Capítulo 4

Diseño de algoritmos recursivos[1]

Para entender la recursividad
primero hay que entender la recursividad

Anónimo

Resumen: En este tema se presenta el mecanismo de la recursividad como una manera de diseñar algoritmos fiables y fáciles de entender. Se introducen distintas técnicas para diseñar algoritmos recursivos, analizar su complejidad, modificarlos para mejorar esta complejidad y verificar su corrección.

1. Introducción

⋆ La recursión aparece de forma natural en programación, tanto en la definición de tipos de datos (como veremos en temas posteriores) como en el diseño de algoritmos.

⋆ Hay lenguajes (funcionales y lógicos) en los que no hay iteración (no hay bucles), sólo hay recursión. En C++ tenemos la opción de elegir entre iteración y recursión.

⋆ Optamos por una solución recursiva cuando sabemos cómo resolver de manera directa un problema para un cierto conjunto de datos y para el resto de los datos somos capaces de resolverlo utilizando la solución al mismo problema con unos datos "más simples".

⋆ Cualquier solución recursiva se basa en un análisis (clasificación) de los datos, $\vec{x}$, para distinguir los casos de solución directa y los casos de solución recursiva:

- caso(s) directo(s): $\vec{x}$ es tal que el resultado $\vec{y}$ puede calcularse directamente de forma sencilla.
- caso(s) recursivo(s): sabemos cómo calcular a partir de $\vec{x}$ otros datos más pequeños $\vec{x}'$, y sabemos además cómo calcular el resultado $\vec{y}$ para $\vec{x}$ suponiendo conocido el resultado $\vec{y}'$ para $\vec{x}'$.

[1] Gonzalo Méndez y Clara Segura son los autores principales de este tema, que incluye material elaborado por Jaime Sánchez.

⋆ Para implementar soluciones recursivas en un lenguaje de programación tenemos que utilizar una acción que se invoque a sí misma con datos cada vez "más simples": funciones o procedimientos.

⋆ Intuitivamente, el subprograma se invoca a sí mismo con datos cada vez más simples hasta que son tan simples que la solución es inmediata. Posteriormente, la solución se puede ir elaborando hasta obtener la solución para los datos iniciales.

⋆ Tres elementos básicos en la recursión:

- Autoinvocación: el proceso se llama a sí mismo.
- Caso directo: el proceso de autoinvocación eventualmente alcanza una solución directa (sin invocarse a sí mismo) al problema.
- Combinación: los resultados de la llamada precedente son utilizados para obtener una solución, posiblemente combinados con otros datos.

⋆ Para entender la recursividad, a veces resulta útil considerar cómo se ejecutan las acciones recursivas en una computadora, como si se crearan múltiples copias del mismo código, operando sobre datos diferentes (en realidad sólo se copian las variables locales y los parámetros por valor). El ejemplo clásico del factorial:

```
{n ≥ 0}
fun factorial (int n) return int r
{r = n!}

int factorial ( int n ) {
  int r;
  if  ( n == 0 ) r = 1;
  else  // n > 0
      r = n * factorial(n-1);
  return r;
}
```

¿Cómo se ejecuta la llamada *factorial(3)*?

¿Y qué ocurre en memoria?

⋆ ¿La recursión es importante?

- Un método muy potente de diseño y razonamiento formal.
- Tiene una relación natural con la inducción y, por ello, facilita conceptualmente la resolución de problemas y el diseño de algoritmos.

1.1. Recursión simple

⋆ Una acción recursiva tiene recursión simple (o lineal) si cada caso recursivo realiza exactamente una llamada recursiva. Puede describirse mediante el esquema general:

```
void nombreProc ( τ1x1 , ... , τnxn , δ1 & y1 , ... , δm & ym ){
// P: Precondición
// declaración de constantes

   τ1x'1 ; ... ; τnx'n ; // x⃗', parámetros de la llamada recursiva
   δ1y'1 ; ... ; δmy'm ; // y⃗', resultados de la llamada recursiva
```

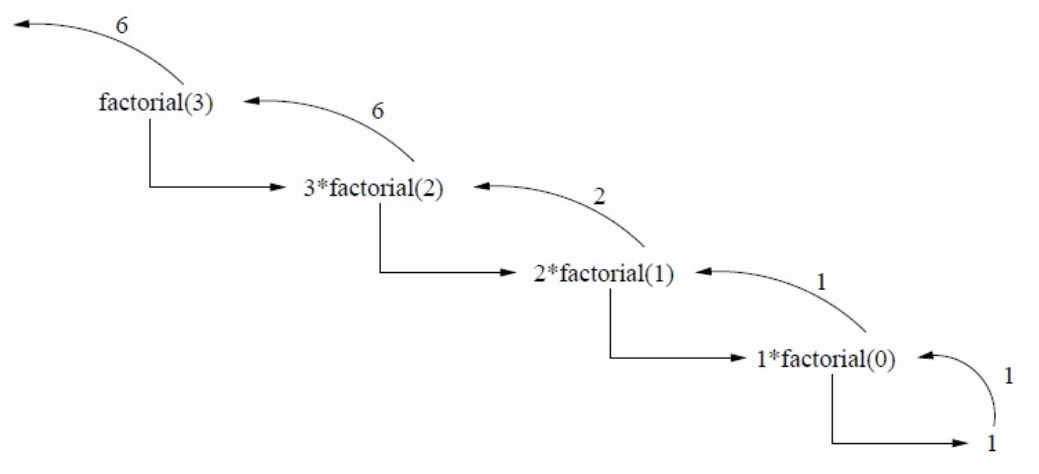


Figura 1: Ejecución de *factorial(3)*

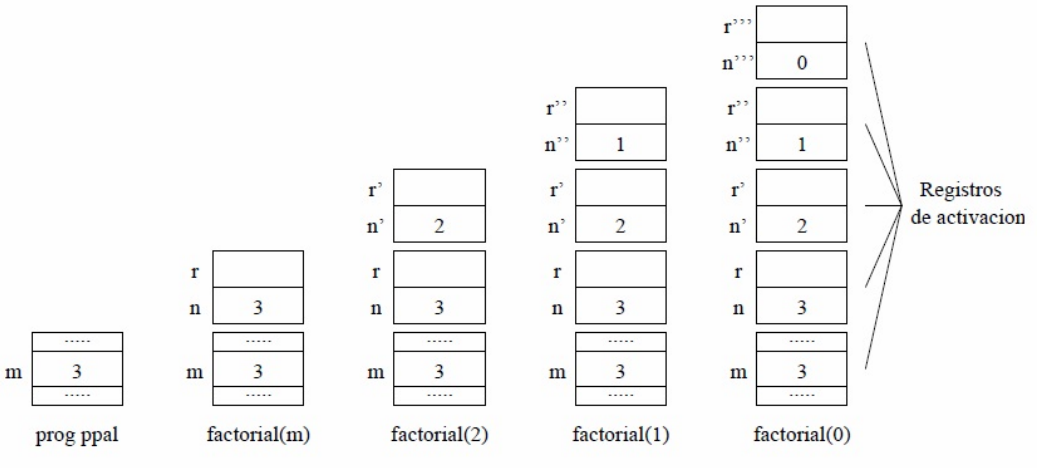


Figura 2: Llamadas recursivas de *factorial(3)*

```
  if ( d(x⃗) )                    // caso directo
    y⃗ = g(x⃗);                  // solución al caso directo
  else if ( r(x⃗) ) {              // caso no directo
    x⃗' = s(x⃗);                 // función sucesor: descomposición de datos
    nombreProc(x⃗', y⃗');        // llamada recursiva
    y⃗ = c(x⃗, y⃗'); // función de combinación: composición de solución
  }

// Q: Postcondición
}
```

donde:

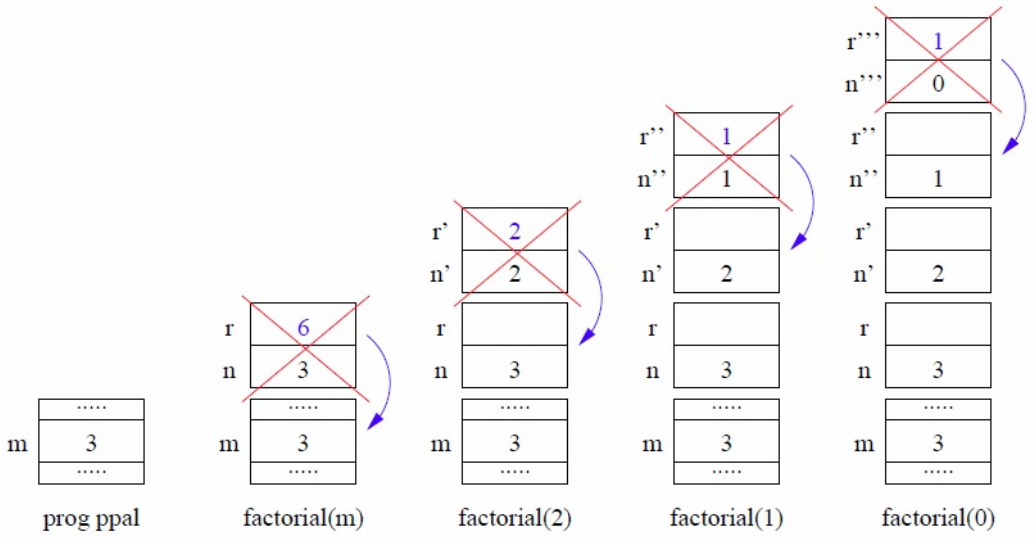


Figura 3: Vuelta de las llamadas recursivas de *factorial(3)*

- $\vec{x}$ representa a los parámetros de entrada x_1, ... , x_n, $\vec{x}'$ a los parámetros de la llamada recursiva x'_1, ... , x'_n, $\vec{y}'$ a los resultados de la llamada recursiva y'_1, ... , y'_m, e $\vec{y}$ a los parámetros de salida y_1, ... , y_m
- $d(\vec{x})$ es la condición que determina el caso directo
- $r(\vec{x})$ es la condición que determina el caso recursivo
- g calcula el resultado en el caso directo
- s, la *función sucesor*, calcula los argumentos para la siguiente llamada recursiva
- c, la *función de combinación*, obtiene la combinación de los resultados de la llamada recursiva $\vec{y}'$ junto con los datos de entrada $\vec{x}$, proporcionando así el resultado $\vec{y}$.

⋆ Veamos cómo la función factorial se ajusta a este esquema de declaración:

```
{n ≥ 0}
fun factorial (int n) return int r
{r = n!}

int factorial ( int n ) {
  int r;

  if ( n == 0 ) r = 1;
  else   // n > 0
      r = n * factorial(n-1);
  return r;
}
```

$d(n) = (n == 0)$
$g(n) = 1$
$r(n) = (n > 0)$

$s(n) = n - 1$
$c(n, fact(s(n))) = n * fact(s(n))$

⋆ El esquema de recursión simple puede ampliarse considerando varios casos directos y también varias descomposiciones para el caso recursivo. d($\vec{x}$) y r($\vec{x}$) pueden desdoblarse en una alternativa con varios casos. Lo importante es que las alternativas sean **exhaustivas** y **excluyentes**, y que en cada caso sólo se ejecute una llamada recursiva.

⋆ Ejemplo: multiplicación de dos naturales por el método del *campesino egipcio*.

```
{(a ≥ 0) ∧ (b ≥ 0)}
fun prod (int a, int b) return int r
{r = a * b}

int prod ( int a, int b ) {
  int r;

  if ( b == 0 ) {
      r = 0;
  else if ( b == 1 ) {
      r = a;
  } else if (b % 2 == 0) {        // b > 1
      r = prod(2*a, b/2);
  } else {                        // b > 1 && (b %2 == 1)
      r = prod(2*a, b/2) + a;
  }
  return r;
}
```

$d_1(a,b) = (b == 0)$ | $d_2(a,b) = (b == 1)$
$g_1(a,b) = 0$ | $g_2(a,b) = 1$
$r_1(a,b) = ((b > 1)\ \&\&\ par(b))$ | $r_2(a,b) = ((b > 1)\ \&\&\ impar(b))$
$s_1(a,b) = (2 * a, b/2)$ | $s_2(a,b) = (2 * a, b/2)$
$c_1(a,b,prod(s_1(a,b))) = prod(s_1(a,b))$ | $c_2(a,b,prod(s_2(a,b))) = prod(s_2(a,b)) + a$

1.2. Recursión final

⋆ La recursión final o de cola (*tail recursion*) es un caso particular de recursión simple donde la función de combinación se limita a transmitir el resultado de la llamada recursiva. Se llama final porque lo último que se hace en cada pasada es la llamada recursiva.

⋆ El resultado será siempre el obtenido en uno de los casos base.

⋆ Los algoritmos recursivos finales tienen la interesante propiedad de que pueden ser traducidos de manera directa a soluciones iterativas, más eficientes.

```
void nombreProcItr ( τ1x1 , ... , τnxn , δ1 & y1 , ... , δm & ym ) {
// Precondición
// declaración de constantes
  τ1x'1 ; ... ; τnx'n ; // x⃗'

  x⃗' = x⃗;
  while ( r(x⃗') )
      x⃗' = s(x⃗');
  y⃗ = g(x⃗');
  }
// Postcondición
}
```

⋆ Como ejemplo de función recursiva final veamos el algoritmo de cálculo del máximo común divisor por el algoritmo de Euclides.

```
{(a > 0) ∧ (b > 0)}
fun mcd (int a, int b) return int r
{r = mcd(a, b)}

int mcd( int a, int b ) {
  int m;

  if      ( a == b ) m = a;
  else if ( a >  b ) m = mcd(a-b, b);
  else  // a <  b
       m = mcd(a, b-a);
  return m;
}
```

que se ajusta al esquema de recursión simple:

$$\begin{array}{ll} d(a,b) = (a == b) & g(a,b) = a \\ r_1(a,b) = (a > b) & r_2(a,b) = (a < b) \\ s_1(a,b) = (a-b, a) & s_2(a,b) = (a, b-a) \end{array}$$

y donde las funciones de combinación se limitan a devolver el resultado de la llamada recursiva

$c_1(a, b, mcd(s_1(a,b))) = mcd(s_1(a,b))$
$c_2(a, b, mcd(s_2(a,b))) = mcd(s_2(a,b))$

Si traducimos esta versión recursiva a una iterativa del algoritmo obtenemos:

```
int itmcd( int a, int b ) {
  int auxa = a; int auxb = b;
  while (auxa != auxb)
      if (auxa>auxb)
         auxa = auxa-auxb;
      else
         auxb = auxb-auxa;
  return auxa;
}
```

1.3. Recursión múltiple

⋆ Este tipo de recursión se caracteriza por que, al menos en un caso recursivo, se realizan varias llamadas recursivas. El esquema correspondiente es el siguiente:

```
void nombreProc ( τ1x1 , ... , τnxn , δ1 & y1 , ... , δm & ym ) {
// Precondición
// declaración de constantes
  τ1x11 ; ... ; τnx1n ; ... ; τ1xk1 ; ... ; τnxkn ;
  δ1y11 ; ... ; δmy1m ; ... ; δ1yk1 ; ... ; δmykm ;

  if ( d(x⃗) )
     y⃗ = g(x⃗);
  else if ( r(x⃗) ) {
    x⃗1 = s1( x⃗ );
    nombreProc(x⃗1, y⃗1);
    ...
    x⃗k = sk( x⃗ );
    nombreProc(x⃗k, y⃗k);
    y⃗ = c(x⃗, y⃗1, ... , y⃗k);
  }
// Postcondición
}
```

donde

- $k > 1$, indica el número de llamadas recursivas
- $\vec{x}$ representa los parámetros de entrada x_1,..., x_n, $\vec{x}_i$ a los parámetros de la *i-ésima* llamada recursiva x_{i1},..., x_{in}, $\vec{y}i$ a los resultados de la *i-ésima* llamada recursiva y_{i1},..., y_{im}, para $i = 1, ..., k$, e $\vec{y}$ a los parámetros de salida y_1,..., y_m
- $d(\vec{x})$ es la condición que determina el caso directo
- $r(\vec{x})$ es la condición que determina el caso recursivo
- g calcula el resultado en el caso directo
- s_i, las *funciones sucesor*, calculan la descomposición de los datos de entrada para realizar la *i-ésima* llamada recursiva, para $i = 1, ... , k$
- c, la *función de combinación*, obtiene la combinación de los resultados $\vec{y}_i$ de las llamadas recursivas, para $i = 1, ... , k$, junto con los datos de entrada $\vec{x}$, proporcionando así el resultado $\vec{y}$.

⋆ Otro ejemplo clásico, los números de Fibonacci:

```
{n ≥ 0}
fun fib (int n) return int r
{r = fib(n)}

int fib( int n ) {
  int r;

  if      ( n == 0 ) r = 0;
  else if ( n == 1 ) r = 1;
  else    // n >  1
```

```
        r = fib(n-1) + fib(n-2);

  return r;
}
```

que se ajusta al esquema de recursión múltiple (k = 2)

$$
\begin{array}{ll}
d_1(n) = (n == 0) & d_2(n) = (n == 1) \\
g(0) == 0 & g(1) == 1 \\
r(n) = (n > 1) & \\
s_1(n) = n - 1 & s_2(n) = n - 2 \\
c(n, fib(s_1(n)), fib(s_2(n))) & = fib(s_1(n)) + fib(s_2(n))
\end{array}
$$

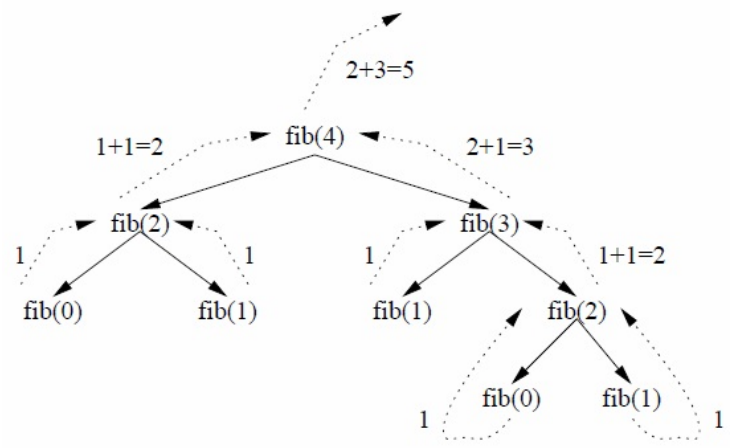


Figura 4: Ejecución de *fib(4)*

⋆ En la recursión múltiple, el número de llamadas puede crecer muy rápidamente, como se puede ver en el cómputo de *fib(4)* que se muestra en la Figura 4. Nótese que algunos valores se computan más de una vez (p.e. *fib(2)* se evalúa 2 veces).

