

Algèbre

Martin Mugnier

DD ENSAE-HEC, 2019

Chapitre 4: Formes bilinéaires symétriques, produit scalaire

- 1 Formes bilinéaires symétriques, Généralités
- 2 Cas particulier : le produit scalaire
- 3 Méthodes d'orthogonalisation
- 4 Inégalités remarquables

Forme bilinéaire et forme bilinéaire symétrique

On appelle forme bilinéaire sur E , toute application φ de $E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{aligned}\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (x, y, z) \in E^3, \quad & \varphi(x, \lambda y + \mu z) = \lambda \varphi(x, y) + \mu \varphi(x, z) \\ & \varphi(\lambda x + \mu z, y) = \lambda \varphi(x, y) + \mu \varphi(z, y)\end{aligned}$$

Définition (Forme bilinéaire symétrique)

φ est une forme bilinéaire symétrique sur E ssi $\forall (x, y) \in E \times E$,
 $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.

On note $\mathcal{S}_2(E)$ l'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur E .

Forme quadratique

On appelle forme quadratique sur E , toute application ϕ de E dans \mathbb{R} telle que

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \phi(\lambda x) = \lambda^2 \phi(x)$
- φ définie par

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad \varphi(x, y) = \frac{1}{2} (\phi(x + y) - \phi(x) - \phi(y))$$
$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4} (\phi(x + y) - \phi(x - y))$$

est une forme bilinéaire symétrique sur E . φ s'appelle alors la forme polaire associée à ϕ .

Représentation matricielle d'une forme bilinéaire

On suppose E de dimension finie n muni d'une base $\mathcal{B}_E = \{e_1, \dots, e_n\}$.

Définition

On appelle matrice représentative de φ relativement à \mathcal{B}_E la matrice carrée d'ordre n à coefficients dans \mathbb{R} donnée par $\text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_E) = (\varphi(e_i, e_j))_{i,j}$.

On a

$$\varphi(x, y) = X^T \text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_E) Y$$

Proposition (Changement de base)

Si $\tilde{\mathcal{B}}_E$ est une base de E et $P = \text{Mat}(\text{Id}_E, \tilde{\mathcal{B}}_E, \mathcal{B}_E)$, alors $\text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_E)$ et

$$\text{Mat}(\varphi, \tilde{\mathcal{B}}_E) = P^T \text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_E) P$$

φ est une forme bilinéaire symétrique ssi toute matrice représentative de φ est symétrique.

Orthogonalité, définition pour $\varphi \in \mathcal{S}_2(E)$

Définition

- Soient $(x, y) \in E^2$, x et y sont orthogonaux, $x \perp y$, ssi $\varphi(x, y) = 0_{\mathbb{R}}$
- Soient $A, B \subset E$. A et B sont orthogonaux, $A \perp B$, ssi $\forall (x, y) \in A \times B \quad \varphi(x, y) = 0_{\mathbb{R}}$
- Soit $A \subset E$, on définit l'orthogonal de A comme

$$A^{\perp} = \{y \in E, \quad \forall x \in A, \quad \varphi(x, y) = 0_{\mathbb{R}}\}$$

Orthogonalité, propriétés

Soient $A \subset E$ et $B \subset E$.

- A^\perp est un s.e.v de E
- $A \perp B \iff A \subset B^\perp \iff B \subset A^\perp$
- $A \subset B \implies B^\perp \subset A^\perp$
- $(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$
- $A^\perp + B^\perp \subset (A \cap B)^\perp$
- $A^\perp \cap B^\perp \subset (A + B)^\perp$
- $0_E \in A \cap B \implies A^\perp \cap B^\perp = (A + B)^\perp$
- $A^\perp = (\text{Vect}(A))^\perp$
- $A \subset (A^\perp)^\perp$
- $(\{0_E\})^\perp = E$

Forme bilinéaire symétrique non dégénérée

Définition

On dit que φ est non dégénérée ssi $E^\perp = \{0_E\}$.

