Algèbre

Martin Mugnier

DD ENSAE-HEC, 2019

Chapitre 3: Réduction d'endomorphismes, partie 1

Formes quadratiques

Soit A une matrice symétrique de taille $n \times n$. Une **forme quadratique** sur $\mathbb{R}^n$ est une fonction g_A sur $\mathbb{R}^n$ de la forme

$$g_A(x) = x'Ax = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j.$$

Définition

Une forme quadratique est dite

i) ***strictement définie positive*** *si on a* $x'Ax > 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$
ii) ***semi-définie positive*** *si on a* $x'Ax \geq 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$
iii) ***strictement définie négative*** *si on a* $x'Ax < 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$
iv) ***semi-définie négative*** *si on a* $x'Ax \leq 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$.

Convexité/concavité (HP)

Proposition

Soit f une fonction C^2 sur un ouvert convexe D de $\mathbb{R}^p$.

i) *f est **convexe** sur D si sa matrice Hessienne est **semi-définie positive** (avec des valeurs propres positives) sur D.*

ii) *f est **concave** sur D si sa matrice Hessienne est **semi-définie négative** (avec des valeurs propres négatives) sur D.*

Exemple : l'utilité d'un agent dans une économie avec deux biens donnée par $f(x_1, x_2) = \ln x_1 x_2$. On peut montrer que cette fonction d'utilité est concave en calculant sa Hessienne et en la réduisant.

Réduction d'endomorphismes : Valeurs propres

Soit f un **endomorphisme** dans un espace vectoriel E, pour une base fixe v dans E, on note par M sa matrice représentative dans v.

Définition

*On appelle **valeur propre** de f le nombre réel λ tel qu'il existe un vecteur non nul $u \in E$ qui satisfait :*

$$f(u) = \lambda u.$$

*L'ensemble des valeurs propres est appelé le **spectre** de f et noté $Sp(f)$. u est appellé un **vecteur propre** de f associé à λ.*
*De la même manière, λ est une valeur propre de M si il existe un **vecteur colonne non nul** U, tel que*

$$MU = \lambda U.$$

*U est appelé **vecteur propre de** M associé à λ.*

Réduction d'endomorphismes : Espace propre

Soit f un endomorphisme dans un espace propre E, pour une base fixe v dans E, on note M sa matrice dans v.

Définition

*On appelle **espace propre** pour la **valeur propre** λ, le sous espace vectoriel F_λ de E défini par*

$$F_\lambda = \{u \in E : f(u) = \lambda u\} = Ker\,(f - \lambda Id_E)\,.$$

Théorème

Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont p valeurs propres distinctes de f, alors

$$Ker(f - \lambda_1 Id) + \cdots + Ker(f - \lambda_p Id) = \bigoplus_{j=1}^{p} Ker(f - \lambda_j Id).$$

Polynôme caractéristique

Définition

Soit M une matrice carrée de taille $n \times n$. On note $M - \lambda 1_n$ la matrice :

$$M - \lambda 1_n = \begin{pmatrix} m_{11} - \lambda & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} - \lambda & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

*On appelle **polynôme caractéristique de** M le polynôme χ défini par :*

$$\chi(\lambda) = \det(M - \lambda 1_n).$$

Proposition

Les valeurs propres de M sont les solutions de

$$\chi(\lambda) = 0.$$

Polynôme caractéristique

Soit A une matrice de taille $n \times n$

Proposition

Le polynôme caractéristique de A est de la forme

$$\chi(X) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \alpha_j X^j \quad \textit{avec} \left\{ \begin{array}{c} \alpha_0 = \det(A) = \det(f) \\ \alpha_{n-1} = \mathit{trace}(A) \\ \alpha_n = 1 \end{array} \right.$$

En particulier, pour une matrice 2×2 :

$$\chi(X) = X^2 - \mathrm{trace}(A)X + \det(A)$$

et $\mathrm{trace}(A) = \sum$ valeurs propres et $\det(A) = \prod$ valeurs propres.

Soit f une application linéaire dont la matrice dans la base canonique s'écrit :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer les valeurs propres de f et les vecteurs propres associés.

Réduction d'endomorphismes

Définition

Si λ est racine du polynôme caractéristique de multiplicité $m(\lambda)$ alors on dit que λ est valeur propre de f de multiplicité $m(\lambda)$.

Proposition

Si λ est valeur propre de f de multiplicité $m(\lambda)$ alors

$$1 \leq Dim(E(\lambda)) \leq m(\lambda).$$

Réduction d'endomorphismes

Définition

*Une matrice M de taille $n \times n$ est dite **diagonalisable** si et seulement si elle admet une base v vecteurs propres sur laquelle elle est représentée par une matrice diagonale.*

Si P est la matrice de transition de la base canonique e à v, montrez que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale.

Théorème

On a l'équivalence :

1. *f est diagonalisable*
2. $E = \oplus_{\lambda \in Sp(f)} E(\lambda)$
3. *Le polynôme caractéristique de la matrice representative associée est scindé avec $\forall \lambda \in Sp(f)$, $m(\lambda) = Dim(E(\lambda))$.*

En particulier : si le polynôme caractéristique a des racines **simples et distinctes** alors f est diagonalisable.