Chapitre 4 : Formes bilinéaires symétriques, produit scalaire.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. On note $\mathcal{S}_2(E)$ l'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur E. On peut montrer que $\mathcal{S}_2(E)$ muni de lois internes et externes adaptées est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Formes quadratiques et formes bilinéaires symétriques

Définition 1. Une forme quadratique q sur E est une application $q : E \to \mathbb{R}$ vérifiant:

1. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ q(\lambda x) = \lambda^2 x$
2. L'application $\varphi : (x, y) \mapsto \frac{1}{2}[q(x + y) - q(x) - q(y)]$ appartient à $\mathcal{S}_2(E)$. φ s'appelle la forme polaire de q.

On note $Q(E)$ l'ensemble des formes quadratiques sur E. On peut montrer que $Q(E)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Théorème 1. *$Q(E)$ et $\mathcal{S}_2(E)$ sont isomorphes.*

Proof. Soit $q \in Q(E)$. On pose $\sigma(q)$ la forme polaire de q, i.e. $\sigma(q) = \varphi$ avec

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}[q(x + y) - q(x) - q(y)]\,, \qquad \forall (x, y) \in E^2.$$

Il est immédiat que $\sigma(q) \in \mathcal{S}_2(E)$. Soit $\varphi \in \mathcal{S}_2(E)$. Définissons $\sigma'(\varphi)$ par $\sigma'(\varphi)(x) = \varphi(x, x)$ pour tout $x \in E$. On peut vérifier par le calcul que $\sigma'(\varphi) \in Q(E)$. Montrons que $\sigma(q)$ est inversible et que son inverse est σ'. Soit $\varphi \in \mathcal{S}_2(E)$. On a $\sigma \circ \sigma'(\varphi) = \sigma(q)$ avec $q(x) = \varphi(x, x)$. Or $\sigma(q) = \varphi'$ avec

$$\begin{aligned}
\varphi'(x, y) &= \frac{1}{2}[q(x + y) - q(x) - q(y)] \\
&= \frac{1}{2}[\varphi(x + y, x + y) - \varphi(x, x) - \varphi(y, y)] \\
&= \varphi(x, y)
\end{aligned}$$

par bilinéarité de φ. On a donc $\sigma \circ \sigma' = \mathrm{Id}_{\mathcal{S}_2(E)}$. On montre de même que $\sigma' \circ \sigma = \mathrm{Id}_{Q(E)}$. L'application σ est donc bijective de $Q(E)$ dans $\mathcal{S}_2(E)$ et $\sigma^{-1} = \sigma'$. Elle est linéaire par construction, d'où le résultat. $\square$

Dans la suite, pour toute $\varphi \in \mathcal{S}_2(E)$, on note ϕ_φ l'unique forme quadratique telle que

$$\phi_\varphi(x) := \varphi(x, x),\ \forall x \in E.$$

On appelle ϕ_φ la forme quadratique associée à φ.

Un exemple de forme bilinéaire symétrique dégénérée

On considère $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}_E = \{e_1, e_2, e_3\}$. Définissons $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x = \sum_{i=1}^3 x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^3 y_i e_i$:

$$f(x, y) = x_2 y_2 - x_1 y_1$$

On peut vérifier que $f \in \mathcal{S}_2(E)$. Intéressons-nous à l'orthogonal de E pour f:

$$E^\perp = \{y \in E,\ \forall x \in E,\ f(x, y) = 0_\mathbb{R}\}.$$

Soit $y \in E^\perp$, alors pour tout $x \in E$, $x_2 y_2 = x_1 y_1$. En prenant $x = e_1 + e_2$ on en déduit $y_1 = y_2$. En prenant $x = e_2$, on en déduit $y_1 = y_2 = 0_\mathbb{R}$. Au final, $E^\perp = \text{Vect}\{e_3\}$. On a donc $E^\perp \neq \{0_E\}$, ce qui montre que f est dégénérée.