1.4. Resumen de los distintos tipos de recursión

⋆ Para terminar con la introducción, recapitulamos los distintos tipos de funciones recursivas que hemos presentado:

- Simple. Una llamada recursiva en cada caso recursivo:
  - No final. Requiere combinación de resultados
  - Final. No requiere combinación de resultados
- Múltiple. Más de una llamada recursiva en algún caso recursivo.

2. Diseño de algoritmos recursivos

⋆ Dada la especificación $\{P_0\}A\{Q_0\}$, hemos de obtener una acción A que la satisfaga.

- ⋆ Nos planteamos implementar A como una función o un procedimiento recursivo cuando podemos obtener -fácilmente- una definición recursiva de la postcondición.
- ⋆ Se propone un método que descompone la obtención del algoritmo recursivo en varios pasos.

(R.1) **Planteamiento recursivo.** Se ha de encontrar una estrategia recursiva para alcanzar la postcondición, es decir, la solución. A veces, la forma de la postcondición, o de las operaciones que en ella aparecen, nos sugerirá directamente una estrategia recursiva.

Se trata, por tanto, de describir de manera poco formal la estrategia a seguir para resolver el problema planteado.

(R.2) **Análisis de casos.** Se trata de identificar y obtener las condiciones que permiten discriminar los casos directos de los recursivos. Deben tratarse de forma exhaustiva y mutuamente excluyente todos los casos contemplados en la precondición:

$$P_0 \Rightarrow d(\vec{x}) \vee r(\vec{x})$$

(R.3) **Caso directo.** Hemos de encontrar la acción A_1 que resuelve el caso directo:

$$\{P_0 \wedge d(\vec{x})\} A_1 \{Q_0\}$$

Si hubiese más de un caso directo, repetiríamos este paso para cada uno de ellos.

(R.4) **Descomposición recursiva.** Se trata de obtener la función sucesor $s(\vec{x})$ que nos proporciona los datos que empleamos para realizar la llamada recursiva.

Si hay más de un caso recursivo, obtenemos la función sucesor para cada uno de ellos.

(R.5) **Función de acotación y terminación.** Determinamos si la función sucesor escogida garantiza la terminación de las llamadas, obteniendo una función que estime el número de llamadas restantes hasta alcanzar un caso base -la *función de acotación*- y justificando que se decrementa en cada llamada.

Si hay más de un caso recursivo, se ha de garantizar la terminación para cada uno de ellos.

(R.6) **Llamada recursiva.** Pasamos a ocuparnos entonces del caso recursivo. Cada una de las descomposiciones recursivas ha de permitir realizar la(s) llamada(s) recursiva(s), es decir, la función sucesor debe proporcionar unos datos que cumplan la precondición de la función recursiva para estar seguros de que se realiza la llamada recursiva con datos válidos.

$$P_0 \wedge r(\vec{x}) \Rightarrow P_0[\vec{x}/s(\vec{x})]$$

(R.7) **Función de combinación.** Lo único que nos resta por obtener del caso recursivo es la función de combinación, que, en el caso de la recursión simple, será de la forma $\vec{y} = c(\vec{x}, \vec{y}')$.

Si hubiese más de un caso recursivo, habría que encontrar una función de combinación para cada uno de ellos.

(R.8) **Escritura del caso recursivo.** Lo último que nos queda por decidir es si necesitamos utilizar en el caso recursivo todas las variables auxiliares que han ido apareciendo. Partiendo del esquema más general posible

```
{ P0 ∧ r(x⃗) }
    x⃗' = s(x⃗);
    nombreProc(x⃗', y⃗');
    y⃗= c(x⃗, y⃗')
{ Q0 }
```

llegamos a aquel donde el caso recursivo se reduce a una única sentencia

```
{ P0 ∧ r(x⃗) }
    y⃗ = c(x⃗, nombreFunc(s(x⃗)))
{ Q0 }
```

Repetimos este proceso para cada caso recursivo, si es que tenemos más de uno, y lo generalizamos de la forma obvia cuando tenemos recursión múltiple.

Veamos un ejemplo. Decimos que un vector de naturales es *pareado* si la diferencia entre el número de pares de su mitad izquierda y su mitad derecha no excede la unidad, y además ambas mitades son a su vez pareadas. Vamos a diseñar una función que nos diga si un vector de naturales es o no pareado.

Especificación

$\{longitud(v) \geq num \wedge \forall k : 0 \leq k < num : v[k] >= 0\}$
`fun pareado (int v[],int num) return bool b`
$\{b = esPareado(v, 0, num)\}$

donde el predicado *esPareado* se define según el enunciado de la siguiente manera para $0 \leq i \leq j \leq num$:

$$esPareado(v, i, j) \equiv$$
$$(j \leq i + 1) \vee$$

$$(j > i + 1 \wedge |numPares(v, i, (i + j)/2) - numPares(v, (i + j)/2, j)| \leq 1$$

$$\wedge esPareado(v, i, (i + j)/2) \wedge esPareado(v, (i + j)/2, j))$$

siendo

$$numPares(v, c, f) \equiv \#z : c \leq z < f : v[z] \ mod \ 2 = 0$$

(R.1) Planteamiento recursivo

(R.2) y análisis de casos. El planteamiento recursivo parece directo, ya que para saber si un vector es pareado hemos de comprobar, entre otras cosas, que sus dos mitades cumplen a su vez la misma propiedad. La cuestión es cómo hacer referencia en la llamada recursiva a una mitad del vector. No basta con escribir $pareado(v, num/2)$, ya que hay dos mitades, la de la izquierda y la de la derecha. Adicionalmente, cada una de ellas tiene a su vez dos mitades que habrá que comprobar que cumplen la propiedad y así sucesivamente, lo cual quiere decir que necesitamos saber cuándo un segmento válido cualquiera del vector es pareado.

Para ello vamos a utilizar una función auxiliar que nos permita hacer el planteamiento recursivo descrito anteriormente:

$\{P_0 \equiv 0 \leq i \leq j \leq longitud(v) \wedge \forall k : 0 \leq i \leq k < j : v[k] >= 0\}$
`fun pareado (int v[],int i,int j) return bool b`
$\{b = esPareado(v, i, j)\}$

Se dice que esta función es una *generalización* de la función a desarrollar porque tiene más parámetros que la función que se desea definir, y además la función original se puede calcular como un caso particular de la auxiliar:

$$pareado(v, num) = pareado(v, 0, num)$$

Para calcular lo que se desea por tanto basta con una llamada a $pareado(v, 0, num)$. Esta llamada recibe el nombre de *llamada inicial*.

La generalización es una técnica muy utilizada en el diseño de algoritmos recursivos que consiste en añadir parámetros adicionales y/o resultados adicionales que ayudan a diseñar la función o a hacerla más eficiente.

Nótese que no es necesario inventarse otro nombre para la función auxiliar porque C++ permite la sobrecarga de funciones: definir varias funciones con el mismo nombre que se distinguen por los parámetros.

Vamos por tanto a diseñar recursivamente la función auxiliar. El problema se resuelve trivialmente cuando el segmento es vacío o unitario, es decir, cuando $j \leq i + 1$, ya que en tal caso el segmento se considera pareado.

$$d(v, i, j) : j \leq i + 1$$
$$r(v, i, j) : j > i + 1$$

Claramente, estos dos casos cubren los admitidos por la precondición.

El planteamiento recursivo consiste en comprobar que las dos mitades son pareadas: $pareado(v, i, (i+j)/2)$ y $pareado(v, (i+j)/2, j)$, y hacer una comprobación adicional que consiste en contar el número de pares de cada una de esas mitades y comprobar que la diferencia en valor absoluto no supera a 1.

(R.3) Solución en el caso directo.

{ $P_0 \wedge j \leq i + 1$ }
A_1
{ $esPareado(v, i, j)$ }

Claramente, por definición de $esPareado$: $A_1 \equiv b = true$;

(R.4) Descomposición recursiva.

$$s_1(v, i, j) = (v, i, (i + j)/2)$$
$$s_2(v, i, j) = (v, (i + j)/2, j)$$

(R.5) Función de acotación y terminación. El valor que disminuye hasta llegar al caso base es

$$t(i, j) = j - i$$

Efectivamente, se decrementa en cada una de las dos llamadas recursivas:

$$t(s_1(i, j)) = (i + j)/2 - i$$
$$t(s_2(i, j)) = j - (i + j)/2$$

ya que si $j > i + 1$ entonces $i < (i + j)/2 < j$ y por tanto $(i + j)/2 - i < j - i$ y también $j - (i + j)/2 < j - i$.

(R.6) Es posible hacer las dos llamadas recursivas, es decir, los argumentos de las llamadas recursivas cumplen la precondición

$$P_0(v,i,j) \wedge r(i,j) \Rightarrow P_0(v,i,(i+j)/2)$$
$$P_0(v,i,j) \wedge r(i,j) \Rightarrow P_0(v,(i+j)/2,j)$$

Puesto que el vector no se modifica, la parte que correponde al hecho de que el vector es de naturales se cumple trivialmente, por lo que nos centramos en los índices:

$$0 \leq i \leq j \leq longitud(v) \Rightarrow 0 \leq i \leq (i+j)/2 \leq longitud(v)$$
$$0 \leq i \leq j \leq longitud(v) \Rightarrow 0 \leq (i+j)/2 \leq j \leq longitud(v)$$

(R.7) Función de combinación y escritura del caso recursivo. Como hemos mencionado previamente hemos de comprobar que ambas mitades son pareadas, para lo cual haremos dos llamadas recursivas. Llamemos m a la posición central $(i+j)/2$. Además de las llamadas recursivas hemos de contar el número de pares en cada una de las dos mitades, para lo que vamos a utilizar una función iterativa, que diseñaremos después y cuya especificación es:

$\{0 \leq i \leq j \leq longitud(v) \wedge \forall k : 0 \leq i \leq k < j : v[k] >= 0\}$
`fun contarPares (int v[],int i,int j) return int r`
$\{r = \#l : i <= l < j : v[l] \ \ mod \ \ 2 = 0\}$

Utilizando dicha función, el caso recursivo será:

```
int m = (i+j)/2;
b = (abs(contarPares(v,i,m)-contarPares(v,m,j)) <= 1)
              && pareado(v,i,m) && pareado(v,m,j);
```

Finalmente, el algoritmo queda:

```
bool pareado (int v[],int i,int j) {
// Pre:  0 ≤ i ≤ j ≤ longitud(v) ∧ ∀k : 0 ≤ i ≤ k < j : v[k] >= 0
  bool b;
  if (j <= i+1) b = true;
  else
    b = (abs(contarPares(v,i,m)-contarPares(v,m,j)) <= 1)
           && pareado(v,i,m) && pareado(v,m,j);
  return b;
//Post: b = esPareado(v,i,j)
}
```

siendo la llamada inicial

```
bool pareado (int v[],int num) {
// Pre: longitud(v) ≥ num ∧ ∀k : 0 ≤ k < num : v[k] >= 0
    return pareado(v,0,num);
// Post: b = esPareado(v,0,num)
}
```

En secciones posteriores de este tema veremos que el coste de este algoritmo está en $O(num \log(num))$ y cómo modificar el diseño de la función para obtener una versión más eficiente con coste en $O(num)$.

2.1. Implementación recursiva de la búsqueda binaria

⋆ Partimos de un vector ordenado, donde puede haber elementos repetidos, y un valor x que pretendemos encontrar en el vector. Buscamos la aparición más a la derecha del valor x, o, si no se encuentra en el vector, buscamos la posición anterior a donde se debería encontrar por si queremos insertarlo. Es decir, estamos buscando el punto del vector donde las componentes pasan de ser $\leq x$ a ser $> x$.

⋆ La idea es que en cada pasada por el bucle se reduce a la mitad el tamaño del subvector donde puede estar el elemento buscado.

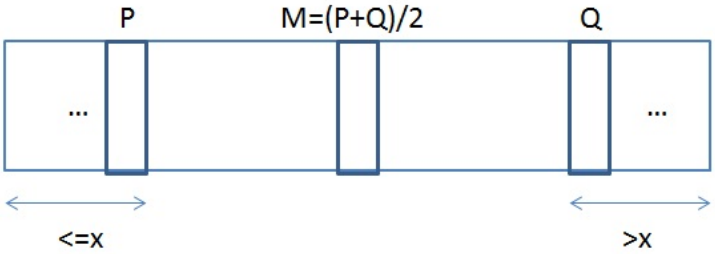


Figura 5: Cálculo del punto medio

Si $v[m] \leq x$ entonces debemos buscar a la derecha de m

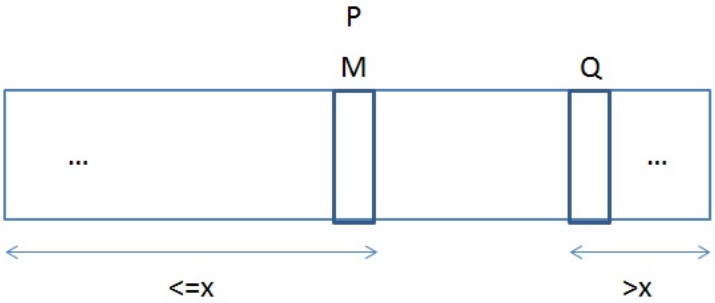


Figura 6: Búsqueda en la mitad derecha

y si $v[m] > x$ entonces debemos buscar a la izquierda de m

⋆ Como el tamaño de los datos se reduce a la mitad en cada pasada tenemos claramente una complejidad logarítmica en el caso peor (en realidad en todos los casos, pues aunque encontremos x en el vector hemos de seguir buscando ya que puede que no sea la aparición más a la derecha).

⋆ Hay que ser cuidadoso con los índices, sobre todo si:

- x no está en el vector, o si, en particular,
- x es mayor o menor que todos los elementos del vector; además, es necesario pensar con cuidado cuál es el caso base.

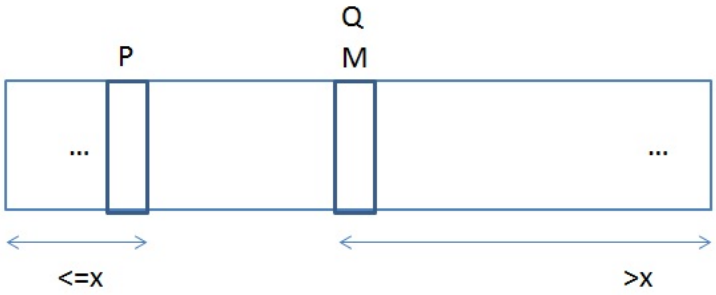


Figura 7: Búsqueda en la mitad izquierda

$\{0 \leq num \leq longitud(v) \wedge ord(v, num)\}$
`fun buscaBin (TElem v[], int num, TElem x) return int pos`
$\{(\exists u : 0 \leq u < num : v[u] \leq x \wedge pos = \text{máx}\, k : (0 \leq k \leq num - 1) \wedge v[k] \leq x : k)$
$\vee (\forall z : 0 \leq z < num : x < v[z] \wedge pos = -1)\}$

```
typedef int TElem;

int buscaBin( TElem v[], int num, TElem x ) {
  int pos;

// cuerpo de la función

  return pos;
}
```

Comentarios:

- Utilizamos el tipo TElem para resaltar la idea de que la búsqueda binaria es aplicable sobre cualquier tipo que tenga definido un orden, es decir, los operadores $=$ y $\leq$.
- Si x no está en v devolvemos la posición anterior al lugar donde debería estar. En particular, si x es menor que todos los elementos de v, el lugar a insertarlo será la posición 0 y, por lo tanto, devolvemos -1.

⋆ El planteamiento recursivo parece claro: para buscar x en un vector de n elementos tenemos que comparar x con el elemento central y

- si x es mayor o igual que el elemento central, seguimos buscando recursivamente en la mitad derecha,
- si x es menor que el elemento central, seguimos buscando recursivamente en la mitad izquierda.

⋆ De forma similar al ejemplo anterior, para comprobar si un vector es pareado, utilizaremos una función -o un procedimiento- auxiliar que nos permita implementar el planteamiento recursivo.

En el caso de la búsqueda binaria, se trata de una función que en lugar de recibir el número de elementos del vector, reciba dos índices, a y b, que señalen dónde empieza y dónde acaba el fragmento de vector a considerar (ambos incluidos en este caso).

```
int buscaBin( TElem v[], TElem x, int a, int b)
```

De esta forma, la función que realmente nos interesa se obtiene como

$$buscaBin(v, x) = buscaBin(v, x, 0, longitud(v) - 1)$$

⋆ La función recursiva es, por tanto, la función auxiliar:

```
int buscaBin( TElem v[], TElem x, int a, int b) {

// cuerpo de la función

}
```

y para buscar un elemento en el vector podemos llamar a `buscaBin( v, x, 0, l-1)`, siendo l la longitud del vector v.

⋆ Diseño del algoritmo:

(R.1) Planteamiento recursivo

(R.2) y análisis de casos.

Aunque el planteamiento recursivo está claro: dados a y b, obtenemos el punto medio m y

- si $v[m] \leq x$ seguimos buscando en $m + 1..b$
- si $v[m] > x$ seguimos buscando en $a..m - 1$,

Es necesario ser cuidadoso con los índices. La idea consiste en garantizar que en todo momento se cumple que:

- todos los elementos a la izquierda de a -sin incluir $v[a]$- son menores o iguales que x, y
- todos los elementos a la derecha de b -sin incluir $v[b]$- son estrictamente mayores que x.

