Algèbre

Martin Mugnier

DD ENSAE-HEC, 2019

Chapitre 4: Formes bilinéaires symétriques, produit scalaire

Forme bilinéaire et forme bilinéaire symétrique

On appelle forme bilinéaire sur E, toute application φ de $E \times E \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall(x,y,z) \in E^3,\quad \begin{aligned} \varphi(x, \lambda y + \mu z) &= \lambda\varphi(x,y) + \mu\varphi(x,z) \\ \varphi(\lambda x + \mu z, y) &= \lambda\varphi(x,y) + \mu\varphi(z,y) \end{aligned}$$

Définition (Forme bilinéaire symétrique)

φ est une forme bilinéaire symétrique sur E ssi $\forall(x,y) \in E \times E$, $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$.

On note $\mathcal{S}_2(E)$ l'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur E.

Forme quadratique

On appelle forme quadratique sur E, toute application ϕ de E dans $\mathbb{R}$ telle que

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$, $\phi(\lambda x) = \lambda^2 \phi(x)$
- φ définie par

$$\begin{aligned} \forall (x,y) \in E \times E, \quad \varphi(x,y) &= \frac{1}{2}\left(\phi(x+y) - \phi(x) - \phi(y)\right) \\ \varphi(x,y) &= \frac{1}{4}\left(\phi(x+y) - \phi(x-y)\right) \end{aligned}$$

est une forme bilinéaire symétrique sur E. φ s'appelle alors la forme polaire associée à ϕ.

Représentation matricielle d'une forme bilinéaire

On suppose E de dimension finie n muni d'une base $\mathcal{B}_E = \{e_1, \dots, e_n\}$.

Définition

On appelle matrice réprésentative de φ relativement à $\mathcal{B}_E$ la matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$ donnée par $Mat(\varphi, \mathcal{B}_E) = (\varphi(e_i, e_j))_{i,j}$.

On a

$$\varphi(x, y) = X^T Mat(\varphi, \mathcal{B}_E) Y$$

Proposition (Changement de base)

Si $\widetilde{\mathcal{B}}_E$ est une base de E et $P = Mat(Id_E, \widetilde{\mathcal{B}}_E, \mathcal{B}_E)$, alors $Mat(\varphi, \mathcal{B}_E)$ et

$$Mat(\varphi, \widetilde{\mathcal{B}}_E) = P^T Mat(\varphi, \mathcal{B}_E) P$$

φ est une forme bilinéaire symétrique ssi toute matrice représentative de φ est symétrique.

Orthogonalité, définition pour $\varphi \in \mathcal{S}_2(E)$

Définition

- *Soient* $(x, y) \in E^2$, x *et* y *sont orthogonaux,* $x \perp y$, *ssi* $\varphi(x, y) = 0_{\mathbb{R}}$
- *Soient* $A, B \subset E$. A *et* B *sont orthogonaux,* $A \perp B$, *ssi* $\forall (x, y) \in A \times B \quad \varphi(x, y) = 0_{\mathbb{R}}$
- *Soit* $A \subset E$, *on définit l'orthogonal de* A *comme*

$$A^{\perp} = \{y \in E, \quad \forall x \in A, \quad \varphi(x, y) = 0_{\mathbb{R}}\}$$

Orthogonalité, propriétés

Soient $A \subset E$ et $B \subset E$.

- $A^\perp$ est un s.e.v de E
- $A \perp B \iff A \subset B^\perp \iff B \subset A^\perp$
- $A \subset B \implies B^\perp \subset A^\perp$
- $(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$
- $A^\perp + B^\perp \subset (A \cap B)^\perp$
- $A^\perp \cap B^\perp \subset (A + B)^\perp$
- $0_E \in A \cap B \implies A^\perp \cap B^\perp = (A + B)^\perp$
- $A^\perp = (Vect(A))^\perp$
- $A \subset (A^\perp)^\perp$
- $(\{0_E\})^\perp = E$

Forme bilinéaire symétrique non dégénérée

Définition

On dit que φ est non dégénérée ssi $E^\perp = \{0_E\}$.