De manière générale, dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 1$, $\mathcal{B}_E = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E, toute forme bilinéaire symétrique de matrice représentative de rang strictement inférieur à n convient. En effet, d'après le cours

$$f \text{ dégénérée} \iff \text{Mat}(f, \mathcal{B}) \text{ non inversible pour toute base } \mathcal{B} \iff \text{Det}(\text{Mat}(f, \mathcal{B}_E)) = 0_\mathbb{R}.$$

On pourrait donc de choisir une application $f \in \mathcal{S}_2(E)$ telle que

$$\begin{cases} \exists i_0 \in \{1, \dots, n\},\ \phi_f(e_{i_0}) = 0_\mathbb{R} \\ \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2,\ i \neq j,\ f(e_i, e_j) = 0_\mathbb{R}. \end{cases} \tag{1}$$

Pour tout $(x, y) \in E^2$, $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, on peut écrire dans ce cas

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{i=1}^n f(e_i, e_i) x_i y_i + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} f(e_i, e_j) x_i y_j \\ &= \sum_{i=1}^n \phi_f(e_i) x_i y_i \\ &= X^\top.\text{Mat}(f, \mathcal{B}_E).Y \end{aligned}$$

avec

$$\text{Mat}(f, \mathcal{B}_E) = \begin{pmatrix} \phi_f(e_1) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \phi_f(e_{i_0}) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \phi_f(e_n) \end{pmatrix}.$$

Dans cet exemple, $\text{Mat}(f, \mathcal{B}_E)$ est diagonale par construction et comprend au moins un élément diagonal nul, $\phi_f(e_{i_0})$. On en conclut que f est dégénérée en utilisant

$$\text{Det}(\text{Mat}(f, \mathcal{B}_E)) = \prod_{i=1}^n \phi_f(e_i) = \prod_{j \neq i_0}^n \phi_f(e_j) \times 0_\mathbb{R} = 0_\mathbb{R}.$$

Un exemple de forme bilinéaire symétrique qui n'est pas un produit scalaire

N'importe quelle forme bilinéaire symétrique dégénérée convient puisqu'il est facile de voir que pour tout $\varphi \in \mathcal{S}_2(E)$

$$\phi_\varphi \text{ définie positive } \implies \varphi \text{ non-dégénérée .}$$

Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension 3, $\mathcal{B}_E = \{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E et $f \in \mathcal{S}_2(E)$ telle que, $\forall (x, y) \in E^2$, $x = \sum_{i=1}^3 x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^3 y_i e_i$

$$f(x, y) = x_1y_1 + 3x_2y_2 + 5x_3y_3 + x_1y_2 + y_1x_2 - 2x_1y_3 - 2x_3y_1 + 3x_2y_3 + 3x_3y_2$$

La forme quadratique associée à f est:

$$\phi_f(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 6x_2x_3$$

En utilisant le procédé d'orthogonalisation de Gauss, on montre par exemple l'égalité suivante (décomposition non unique):

$$\phi_f(x) = (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + (x_3 + 5x_2)^2 - 23x_2^2$$

Si on prend (x_1, x_2, x_3) solution du système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_3 + 5x_2 = \sqrt{23}x_2 \end{cases} \tag{2}$$

, par exemple $x_1 = -11 + 2\sqrt{23}$, $x_2 = 1$ et $x_3 = \sqrt{23} - 5$, on a trouvé un $x \coloneqq \sum_{i=1}^3 x_i e_i \neq 0_E$ tel que $\phi_f(x) = 0$. Donc ϕ_f ne peut pas être définie positive et f n'est donc pas un produit scalaire.