Una primera idea puede ser considerar como caso base $a = b$. Si lo hiciésemos así, la solución en el caso base quedaría:

```
if ( a == b )
  if      ( v[a] == x ) p = a;
  else if ( v[a] <  x ) p = a;     // x no está en v
  else p = a-1;  // x no está en v  y v[a] >  x
```

Sin embargo, también es necesario considerar el caso base $a = b+1$ pues puede ocurrir que en ninguna llamada recursiva se cumpla $a = b$. Por ejemplo, en un situación como esta

$$x = 8 \quad a = 0 \quad b = 1 \quad v[0] = 10 \quad v[1] = 15$$

el punto medio $m = (a + b)/2$ es 0, para el cual se cumple $v[m] > x$ y por lo tanto la siguiente llamada recursiva se hace con

$$a = 0 \quad b = -1$$

que es un caso base donde debemos devolver -1 y donde para alcanzarlo no hemos pasado por $a = b$.

Como veremos a continuación, el caso $a = b$ se puede incluir dentro del caso recursivo si consideramos como caso base el que cumple $a = b+1$, que además tiene una solución más sencilla y que siempre se alcanza.

Con todo lo anterior, la especificación de la función recursiva auxiliar queda:

$\{ord(v, longitud(v))$
$\wedge(0 \leq a \leq longitud(v)) \wedge (-1 \leq b \leq longitud(v) - 1) \wedge (a \leq b + 1)$
$\wedge(\forall i : 0 \leq i < a : v[i] \leq x) \wedge (\forall j : b < j < longitud(v) : v[j] > x)\}$
`fun buscaBin (TElem v[], TElem x, int a, int b) return int pos`
$\{(\exists u : 0 \leq u < longitud(v) : v[u] \leq x \wedge pos = \text{máx}\, k : (0 \leq k \leq longitud(v) - 1) \wedge v[k] \leq x : k)$
$\vee(\forall z : 0 \leq z < longitud(v) : x < v[z] \wedge pos = -1)\}$

```
typedef int TElem;

int buscaBin( TElem v[], TElem x, int a, int b ) {
  int p;

// cuerpo de la función

  return p;
}
```

Donde se tiene la siguiente distinción de casos

$$d(v, x, a, b) : a = b + 1$$

$$r(v, x, a, b) : a \leq b$$

para la que efectivamente se cumple

$$P_0 \Rightarrow a \leq b + 1 \Rightarrow a = b + 1 \vee a \leq b$$

(R.3) Solución en el caso directo.

$\{\ P_0 \wedge a = b + 1\ \}$
A_1
$\{\ Q_0\ \}$

Si

- todos los elementos a la izquierda de a son $\leq x$,
- todos los elementos a la derecha de b son $> x$, y
- $a = b + 1$, es decir, a y b se han cruzado,

entonces el último elemento que cumple que es $\leq x$ es $v[a - 1]$, y por lo tanto,

$$A_1 \equiv p = a - 1;$$

(R.4) Descomposición recursiva.

Los parámetros de la llamada recursiva dependerán del resultado de comparar x con la componente central del fragmento de vector que va desde a hasta b. Por lo tanto, obtenemos el punto medio

$$m = (a + b)/2;$$

de forma que

- si $x < v[m]$ la descomposición es

$$s_1(v, x, a, b) = (v, x, a, m-1)$$

- si $x \geq v[m]$ la descomposición es

$$s_2(v, x, a, b) = (v, x, m+1, b)$$

(R.5) Función de acotación y terminación.

Lo que va a ir disminuyendo, según avanza la recursión, es la longitud del subvector a considerar, por lo que tomamos como función de acotación:

$$t(v, x, a, b) = b - a + 1$$

y comprobamos

$$a \leq b \wedge a \leq m \leq b \Rightarrow t(s_1(\vec{x})) < t(\vec{x}) \wedge t(s_2(\vec{x})) < t(\vec{x})$$

que efectivamente se cumple, ya que

$a \leq b \Rightarrow a \leq (a+b)/2 \leq b$
$(m-1) - a + 1 < b - a + 1 \Leftarrow m - 1 < b \Leftarrow m \leq b$
$b - (m+1) + 1 < b - a + 1 \Leftrightarrow b - m - 1 < b - a \Leftarrow b - m \leq b - a \Leftrightarrow m \geq a$

(R.6) Llamada recursiva.

La solución que hemos obtenido sólo funciona si en cada llamada se cumple la precondición. Por lo tanto, debemos demostrar que de una llamada a la siguiente efectivamente se sigue cumpliendo la precondición.

Tratamos por separado cada caso recursivo

- $x < v[m]$
  $P_0 \wedge a \leq b \wedge a \leq m \leq b \wedge x < v[m] \Rightarrow P_0[b/m-1]$

  Que es cierto porque:

  v ordenado entre $0..longitud(v)-1 \Rightarrow v$ ordenado entre $0..longitud(v)-1$
  $0 \leq a \leq longitud(v) \Rightarrow 0 \leq a \leq longitud(v)$
  $-1 \leq b \leq longitud(v) - 1 \wedge a \leq m \leq b \wedge 0 \leq a \leq longitud(v) \Rightarrow -1 \leq m-1 \leq longitud(v) - 1$
  $a \leq m \Rightarrow a \leq m - 1 + 1$

  todos los elementos a la izquierda de a son $\leq x \Rightarrow$ todos los elementos a la izquierda de a son $\leq x$

  v está ordenado entre $0..longitud(v)-1 \wedge$ todos los elementos a la derecha de b son $> x \wedge m \leq b \wedge x < v[m] \Rightarrow$ todos los elementos a la derecha de $m-1$ son $> x$

- $x \geq v[m]$
  v está ordenado entre $0..longitud(v)-1$
  $(0 \leq a \leq longitud(v)) \wedge (-1 \leq b \leq longitud(v)-1) \wedge (a \leq b+1)$

todos los elementos a la izquierda de a son $<= x$
todos los elementos a la derecha de b son $> x$

$\Rightarrow v$ está ordenado entre $0..longitud(v)-1$
$(0 \leq m+1 \leq longitud(v)) \wedge (-1 \leq b \leq longitud(v)-1) \wedge (m+1 \leq b+1)$

todos los elementos a la izquierda de $m+1$ son $\leq x$
todos los elementos a la derecha de b son $> x$

Se razona de forma similar al anterior.

Debemos razonar también que la llamada inicial a la función auxiliar cumple la precondición

v está ordenado entre $0..longitud(v)-1 \wedge a = 0 \wedge b = longitud(v)-1 \Rightarrow v$ está ordenado entre $0..longitud(v)-1$

$(0 \leq a \leq longitud(v)) \wedge (-1 \leq b \leq longitud(v)-1) \wedge (a \leq b+1)$

todos los elementos a la izquierda de a son $<= x$
todos los elementos a la derecha de b son $> x$

Que es cierto porque $longitud(v) \geq 0$.

(R.7) Función de combinación.

En los dos casos recursivos nos limitamos a propagar el resultado de la llamada recursiva:

$$p = p'$$

(R.8) Escritura de la llamada recursiva.

Cada una de las dos llamadas recursivas se puede escribir como una sola asignación:

```
p = buscaBin( v, x, m+1, b )
```

y

```
p = buscaBin( v, x, a, m-1 )
```

$\star$ Con lo que finalmente la función queda:

```
int buscaBin( TElem v[], TElem x, int a, int b) {
// Pre:  v está ordenado entre 0 .. longitud(v)-1
// ( 0 ≤ a ≤ longitud(v) ) && ( -1 ≤ b ≤ longitud(v)-1 ) && ( a ≤ b+1 )
//  todos los elementos a la izquierda de 'a' son ≤ x
//  todos los elementos a la derecha de 'b' son > x
  int p, m;

  if ( a == b+1 )
    p = a - 1;
  else {    // a <= b
    m = (a+b) / 2;
    if ( v[m] <= x )
      p = buscaBin( v, x, m+1, b );
```

```
    else
      p = buscaBin( v, x, a, m-1 );
  }
  return p;
// Post: devuelve el mayor i (0 ≤ i ≤ longitud(v) − 1) que cumple v[i] ≤ x
//    si x es menor que todos los elementos de v, devuelve −1
}
```

También nos puede interesar definir una versión de la función en la que se recibe el vector junto con su tamaño n:

```
int buscaBin( TElem v[], int n, TElem x ) {
//0 ≤ n ≤ longitud(v) y todos los elementos a la derecha de n−1 son > x
  return buscaBin( v, x, 0, n-1);
}
```

En este caso debemos llamar a `buscaBin(v,x,l)`, siendo l la longitud del vector v.

Nótese que es necesario escribir primero la función auxiliar para que sea visible desde la otra función.

2.2. Algoritmos avanzados de ordenación

⋆ La ordenación rápida (quicksort) y la ordenación por mezcla (mergesort) son dos algoritmos de ordenación de complejidad cuasilineal, $O(nlogn)$.

⋆ Las idea recursiva es similar en los dos algoritmos: para ordenar un vector se procesan por separado la mitad izquierda y la mitad derecha.

- En la ordenación rápida, se colocan los elementos pequeños a la izquierda y los grandes a la derecha, y luego se sigue con cada mitad por separado.
- En la ordenación por mezcla, se ordena la mitad de la izquierda y la mitad de la derecha por separado y luego se mezclan los resultados.

2.2.1. Ordenación rápida (*quicksort*)

⋆ Especificación:

$\{0 \leq n \leq longitud(v)\}$
`proc quickSort ( TElem v[], int n)`
$\{ord(v, 0, n-1)\}$

```
void quickSort ( TElem v[], int n) {

  quickSort(v, 0, n-1);

}
```

$\{0 \leq a \leq longitud(v) \wedge -1 \leq b \leq longitud(v) - 1 \wedge a \leq b + 1\}$
`proc quickSort( TElem v[], int a, int b)`
$\{ord(v, a, b)\}$

```
void quickSort( TElem v[], int a, int b) {

}
```

⋆ Como en el caso de la búsqueda binaria, la necesidad de encontrar un planteamiento recursivo nos lleva a definir un procedimiento auxiliar con los parámetros a y b, para así poder indicar el subvector del que nos ocupamos en cada llamada recursiva.

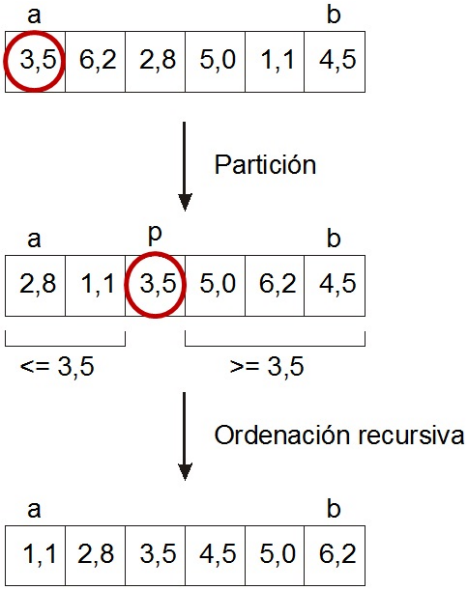


Figura 8: Planteamiento del algoritmo *quicksort*

⋆ El planteamiento recursivo consiste en:

- Elegir un pivote: un elemento cualquiera del subvector v[a..b]. Normalmente se elige v[a] como pivote.
- Particionar el subvector v[a..b], colocando a la izquierda los elementos menores que el pivote y a la derecha los mayores. Los elementos iguales al pivote pueden

quedar indistintamente a la izquierda o a la derecha. Al final del proceso de partición, el pivote debe quedar en el centro, separando los menores de los mayores.

- Ordenar recursivamente los dos fragmentos que han quedado a la izquierda y a la derecha del pivote.

⋆ Análisis de casos

- Caso directo: $a = b + 1$ El subvector está vacío y, por lo tanto, ordenado.
- Caso recursivo: $a \leq b$ Se trata de un segmento no vacío y aplicamos el planteamiento recursivo:
  - considerar $x = v[a]$ como elemento pivote
  - reordenar parcialmente el subvector $v[a..b]$ para conseguir que x quede en la posición p que ocupará cuando $v[a..b]$ esté ordenado.
  - ordenar recursivamente $v[a..(p-1)]$ y $v[(p+1)..b]$.

⋆ Función de acotación:

$$t(v, a, b) = b - a + 1$$

⋆ Utilizando el algoritmo de *particion* derivado en el tema 3, el algoritmo nos queda:

```
void quickSort( TElem v[], int a, int b) {
// Pre: 0 ≤ a ≤ longitud(v) && −1 ≤ b ≤ longitud(v)−1 && a ≤ b+1

  int  p;

  if ( a <= b ) {
    particion(v, a, b, p);
    quickSort(v, a, p-1);
    quickSort(v, p+1, b);
  }

// Post: v está ordenado entre a y b
}
```

de forma que para ordenar todo el vector la llamada inicial es `quickSort(v,0,l-1)` siendo l la longitud del vector v.

Otra versión que nos puede interesar es:

```
void quickSort ( TElem v[], int n) {
// Pre: 0 ≤ n ≤ longitud(v)

  quickSort(v, 0, n-1);

// Post: se ha ordenado v entre 0 y n−1
}
```

En este caso debemos llamar a `quickSort(v,l)`, siendo l la longitud del vector v.

2.2.2. Ordenación por mezcla (*mergesort*)

⋆ Partimos de una especificación similar a la del *quickSort*.

$\{0 \leq n \leq longitud(v)\}$
```
proc mergeSort ( TElem v[], int n)
```
$\{ord(v, 0, n-1)\}$

```
void mergeSort ( TElem v[], int n) {
  mergeSort(v, 0, n-1);
}
```

$\{0 \leq a \leq longitud(v) \wedge -1 \leq b \leq longitud(v) - 1 \wedge a \leq b + 1\}$
```
proc mergeSort( TElem v[], int a, int b)
```
$\{ord(v, a, b)\}$

```
void mergeSort( TElem v[], int a, int b) { }
```

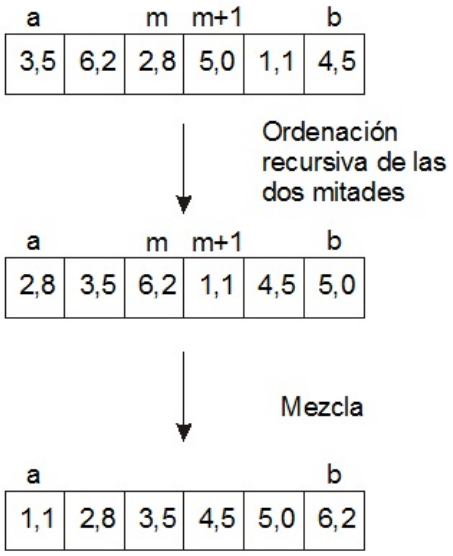


Figura 9: Planteamiento del algoritmo *mergesort*

⋆ Planteamiento recursivo. Para ordenar el subvector $v[a..b]$

- Obtenemos el punto medio m entre a y b, y ordenamos recursivamente los subvectores $v[a..m]$ y $v[(m+1)..b]$.
- Mezclamos ordenadamente los subvectores $v[a..m]$ y $v[(m+1)..b]$ ya ordenados.

⋆ Análisis de casos

- Caso directo: a $\geq$ b
  El subvector está vacío o tiene longitud 1 y, por lo tanto, está ordenado.
  $P_0 \wedge a \geq b \Rightarrow a = b \vee a = b + 1$
  $Q_0 \wedge (a = b \vee a = b + 1) \Rightarrow v = V$

- Caso recursivo: a <b
  Tenemos un subvector de longitud mayor o igual que 2, y aplicamos el planteamiento recursivo:
  - Dividir $v[a..b]$ en dos mitades. Al ser la longitud ≥ 2 es posible hacer la división de forma que cada una de las mitades tendrá una longitud estrictamente menor que el segmento original (por eso hemos considerado como caso directo el subvector de longitud 1).
  - Tomando $m = (a+b)/2$ ordenamos recursivamente $v[a..m]$ y $v[(m+1)..b]$.
  - Usamos un procedimiento auxiliar para mezclar las dos mitades, quedando ordenado todo $v[a..b]$.

⋆ Función de acotación. $t(v, a, b) = b - a + 1$

⋆ Utilizando la implementación para mezcla derivada en el tema 3, el procedimiento de ordenación queda:

```
void mergeSort( TElem v[], int a, int b) {
// Pre: 0 ≤ a ≤ longitud(v) && −1 ≤ b ≤ longitud(v)−1 && a ≤ b+1

  int  m;

  if ( a < b ) {
    m = (a+b) / 2;
    mergeSort( v, a, m);
    mergeSort( v, m+1, b);
    mezcla( v, a, m, b);
  }

// Post: v está ordenado entre a y b
}
```

de forma que para ordenar todo el vector la llamada inicial es `mergeSort(v,0,l-1)` siendo l la longitud del vector v.

Otra versión que nos puede interesar es:

```
void mergeSort ( TElem v[], int n) {
// Pre: 0 ≤ n ≤ longitud(v)

  mergeSort(v, 0, n-1);

// Post: se ha ordenado v entre 0 y n−1
}
```

En este caso debemos llamar a `mergeSort(v,l)`, siendo l la longitud del vector v.

3. Análisis de la complejidad de algoritmos recursivos

3.1. Ecuaciones de recurrencias

⋆ La recursión no introduce nuevas instrucciones en el lenguaje. Sin embargo, cuando intentamos analizar la complejidad de una función o un procedimiento recursivo nos encontramos con que debemos conocer la complejidad de las llamadas recursivas.

La *definición natural* de la función de complejidad de un algoritmo recursivo también es recursiva, y viene dada por una o más *ecuaciones de recurrencia*.

3.1.1. Ejemplos

⋆ Cálculo del factorial.
Tamaño de los datos: n
Caso directo, n = 0 : T(n) = 2
Caso recursivo:

- 1 de evaluar la condición +
- 1 de evaluar la descomposición $n-1$ +
- 1 del producto $n * fact(n-1)$ +
- 1 de la asignación de $n * fact(n-1)$ +
- $T(n-1)$ de la llamada recursiva.