Proposition

Si E est de dimension finie $n \geq 1$ alors on a l'équivalence entre

- *φ est non dégénérée*
- *toute matrice représentative de φ est de déterminant non nul*

Proposition

Si E est de dimension finie $n \geq 1$ et si φ est non dégénérée alors :

- $Dim(F) + Dim(F^\perp) = Dim(E)$
- $(F^\perp)^\perp = F$

Forme quadratique définie positive et produit scalaire

Définition

- ϕ *est* ***semi-définie positive*** *ssi* $\forall x \in E,\ \phi(x) \geq 0$
- ϕ *est* ***définie positive*** *ssi* $\forall x \in E,\ \phi(x) \geq 0$ *et* $\phi(x) = 0 \implies x = 0_E$
- *Toute forme bilinéaire sur E symétrique, de forme quadratique définie positive est appelée* ***produit scalaire****, notée* $<,>$
- *On définit la* ***norme euclidienne*** $||\cdot||$ *par* $||x|| = \sqrt{< x, x >}$
- *Le couple $(E, <,>)$ où E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni d'un produit scalaire est appelé espace* ***préhilbertien réel***
- *Tout espace préhilbertien réel de dimension finie est appelé espace* ***euclidien***

Exemple : montrer que $<,>: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$< x, y >= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}x_1 - x_2 + x_3\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}y_1 - y_2 + y_3\right) + (x_2 - x_3)(y_2 - y_3) + 3x_3y_3$$

est un produit scalaire.

Forme quadratique définie positive et produit scalaire

Proposition

Si ϕ est définie positive alors φ est non dégénérée.

Proposition

Soit ϕ définie positive et E de dimension finie.

- *Pour tout s.e.v F de E, $F \oplus F^{\perp} = E$ et $F = (F^{\perp})^{\perp}$*
- *Soient F, G deux s.e.v de E, alors*

$$F^{\perp} \perp G^{\perp} \iff F^{\perp} \subset G \iff G^{\perp} \subset F$$

et F et G sont dits perpendiculaires

Forme quadratique définie positive et produit scalaire

Proposition

Soit ϕ définie positive.

- *Si $F_1, \dots, F_p$ p s.e.v de E deux à deux orthogonaux, alors*

$$F_1 + \cdots + F_p = \oplus_{i=1}^{p} F_i$$

- *Si $\{f_1, \dots, f_p\}$ est une famille de vecteurs non nuls de E, deux à deux orthogonaux, alors $\{f_1, \dots, f_p\}$ est une famille libre*

Bases orthogonales et orthonormées

Définition

On dit que $\mathcal{B}_E = (e_i)_{i\in I}$ est une base de E orthogonale pour φ ssi $\forall i \neq j$, $\varphi(e_i, e_j) = 0_{\mathbb{R}}$
On dit que $\mathcal{B}_E = (e_i)_{i\in I}$ est une base de E orthonormée pour φ ssi

$$\forall (i,j) \in I \times I, \quad \varphi(e_i, e_j) = \begin{cases} 1 & si\ i = j \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Proposition

Si E est de dimension finie alors $\mathcal{B}_E = (e_i)_{i\in I}$ est une base de E orthogonale pour φ ssi $Mat(\varphi, \mathcal{B}_E)$ est diagonale.

Théorème

Si E est de dimension finie alors il existe une base de E orthogonale pour φ

Méthode d'orthogonalisation de Gauss

Soit E de dimension finie et $B_E = (e_1, \ldots, e_n)$ une base. Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$ on a

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} \phi(e_i) x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \varphi(e_i, e_j) x_i x_j \equiv \Psi(x_1, \ldots, x_n)$$

Objectif : trouver une base $\widetilde{\mathcal{B}}_E$ orthogonale pour φ
On cherche donc à mettre $\phi(x)$ sous la forme

$$\phi(x) = (P^{-1}X)^\top D(P^{-1}X) = a_1 L_1(x_1, \ldots, x_n)^2 + \cdots + a_r L_r(x_1, \ldots, x_n)^2$$

avec $P^{-1} = Mat(Id_E, \mathcal{B}_E, \widetilde{\mathcal{B}}_E)$, $\widetilde{X} = P^{-1}X$, et

- pour tout les $i \in \{1, \ldots, r\}$ $\widetilde{x}_i = L_i(x_1, \ldots, x_n)$
- pour tout les $i \in \{r+1, \ldots, n\}$, $\widetilde{x}_i$ tel que $(\widetilde{x}_i)_{i=1,\ldots,n}$ soit une famille libre de $\mathbb{R}^n$

Méthode d'orthogonalisation de Gauss, pratique

Deux cas :

- **Si** il existe i_0 tel que $a := \phi(e_{i_0}) \neq 0_{\mathbb{R}}$:

$$\Psi(x_1, \dots, x_n) = aL(x_1, \dots, x_n)^2 + \widetilde{\Psi}(x_1, \dots, x_{i_0-1}, x_{i_0+1}, \dots, x_n)$$

  où $\widetilde{\Psi}$ est une forme quadratique sur laquelle on itère.