Proposition

Si E est de dimension finie $n \geq 1$ alors on a l'équivalence entre

- *φ est non dégénérée*
- *toute matrice représentative de φ est de déterminant non nul*

Proposition

Si E est de dimension finie $n \geq 1$ et si φ est non dégénérée alors :

- *$\text{Dim}(F) + \text{Dim}(F^\perp) = \text{Dim}(E)$*
- *$(F^\perp)^\perp = F$*

Forme quadratique définie positive et produit scalaire

Définition

- ϕ est **semi-définie positive** ssi $\forall x \in E, \phi(x) \geq 0$
- ϕ est **définie positive** ssi $\forall x \in E, \phi(x) \geq 0$ et $\phi(x) = 0 \implies x = 0_E$
- Toute forme bilinéaire sur E symétrique, de forme quadratique définie positive est appelée **produit scalaire**, notée \langle, \rangle
- On définit la **norme euclidienne** $\| \cdot \|$ par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$
- Le couple (E, \langle, \rangle) où E est un espace vectoriel sur \mathbb{R} muni d'un produit scalaire est appelé espace **préhilbertien réel**
- Tout espace préhilbertien réel de dimension finie est appelé espace **euclidien**

Exemple : montrer que $\langle, \rangle: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\langle x, y \rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}x_1 - x_2 + x_3 \right) \left(\frac{1}{\sqrt{3}}y_1 - y_2 + y_3 \right) + (x_2 - x_3)(y_2 - y_3) + 3x_3y_3$$

est un produit scalaire.

Forme quadratique définie positive et produit scalaire

Proposition

Si ϕ est définie positive alors φ est non dégénérée.

Proposition

Soit ϕ définie positive et E de dimension finie.

- *Pour tout s.e.v F de E , $F \oplus F^\perp = E$ et $F = (F^\perp)^\perp$*
- *Soient F, G deux s.e.v de E , alors*

$$F^\perp \perp G^\perp \iff F^\perp \subset G \iff G^\perp \subset F$$

et F et G sont dits perpendiculaires

Forme quadratique définie positive et produit scalaire

Proposition

Soit ϕ définie positive.

- Si F_1, \dots, F_p p s.e.v de E deux à deux orthogonaux, alors

$$F_1 + \dots + F_p = \bigoplus_{i=1}^p F_i$$

- Si $\{f_1, \dots, f_p\}$ est une famille de vecteurs non nuls de E , deux à deux orthogonaux, alors $\{f_1, \dots, f_p\}$ est une famille libre

Bases orthogonales et orthonormées

Définition

On dit que $\mathcal{B}_E = (e_i)_{i \in I}$ est une base de E orthogonale pour φ ssi $\forall i \neq j$, $\varphi(e_i, e_j) = 0_{\mathbb{R}}$

On dit que $\mathcal{B}_E = (e_i)_{i \in I}$ est une base de E orthonormée pour φ ssi

$$\forall (i, j) \in I \times I, \quad \varphi(e_i, e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition

Si E est de dimension finie alors $\mathcal{B}_E = (e_i)_{i \in I}$ est une base de E orthogonale pour φ ssi $\text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}_E)$ est diagonale.

Théorème

Si E est de dimension finie alors il existe une base de E orthogonale pour φ

Méthode d'orthogonalisation de Gauss

Soit E de dimension finie et $B_E = (e_1, \dots, e_n)$ une base. Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$ on a

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^n \phi(e_i) x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \varphi(e_i, e_j) x_i x_j \equiv \Psi(x_1, \dots, x_n)$$

Objectif : trouver une base \tilde{B}_E orthogonale pour φ
On cherche donc à mettre $\phi(x)$ sous la forme

$$\phi(x) = (P^{-1}X)^\top D(P^{-1}X) = a_1 L_1(x_1, \dots, x_n)^2 + \dots + a_r L_r(x_1, \dots, x_n)^2$$

avec $P^{-1} = \text{Mat}(\text{Id}_E, B_E, \tilde{B}_E)$, $\tilde{X} = P^{-1}X$, et

- pour tout les $i \in \{1, \dots, r\}$ $\tilde{x}_i = L_i(x_1, \dots, x_n)$
- pour tout les $i \in \{r+1, \dots, n\}$, \tilde{x}_i tel que $(\tilde{x}_i)_{i=1, \dots, n}$ soit une famille libre de \mathbb{R}^n

Méthode d'orthogonalisation de Gauss, pratique

Deux cas :

- Si il existe i_0 tel que $a := \phi(e_{i_0}) \neq 0_{\mathbb{R}}$:

$$\Psi(x_1, \dots, x_n) = aL(x_1, \dots, x_n)^2 + \tilde{\Psi}(x_1, \dots, x_{i_0-1}, x_{i_0+1}, \dots, x_n)$$

où $\tilde{\Psi}$ est une forme quadratique sur laquelle on itère.

