >)_{i,j}$ et les colonnes de $A = (a_{k,j})_{k,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ sont les vecteurs de coordonnées des (f_j) dans $\mathcal{B}_E$.

Théorème

$A^\top A$ est inversible et

$$M = Mat(p_F, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E) = A(A^\top A)^{-1} A^\top$$

Cas général de $\mathcal{B}_E$

On considère $(E, <,>)$ un espace euclidien de dimension n, $\mathcal{B}_E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E et $\mathcal{B}_F = \{f_1, \ldots, f_p\}$ une base de F telle que

$$\forall j = 1, \ldots, p, \quad f_j = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} e_k.$$

La $<,>$ matrice de Gram de $\{f_1, \ldots, f_p\}$ est donnée par $\Omega_p = (< f_i, f_j >)_{i,j}$ et $\Omega = Mat(<,>, \mathcal{B}_E)$.

Théorème

$\Omega_p = A^\top \Omega A$ *est inversible et*

$$M = Mat(p_F, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E) = A(A^\top \Omega A)^{-1} A^\top \Omega$$

où $A = (a_{k,j})_{k,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Propriétés

Proposition

Soient $M = Mat(p_F, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E)$ *et* $N = Mat\left(p_F^{\perp}, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E\right)$ *alors*

- $N = I_n - M$
- $M^2 = M$ *et* $N^2 = N$
- $MN = 0$ *et* $NM = 0$
- M *est diagonalisable et la trace de* M *est égale à la dimension de* F
- *si* $\mathcal{B}_E$ *est une base de* E *orthonormée pour* $<,>$ *alors*
  - M *et* N *sont symétriques*
  - M *est diagonalisable dans le groupe orthogonal i.e.*

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{R}), \quad P^\top = P^{-1}, \quad P^\top MP = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$