Ecuaciones de recurrencia: $T(n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 0 \\ 4 + T(n-1) & \text{si } n > 0 \end{cases}$

⋆ Multiplicación por el método del campesino egipcio.
Tamaño de los datos: n = b
Caso directo, n = 0, 1: T(n) = 3
En ambos casos recursivos:

- 4 de evaluar todas las condiciones en el caso peor +
- 1 de la asignación +
- 2 de evaluar la descomposición $2 * a$ y $b/2$ +
- 1 de la suma $prod(2 * a, b/2) + a$ en una de las ramas +
- T(n/2) de la llamada recursiva.

Ecuaciones de recurrencia: $T(n) = \begin{cases} 3 & \text{si } n = 0, 1 \\ 8 + T(n/2) & \text{si } n > 1 \end{cases}$

⋆ Para calcular el orden de complejidad no nos interesa el valor exacto de las constantes, ni nos preocupa que sean distintas (en los casos directos, o cuando se suma algo constante en los casos recursivos): ¡estudio asintótico!

3.1.2. Ejemplos

⋆ Números de Fibonacci.
Tamaño de los datos: n

Ecuaciones de recurrencia: $T(n) = \begin{cases} c_0 & \text{si } n = 0, 1 \\ T(n-1) + T(n-2) + c, & \text{si } n > 1 \end{cases}$

⋆ Ordenación rápida (quicksort)
Tamaño de los datos: n = num
En el caso directo tenemos complejidad constante c_0.
En el caso recursivo:

- El coste de la partición: $c * n$ +
- El coste de las dos llamadas recursivas. El problema es que la disminución en el tamaño de los datos depende de los datos y de la elección del pivote.
  - El caso peor se da cuando el pivote no separa nada (es el máximo o el mínimo del subvector): $c_0 + T(n-1)$
  - El caso mejor se da cuando el pivote divide por la mitad: $2 * T(n/2)$

Ecuaciones de recurrencia en el caso peor:

$$T(n) = \begin{cases} c_0 & \text{si } n = 0 \\ T(n-1) + c * n + c_0 & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Ecuaciones de recurrencia en el caso mejor:

$$T(n) = \begin{cases} c_0 & \text{si } n = 0 \\ 2 * T(n/2) + c * n & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Se puede demostrar que en promedio se comporta como en el caso mejor.

Cambiando la política de elección del pivote se puede evitar que el caso peor sea un vector ordenado.

3.2. Despliegue de recurrencias

⋆ Hasta ahora, lo único que hemos logrado es expresar la función de complejidad mediante ecuaciones recursivas. Pero es necesario encontrar una *fórmula explícita* que nos permita obtener el orden de complejidad buscado.

⋆ El objetivo de este método es conseguir una fórmula explícita de la función de complejidad, a partir de las ecuaciones de recurrencias. El proceso se compone de tres pasos:

1. **Despliegue**. Sustituimos las apariciones de T en la recurrencia tantas veces como sea necesario hasta encontrar una fórmula que dependa del número de llamadas recursivas k.
2. **Postulado**. A partir de la fórmula paramétrica resultado del paso anterior obtenemos una fórmula explícita. Para ello, se obtiene el valor de k que nos permite alcanzar un caso directo y, en la fórmula paramétrica, se sustituye k por ese valor y la referencia recursiva T por la complejidad del caso directo.
3. **Demostración**. La fórmula explícita así obtenida sólo es correcta si la recurrencia para el caso recursivo también es válida para el caso directo. Podemos comprobarlo demostrando por inducción que la fórmula obtenida cumple las ecuaciones de recurrencia.

3.2.1. Ejemplos

⋆ Factorial

- Ecuaciones

$$T(n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 0 \\ 4 + T(n-1) & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

- Despliegue

$$\begin{aligned} T(n) &= 4 + T(n-1) \\ &= 4 + 4 + T(n-2) \\ &= 4 + 4 + 4 + T(n-3) \\ &\ldots \\ &= 4 * k + T(n-k) \end{aligned}$$

- Postulado
  El caso directo se tiene para $n = 0$

$$n - k = 0 \Leftrightarrow k = n$$

$$T(n) = 4n + T(n-n) = 4n + T(0) = 4n + 2$$

  Por lo tanto $T(n) \in O(n)$

⋆ Multiplicación por el método del campesino egipcio

- Ecuaciones

$$T(n) = \begin{cases} 3 & \text{si } n = 0, 1 \\ 8 + T(n/2) & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

- Despliegue

$$\begin{aligned} T(n) &= 8 + T(n/2) \\ &= 8 + (8 + T(n/2/2)) \\ &= 8 + 8 + 8 + T(n/2/2/2) \\ &\ldots \\ &= 8 * k + T(n/2^k) \end{aligned}$$

- Postulado
  Las llamadas recursivas terminan cuando se alcanza 1

$$n/2^k = 1 \Leftrightarrow k = \log n$$

$$T(n) = 8 \log n + T(n/2^{\log n}) = 8 \log n + T(1) = 8 \log n + 3$$

  Por lo tanto $T(n) \in O(\log n)$

  Si k representa el número de llamadas recursivas ¿qué ocurre cuando $k = \log n$ no tiene solución entera?

  La complejidad $T(n)$ del algoritmo es una función monótona no decreciente, y, por lo tanto, nos basta con estudiar su comportamiento sólo en algunos puntos: los valores de n que son una potencia de 2. Esta simplificación no causa problemas en el cálculo asintótico.

⋆ Números de Fibonacci

- Ecuaciones

$$T(n) = \begin{cases} c_0 & \text{si } n = 0, 1 \\ T(n-1) + T(n-2) + c, & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Podemos simplificar la resolución de la recurrencia, considerando que lo que nos interesa es una cota superior:

$$T(n) \leq 2 * T(n-1) + c_1 \quad si\ n > 1$$

- Despliegue

$$\begin{aligned} T(n) &\leq c_1 + 2 * T(n-1) \\ &\leq c_1 + 2 * (c_1 + 2 * T(n-2)) \\ &\leq c_1 + 2 * (c_1 + 2 * (c_1 + 2 * T(n-3))) \\ &\leq c_1 + 2 * c_1 + 2^2 * c_1 + 2^3 * T(n-3) \\ &... \\ &\leq c_1 * \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} 2^i + 2^k * T(n-k) \end{aligned}$$

- Postulado
Las llamadas recursivas terminan cuando se alcanzan 0 y 1. Como buscamos una cota superior, consideramos 0.
$n - k = 0 \Leftrightarrow k = n$

$$\begin{aligned} T(n) &\leq c_1 * \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} 2^i + 2^k T(n-k) \\ &= c_1 * \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} 2^i + 2^n T(n-n) \\ &= c_1 * \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} 2^i + 2^n T(0) \\ &= c_1 * (2^n - 1) + c_0 * 2^n \\ &= (c_0 + c_1) * 2^n - c_1 \end{aligned}$$

donde hemos utilizado la fórmula para la suma de progresiones geométricas:

$$\sum_{i=0}^{n-1} r^i = \frac{r^n - 1}{r - 1} \quad r \neq 1$$

Por lo tanto $T(n) \in O(2^n)$

Las funciones recursivas múltiples donde el tamaño del problema disminuye por sustracción tienen costes prohibitivos, como en este caso donde el coste es exponencial.

3.3. Resolución general de recurrencias

⋆ Utilizando la técnica de despliegue de recurrencias y algunos resultados sobre convergencia de series, se pueden obtener unos resultados teóricos para la obtención de fórmulas explícitas, aplicables a un gran número de ecuaciones de recurrencias.

3.3.1. Disminución del tamaño del problema por sustracción

⋆ Cuando: (1) la descomposición recursiva se obtiene restando una cierta cantidad constante, (2) el caso directo tiene coste constante, y (3) la preparación de las llamadas

y de combinación de los resultados tiene coste polinómico, entonces la ecuación de recurrencias será de la forma:

$$T(n) = \begin{cases} c_0 & \text{si } 0 \leq n < n_0 \\ a * T(n-b) + c * n^k & \text{si } n \geq n_0 \end{cases}$$

donde:

- c_0 es el coste en el caso directo,
- $a \geq 1$ es el número de llamadas recursivas,
- $b \geq 1$ es la disminución del tamaño de los datos, y
- $c * n^k$ es el coste de preparación de las llamadas y de combinación de los resultados.

Se puede demostrar:

$$T(n) \in \begin{cases} O(n^{k+1}) & \text{si } a = 1 \\ O(a^{n/b}) & \text{si } a > 1 \end{cases}$$

Vemos que, cuando el tamaño del problema disminuye por sustracción,

- En recursión simple ($a = 1$) el coste es polinómico y viene dado por el producto del coste de cada llamada ($c * n^k$) y el coste lineal de la recursión (n).
- En recursión múltiple ($a > 1$), por muy grande que sea b, el coste siempre es exponencial.

3.3.2. Disminución del tamaño del problema por división

⋆ Cuando: (1) la descomposición recursiva se obtiene dividiendo por una cierta cantidad constante, (2) el caso directo tiene coste constante, y (3) la preparación de las llamadas y de combinación de los resultados tiene coste polinómico, entonces la ecuación de recurrencias será de la forma:

$$T(n) = \begin{cases} c_1 & \text{si } 0 \leq n < n_0 \\ a * T(n/b) + c * n^k & \text{si } n \geq n_0 \end{cases}$$

donde:

- c_1 es el coste en el caso directo,
- $a \geq 1$ es el número de llamadas recursivas,
- $b \geq 2$ es el factor de disminución del tamaño de los datos, y
- $c * n^k$ es el coste de preparación de las llamadas y de combinación de los resultados.

Se puede demostrar:

$$T(n) = \begin{cases} O(n^k) & \text{si } a < b^k \\ O(n^k * \log n) & \text{si } a = b^k \\ O(n^{\log_b a}) & \text{si } a > b^k \end{cases}$$

Si $a \leq b^k$ la complejidad depende de n^k que es el término que proviene de $c * n^k$ en la ecuación de recurrencias, y, por lo tanto, la complejidad de un algoritmo de este tipo se puede mejorar disminuyendo la complejidad de la preparación de las llamadas y la combinación de los resultados.

Si $a > b^k$ las mejoras en la eficiencia se pueden conseguir

- disminuyendo el número de llamadas recursivas a o aumentando el factor de disminución del tamaño de los datos b, o bien
- optimizando la preparación de las llamadas y combinación de los resultados, pues, si esto hace disminuir k suficientemente, podemos pasar a uno de los otros casos: $a = b^k$ o incluso $a < b^k$.

3.3.3. Ejemplos

⋆ Búsqueda binaria.
Tamaño de los datos: $n = num$
Recurrencias:

$$T(n) = \begin{cases} c_1 & \text{si } n = 0 \\ T(n/2) + c & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Se ajusta al esquema teórico de disminución del tamaño del problema por división, con los parámetros:
$a = 1, b = 2, k = 0$

Estamos en el caso $a = b^k$ y la complejidad resulta ser:

$$O(n^k \log n) = O(n^0 \log n) = O(\log n)$$

⋆ Ordenación por mezcla (mergesort).
Tamaño de los datos: $n = num$
Recurrencias:

$$T(n) = \begin{cases} c_1 & \text{si } n \leq 1 \\ 2 * T(n/2) + c * n & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

donde $c * n$ es el coste del procedimiento mezcla.

Se ajusta al esquema teórico de disminución del tamaño del problema por división, con los parámetros:
$a = 2, b = 2, k = 1$

Estamos en el caso $a = b^k$ y la complejidad resulta ser:

$$O(n^k \log n) = O(n \log n)$$

Este es también el coste del algoritmo *pareado* que vimos en la sección anterior, ya que la recurrencia es la misma. En la siguiente sección vamos a ver cómo generalizar aun más esta función para hacerla más eficiente.

4. Técnicas de generalización de algoritmos recursivos

⋆ En este tema ya hemos utilizado varias veces este tipo de técnicas (también conocidas como *técnicas de inmersión*), con el objetivo de conseguir planteamientos recursivos. La ordenación rápida

```
void quickSort( TElem v[], int a, int b) {
// Pre: 0 ≤a≤ longitud(v) && −1≤b≤longitud(v)−1 && a≤b+1

// Post: v está ordenado entre a y b
}
```

```
void quickSort ( TElem v[], int n) {
// Pre: 0 ≤ n ≤ longitud(v)

// Post: se ha ordenado  v
}
```

⋆ Además de para conseguir realizar un planteamiento recursivo, las generalizaciones también se utilizan para

- transformar algoritmos recursivos ya implementados en algoritmos recursivos finales, que se pueden transformar fácilmente en algoritmos iterativos.
- mejorar la eficiencia de los algoritmos recursivos añadiendo parámetros y/o resultados acumuladores.

La versión recursiva final del factorial

```
int acuFact( int a, int n ) {
// Pre: a >= 0 && n >= 0

// Post: devuelve a * n!
}

int fact( int n ) {
// Pre: n >= 0

// Post: devuelve n!
}
```

⋆ Decimos que una acción parametrizada (procedimiento o función) F es una generalización de otra acción f cuando:

- F tiene más parámetros de entrada y/o devuelve más resultados que f.
- Particularizando los parámetros de entrada adicionales de F a valores adecuados y/o ignorando los resultados adicionales de F se obtiene el comportamiento de f.

En el ejemplo de la ordenación rápida:

- f : **void** quickSort (TElem v[ ], int n)
- F : **void** quickSort (TElem v[ ], **int** a, **int** b)
- En F se añaden los parámetros a y b. Mientras f siempre se aplica al intervalo $0..longitud(v) - 1$, F se puede aplicar a cualquier subintervalo del array determinado por los índices $a..b$.
- Particularizando los parámetros adicionales de F como $a = 0, b = longitud(v) - 1$, se obtiene el comportamiento de f. Razonando sobre las postcondiciones:

  v está ordenado entre a y b $\wedge a = 0 \wedge b = longitud(v) - 1 \Rightarrow$ se ha ordenado v

En el ejemplo del factorial:

- f : **int** fact(**int** n)
- F : **int** acuFact(**int** a, **int** n)

- En F se ha añadido el nuevo parámetro a donde se va acumulando el resultado a medida que se construye.
- Particularizando el parámetro adicional de F como $a = 1$, se obtiene el comportamiento de *f*. Razonando sobre las postcondiciones:

  devuelve $a * n! \wedge a = 1 \Rightarrow$ devuelve $n!$

4.1. Planteamientos recursivos finales

⋆ Dada una especificación E_f pretendemos encontrar una especificación E_F más general que admita una solución recursiva final.

⋆ El resultado se ha de obtener en un caso directo y, para conseguirlo, lo que podemos hacer es añadir nuevos parámetros que vayan acumulando el resultado obtenido hasta el momento, de forma que al llegar al caso directo de F el valor de los parámetros acumuladores sea el resultado de *f*.

⋆ Para obtener la especificación E_F a partir de E_f

- Fortalecemos la precondición de E_f para exigir que alguno de los parámetros de entrada ya traiga calculado una parte del resultado.
- Mantenemos la misma postcondición.

⋆ Ejemplo: cálculo recursivo de una potencia. Tenemos la siguiente función recursiva no final para calcular la potencia natural de un entero a:

```
// Pre: n ≥ 0
int potencia (int a, int n) {
    int p;

    if (n == 0)
        p = 1;
    else    // n>0
        p = potencia(a, n-1) * a;
    return p;
}
//Post: p = a^n
```

Una forma de obtener una versión recursiva final consiste en añadir un parámetro ac, que lleve calculado parte del producto. Para poder diseñar la función nos hace falta saber qué potencia lleva acumulada, así que introducimos otro parámetro i y aseguramos en la precondición que $ac = a^i$. Por tanto, el caso base, cuando $i == n$, ac ya lleva acumulado lo que queremos y ese es el resultado de la función. En caso contrario, acumulamos un factor a más a ac e incrementamos la i en 1 para que se cumpla la precondición en la llamada recursiva. El algoritmo es el siguiente:

De esa forma

```
int potencia(int a, int n, int ac, int i) {
//Pre : ac = a^i ∧ 0 ≤ i ≤ n
  int p;
  if (i == n)
    p = ac;
  else
    p = potencia(a,n,ac*a,i+1);
```

```
  return p;
//Post: p = a^n
}
```

donde la llamada inicial se hace con $i = 0$, ya que aun no hemos acumulado nada y consecuentemente $ac = 1$:

```
int potencia(int a, int n){
// Pre: n ≥ 0
  return potencia(a,n,1,0);
//Post: p = a^n
}
```

Recuérdese que esto no hace que la función sea asintóticamente más eficiente.

4.2. Generalización por razones de eficiencia

⋆ Suponemos ahora que partimos de un algoritmo recursivo ya implementado y que nos proponemos mejorar su eficiencia introduciendo parámetros y/o resultados adicionales.

⋆ Se trata de simplificar algún cálculo auxiliar, sacando provecho del resultado obtenido para ese cálculo en otra llamada recursiva. Introducimos parámetros adicionales, o resultados adicionales, según si queremos aprovechar los cálculos realizados en llamadas anteriores, o posteriores, respectivamente. En ocasiones, puede interesar añadir tanto parámetros como resultados adicionales.

4.2.1. Generalización con resultados acumuladores

⋆ Se aplica esta técnica cuando en un algoritmo recursivo f se detecta una expresión $e(\vec{x}', \vec{y}')$, que puede depender de los parámetros de entrada y los resultados de la llamada recursiva y cuyo cálculo se puede simplificar utilizando el valor de esa expresión en posteriores llamadas recursivas. Obviamente, si la expresión depende de los resultados de la llamada recursiva, debe aparecer después de dicha llamada.

⋆ Se construye una generalización F que posee resultados adicionales $\vec{b}$, cuya función es transmitir el valor de $e(\vec{x}, \vec{y})$. La precondición de F se mantiene constante

$$P'(\vec{x}) \Leftrightarrow P(\vec{x})$$

mientras que la postcondición de F se plantea como un fortalecimiento de la postcondición de f

$$Q'(\vec{x}, \vec{b}, \vec{y}) \Leftrightarrow Q(\vec{x}, \vec{y}) \wedge \vec{b} = e(\vec{x}, \vec{y})$$

⋆ El algoritmo F se obtiene a partir de f del siguiente modo:

- Se reutiliza el texto de f, reemplazando $e(\vec{x}', \vec{y}')$ por $\vec{b}'$
- Se añade el cálculo de $\vec{b}$, de manera que la parte $\vec{b} = e(\vec{x}, \vec{y})$ de la postcondición $Q'(\vec{x}, \vec{b}, \vec{y})$ quede garantizada, tanto en los casos directos como en los recursivos.

