
Aprendizaje de Máquinas, Laboratorio #3

Regresión

Fecha de entrega a definir

Nota: (1) Estas preguntas requieren pensar, pero no requieren largas respuestas. Por favor se tan conciso como sea posible. (2) Cuando envíes una pregunta al foro, por favor asegúrate de escribir el número de laboratorio y el número del problema, tal como L3 P2. (3) Para problemas que requieran programación, por favor incluye en tu envío el código (con comentarios) y cualquier figura que se haya solicitado graficar. Ten en cuenta que el código debe poder correr desde cualquier máquina (4) Si escribes tus soluciones a mano, por favor escribe claramente y utilizando una birome de color oscuro.

Péndulo Doble¹

Un péndulo doble es un sistema compuesto de dos péndulos, donde el segundo péndulo se encuentra unido al extremo del primero (Figura ??). Es un sistema físico con un rico comportamiento dinámico y con una fuerte sensibilidad a las condiciones iniciales. El movimiento de un péndulo doble se rige por un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas. Para ciertas energías de su movimiento es caótico.

Se pueden considerar diversas variantes del péndulo doble. Las dos varillas pueden tener longitudes y masas iguales o diferentes, pueden ser péndulos simples o péndulos compuestos (también llamado péndulo complejo) y el movimiento puede ser en tres dimensiones o solo limitarse al plano vertical. En el siguiente análisis, las varillas se toman como péndulos idénticos con longitud ℓ y masa m , y el movimiento se limita a dos dimensiones.

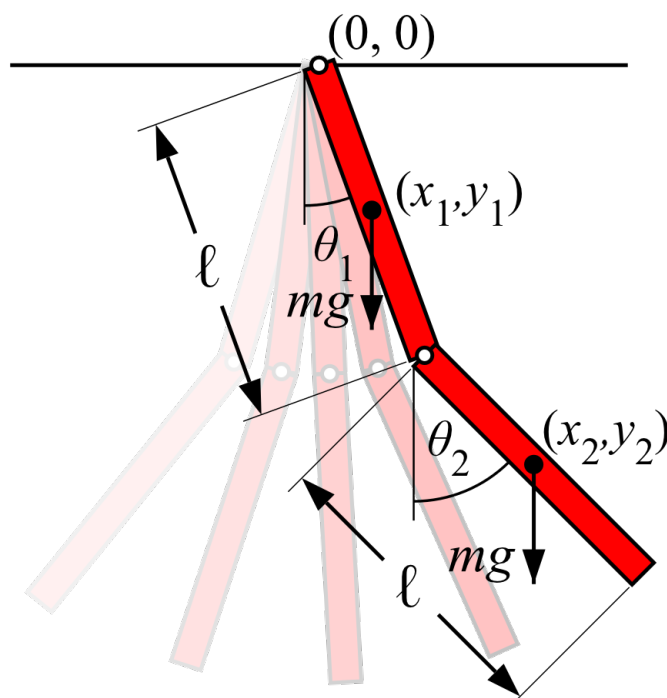


Figura 1: Ejemplo de un Péndulo Doble

¹Extraído de http://en.wikipedia.org/wiki/Double_pendulum y http://es.wikipedia.org/wiki/Doble_péndulo

Ecuaciones de Movimiento

Las ecuaciones de movimiento² que dominan la dinámica de un Péndulo Doble son

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 &= \frac{6}{m\ell^2} \frac{2p_{\theta_1} - 3\cos(\theta_1 - \theta_2)p_{\theta_2}}{16 - 9\cos^2(\theta_1 - \theta_2)} \\ \dot{\theta}_2 &= \frac{6}{m\ell^2} \frac{8p_{\theta_2} - 3\cos(\theta_1 - \theta_2)p_{\theta_1}}{16 - 9\cos^2(\theta_1 - \theta_2)} . \\ \dot{p}_{\theta_1} &= \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -\frac{1}{2}m\ell^2 \left[\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + 3\frac{g}{\ell} \sin \theta_1 \right] \\ \dot{p}_{\theta_2} &= \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -\frac{1}{2}m\ell^2 \left[-\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \frac{g}{\ell} \sin \theta_2 \right] .\end{aligned}$$

donde θ_1 y θ_2 son los ángulos entre cada varilla y la vertical, tal como se indican en la Figura ??.