Précisions sur la preuve de l'algorithme d'orthogonalisation de Gauss

Théorème 2. *E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, $\mathcal{B}_E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base. Alors pour toute forme quadratique q sur E, il existe n combinaisons linéaires $L_i(x_1, \ldots, x_n) \equiv L_i(x)$ linairement indépendantes et n nombres c_i tels que*

$$q(x) \equiv q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n c_i L_i(x)^2$$

Remarque Dire que les $(L_i)_{i=1,\ldots,n}$ sont des formes n-linéaires sur $\mathbb{R}$ signifie que ce sont des applications de $\underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ fois}} \to \mathbb{R}$ linéaires en chacune de leurs coordonnées. Dire qu'elles sont linéairement indépendantes signifie que pour $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i L_i(x) = 0 \;\forall\, x \in E \right) \implies (\lambda_i = 0_\mathbb{R},\ \forall i = 1, \ldots, n)$$

Proof. On montre le théorème par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$: "$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $k \leq n : P(k)$ *est vraie, où pour tout* $l \in \mathbb{N}^*$,

$P(l)$: E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $l \geq 1$, $\mathcal{B}_E = \{e_1, \ldots, e_l\}$ une base. Alors pour toute forme quadratique q sur E, il existe l combinaisons linéaires $L_i(x_1, \ldots, x_n) \equiv L_i(x)$ linairement indépendantes et l nombres c_i tels que

$$q(x) \equiv q(x_1, \ldots, x_l) = \sum_{i=1}^{l} c_i L_i(x)^2$$

"

Si $n = 1$, il n'y a rien à montrer. Supposons maintenant $n > 1$ et $P(n-1)$ vraie. Si q est nulle, $c_i = 0$ convient avec par exemple $L_i(x) = x_i$. Supposons donc q non nulle et écrivons-la en utilisant sa forme polaire associée notée φ (i.e., $\varphi(x,x) = q(x), \forall x \in E$) :

$$q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i, e_i) x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \varphi(e_i, e_j) x_i x_j$$

- Cas 1 : $\exists\, i_0 \in \{1, \ldots, n\}, q(e_{i_0}) = \phi_\varphi(e_{i_0}) = \varphi(e_{i_0}, e_{i_0}) \neq 0_{\mathbb{R}}$. On réarrange les termes dans q:

$$\begin{aligned} q(x) &= \phi_\varphi(e_{i_0}) x_{i_0}^2 + 2 \sum_{j \neq i_0}^{n} \varphi(e_{i_0}, e_j) x_{i_0} x_j + \sum_{i,j \neq i_0} \varphi(e_i, e_j) x_i x_j \\ &= \phi_\varphi(e_{i_0}) \left(x_{i_0} + \sum_{j \neq i_0}^{n} \frac{\varphi(e_{i_0}, e_j)}{\phi_\varphi(e_{i_0})} x_j \right)^2 - \frac{1}{\phi_\varphi(e_{i_0})} \left(\sum_{j \neq i_0}^{n} \varphi(e_{i_0}, e_j) x_j \right)^2 + \sum_{i,j \neq i_0} \varphi(e_i, e_j) x_i x_j \\ &= \phi_\varphi(e_{i_0}) \left(x_{i_0} + \sum_{j \neq i_0}^{n} \frac{\varphi(e_{i_0}, e_j)}{\phi_\varphi(e_{i_0})} x_j \right)^2 + q'(x) \end{aligned}$$

$= c_{i_0} L_{i_0}(x)^2 + q'(x)$

où $c_{i_0} = \phi_\varphi(e_{i_0})$, $L_{i_0}(x) = x_{i_0} + \sum_{j \neq i_0}^{n} \frac{\varphi(e_{i_0}, e_j)}{\phi_\varphi(e_{i_0})} x_j$ et $q'(x) = -\frac{1}{\phi_\varphi(e_{i_0})} \left(\sum_{j \neq i_0}^{n} \varphi(e_{i_0}, e_j) x_j \right)^2 + \sum_{i,j \neq i_0} \varphi(e_i, e_j) x_i x_j$ est un polynôme homogène de degré 2 par rapport à $(x_i)_{i \neq i_0}$. Il s'agit donc d'une forme quadratique sur un espace de dimension finie $n-1$. L'hypothèse de récurence nous dit que $q'(x) = \sum_{j \neq i_0}^{n} c_j L_j(x)^2$ où les $(L_i(x))_{i \neq i_0}$ sont des combinaisons linéaires de $(x_i)_{i \neq i_0}$ indépendantes. La coordonnée x_{i_0} n'apparaît pas dans leur écriture et apparaît dans celle de L_{i_0}. Il en résulte que les formes $(L_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont encore indépendantes d'où le résultat.