La técnica resultará rentable siempre que F sea más eficiente que f.

⋆ Ejemplo: recordemos el algoritmo *pareado* visto en la Sección 2. Podemos obtener una versión más eficiente del algoritmo añadiendo un resultado adicional que determina el número de pares que hay en el segmento considerado. De esa manera, las propias llamadas recursivas nos devolverán el número de pares de cada mitad y la comprobación adicional que necesitamos se hará en tiempo constante. Como ahora tenemos dos resultados, utilizamos un procedimiento con dos parámetros de salida: el booleano b y el entero p que representa el número de números pares:

$\{0 \leq i \leq j \leq longitud(v) \wedge \forall k : 0 \leq i \leq k < j : v[k] >= 0\}$
`proc pareado (int v[],int i,int j, out bool b, out int p)`
$\{b = esPareado(v,i,j) \wedge p = \#l : i <= l < j : v[l] \ mod \ 2 = 0\}$

El caso base sigue siendo el mismo, $j \leq i + 1$, el cual engloba segmentos vacíos y unitarios. En ambos casos habría que devolver $b = true$. Respecto a p, para segmentos vacíos se devolvería 0, y para segmentos unitarios se devolvería 0, o 1 si el número del segmento es par.

En el caso recursivo, cada una de las dos llamadas, devuelve un booleano ($b1$ y $b2$ respectivamente) y un entero ($p1$ y $p2$ respectivamente): $pareado(v, i, m, b1, p1)$ y $pareado(v, m, j, b2, p2)$.

Con lo cual el caso recursivo sería ser de la siguiente forma:

```
int m = (i+j)/2;
bool b1, b2;
int p1, p2;
pareado(v,i,m,b1,p1);
pareado(v,m,j,b2,p2);
b = b1 && b2 && (abs(p1-p2) <= 1); //comprobacion de coste constante

p = p1+p2;
```

Por tanto el algoritmo completo es el siguiente:

```
// Pre:  0 ≤ i ≤ j ≤ longitud(v) ∧ ∀k : 0 ≤ i ≤ k < j : v[k] >= 0
void pareado (int v[],int i,int j, bool &b, int &p){
  if (i == j) {b = true; p = 0;} // Segmento vacio
  else if (j == i+1){ // Segmento unitario
    b = true;
    if (v[i]%2 == 0) p=1; else p = 0;
  } else { // Segmento de longitud >= 2
    int m = (i+j)/2;
    bool b1,b2;
    int p1,p2;
    pareado(v,i,m,b1,p1);
    pareado(v,m,j,b2,p2);
    b = b1 && b2 && (abs(p1-p2) <= 1); //comprobacion de coste constante
    p = p1+p2;
  }
}
//Post: b = esPareado(v,i,j) ∧ p = #l : i <= l < j : v[l] mod 2 = 0}
```

siendo la llamada inicial

```
// Pre: longitud(v) ≥ num ∧ ∀k : 0 ≤ k < num : v[k] >= 0
bool pareado (int v[],int num) {
  bool b; int p;
  pareado(v,0,num,b,p);
```

```
  return b;
}
// Post: b = esPareado(v, 0, num)
```

En este caso tenemos la siguiente recurrencia, siendo n el tamaño del segmento $(j-i)$

$$T(n) = \begin{cases} c_0 & \text{si } n = 0 \\ 2 * T(n/2) + c_1 & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Estamos en el caso en que $a = 2$, $b = 2$ y $k = 0$, por lo que $T(n) \in O(n^{\log_2 2})$, es decir, $T(n) \in O(n)$.

4.2.2. Generalización con parámetros acumuladores

- ⋆ Se aplica esta técnica cuando en un algoritmo recursivo f se detecta una expresión $e(\vec{x})$, que sólo depende de los parámetros de entrada, cuyo cálculo se puede simplificar utilizando el valor de esa expresión en anteriores llamadas recursivas.
- ⋆ Se construye una generalización F que posee parámetros de entrada adicionales $\vec{a}$, cuya función es transmitir el valor de $e(\vec{x})$. La precondición de F se plantea como un fortalecimiento de la precondición de f.

  $$P'(\vec{a}, \vec{x}) \Leftrightarrow P(\vec{x}) \wedge \vec{a} = e(\vec{x})$$

  mientras que la postcondición se mantiene constante

  $$Q'(\vec{a}, \vec{x}, \vec{y}) \Leftrightarrow Q(\vec{x}, \vec{y})$$

- ⋆ El algoritmo F se obtiene a partir de f del siguiente modo:
  - Se reutiliza el texto de f, reemplazando $e(\vec{x})$ por $\vec{a}$
  - Se diseña una nueva función sucesor $s'(\vec{a}, \vec{x})$, a partir de la original $s(\vec{x})$, de modo que se cumpla:
    $\{\vec{a} = e(\vec{x}) \wedge r(\vec{x})\}$
    $(\vec{a}', \vec{x}') = s'(\vec{a}, \vec{x})$
    $\{\vec{x}' = s(\vec{x}) \wedge \vec{a}' = e(\vec{x}')\}$

  La técnica resultará rentable cuando en el cálculo de $\vec{a}'$ nos podamos aprovechar de los valores de $\vec{a}$ y $\vec{x}$ para realizar un cálculo más eficiente.
- ⋆ Ejemplo: supongamos que deseamos rellenar un vector de tamaño $2^i - 1$ para un cierto i con naturales de la siguiente manera:
  - El elemento del centro es 1.

			1			

  - El punto medio de la mitad izquierda se obtiene multiplicando por 2 el elemento del centro y el de la mitad derecha multiplicando por 3 el elemento del centro.

	2		1		3	

  - Para rellenar el resto de posiciones se procede de la misma manera: multiplicando por 2 cuando vamos a la izquierda y por 3 si vamos a la derecha.

4	2	6	1	6	3	9

Cada posición del vector contendrá por tanto $2^i * 3^j$ para ciertos valores de i y j, dependiendo de la posición. Para no tener que calcular dichas potencias en el punto de asignación al vector, llevaremos un parámetro adicional que acumula el valor de dichas potencias:

```
// Pre: 0<=i<=j+1<=n
 void rellenar(int v[],int i,int j, int ac)
 { if (i<=j)
    { int m= (i+j)/2; v[m]=ac;
      rellenar(v,i,m-1,ac*2);
      rellenar(v,m+1,j,ac*3);
    }
 }
// Post: rellenado(v,i,j,ac)
```

siendo la propiedad *rellenado* fácilmente definible de manera recursiva:

$$\begin{aligned} \mathit{rellenado}(v,i,j,ac) \equiv (i \leq j) \Rightarrow \quad & v[(i+j)/2] == ac \\ & \wedge \mathit{rellenado}(v,i,(i+j)/2-1,ac*2) \\ & \wedge \mathit{rellenado}(v,(i+j)/2+1,j,ac*3) \end{aligned}$$

La llamada inicial sería $\mathit{rellenar}(v,0,n-1,1)$ siendo n la longitud del vector; y por tanto se cumplirá $\mathit{rellenado}(v,0,n-1,1)$.

5. Verificación de algoritmos recursivos

⋆ Supondremos que la llamada recursiva devuelve los valores deseados para demostrar que la etapa de combinación cumple con la especificación.

⋆ Debemos probar que:

1. Se cubren todos los casos:

$$P(\vec{x}) \Rightarrow d(\vec{x}) \vee r(\vec{x})$$

2. El caso base es correcto:

$$P(\vec{x}) \wedge d(\vec{x}) \Rightarrow Q(\vec{x},\vec{y})$$

3. Los argumentos de la llamada recursiva deben satisfacer su precondición:

$$P(\vec{x}) \wedge r(\vec{x}) \Rightarrow P(s(\vec{x}))$$

4. El paso de inducción es correcto ($\Leftrightarrow$ la etapa de combinación es correcta):

$$P(\vec{x}) \wedge r(\vec{x}) \wedge Q(s(\vec{x}),\vec{y}') \Rightarrow Q(\vec{x},c(\vec{x},\vec{y}'))$$

Para garantizar que termine la secuencia de llamadas a la función debemos exigir además:

1. Existe una función de cota $t(\vec{x})$ tal que:

$$P(\vec{x}) \Rightarrow t(\vec{x}) \geq 0$$

2. La función de cota debe decrecer en cada iteración:

$$P(\vec{x}) \wedge r(\vec{x}) \Rightarrow t(s(\vec{x})) < t(\vec{x})$$

⋆ **Ejemplo**. Verifica el siguiente algoritmo:

```
// fun potencia (int a, int n): return (int p)
// P: n ≥ 0
int potencia (int a, int n)
{
    int p;

    if (n == 0)
        p = 1;
    else    // n>0
        p = potencia(a, n-1) * a;
    return p;
}
// Q: p = a^n
```

Solución:

- Como $n \geq 0$: $n = 0 \vee n > 0$ es cierto.
- El caso base verifica la postcondición:

$$\{n = 0\}p = 1\{p = a^n\}$$

  ya que $1 = a^n \Leftarrow n = 0$.
- En cada iteración la llamada recursiva verifica la precondición. El único problema consistiría en que n dejase de ser ≥ 0. Como en el caso recursivo $n > 0$, $n - 1$ sigue siendo ≥ 0.
- El paso de inducción es correcto:

$$n \geq 0 \wedge n > 0 \wedge p = a^{n-1} \Rightarrow (p = a^n)_p^{p*a}$$

- Consideremos la siguiente cota:

$$t = n(\geq 0)$$

- Decrece:

$$n \geq 0 \wedge n > 0 \Rightarrow n - 1 < n$$

Notas bibliográficas

El contenido de este capítulo se basa en su mayor parte en el capítulo correspondiente de (Rodríguez Artalejo et al., 2011). El apartado final de verificación de algoritmos recursivos se puede encontrar en (Peña, 2005). Finalmente, pueden encontrarse ejercicios resueltos relacionados con este tema en (Martí Oliet et al., 2012).

Ejercicios

Diseño de algoritmos recursivos

1. Dado un vector de enteros de longitud n, diseñar un algoritmo de complejidad $O(n \log n)$ que encuentre el par de enteros más cercanos (en valor). ¿Se puede hacer con complejidad $O(n)$?

2. Dado un vector de enteros de longitud n, diseñar un algoritmo de complejidad $O(n \log n)$ que encuentre el par de enteros más lejanos (en valor). ¿Se puede hacer con complejidad $O(n)$?

3. Diseñar un algoritmo recursivo que realice el cambio de base de un número binario dado en su correspondiente decimal.

4. Implementa una función recursiva simple *cuadrado* que calcule el cuadrado de un número natural n, basándote en el siguiente análisis de casos:

   - Caso directo: Si $n = 0$, entonces $n^2 = 0$
   - Caso recursivo: Si $n > 0$, entonces $n^2 = (n-1)^2 + 2 * (n-1) + 1$

5. Implementa una función recursiva *log* que calcule la parte entera de $log_b n$, siendo los datos b y n enteros tales que $b \geq 2 \wedge n \geq 1$. El algoritmo obtenido deberá usar solamente las operaciones de suma y división entera.

6. Implementa una función recursiva *bin* tal que, dado un número natural n, *bin(n)* sea otro número natural cuya representación decimal tenga los mismos dígitos que la representación binaria de n. Es decir, debe tenerse: $bin(0) = 0; bin(1) = 1; bin(2) = 10; bin(3) = 11; bin(4) = 100$; etc.

7. Implementa un procedimiento recursivo simple *dosFib* que satisfaga la siguiente especificación:

```
void dosFib( int n, int& r, int& s ) {
// Pre:  n ≥ 0
// Post: r = fib(n) ∧ s = fib(n + 1)
}
```

   En la postcondición, *fib(n)* y *fib(n+1)* representan los números que ocupan los lugares n y *n+1* en la sucesión de Fibonacci, para la cual suponemos la definición recursiva habitual.

8. Implementa una función recursiva que calcule el número combinatorio $\binom{n}{m}$ a partir de los datos m, n enteros tales que $n \geq 0 \wedge m \geq 0$. Usa la recurrencia siguiente:

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}$$

   siendo $0 < m < n$

9. El problema de las torres de Hanoi consiste en trasladar una torre de n discos de diferentes tamaños desde la varilla *ini* a la varilla *fin*, con ayuda de la varilla *aux*. Inicialmente los n discos están apilados de mayor a menor, con el más grande en la base. En ningún momento se permite que un disco repose sobre otro menor que él.

Los movimientos permitidos consisten en desplazar el disco situado en la cima de una de las varillas a la cima de otra, respetando la condición anterior. Construye un procedimiento recursivo *hanoi* tal que la llamada *hanoi(n, ini, fin, aux)* produzca el efecto de escribir una serie de movimientos que represente una solución del problema de Hanoi. Supón disponible un procedimiento *movimiento(i, j)*, cuyo efecto es escribir "Movimiento de la varilla i a la varilla j".

Análisis de algoritmos recursivos

10. En cada uno de los casos que siguen, plantea una ley de recurrencia para la función T(n) que mide el tiempo de ejecución del algoritmo en el caso peor, y usa el método de desplegado para resolver la recurrencia.

    a) La función *cuadrado* (ejercicio 4).
    b) Función *log* (ejercicio 5).
    c) Función *bin* (ejercicio 6).
    d) Procedimiento *dosFib* (ejercicio 7).
    e) Función del ejercicio 8.
    f) Procedimiento *hanoi* (ejercicio 9).

11. Aplica las reglas de análisis para dos tipos comunes de recurrencia a los algoritmos recursivos del ejercicio anterior. En cada caso, deberás determinar si el tamaño de los datos del problema decrece por sustracción o por división, así como los parámetros relevantes para el análisis.

12. En cada caso, calcula a partir de las recurrencias el orden de magnitud de T(n). Hazlo aplicando las reglas de análisis para dos tipos comunes de recurrencia.

    a) $T(1) = c_1; T(n) = 4 * T(n/2) + n,$ si $n > 1$
    b) $T(1) = c_1; T(n) = 4 * T(n/2) + n^2,$ si $n > 1$
    c) $T(1) = c_1; T(n) = 4 * T(n/2) + n^3,$ si $n > 1$

13. Usa el método de desplegado para estimar el orden de magnitud de $T(n)$, suponiendo que T obedezca la siguiente recurrencia:

$$T(1) = 1; T(n) = 2 * T(n/2) + n \log n, sin > 1$$

    ¿Pueden aplicarse en este caso las reglas de análisis para dos tipos comunes de recurrencia? ¿Por qué?

Eliminación de la recursión final

14. A continuación se presentan dos implementaciones iterativas del algoritmo de la búsqueda binaria. La primera versión del algoritmo es la misma que aparecía en el tema anterior, mientras que la segunda versión es el resultado de transformar a iterativo la versión recursiva de este algoritmo que se ha visto en este tema.
    ¿En qué se diferencian estos dos algoritmos iterativos?
    Escribe un algoritmo recursivo final con la misma idea de la primera versión iterativa.

```
int buscaBin( TElem v[], int num, TElem x )
{
  int izq, der, centro;

  izq = -1;
  der = num;
  while ( der != izq+1 ) {
    centro = (izq+der) / 2;
    if ( v[centro] <= x )
      izq = centro;
    else
      der = centro;
  }
  return izq;
}
```

```
int buscaBin( TElem v[], int num, TElem x )
{
  int a, b, p, m;

  a = 0;
  b = num-1;
  while ( a <= b ) {
    m = (a+b) / 2;
    if ( v[m] <= x )
      a = m+1;
    else
      b = m-1;
  }
    p = a - 1;
  return p;
}
```

Técnicas de generalización

15. Comprueba que el procedimiento *combiGen* especificado como sigue es una generalización de la función del ejercicio 11, y que *combiGen* admite un algoritmo recursivo simple, más eficiente que la recursión doble anterior, implementándolo.

```
void combiGen ( int a, int b, int v[]) {
// Pre:  0 <= b <= a && b < longitud(v)
// Post: para cada i entre 0 y b se tiene v[i] = (a i) }
```

16. Especifica e implementa un algoritmo recursivo que dado un vector v de enteros, que viene dado en orden estrictamente creciente, determine si el vector contiene alguna posición i que cumpla $v[i] = i$. Utilizando el método de despliegue de recurrencias, analiza la complejidad temporal en el caso peor del algoritmo obtenido.

17. (Martí Oliet et al. (2012)) Un hostal ofrece alojamiento a turistas todos los días comprendidos en un intervalo $[0..N)$ cuya longitud $N \geq 0$ se sabe que es par. El precio de una estancia diaria varía cada día, siendo:

- 1 euro para los días 0 y $N-1$ (comienzo y fin de temporada),
- 2 euros para los días 1 y $N-2$,
- 2^2 euros para los días 2 y $N-3$,

y así sucesivamente; es decir, el precio se va multiplicando por dos a medida que nos acercamos al centro del intervalo (temporada alta). Especificar e implementar una función recursiva que calcula los ingresos obtenidos por el hostal durante una temporada a partir de un vector que almacena en cada posición k el número de huéspedes del día k.

18. (Martí Oliet et al. (2012)) Dos cifras decimales (comprendidas entre 0 y 9) son *pareja* si suman 9. Dado un número natural n, llamaremos *complementario* de n al número obtenido a partir de la representación decimal de n, cambiando cada cifra por su pareja. Por ejemplo, el complementario de 146720 es 853279. Diseñar un algoritmo que, dado un número natural n, calcule su complementario.