Estas cuatro ecuaciones son fórmulas explícitas para la evolución temporal del sistema dado su estado actual. No es posible integrar estas ecuaciones analíticamente para obtener θ_1 y θ_2 y en función del tiempo. Sin embargo, es posible llevar a cabo esta integración numérica usando el Método de Euler o técnicas similares.

Método de Euler

El método de Euler es un procedimiento de integración numérica para resolver *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias* a partir de un valor inicial dado. Este método es el más simple de los Métodos numéricos para resolver problemas del tipo

$$\begin{aligned}y' &= F(x, y) \\ y(x_0) &= y_0\end{aligned}$$

donde y_0 es el valor inicial, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_1 + h$, ..., y h es el tamaño del “incremento”. Aplicando Euler al problema anterior podemos aproximar y' como

$$y_{i+1} = y_i + hF(x_i, y_i)$$

§ Problema 1. [0] Aplicando Euler a las Ecuaciones de Movimiento

El método de Euler fue aplicado a las Ecuaciones de Movimiento del Péndulo Doble en la función `next_thetas`

§ Problema 2. [50 pts] Creando un dataset para entrenar un regresor

Debe completar la función `create_dataset` para generar un dataset a partir de las ecuaciones obtenidas en el punto anterior con 500 datapoints. Las variables del dataset son $\{\theta_1^{t-2}, \theta_1^{t-1}, \theta_2^{t-2}, \theta_2^{t-1}, \theta_1^t, \theta_2^t\}$, siendo $\theta_1^{t-2}, \theta_1^{t-1}, \theta_2^{t-2}, \theta_2^{t-1}$ los inputs del problema y θ_1^t, θ_2^t los outputs.

En el código fuente ya se proponen los valores iniciales para $\theta_0^1, \theta_0^2, p_{\theta_0^1}$ y $p_{\theta_0^2}$, así como para las constantes m (masa de las varillas), ℓ (longitud de las varillas) y g (gravedad).

²Puede consultar el desarrollo completo en http://en.wikipedia.org/wiki/Double_pendulum

§ Problema 3. [0 pts] Aprendiendo la dinámica del Péndulo Doble con ANN

Entrenar la ANN con el dataset obtenido en el punto anterior para distintos valores de `size` (1,2,4,8) y `maxit` (10, 100, 1000, 5000). La llamada a la función `nnet` debe ser `nnet(x=X, y=Y, size=s, maxit=i)`, donde `X` es la matrix con los inputs e `Y` es la matrix con los outputs.

§ Problema 4. [0 pts] Aprendiendo la dinámica del Péndulo Doble con SVR

Entrenar un regresor con SVR a partir del dataset obtenido en el Problema 2. Para obtener el mismo, la llamada a la función `svm` debe ser `svm(x=X, y=Y[,1])` y `svm(x=X, y=Y[,2])`, donde `X` es la matrix con los inputs e `Y` es la matrix con los output. Notar que el parámetro `y` recibe un vector, por lo que es necesario generar dos modelos diferentes, uno para cada variable output.

§ Problema 5. [40 pts] Prediciendo la dinámica del Péndulo Doble

Complete la función `prediction.pendulum.by.ann` y `prediction.pendulum.by.svr` para predecir la dinámica del péndulo doble usando el modelo de ANN y SVR aprendido de los puntos anteriores.

§ Problema 6. [10] Graficando los resultados

Al finalizar el template de código, encontrará con funcionalidad ya implementada para graficar tanto el péndulo como las thetas gracias a `utils.R`

Haciendo uso de la función `plot.thetas(it, t1, t2, tn1, tn2, e1, e2)` se pueden graficar los ángulos θ_1 y θ_2 con respecto al tiempo t obtenidos mediante las Ecuaciones de Movimiento, los ángulos θ_{N1} y θ_{N2} obtenidos por la red y finalmente el error entre el sistema y el modelo aprendido. Los parámetros de la función `plot.thetas` son:

- `it`: vector con las iteraciones que se van a graficar (e.g. `it=500:1000`).
- `t1, t2`: ángulos θ_1 y θ_2 (obtenidos mediante las Ecuaciones de Movimiento).
- `tn1, tn2`: ángulos θ_{N1} y θ_{N2} (estimados por la red).
- `e1, e2`: error de predicción.

Utilice las gráficas para comparar los resultados entre ANN (para distintos `size` y `maxit`) y SVR

NOTA IMPORTANTE: Este laboratorio se evaluará en clases.