- Cas 2 : $\forall i \in \{1, \ldots, n\}, q(e_i) = \phi_\varphi(e_i) = \varphi(e_i, e_i) = 0_{\mathbb{R}}$. Dans ce cas, on ne peut pas "compléter" les carrés, on va utiliser l'égalité remarquable:

$$4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2, \ \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

En réorganisant les termes dans q, on obtient:

$$\begin{aligned}
q(x_1,\dots,x_n) = 2 &\left(\varphi(e_{i_0},e_{j_0})x_{i_0} + \sum_{j\neq i_0}^{n} \varphi(e_j,e_{j_0})x_j\right)\left(x_{j_0} + \frac{1}{\varphi(e_{i_0},e_{j_0})}\sum_{j\neq j_0}^{n}\varphi(e_{i_0},e_j)x_j\right)\\
&\underbrace{-\frac{2}{\varphi(e_{i_0},e_{j_0})}\left(\sum_{j\neq i_0}^{n}\varphi(e_j,e_{j_0})x_j\right)\left(\sum_{j\neq j_0}^{n}\varphi(e_{i_0},e_j)x_j\right)}_{\text{ne dépend pas de } (x_{i_0},x_{j_0})}\\
&+\underbrace{\sum_{1\leq i\leq j\leq n, i,j\neq i_0,j_0} \varphi(e_i,e_j)x_jx_i}_{\text{ne dépend pas de } (x_{i0},x_{j0})}
\end{aligned}$$

Donc $q(x_1,\dots,x_n)$ est de la forme

$$q(x_1,\dots,x_n) = 2\varphi(e_{i_0},e_{j_0})L_{i_0}(x)L_{j_0}(x) + q'(x_1,\dots,x_n) \tag{3}$$

où $q'(x_1,\dots,x_n)$ est une forme quadratique à $n-2$ variables qui ne dépend pas de (x_{i_0},x_{j_0}) et

$$\begin{cases} L_{i_0}(x) = L_{i_0}(x_1,\dots,x_n) = x_{i_0} + \dfrac{1}{\varphi(e_{i_0},e_{j_0})}\displaystyle\sum_{j\neq i_0}^{n}\varphi(e_j,e_{j_0})x_j\\ L_{j_0}(x) = L_{j_0}(x_1,\dots,x_n) = x_{j_0} + \dfrac{1}{\varphi(e_{i_0},e_{j_0})}\displaystyle\sum_{j\neq j_0}^{n}\varphi(e_{i_0},e_j)x_j \end{cases} \tag{4}$$

On applique l'hypothèse de récurence (forte) vraie au rang $n-2$ à q' ce qui permet d'écrire

$$q'(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i\neq i_0,j_0} c_iL_i(x)^2$$

où les $(L_i)_{i=1,\dots,n,i\neq i_0,\neq j_0}$ sont linéaires et linéairement indépendantes et ne dépendent pas de (x_{i_0},x_{j_0}). En remplaçant q' par cette expression dans (3) et en utilisant l'égalité remarquable citée plus haut, on en déduit