Verificación de algoritmos recursivos

19. Verifica los algoritmos recursivos de los ejercicios anteriores

20. Verifica el siguiente algoritmo:

$\{n \geq 0\}$
```
int potenciaLog(int a, int n)
{
    int p;
    if (n == 0)
        p = 1;
    else
    {
        p = potenciaLog(a,n/2);
        p = p * p;
        if (n%2 == 1)
            p = p*a
    }
    return p;
}
```
$\{p = a^n\}$

21. Verifica el siguiente algoritmo:

$\{n \geq 0\}$
```
int productoEscalar(int v[], int w[], int n)
{
    int r;

    if (n == 0)
        r = 0;
    else
        r = v[n-1] * w[n-1] + productoEscalar(v,w,n-1);
    return r;
}
```
$\{r = (\sum i : 0 \leq i < n : v[i] * w[i])\}$

22. Verifica el siguiente algoritmo:

$\{n \geq 0 \wedge a \geq 0 \wedge a^2 \leq n\}$

```
int raiz (int n, int a)
{
    int r;

    if ((a+1)*(a+1) > n)
        r = a;
    else
        r = raiz (n, a+1);
    return r;
}
```

$\{r^2 \leq n < (r+1)^2\}$

Capítulo 5

El esquema "Divide y vencerás" [1]

Divide et impera

Julio César (100 a.C.-44 a.C)

Resumen: En este tema se presenta el esquema algorítmico *Divide y vencerás*, que es un caso particular del diseño recursivo, y se ilustra con ejemplos significativos en los que la estrategia reporta beneficios claros. Se espera del alumno que incorpore este método a sus estrategias de resolución de problemas.

1. Introducción

⋆ En este capítulo iniciamos la presentación de un conjunto de *esquemas algorítmicos* que pueden emplearse como estrategias de resolución de problemas. Un esquema puede verse como un algoritmo *genérico* que puede resolver distintos problemas. Si se concretan los tipos de datos y las operaciones del esquema genérico con los tipos y operaciones específicos de un problema concreto, tendremos un algoritmo para resolver dicho problema.

⋆ Además de *divide y vencerás*, este curso veremos el esquema de *vuelta atrás*. En cursos posteriores aparecerán otros esquemas con nombres propios tales como el *método voraz*, el de *programación dinámica* y el de *ramificación y poda*. Cada uno de ellos resuelve una familia de problemas de características parecidas.

⋆ Los esquemas o métodos algorítmicos deben verse como un conjunto de algoritmos *prefabricados* que el diseñador puede ensayar ante un problema nuevo. No hay garantía de éxito pero, si se alcanza la solución, el esfuerzo invertido habrá sido menor que si el diseño se hubiese abordado desde cero.

⋆ El esquema *divide y vencerás* (DV) consiste en **descomponer** el problema dado en uno o varios subproblemas del mismo tipo, el tamaño de cuyos datos es **una fracción** del tamaño original. Una vez resueltos los subproblemas por medio de la aplicación recursiva del algoritmo, se **combinan** sus resultados para construir la solución del problema original. Existirán uno o más **casos base** en los que el problema no se

[1] Ricardo Peña es el autor principal de este tema. Modificado por Clara Segura en el curso 2013-14.

subdivide más y se resuelve, o bien directamente si es sencillo, o bien utilizando un algoritmo distinto.

⋆ Aparentemente estas son las características generales de todo diseño recursivo y de hecho el esquema DV es un caso particular del mismo. Para distinguirlo de otros diseños recursivos que no responden a DV se han de cumplir las siguientes condiciones:

- Los subproblemas han de tener un tamaño que sea una *fracción* del tamaño original (un medio, un tercio, etc . . .). No basta simplemente con que sean más pequeños.
- Los subproblemas se generan *exclusivamente* a partir del problema original. En algunos diseños recursivos, los parámetros de una llamada pueden depender de los resultados de otra previa. En el esquema DV, no.
- La solución del problema original se obtiene *combinando los resultados* de los subproblemas entre sí, y posiblemente con parte de los datos originales. Otras posibles combinaciones no encajan en el esquema.
- El (los) caso(s) base no son necesariamente los casos triviales. Como veremos más adelante podría utilizarse como caso base (incluso debería utilizarse en ocasiones) un algoritmo distinto al algoritmo recursivo DV.

⋆ Puesto en forma de código, el esquema DV tiene el siguiente aspecto:

```
template <class Problema, class Solución>
Solución divide-y-vencerás (Problema x) {
   Problema x_1,...,x_k;
   Solución y_1,...,y_k;

   if (base(x))
         return método-directo(x);
   else {
         (x_1,..., x_k) = descomponer(x);
         for (i=1; i<=k; i++)
               y_i = divide-y-vencerás(x_i);
         return combinar(x, y_1,..., y_k);
   }
}
```

⋆ Los tipos `Problema`, `Solución`, y los métodos `base`, `método-directo`, `descomponer` y `combinar`, son específicos de cada problema resuelto por el esquema.

⋆ Para saber si la aplicación del esquema DV a un problema dado resultará en una solución eficiente o no, se deberá utilizar la recurrencia vista en el Capítulo 4 en la que el tamaño del problema disminuía *mediante división*:

$$T(n) = \begin{cases} c_1 & \text{si } 0 \leq n < n_0 \\ a * T(n/b) + c * n^k & \text{si } n \geq n_0 \end{cases}$$

⋆ Recordemos que la solución de la misma era:

$$T(n) = \begin{cases} O(n^k) & \text{si } a < b^k \\ O(n^k * \log n) & \text{si } a = b^k \\ O(n^{\log_b a}) & \text{si } a > b^k \end{cases}$$

⋆ Para obtener una solución eficiente, hay que conseguir a la vez:

- que el tamaño de cada subproblema sea lo más pequeño posible, es decir, **maximizar** b.
- que el número de subproblemas generados sea lo más pequeño posible, es decir, **minimizar** a.
- que el coste de la parte no recursiva sea lo más pequeño posible, es decir **minimizar** k.

⋆ La recurrencia puede utilizarse para **anticipar** el coste que resultará de la solución DV, sin tener por qué completar todos los detalles. Si el coste sale igual o peor que el de un algoritmo ya existente, entonces no merecerá la pena aplicar DV.

2. Ejemplos de aplicación del esquema con éxito

⋆ Algunos de los algoritmos recursivos vistos hasta ahora encajan perfectamente en el esquema DV.

⋆ La **búsqueda binaria** en un vector ordenado vista en el Cap. 4 es un primer ejemplo. En este caso, la operación `descomponer` selecciona una de las dos mitades del vector y la operación `combinar` es vacía. Obteníamos los siguientes parámetros de coste:

$b = 2$ Tamaño mitad del subvector a investigar en cada llamada recursiva.

$a = 1$ Un subproblema a lo sumo.

$k = 0$ Coste constante de la parte no recursiva.

dando un coste total $O(\log n)$.

⋆ La **ordenación mediante mezcla** o *mergesort* también responde al esquema: la operación `descomponer` divide el vector en dos mitades y la operación `combinar` mezcla las dos mitades ordenadas en un vector final. Los parámetros del coste son:

$b = 2$ Tamaño mitad de cada subvector.

$a = 2$ Siempre se generan dos subproblemas.

$k = 1$ Coste lineal de la parte no recursiva (la mezcla).

dando un coste total $O(n \log n)$.

⋆ La **ordenación rápida** o *quicksort*, considerando solo el caso mejor, también responde al esquema. La operación `descomponer` elige el pivote, particiona el vector con respecto a él y lo divide en dos mitades. La operación `combinar` en este caso es vacía. Los parámetros del coste son:

$b = 2$ Tamaño mitad de cada subvector.

$a = 2$ Siempre se generan dos subproblemas.

$k = 1$ Coste lineal de la parte no recursiva (la partición).

dando un coste total $O(n \log n)$.

⋆ La comprobación en un vector v estrictamente ordenado de si **existe un índice** i **tal que** $v[i] = i$ (ver la sección de problemas del Cap. 4) sigue un esquema similar al de la búsqueda binaria:

$b = 2$ Tamaño mitad del subvector a investigar en cada llamada recursiva.

$a = 1$ Un subproblema a lo sumo.

$k = 0$ Coste constante de la parte no recursiva.

dando un coste total $O(\log n)$.

⋆ Un problema históricamente famoso es el de la solución DV a la transformada discreta de Fourier (DFT), dando lugar al algoritmo conocido como **transformada rápida de Fourier**, o FFT (J.W. Cooley y J.W. Tukey, 1965). La transformada discreta convierte un conjunto de muestras de amplitud de una señal, en el conjunto de frecuencias que resultan del análisis de Fourier de la misma. Esta transformación y su inversa (que se realiza utilizando el mismo algoritmo DFT) tienen gran interés práctico pues permiten filtrar frecuencias indeseadas (p.e. ruido) y mejorar la calidad de las señales de audio o de vídeo.

La transformada en esencia multiplica una matriz $n \times n$ de números complejos por un vector de longitud n de coeficientes reales, y produce otro vector de la misma longitud. El algoritmo clásico realiza esta tarea del modo obvio y tiene un coste $O(n^2)$. La FFT descompone de un cierto modo el vector original en dos vectores de tamaño $n/2$, realiza la FFT de cada uno, y luego combina los resultados de tamaño $n/2$ para producir un vector de tamaño n. Las dos partes no recursivas tienen coste lineal, dando lugar a un algoritmo FFT de coste $O(n \log n)$. El algoritmo se utilizó por primera vez para analizar un temblor de tierra que tuvo lugar en Alaska en 1964. El algoritmo clásico empleó 26 minutos en analizar la muestra, mientras que la FFT de Cooley y Tukey lo hizo en 6 segundos.

3. Problema de selección

⋆ Dado un vector v de n elementos que se pueden ordenar y un entero $1 \leq k \leq n$, el *problema de selección* consiste en encontrar el k-ésimo menor elemento.

⋆ El problema de encontrar la mediana de un vector es un caso particular de este problema en el que se busca el elemento $\lceil n/2 \rceil$-ésimo del vector en el caso de estar ordenado (en los vectores de C++ corresponde a la posición $(n-1) \div 2$).

⋆ Una primera idea para resolver el problema consiste en ordenar el vector y tomar el elemento $v[k]$, lo cual tiene la complejidad del algoritmo de ordenación utilizado. Nos preguntamos si podemos hacerlo más eficientemente.

⋆ Otra posibilidad es utilizar el algoritmo *partición* que vimos en el Capítulo 4 con algún elemento del vector:

- Si la posición p donde se coloca el pivote es igual a k, entonces $v[p]$ es el elemento que estamos buscando.
- Si $k < p$ entonces podemos pasar a buscar el k-ésimo elemento en las posiciones anteriores a p, ya que en ellas se encuentran los elementos menores o iguales que $v[p]$ y $v[p]$ es el p-ésimo elemento del vector.
- Si $k > p$ entonces podemos pasar a buscar el k-ésimo elemento en las posiciones posteriores a p, ya que en ellas se encuentran los elementos mayores o iguales que $v[p]$ y $v[p]$ es el p-ésimo elemento del vector.

- ⋆ Al igual que hemos hecho en anteriores ocasiones generalizamos el problema añadiendo dos parámetros adicionales a y b tales que $0 \leq a \leq b \leq long(v) - 1$, que nos indican la parte del vector que nos interesa en cada momento. La llamada inicial que deseamos es `seleccion(v,0,long(v)-1,k)`.
- ⋆ En esta versión del algoritmo la posición k es una posición absoluta dentro del vector. Se puede escribir una versión alternativa en la que k hace referencia a la posición relativa dentro del subvector que se está tratando.

```
TElem seleccion1(TElem v[], int a, int b, int k){
//Pre: 0<=a<=b<=long(v)-1 && a<=k<=b
  int p;
  if (a == b) return v[a];
  else {
    particion(v,a,b,p);
    if (k == p) return v[p];
    else if (k < p) return seleccion1(v,a,p-1,k);
    else return seleccion1(v,p+1,b,k);
  }
}
```

- ⋆ El caso peor de este algoritmo se da cuando el pivote queda siempre en un extremo del subvector correspondiente y la llamada recursiva se hace con todos los elementos menos el pivote: por ejemplo si el vector está ordenado y le pido el último elemento. En dicho caso el coste está en $O(n^2)$ siendo $n = b - a + 1$ el tamaño del vector. La situación es similar a la del algoritmo de ordenación rápida.
- ⋆ Nos preguntamos qué podemos hacer para asegurarnos de que el tamaño del problema se divida aproximadamente por la mitad. Si en lugar de usar el primer elemento del vector como pivote usásemos la mediana del vector, entonces solamente tendríamos una llamada recursiva de la mitad de tamaño, lo que nos da un coste en $O(n)$ siendo n el tamaño del vector.
- ⋆ Pero resulta que el problema de la mediana es un caso particular del problema que estamos intentando resolver y del mismo tamaño. Por ello, nos vamos a conformar con una aproximación suficientemente buena de la mediana, conocida como *mediana de las medianas*, con la esperanza de que sea suficiente para tener un coste mejor.
- ⋆ Para calcularla se divide el vector en trozos consecutivos de 5 elementos, y se calcula directamente la mediana para cada uno de ellos. Después, se calcula recursivamente la mediana de esas n *div* 5 medianas mediante el algoritmo de selección. Con este pivote se puede demostrar que el caso peor anterior ya no puede darse.
- ⋆ Para implementar este algoritmo vamos a definir una versión mejorada de partición:
  - Recibe como argumento el pivote con respecto al cual queremos hacer la partición, con lo que es más general. Así podemos calcular primero la mediana de las medianas y dársela después a partición.
  - En lugar de devolver solamente una posición p vamos a devolver dos posiciones p y q que delimitan la parte de los elementos que son estrictamente menores que el pivote (desde a hasta $p-1$), las que son iguales al pivote (desde p hasta q) y las que son estrictamente mayores (desde $q+1$ hasta b). De esta forma, si el pivote se repite muchas veces el tamaño se reduce más.

- Este algoritmo también se puede usar en el de la ordenación rápida. Así, por ejemplo, si todos los elementos del vector son iguales, con el anterior algoritmo de partición se tiene coste $O(n \log n)$ mientras con el nuevo, descartando la parte de los que son iguales al pivote, tenemos coste en $O(n)$.
- Para implementarlo usamos tres índices p, k, q: los dos primeros se mueven hacia la derecha y el tercero hacia la izquierda. El invariante nos indica que los elementos en $v[a..p-1]$ son estrictamente menores que el pivote, los de $v[p..k-1]$ son iguales al pivote y los de $v[q+1..b]$ son estrictamente mayores. La parte $v[k..q]$ está sin explorar hasta que $k = q+1$ en cuyo caso el bucle termina y tenemos lo que queremos.
- En cada paso se compara $v[k]$ con el pivote: si es igual, está bien colocado y se incrementa k; si es menor se intercambia con $v[p]$ para ponerlo junto a los menores y se incrementan los indices p y k, ya que $v[i]$ es igual al pivote; si es mayor se intercambia con $v[q]$ para ponerlo junto a los mayores y se decrementa la q.

```
void particion2(TElem v[], int a, int b, TElem pivote, int& p, int& q){
//PRE: 0<=a<=b<=long(v)-1
  int k;
  TElem aux;
  p = a; k = a; q = b;

  //INV: a<=p<=k<=q+1<=b+1<=long(v)
  //     los elementos desde a hasta p-1 son < pivote
  //     los elementos desde p hasta k-1 son = pivote
  //     los elementos desde q+1 hasta b son > pivote
  while (k <= q){
    if (v[k] == pivote) k = k+1;
    else if (v[k] < pivote){
      aux = v[p]; v[p] = v[k]; v[k] = aux;
      p = p+1; k = k+1;
    } else {
      aux = v[q]; v[q] = v[k]; v[k] = aux;
      q = q-1;
    }
  }
}
//POST: los elementos desde a hasta p-1 son < pivote
//     los elementos desde p hasta q son = pivote
//     los elementos desde q+1 hasta b son > pivote
}
```

⋆ Por tanto, los pasos del nuevo algoritmo, `seleccion2`, son:

1. calcular la mediana de cada grupo de 5 elementos. En total n *div* 5 medianas, y cada una se puede calcular en tiempo constante: ordenar los 5 elementos y quedarnos con el tercero. Para no usar espacio adicional, dichas medianas se trasladan al principio del vector.
2. calcular la mediana de las medianas, mm, con una llamada recursiva a `seleccion2` con n *div* 5 elementos.
3. llamar a `particion2(v,a,b,mm,p,q)`, utilizando como pivote mm.

4. hacer una distinción de casos similar a la de `seleccion1`:

```
if ((k >= p) && (k <= q))
  return mm;
else if (k < p)
  return seleccion2(v,a,p-1,k);
else
  return seleccion2(v,q+1,b,k);
```

⋆ Es necesario elegir adecuadamente los casos base, ya que si hay 12 elementos o menos, es decir $b - a + 1 <= 12$, es más costoso seguir el proceso recursivo que ordenar directamente y tomar el elemento k.

⋆ Con estas ideas el algoritmo queda:

```
TElem seleccion2(TElem v[], int a, int b, int k){
//0<=a<=b<=long(v)-1 && a<=k<=b
  int l, p, q, s, pm, t;
  TElem aux,mm;

  t = b-a+1;
  if (t <= 12){ // Umbral base = 12
    ordenarInsercion(v,a,b);
    return v[k];
  } else {
    s = t/5;
    for (l = 1; l <= s; l++){
      ordenarInsercion(v,a+5*(l-1),a+5*l-1);
      pm = a+5*(l-1)+(5/2);
      aux = v[a+l-1];
      v[a+l-1] = v[pm];
      v[pm] = aux;
    }
    mm = seleccion2(v,a,a+s-1,a+(s-1)/2);
    particion2(v,a,b,mm,p,q);
    if ((k >= p) && (k <= q)) return mm;
    else if (k<p) return seleccion2(v,a,p-1,k);
    else return seleccion2(v,q+1,b,k);
  }
}
//POST: v[k] es mayor o igual que v[0..k-1] y
// menor o igual que v[k+1..long(v)-1]
```

donde *ordenarInsercion* es una versión del algoritmo de ordenación por inserción más general que el que vimos en el Capítulo 3, ya que podemos indicar el trozo del vector que deseamos ordenar.

⋆ La llamada inicial es `seleccion2(v, 0, long(v)-1, k)`.

⋆ Se puede demostrar, por inducción constructiva, que el tiempo requerido por *seleccion2* en el caso peor es lineal en $n = b - a + 1$ Brassard y Bratley (1997).