- Sinon il existe $(i_0, j_0) \in \{1, \dots, n\}^2$ tel que $\varphi(e_{i_0}, e_{j_0}) \neq 0_{\mathbb{R}}$ et on a

$$\begin{aligned}\Psi(x_1, \dots, x_n) = & \frac{\varphi(e_{i_0}, e_{j_0})}{2} L_1(x_1, \dots, x_n)^2 + \frac{-\varphi(e_{i_0}, e_{j_0})}{2} L_2(x_1, \dots, x_n)^2 \\ & + \tilde{\Psi}(x_1, \dots, x_{i_0-1}, x_{i_0+1}, \dots, x_{j_0-1}, x_{j_0+1}, \dots, x_n)\end{aligned}$$

et

- ▶ $L_1(x_1, \dots, x_n) = x_{i_0} + x_{j_0} + \sum_{i \neq i_0} \frac{\varphi(e_i, e_{j_0})}{\varphi(e_{i_0}, e_{j_0})} x_i + \sum_{j \neq j_0} \frac{\varphi(e_{i_0}, e_j)}{\varphi(e_{i_0}, e_{j_0})} x_j$
- ▶ $L_2(x_1, \dots, x_n) = x_{i_0} + (-x_{j_0}) + \sum_{i \neq i_0} \frac{\varphi(e_i, e_{j_0})}{\varphi(e_{i_0}, e_{j_0})} x_i + \sum_{j \neq j_0} \frac{\varphi(e_{i_0}, e_j)}{\varphi(e_{i_0}, e_{j_0})} (-x_j)$

Méthode d'orthogonalisation de Gram-Schmidt

E \mathbb{R} -ev, non nécessairement de dimension finie, muni d'une base $(e_i)_{i \in I}$.

$$\begin{pmatrix} \varphi(e_1, e_1) & \dots & \varphi(e_1, e_k) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi(e_k, e_1) & \dots & \varphi(e_k, e_k) \end{pmatrix}$$

est la φ -matrice de Gram de $\{e_1, \dots, e_k\}$, Δ_k son déterminant, et $D_{i,j}$ ses cofacteurs.

Théorème (Gram-Schmidt, forme bilinéaire)

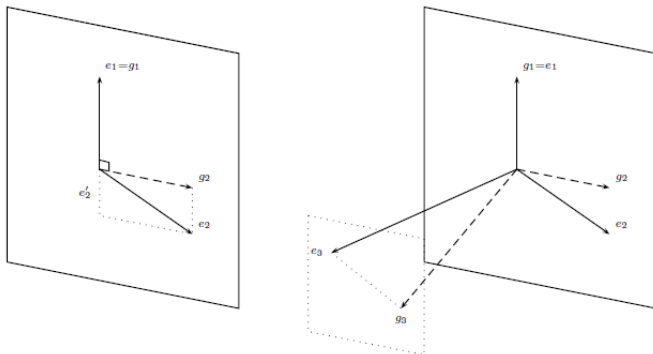
Soit $(\epsilon_i)_{i \in I}$ définie par

$$\epsilon_i = \sum_{j=1}^i \frac{D_{j,i}}{D_{i,i}} e_j$$

Pour tout $i \in I$, $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_i\}$ est une base de E_i orthogonale pour $\varphi|_{E_i \times E_i}$ et

$$\epsilon_i = e_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\varphi(e_k, e_i)}{\phi(\epsilon_k)} \times \epsilon_k$$

Méthode d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, produit scalaire



Méthode d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, produit scalaire

Théorème (Gram-Schmidt, produit scalaire)

Pour tout $i \in I$, $(\epsilon_i)_{i \in I}$ définie par $\epsilon_1 = e_1$ et

$$\epsilon_i = e_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\langle \epsilon_k, e_i \rangle}{\|\epsilon_k\|} \times \epsilon_k$$

est une base de E_i orthogonale pour \langle, \rangle .

Inégalités remarquables

Proposition

- *Inégalité de Cauchy-Schwarz : si ϕ est semi définie positive alors*

$$\forall x, y \in E \times E, \quad |\varphi(x, y)| \leq \sqrt{\phi(x)} \sqrt{\phi(y)}$$

- *Inégalité de Minkowsky : si ϕ est semi définie positive alors*

$$\forall x, y \in E \times E, \quad \sqrt{\phi(x + y)} \leq \sqrt{\phi(x)} + \sqrt{\phi(y)}$$

Proposition (Cas d'égalités)

- *Dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz : si ϕ est semi définie positive alors*

$$|\varphi(x, y)| = \sqrt{\phi(x)} \sqrt{\phi(y)} \iff \exists \lambda, x = \lambda y$$

- *Dans l'inégalité de Minkowsky : si ϕ est semi définie positive alors*

$$\sqrt{\phi(x + y)} = \sqrt{\phi(x)} + \sqrt{\phi(y)} \iff \exists \lambda > 0, x = \lambda y$$