$$\begin{aligned}
q(x_1,\dots,x_n) &= \frac{\varphi(e_{i_0},e_{j_0})}{2}\left(L_{i_0}(x)+L_{j_0}(x)\right)^2 + \frac{-\varphi(e_{i_0},e_{j_0})}{2}\left(L_{i_0}(x)-L_{j_0}(x)\right)^2\\
&\quad+\sum_{i\neq i_0,j_0} c_iL_i(x)^2\\
&= \frac{\varphi(e_{i_0},e_{j_0})}{2}L'_{i_0}(x)^2 + \frac{-\varphi(e_{i_0},e_{j_0})}{2}L'_{j_0}(x)^2 + \sum_{i\neq i_0,j_0} c_iL_i(x)^2
\end{aligned}$$

où L'_{i_0} et L'_{j_0} sont des fonctions linéaires des $x_1,\dots,x_n$. Montrons qu'elles sont linéairement indépendantes. Supposons qu'il existe $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$ tel que

$$\lambda_1L'_{i_0}(x)+\lambda_2L'_{j_0}(x) = 0_{\mathbb{R}},\ \forall x\in E$$

De manière équivalente, on a

$$\begin{aligned} & \lambda_1(L_{i_0}(x) + L_{j_0}(x)) + \lambda_2(L_{i_0}(x) - L_{j_0}(x)) = 0_{\mathbb{R}},\ \forall x \in E \\ \iff & L_{i_0}(x)(\lambda_1 + \lambda_2) + L_{j_0}(x)(\lambda_1 - \lambda_2) = 0_{\mathbb{R}},\ \forall x \in E. \end{aligned}$$

Si $x \in E$ est un vecteur qui a toutes ses coordonnées nulles sauf la i_0-ème, alors comme $\phi(e_{i_0}) = \phi(e_{j_0}) = 0_{\mathbb{R}}$, on a $L_{j_0}(x) = 0$ et $L_{i_0}(x) = x_{i_0} \neq 0$. On en déduit $\lambda_1 = -\lambda_2$. Si $x \in E$ est un vecteur qui a toutes ses coordonnées nulles sauf la j_0-ème, alors on a $L_{i_0}(x) = 0$ et $L_{j_0}(x) = x_{j_0} \neq 0$. On en déduit $\lambda_1 = \lambda_2$. Au final, on conclut que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0_{\mathbb{R}}$. L'_{i_0} et L'_{j_0} sont donc linéairement indépendantes. De la même manière on montre que ces deux applications linéaires sont linéairement indépendantes de chacune des $(L_i)_{i \neq i_0, i \neq j_0}$.

$\square$

Remarques

- Pour réduire une forme quadratique associée à une forme bilinéaire symétrique, on applique de manière itérative le procédé de réduction utilisé dans la preuve précédente : on obtient la décomposition de Gauss.

- Obtention d'une bases orthogonale et matrice de passage. A l'issue du procédé de Gauss, on obtient pour tout $x \in E$,

$$\phi(x) = a_1 L(x_1, \ldots, x_n)^2 + \ldots + a_r L_r(x_1, \ldots, x_n)^2, \qquad \text{avec } r = \mathrm{Rg}(\varphi) \leq n.$$

  On pose alors pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, $\widetilde{x}_i = L_i(x_1, \ldots, x_n)$. On choisit pour tout $i \in \{r+1, \ldots, n\}$, $\widetilde{x}_i = L_i(x_1, \ldots, x_n)$ tels que la famille $\{L_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, L_n(x_1, \ldots, x_n)\}$ reste linéairement indépendante au sens défini précédemment. On obtient $\widetilde{X} = \begin{pmatrix} \widetilde{x}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{x}_n \end{pmatrix}$ les coordonnées de x sur la base $\widetilde{\mathcal{B}}_E$ qui est orthogonale pour φ. Le procédé donne la relation $\widetilde{X} = P^{-1}.X$ avec $P^{-1} = \mathrm{Mat}(id_E, \mathcal{B}_E, \widetilde{\mathcal{B}}_E)$. Pour identifier les vecteurs de $\widetilde{\mathcal{B}}_E$, il faut calculer P.