4. Organización de un campeonato

⋆ Se tienen n participantes para un torneo de ajedrez y hay que organizar un calendario para que todos jueguen contra todos de forma que:

1. Cada participante juegue exactamente una partida con cada uno de los $n-1$ restantes.
2. Cada participante juegue a lo sumo una partida diaria.
3. El torneo se complete en el menor número posible de días.

En este tema veremos una solución para el caso, más sencillo, en que n es potencia de 2.

⋆ Es fácil ver que el número de parejas distintas posibles es $\frac{1}{2}n(n-1)$. Como n es par, cada día pueden jugar una partida los n participantes formando con ellos $\frac{n}{2}$ parejas. Por tanto se necesita un mínimo de $n-1$ días para que jueguen todas las parejas.

⋆ Una posible forma de representar la solución al problema es en forma de matriz de n por n, donde se busca rellenar, en cada celda a_{ij}, el día en que se enfrentarán entre sí los contrincantes i y j, con $j < i$. Es decir, tratamos de rellenar, con fechas de encuentros, el área bajo la diagonal de esta matriz; sin que en ninguna fila o columna haya días repetidos.

⋆ Se ha de planificar las parejas de cada día, de tal modo que al final todos jueguen contra todos sin repetir ninguna partida, ni descansar innecesariamente.

⋆ Podemos ensayar una solución DV según las siguientes ideas (ver Figura 1):

- Si n es suficientemente grande, dividimos a los participantes en dos grupos disjuntos A y B, cada uno con la mitad de ellos.
- Se resuelven recursivamente dos torneos más pequeños: el del conjunto A jugando sólo entre ellos, y el del conjunto B también jugando sólo entre ellos. En estos sub-torneos las condiciones son idénticas a las del torneo inicial por ser n una potencia de 2; con la salvedad de que se pueden jugar ambos en paralelo.
- Después se planifican partidas en las que un participante pertenece a A y el otro a B. En estas partidas, que no se pueden solapar con los sub-torneos, hay que rellenar todas las celdas de la matriz correspondiente.

⋆ Esta última parte se puede resolver fácilmente fila por fila, rotando, en cada nueva fila, el orden de las fechas disponibles. Como hay que rellenar $\frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2}$ celdas, el coste de esta fase está en en $\Theta(n^2)$.

⋆ Los casos base, $n = 2$ o $n = 1$, se resuelven trivialmente en tiempo constante.

⋆ Esta solución nos da pues los parámetros de coste $a = 2,\ b = 2$ y $k = 2$, que conducen a un coste esperado de $\Theta(n^2)$. No puede ser menor puesto que la propia planificación consiste en rellenar $\Theta(n^2)$ celdas. Pasamos entonces a precisar los detalles.

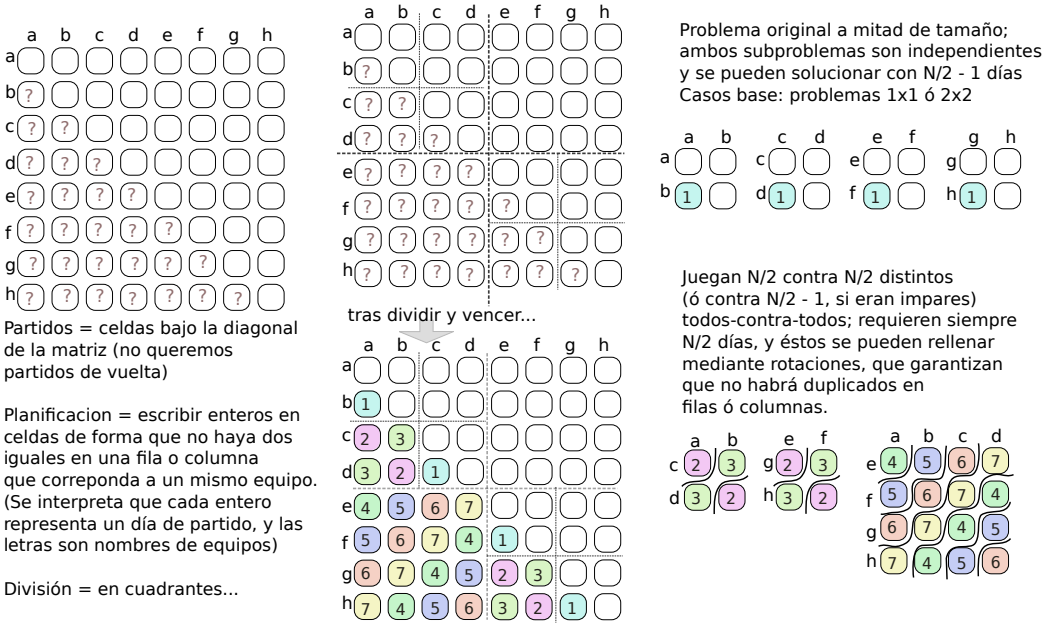


Figura 1: Solución gráfica del problema del torneo

4.1. Implementación

⋆ Usaremos una matriz cuadrada declarada como `int a[MAX][MAX]` (donde `MAX` es una constante entera) para almacenar la solución, inicializada con ceros. La primera fecha disponible será el dia 1.

⋆ De forma similar a ejemplos anteriores la función recursiva, llamada *rellena*, recibe dos parámetros adicionales, c y f que delimitan el trozo de la matriz que estamos rellenando, y que por tanto se inicializan respectivamente con 0 y $num - 1$, siendo num el número de participantes. Se asume que $dim = f - c + 1$ es potencia de 2.

⋆ En el caso base en que solo haya un equipo ($dim = 1$) no se hace nada. Si hay dos equipos ($dim = 2$), juegan el dia 1.

⋆ El cuadrante inferior izquierdo representa los partidos entre los equipos de los dos grupos. El primer dia disponible es $mitad = dim/2$ y hacen falta $mitad$ dias para que todos jueguen contra todos. Las rotaciones se consiguen con la fórmula $mitad + (i + j)\,\%mitad$.

```
void rellena(int a[MAX][MAX], int c, int f){
//PRE: ∃k : f − c + 1 = 2^k ∧ 0 <= c <= f < MAX ∧ ∀i, j : c <= i, j <= f : a[i][j] = 0
  int dim = f-c+1;
  int mitad = dim/2;
  // si dim = 1 nada, la diagonal principal no se rellena
  if (dim == 2) a[c+1][c] = 1;
  else if (dim > 2){
    rellena(a,c,c+mitad-1);       //cuadrante superior izquierdo
    rellena(a,c+mitad,f);         //cuadrante inferior derecho
    for (int i = c+mitad; i <= f; i++) //cuadrante inferior izquierdo
      for (int j = c; j <= c+mitad-1; j++)
        a[i][j] = mitad + (i+j)%mitad;
```

```
    }

//POST: ∀i, j : c ≤ j < i ≤ f : 1 ≤ a[i][j] ≤ f − c ∧
//       ∀i : c < i ≤ f : (∀j, k : c ≤ j < k < i : a[i][j] ≠ a[i][k])∧
//       ∀j : c ≤ j < f : (∀i, k : j < i < k ≤ f : a[i][j] ≠ a[k][j])∧
//       ∀i : c ≤ i ≤ f : (∀j : c ≤ j < i : (∀k : i < k ≤ f : a[i][j] ≠ a[k][i]))
}
```

5. El problema del par más cercano

⋆ Dada una nube de n puntos en el plano, $n \geq 2$, se trata de encontrar el par de puntos cuya distancia euclídea es menor (si hubiera más de un par con esa distancia mínima, basta con devolver uno de ellos). El problema tiene interés práctico. Por ejemplo, en un sistema de control del tráfico aéreo, el par más cercano nos informa del mayor riesgo de colisión entre dos aviones.

⋆ Dados dos puntos, $p_1 = (x_1, y_1)$ y $p_2 = (x_2, y_2)$, su distancia euclídea viene dada por $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. El algoritmo de "fuerza bruta" calcularía la distancia entre todo posible par de puntos, y devolvería el mínimo de todas ellas. Como hay $\frac{1}{2}n(n-1)$ pares posibles, el coste resultante sería **cuadrático**.

⋆ El enfoque DV trataría de encontrar el par más cercano a partir de los pares más cercanos de conjuntos de puntos que sean una fracción del original. Una posible estrategia es:

Dividir Crear dos nubes de puntos de tamaño mitad. Podríamos ordenar los puntos por la coordenada x y tomar la primera mitad como nube izquierda I, y la segunda como nube derecha D. Determinamos una linea vertical imaginaria l tal que todos los puntos de I están sobre l, o a su izquierda, y todos los de D están sobre l, o a su derecha.

Conquistar Resolver recursivamente los problemas I y D. Sean δ_I y δ_D las respectivas distancias mínimas encontradas y sea $\delta = \text{mín}(\delta_I, \delta_D)$.

Combinar El par más cercano de la nube original, o bien es el par con distancia δ, o bien es un par compuesto por un punto de la nube I y otro punto de la nube D. En ese caso, ambos puntos se hallan a lo sumo a una distancia δ de l. La operación *combinar* debe investigar los puntos de dicha banda vertical.

⋆ Antes de seguir con los detalles, debemos investigar el coste esperado de esta estrategia. Como el algoritmo fuerza-bruta tiene coste $\Theta(n^2)$, trataremos de conseguir un coste $\Theta(n \log n)$ en el caso peor. Sabemos por la experiencia de algoritmos como *mergesort* que ello exige unos parámetros $a = 2,\ b = 2,\ k = 1$, en decir tan solo podemos consumir un coste lineal en las operaciones de dividir y combinar.

⋆ La ordenación de los puntos por la coordenada de x se puede realizar una sola vez al principio (es decir, fuera del algoritmo recursivo DV) con un coste $\Theta(n \log n)$ en el caso peor, lo que es admisible para mantener nuestro coste total. Una vez ordenada la nube, la división en dos puede conseguirse con coste constante o lineal, dependiendo de si se utilizan vectores o listas como estructuras de datos de la implementación.

⋆ Una vez resueltos los dos subproblemas, se pueden filtrar los puntos de I y D para conservar sólo los que estén en la banda vertical de anchura 2δ y centrada en l. El filtrado puede hacerse con coste lineal tanto en tiempo como en espacio adicional. Llamemos B_I y B_D a los puntos de dicha banda respectivamente a la izquierda y a la derecha de l.

⋆ Para investigar si en la banda hay dos puntos a distancia menor que δ, aparentemente debemos calcular la distancia de cada punto de B_I a cada punto de B_D. Es fácil construir nubes de puntos en las que todos ellos caigan en la banda tras el filtrado, de forma que en el caso peor podríamos tener $|B_I| = |B_D| = \frac{n}{2}$. En ese caso, el cálculo de la distancia mínima entre los puntos de la banda sería cuadrático, y el coste total del algoritmo DV también.

⋆ Demostraremos que basta ordenar por la coordenada y el conjunto de puntos $B_I \cup B_D$ y después recorrer la lista ordenada comparando cada punto **con los 7 que le siguen**. Si de este modo no se encuentra una distancia menor que δ, concluimos que todos los puntos de la banda distan más entre sí. Este recorrido es claramente de coste lineal.

⋆ Suponiendo que esta estrategia fuera correcta, todavía quedaría por resolver la ordenación por la coordenada y. Si ordenáramos $B_I \cup B_D$ en cada llamada recursiva, gastaríamos un coste $\Theta(n \log n)$ en cada una, lo que conduciría un coste total en $\Theta(n \log^2 n)$.

⋆ Recordando la técnica de los **resultados acumuladores** explicada en la Sección 4.2 de estos apuntes, podemos exigir que cada llamada recursiva devuelva un resultado extra: la lista de sus puntos ordenada por la coordenada y. Este resultado puede propagarse hacia arriba del árbol de llamadas con un coste lineal, porque basta aplicar el algoritmo de mezcla de dos listas ordenadas. La secuencia de acciones de la operación *combinar* es entonces la siguiente:

1. Realizar la mezcla ordenada de las dos listas de puntos devueltas por las llamadas recursivas. Esta lista se devolverá al llamante.
2. Filtrar la lista resultante, conservando los puntos a una distancia de la línea divisoria l menor o igual que δ. Llamemos B a la lista filtrada.
3. Recorrer B calculando la distancia de cada punto a los 7 que le siguen, comprobando si aparece una distancia menor que δ.
4. Devolver los dos puntos a distancia mínima, considerando los tres cálculos realizados: parte izquierda, parte derecha y lista B.

5.1. Corrección

⋆ Consideremos un rectángulo cualquiera de anchura 2δ y altura δ centrado en la línea divisoria l (ver Figura 2). Afirmamos que, contenidos en él, puede haber a lo sumo 8 puntos de la nube original. En la mitad izquierda puede haber a lo sumo 4, y en caso de haber 4, situados necesariamente en sus esquinas, y en la mitad derecha otros 4, también en sus esquinas. Ello es así porque, por hipótesis de inducción, los puntos de la nube izquierda están separados entre sí por una distancia de al menos δ, e igualmente los puntos de la nube derecha entre sí. En la línea divisoria podrían coexistir hasta dos puntos de la banda izquierda con dos puntos de la banda derecha.

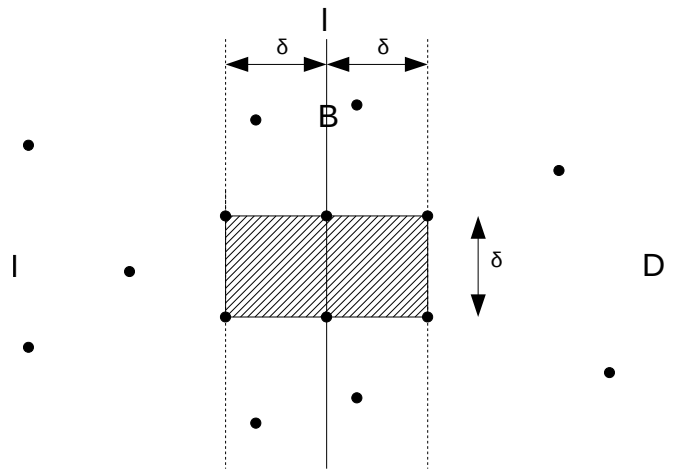


Figura 2: Razonamiento de corrección del problema del par más cercano

⋆ Si colocamos dicho rectángulo con su base sobre el punto p_1 de menor coordenada y de B, estamos seguros de que a los sumo los 7 siguientes puntos de B estarán en dicho rectángulo. A partir del octavo, él y todos los demás distarán más que δ de p_1. Desplazando ahora el rectángulo de punto a punto, podemos repetir el mismo razonamiento. No es necesario investigar los puntos con menor coordenada y que el punto en curso, porque esa comprobación ya se hizo cuando se procesaron dichos puntos.

⋆ Elegimos como caso base de la inducción $n < 4$. De este modo, al subdividir una nube con $n \geq 4$ puntos, nunca generaremos problemas con un solo punto.

5.2. Implementación

⋆ Definimos un punto como una pareja de números reales.

```
struct Punto
   { double x;
     double y;};
```

La entrada al algoritmo será un vector p de puntos y los límites c y f de la nube que estamos mirando. El vector de puntos no se modificará en ningún momento y se supone que está ordenado respecto a la coordenada x.

⋆ La solución

```
void parMasCercano(Punto p[], int c, int f, int indY[], int& ini,
                   double& d, int& p1, int& p2)
```

constará de:

- Los límites c y f. Las llamadas correctas cumplen $0 \leq c \wedge f \leq long(v) - 1 \wedge f \geq c + 1$.

- La distancia d entre los puntos más cercanos.
- Los puntos p_1 y p_2 más cercanos.
- Un vector de posiciones $indY$ y un índice inicial ini que representa cómo se ordenan los elementos de p con respecto a la coordenada y. El índice inicial ini nos indica que el punto $p[ini]$ es el que tiene la menor coordenada y. El vector $indY$ contiene en cada posición la posición del siguiente punto en la ordenación, siendo -1 el valor utilizado para indicar que no hay siguiente. Por ejemplo, si el vector de puntos es:

  $$\{\{-0.5, 0.5\}, \{0, 3\}, \{0, 0\}, \{0, 0.25\}, \{1, 1\}, \{1.25, 1.25\}, \{2, 2\}\}$$

  la variable ini valdrá 2 y el vector $indY$ será:

  $$\{4, -1, 3, 0, 5, 6, 1\}$$

  Es decir:

  - el elemento con menor y es el punto $p[2]$;
  - como $indY[2] = 3$ el siguiente es $p[3]$;
  - como $indY[3] = 0$, el siguiente es $p[0]$;
  - como $indY[0] = 4$, el siguiente es $p[4]$;
  - como $indY[4] = 5$, el siguiente es $p[5]$;
  - como $indY[5] = 6$, el siguiente es $p[6]$;
  - como $indY[6] = 1$, el siguiente es $p[1]$;
  - como $indY[1] = -1$, ya no hay más puntos

⋆ Usaremos las siguientes funciones auxiliares:

```
double absolute(double x){
  if (x >= 0) return x;
  else return -x;
}

double distancia(Punto p1, Punto p2){
  return (sqrt((p1.x-p2.x)*(p1.x-p2.x) + (p1.y-p2.y)*(p1.y-p2.y)));
}

double minimo(double x, double y){
  double z;
  if (x <= y) z = x; else z = y;
  return z;
}
```

⋆ Los casos base, cuando hay 2 o 3 puntos los resuelve la función

```
void solucionDirecta(Punto p[], int c, int f, int indY[], int& ini,
                     double& d, int& p1, int& p2){
  double d1, d2, d3;
  if (f == c+1){
    d = distancia(p[c],p[f]);
    if ((p[c].y) <= (p[f].y)){
      ini = c; indY[c] = f; indY[f] = -1; p1 = c;p2 = f;
    } else {
```

```
      ini = f; indY[f] = c; indY[c] = -1; p1 = f; p2 = c;
    }
  else if (f == c+2){
    // Menor distancia y puntos que la producen
    d1 = distancia(p[c],p[c+1]);
    d2 = distancia(p[c],p[c+2]);
    d3 = distancia(p[c+1],p[c+2]);
    d = minimo(minimo(d1,d2),d3);
    if (d == d1) {p1 = c; p2 = c+1;}
    else if (d == d2) {p1 = c; p2 = c+2;}
    else {p1 = c+1; p2 = c+2;}

    //Ordenar
    if (p[c].y <= p[c+1].y){
      if (p[c+1].y <= p[c+2].y){
        ini = c; indY[c] = c+1; indY[c+1] = c+2; indY[c+2] = -1;
      } else if (p[c].y <= p[c+2].y){
        ini = c; indY[c] = c+2; indY[c+2] = c+1; indY[c+1] = -1;
      } else{
        ini = c+2; indY[c+2] = c; indY[c] = c+1; indY[c+1] = -1;
      }
    } else{
      if (p[c+1].y > p[c+2].y){
        ini = c+2; indY[c+2] = c+1; indY[c+1] = c; indY[c] = -1;
      } else if (p[c].y > p[c+2].y){
        ini = c+1; indY[c+1] = c+2; indY[c+2] = c; indY[c] = -1;
      } else{
        ini = c+1; indY[c+1] = c; indY[c] = c+2; indY[c+2] = -1;
      }
    }
  }
}
```

⋆ El método *mezclaOrdenada* recibe en *indY* dos listas de enlaces que comienzan en *ini1* y *ini2* que representan respectivamente la ordenación con respecto a y de los puntos de la nube izquierda y derecha, y las mezcla para obtener una única lista de enlaces con todos los puntos de la nube.

```
void mezclaOrdenada(Punto p[],int ini1, int ini2, int indY[], int& ini){
  int i = ini1;
  int j = ini2;
  int k;
  if (p[i].y <= p[j].y){
    ini = ini1; k = ini1; i = indY[i];
  } else{
    k = ini2; ini = ini2; j = indY[j];
  }
  while ((i != -1) && (j != -1)){
    if (p[i].y <= p[j].y){
      indY[k] = i; k = i; i = indY[i];
    } else{
      indY[k] = j; k = j; j = indY[j];
    }
  }
  if (i == -1) indY[k] = j;
  else indY[k] = i;
```

```
}
```

En el ejemplo de antes, despues de las dos llamadas recursivas tendríamos que *ini1* = 2, *ini2* = 4 y el vector *indY* es:

$$\{1, -1, 3, 0, 5, 6, -1\}$$

representando dos listas de puntos $p[2]$, $p[3]$, $p[0]$, $p[1]$ y por otro lado $p[4]$, $p[5]$, $p[6]$. Después de ejecutar *mezclaOrdenada* obtenemos el resultado de arriba. Este método se puede utilizar igualmente en una versión del algoritmo *mergesort* que devuelva un vector de enlaces.

