Algèbre

Martin Mugnier

DD ENSAE-HEC, 2019

Chapitre 3: Réduction d'endomorphismes, partie 2

Réduction d'endomorphismes

Proposition

Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont exactement ses coefficients diagonaux.
A priori il y a un seul vecteur propre évident : e_1 *pour une matrice triangulaire supérieure.*

Un **pôlynome annulateur** P d'un endomorphisme u est un polynôme qui vérifie $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ ($i.e\ \forall x \in E,\ P(u)(x) = O_E$).

Proposition (Polynome annulateur et valeurs propres)

Si λ *est valeur propre de* u *et* $P(u) = 0_{L(E)}$ *alors* λ *est racine de* P.

Réduction d'endomorphismes : Triangularisation

On considère un espace vectoriel de dimension finie.

Définition (Endomorphisme triangularisable)

On dit qu'un endomorphisme u est triangularisable si et seulement si il existe une base E sur laquelle u est représenté par une matrice triangulaire.

Théorème

u est triangularisable si et seulement si son polynôme caractéristique P_c est scindé, soit $P_c(X) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - X)$, où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les n valeurs propres non nécessairement distinctes de u.

Réduction d'endomorphismes : suite

Théorème

Si P_c est scindé alors $Trace(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ *et* $\det(u) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$, *où* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *sont les n valeurs propres non nécessairement distinctes de u.*

Théorème

En notant $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On a donc l'équivalence entre

1. *La matrice A est triangularisable (i.e semblable à une matrice triangulaire)*
2. *L'endomorphisme canoniquement associé à A dans $\mathbb{K}^n$ est triangularisable*
3. *Le polynôme caractéristique de A est scindé.*

Note : Dans $\mathbb{C}$, tout polynôme est scindé, donc toute matrice est trigonalisable dans $\mathbb{C}$.

Théorème de décomposition des noyaux

Théorème (Théorème de décomposition des noyaux)

Soient $P_1, \ldots, P_p$ *p polynômes premiers entre eux, et* $P = \prod_{i=1}^{p} P_i$. *Alors*

$$Ker(P(u)) = \oplus_{i=1}^{p} Ker(P_i(u))$$

Définition (Sous-espaces caractéristiques ou spectraux)

Soit λ *une valeur propre de* u *de multiplicité* $m(\lambda)$ *alors*
$N(\lambda) = Ker\left((u - \lambda Id_E)^{m(\lambda)}\right)$ *est un s.e.v de* E *appelé sous espace caractéristique associé à la valeur propre* λ

Sous-espaces caractéristiques ou spectraux

Théorème

Si u admet p valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ et que $P_c(X) = \prod_{i=1}^{p}(\lambda_i - X)^{m(\lambda_i)}$ et si on note $\forall i = 1, \dots, p$, u_i l'application définie sur $N(\lambda_i)$ par $\forall x \in N(\lambda_i)$, $u_i(x) = u(x)$, alors

1. $\left(u_i - \lambda_i Id_{N(\lambda_i)}\right)^{m(\lambda_i)} = 0_{N(\lambda_i)}$ *et* $u(N(\lambda_i)) \subset N(\lambda_i)$
2. $Dim\,(N(\lambda_i)) = m(\lambda_i)$
3. *Le polynôme caractéristique de u_i est donné par* $P_c^{u_i}(X) = (\lambda_i - X)^{m(\lambda_i)}$.
4. *Il existe une base de E sur laquelle u est représentée par une matrice de la forme*

$$\begin{pmatrix} T_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ 0 & 0 & & T_p \end{pmatrix}$$

où T_i sont triangulaires supérieures.

Endomorphisme induit sur un sous-espace stable

Proposition

Si u est un endomorphisme diagonalisable de E et F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors l'endomorphisme induit sur F par u est diagonalisable.