- **Sinon** il existe $(i_0, j_0) \in \{1, \dots, n\}^2$ tel que $\varphi(e_{i_0}, e_{j_0}) \neq 0_{\mathbb{R}}$ et on a

$$\Psi(x_1, \dots, x_n) = \frac{\varphi(e_{i_0}, e_{j_0})}{2} L_1(x_1, \dots, x_n)^2 + \frac{-\varphi(e_{i_0}, e_{j_0})}{2} L_2(x_1, \dots, x_n)^2 + \widetilde{\Psi}(x_1, \dots, x_{i_0-1}, x_{i_0+1}, \dots, x_{j_0-1}, x_{j_0+1}, \dots, x_n)$$

  et

  - $L_1(x_1, \dots, x_n) = x_{i_0} + x_{j_0} + \sum_{i \neq i_0} \frac{\varphi(e_i, e_{j_0})}{\varphi(e_{i_0}, e_{j_0})} x_i + \sum_{j \neq j_0} \frac{\varphi(e_{i_0}, e_j)}{\varphi(e_{i_0}, e_{j_0})} x_j$
  - $L_2(x_1, \dots, x_n) = x_{i_0} + (-x_{j_0}) + \sum_{i \neq i_0} \frac{\varphi(e_i, e_{j_0})}{\varphi(e_{i_0}, e_{j_0})} x_i + \sum_{j \neq j_0} \frac{\varphi(e_{i_0}, e_j)}{\varphi(e_{i_0}, e_{j_0})} (-x_j)$

Méthode d'orthogonalisation de Gram-Schmidt

E $\mathbb{R}$-ev, non nécessairement de dimension finie, muni d'une base $(e_i)_{i\in I}$.

$$\forall k \in I,\ \Omega_k := \begin{pmatrix} \varphi(e_1, e_1) & \dots & \varphi(e_1, e_k) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi(e_k, e_1) & \dots & \varphi(e_k, e_k) \end{pmatrix}$$

est la φ-matrice de Gram de $\{e_1, \dots, e_k\}$, Δ_k son déterminant et pour tout $i \leq k$, $D_{i,k}$ est le cofacteur associé à $\varphi(e_i, e_k)$ dans la matrice Ω_k.

Théorème (Gram-Schmidt, forme bilinéaire)

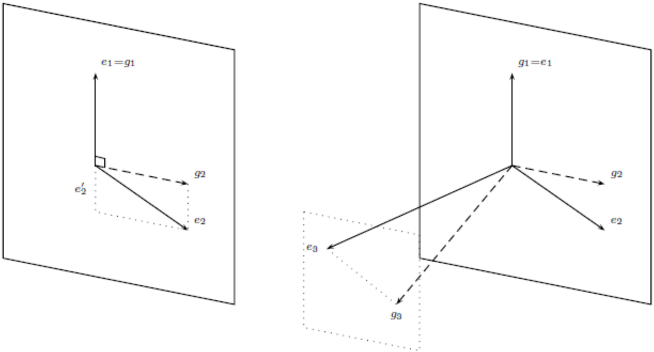
Soit $(\epsilon_i)_{i\in I}$ définie par

$$\epsilon_i = \sum_{j=1}^{i} \frac{D_{j,i}}{D_{i,i}} e_j$$

Pour tout $i \in I$, $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_i\}$ est une base de E_i orthogonale pour $\varphi_{|E_i \times E_i}$ et

$$\epsilon_i = e_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\varphi(\epsilon_k, e_i)}{\phi(\epsilon_k)} \times \epsilon_k$$

Méthode d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, produit scalaire



Méthode d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, produit scalaire

Théorème (Gram-Schmidt, produit scalaire)

Pour tout $i \in I$, $(\epsilon_i)_{i \in I}$ définie par $\epsilon_1 = e_1$ et

$$\epsilon_i = e_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{< \epsilon_k, e_i >}{||\epsilon_k||} \times \epsilon_k$$

est une base de E_i orthogonale pour $<,>$.

Inégalités remarquables

Proposition

- *Inégalité de Cauchy-Schwarz : si* ϕ *est semi définie positive alors*

$$\forall x, y \in E \times E, \quad |\varphi(x,y)| \leq \sqrt{\phi(x)}\sqrt{\phi(y)}$$

- *Inégalité de Minkowsky : si* ϕ *est semi définie positive alors*

$$\forall x, y \in E \times E, \quad \sqrt{\phi(x+y)} \leq \sqrt{\phi(x)} + \sqrt{\phi(y)}$$

Proposition (Cas d'égalités)

- *Dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz : si* ϕ *est semi définie positive alors*

$$|\varphi(x,y)| = \sqrt{\phi(x)}\sqrt{\phi(y)} \iff \exists \lambda,\ x = \lambda y$$

- *Dans l'inégalité de Minkowsky : si* ϕ *est semi définie positive alors*

$$\sqrt{\phi(x+y)} = \sqrt{\phi(x)} + \sqrt{\phi(y)} \iff \exists \lambda > 0,\ x = \lambda y$$