⋆ Así el algoritmo queda:

```
void parMasCercano(Punto p[], int c, int f, int indY[], int& ini,
                   double& d, int& p1, int& p2){
  int m; int i, j, ini1, ini2, p11, p12, p21, p22;
  double d1, d2;

  if (f-c+1 < 4)
    solucionDirecta(p,c,f,indY,ini,d,p1,p2);
  else{
    m = (c+f)/2;
    parMasCercano(p,c,m,indY,ini1,d1,p11,p12);
    parMasCercano(p,m+1,f,indY,ini2,d2,p21,p22);

    if (d1 <= d2){
      d = d1; p1 = p11; p2 = p12;
    } else{
      d = d2; p1 = p21; p2 = p22;
    }

    //Mezcla ordenada por la y
    mezclaOrdenada(p,ini1,ini2,indY,ini);

    //Filtrar la lista
    i = ini;
    while (absolute(p[m].x-p[i].x)>d) i = indY[i];

    int iniA = i;
    int indF[f-c+1];
    for (int l = 0; l <= f-c+1; l++) indF[l] = -1;
    int k = iniA - c;
    while (i != -1){
      if (absolute(p[m].x-p[i].x) <= d)   {indF[k] = i-c; k = i-c;}
      i = indY[i];
    }

    //Calcular las distancias
    i = iniA-c;
    while (i != -1){
      int count = 0;  j = indF[i];
      while (j != -1 && count < 7){
        double daux = distancia(p[i+c],p[j+c]);
        if (daux < d) {d = daux; p1 = i+c; p2 = j+c;}
        j = indF[j];
```

```
          count = count+1;
        }
        i = indF[i];
      }
    }
}
```

⋆ La llamada inicial es:

```
parMasCercano(p, 0, long(v)-1, indY, ini, d, p1, p2).
```

6. La determinación del umbral

⋆ Dado un algoritmo DV, casi siempre existe una versión asintóticamente menos eficiente pero de constantes multiplicativas más pequeñas. Le llamaremos el *algoritmo sencillo*. Eso hace que para valores pequeños de n, sea más eficiente el algoritmo sencillo que el algoritmo DV.

⋆ Se puede conseguir un algoritmo óptimo combinando ambos algoritmos de modo inteligente. El aspecto que tendría el algoritmo compuesto es:

```
Solucion divideYvenceras (Problema x, int n){
   if (n <= n_0)
      return algoritmoSencillo(x)
   else /* n > n_0 */ {
      descomponer x
      llamadas recursivas a divideYvenceras
      y = combinar resultados
      return y;
   }
}
```

⋆ Es decir, se trata de convertir en casos base del algoritmo recursivo los problemas que son *suficientemente* pequeños. Nos planteamos cómo determinar **el umbral** n_0 a partir del cual compensa utilizar el algoritmo sencillo con respecto a continuar subdividiendo el problema.

⋆ La determinación del umbral es un tema fundamentalmente **experimental**, depende del computador y lenguaje utilizados, e incluso puede no existir un óptimo único sino varios en función del tamaño del problema.

⋆ A pesar de eso, se puede hacer un estudio teórico del problema para encontrar un umbral aproximado. Para fijar ideas, centrémosnos en el problema de encontrar el par más cercano y escribamos su recurrencia con constantes multiplicativas (suponemos n potencia de 2):

$$T_1(n) = \begin{cases} c_0 & \text{si } 0 \leq n \leq 3 \\ 2T_1(n/2) + c_1 n & \text{si } n \geq 4 \end{cases}$$

Si desplegamos esta recurrencia y la resolvemos exactamente, la expresión de coste resulta ser:

$$T_1(n) = c_1 n \log n + (\frac{1}{2}c_0 - c_1)n$$

⋆ Por otra parte, el algoritmo sencillo tendrá un coste $T_2(n) = c_2 n^2$. Las constantes c_0, c_1 y c_2 dependen del lenguaje y de la máquina subyacentes, y han de ser determinadas experimentalmente para cada instalación.

⋆ Aparentemente, para encontrar el umbral hay que resolver la ecuación $T_1(n) = T_2(n)$, es decir encontrar un n_0 que satisfaga:

$$c_1 n \log n + (\frac{1}{2}c_0 - c_1)n = c_2 n^2$$

Sin embargo, este planteamiento es **incorrecto** porque el coste del algoritmo DV está calculado subdividiendo n hasta los casos base. Es decir, estamos comparando el algoritmo DV puro con el algoritmo sencillo puro y lo que queremos saber es cuándo subdividir es más costoso que no subdividir.

⋆ La ecuación que necesitamos es la siguiente:

$$2T_2(n/2) + c_1 n = c_2 n^2 = T_2(n)$$

que expresa que en una llamada recursiva al algoritmo DV decidimos subdividir **por última vez** porque es tan costoso subdividir como no hacerlo. Nótese que el coste de las dos llamadas internas está calculado con el algoritmo sencillo, lo que confirma que esta subdivisión es la última que se hace.

⋆ Resolviendo esta ecuación obtenemos:

$$2c_2 \left(\frac{n}{2}\right)^2 + c_1 n = c_2 n^2 \quad \Rightarrow \quad n_0 = \frac{2c_1}{c_2}$$

Para $n > n_0$, la expresión de la izquierda crece más despacio que la de la derecha y merece la pena subdividir. Para valores menores que n_0, la expresión de la derecha es menos costosa.

⋆ Como sabemos, c_1 mide el número de operaciones elementales que hay que hacer con cada punto de la nube de puntos en la parte no recursiva del algoritmo DV. Es decir la suma por punto de dividir la lista en dos, mezclar las dos mitades ordenadas, filtrar los puntos de la banda y recorrer la misma, comparando cada punto con otros siete.

Por su parte, c_2 mide el coste elemental de cada una de las n^2 operaciones del algoritmo sencillo. Este coste consiste en esencia en la mitad de calcular la distancia entre dos puntos y comparar con el mínimo en curso.

Supongamos que, una vez medidas experimentalmente, obtenemos $c_1 = 32c_2$. Ello nos daría un umbral $n_0 = 64$.

⋆ Es interesante escribir y resolver la recurrencia del algoritmo híbrido así conseguido y comparar el coste con el del algoritmo DV original:

$$T_3(n) = \begin{cases} c_2 n^2 & \text{si } n \leq 64 \\ 2T_3(n/2) + c_1 n & \text{si } n > 64 \end{cases}$$

Si desplegamos i veces, obtenemos:

$$T_3(n) = 2^i T_3\left(\frac{n}{2^i}\right) + i c_1 n$$

que alcanza el caso base cuando $\frac{n}{2^i} = 2^6 \Rightarrow i = \log n - 6$. Entonces sustituimos i:

$$\begin{aligned} T_3(n) &= \tfrac{n}{2^6} T_3(2^6) + c_1(\log n - 6)n \\ &= c_1 n \log n + c_2 \tfrac{n}{2^6} 2^{12} - 6c_1 n \\ &= c_1 n \log n - 4c_1 n \end{aligned}$$

⋆ Comparando el coste $T_3(n)$ del algoritmo hibrido con el coste $T_1(n)$ del algoritmo DV puro, se aprecia una diferencia importante en la constante multiplicativa del término de segundo orden.

Notas bibliográficas

En (Martí Oliet et al., 2013, Cap. 11) se repasan los fundamentos de la técnica DV y hay numerosos ejercicios resueltos. El capítulo (Brassard y Bratley, 1997, Cap. 7) también está dedicado a la técnica DV y uno de los ejemplos es el algoritmo de Karatsuba y Ofman. El ejemplo del par más cercano está tomado de (Cormen et al., 2001, Cap. 33).

Ejercicios

1. Dos amigos matan el tiempo de espera en la cola del cine jugando a un juego muy sencillo: uno de ellos piensa un número natural positivo y el otro debe adivinarlo preguntando solamente si es menor o igual que otros números. Diseñar un algoritmo eficiente para adivinar el número.

2. Desarrollar un algoritmo DV para multiplicar n número complejos usando tan solo $3(n-1)$ multiplicaciones.

3. Dados un vector $v[0..n-1]$ y un valor k, $1 \leq k \leq n$, diseñar un algoritmo DV de coste constante en espacio que trasponga las k primeras posiciones del vector con las $n-k$ siguientes. Es decir, los elementos $v[0] \ldots v[k-1]$ han de copiarse a las posiciones $n-k \ldots n-1$, y los elementos $v[k] \ldots v[n-1]$ han de copiarse a las posiciones $0 \ldots n-k-1$.

4. Dado un vector $T[1..n]$ de n elementos (que tal vez no se puedan ordenar), se dice que un elemento x es *mayoritario en* T cuando el número de veces que x aparece en T es estrictamente mayor que $N/2$.

   a) Escribir un algoritmo DV que en tiempo $O(n \log n)$ decida si un vector $T[0..n-1]$ contiene un elemento mayoritario y devuelva tal elemento cuando exista.

   b) Suponiendo que los elementos del vector $T[0..n-1]$ se puedan ordenar, y que podemos calcular la mediana de un vector en tiempo lineal, escribir un algoritmo DV que en tiempo lineal decida si $T[0..n-1]$ contiene un elemento mayoritario y devueva tal elemento cuando exista. La mediana se define como el valor que ocuparía la posición $\frac{n-1}{2}$ si el vector estuviese ordenado.

   c) Idear un algoritmo que no sea DV, tenga coste lineal, y no suponga que los elementos se pueden ordenar.

5. *a*) (ACR295) Dado un valor x fijo, escribir un algoritmo para calcular x^n con un coste $O(\log n)$ en términos del número de multiplicaciones.

b) Sea F la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcular el producto del vector $(i\ j)$ y la matriz F. ¿Qué ocurre cuando i y j son números consecutivos de la sucesión de Fibonacci?

c) (ACR306) Utilizando las ideas de los dos apartados anteriores, desarrollar un algoritmo para calcular el n-ésimo número de Fibonacci $f(n)$ con un coste $O(\log n)$ en términos del número de operaciones aritméticas elementales.

6. En un habitación oscura se tienen dos cajones, en uno de los cuales hay n tornillos de varios tamaños, y en el otro las correspondientes n tuercas. Es necesario emparejar cada tornillo con su tuerca correspondiente, pero debido a la oscuridad no se pueden comparar tornillos con tornillos ni tuercas con tuercas, y la única comparación posible es la de intentar enroscar una tuerca en un tornillo para comprobar si es demasiado grande, demasiado pequeña, o se ajusta perfectamente al tornillo. Desarrollar un algoritmo para emparejar los tornillos con las tuercas que use $O(n \log n)$ comparaciones en promedio.

7. Dado un vector $C[0..n-1]$ de números enteros distintos, y un número entero S, se pide:

   a) Diseñar un algoritmo de complejidad $\Theta(n \log n)$ que determine si existen o no dos elementos de C tales que su suma sea exactamente S.

   b) Suponiendo ahora ordenado el vector C, diseñar un algoritmo que resuelva el mismo problema en tiempo $\Theta(n)$.

8. Mr. Scrooge ha cobrado una antigua deuda, recibiendo una bolsa con n monedas de oro. Su olfato de usurero le asegura que una de ellas es falsa, pero lo único que la distingue de las demás es su peso, aunque no sabe si este es mayor o menor que el de las otras. Para descubrir cuál es la falsa, Mr. Scrooge solo dispone de una balanza con dos platillos para comparar el peso de dos conjuntos de monedas. En cada pesada lo único que puede observar es si la balanza queda equilibrada, si pesan más los objetos del platillo de la derecha o si pesan más los de la izquierda. Suponiendo $n \geq 3$, diseñar un algoritmo DV para encontrar la moneda falsa y decidir si pesa más o menos que las auténticas.

9. Se dice que un punto del plano $A = (a_1, a_2)$ domina a otro $B = (b_1, b_2)$ si $a_1 > b_1$ y $a_2 > b_2$. Dado un conjunto S de puntos en el plano, el rango de un punto $A \in S$ es el número de puntos que domina. Escribir un algoritmo de coste $O(n \log^2 n)$ que dado un conjunto de n puntos calcule el rango de cada uno; demostrar que su coste efectivamente es el requerido.

10. **La línea del cielo de Manhattan**. Dado un conjunto de n rectángulos (los edificios), cuyas bases descansan todas sobre el eje de abcisas, hay que determinar mediante DV la cobertura superior de la colección (la línea del cielo).

    La línea del cielo puede verse como una lista ordenada de segmentos horizontales, cada uno comenzando en la abcisa donde el segmento precedente terminó. De esta forma, puede representarse mediante una secuencia alternante de abcisas y ordenadas, donde cada ordenada indica la altura de su correspondiente segmento:

    $$(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_{m-1}, y_{m-1}, x_m)$$

    con $x_1 < x_2 < ... < x_m$. Por convenio, la línea del cielo está a altura 0 hasta alcanzar x_1, y vuelve a 0 después de x_m. Se usa la misma representación para cada rectángulo,

es decir (x_1, y_1, x_2) corresponde al rectángulo con vértices $(x_1, 0)$, (x_1, y_1), (x_2, y_1) y $(x_2, 0)$.

11. Sea un vector $V[0..n-1]$ que contiene valores enteros positivos que se ajustan al perfil de una curva cóncava; es decir, para una cierta posición k, tal que $0 \leq k < n$, se cumple que $\forall j \in \{0..k-1\}.V[j] > V[j+1]$ y $\forall j \in \{k+1..n-1\}.V[j-1] < V[j]$ (por ejemplo el vector $V = [9, 8, 7, 3, 2, 4, 6]$). Se pide diseñar un algoritmo que encuentre la posición del mínimo en el vector (la posición 4 en el ejemplo), teniendo en cuenta que el algoritmo propuesto debe de ser más eficiente que el conocido de búsqueda secuencial del mínimo en un vector cualquiera.

12. La *envolvente convexa* de una nube de puntos en el plano es el menor polígono convexo que incluye a todos los puntos. Si los puntos se representaran mediante clavos en un tablero y extendiéramos una goma elástica alrededor de todos ellos, la forma que adoptaría la goma al soltarla sería la envolvente convexa. Dada una lista l de n puntos, se pide un algoritmo de coste $\Theta(n \log n)$ que calcule su envolvente convexa.

13. Las matrices de Hadamard H_0, H_1, H_2, ..., se definen del siguiente modo:

    - $H_0 = (1)$ es una matriz 1×1.
    - Para $k > 0$, H_k es la matriz $2^k \times 2^k$

    $$H_k = \left(\begin{array}{c|c} H_{k-1} & H_{k-1} \\ \hline H_{k-1} & -H_{k-1} \end{array}\right)$$

    Si v es un vector columna de longitud $n = 2^k$, escribir un algoritmo que calcule el producto $H_k \cdot v$ en tiempo $O(n \log n)$ suponiendo que las operaciones aritméticas básicas tienen un coste constante. Justificar el coste.

14. Diseñar un algoritmo de coste en $O(n)$ que dado un conjunto S con n números, y un entero positivo $k \leq n$, determine los k números de S más cercanos a la mediana de S.

15. La p–mediana generalizada de una colección de n valores se define como *la media* de los p valores ($p + 1$ si p y n tuvieran distinta paridad) que ocuparían las posiciones centrales si se ordenara la colección. Diseñar un algoritmo que resuelva el problema en un tiempo a lo sumo $O(n \log(n))$, asumiento p constante distinto de n.

16. Se tiene un vector V de números enteros distintos, con pesos asociados $p_1, \ldots, p_n$. Los pesos son valores no negativos y verifican que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Se define la *mediana ponderada* del vector V como el valor $V[m]$, $1 \leq m \leq n$, tal que

    $$\Big(\sum_{V[i]<V[m]} p_i\Big) < \frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad \Big(\sum_{V[i]\leq V[m]} p_i\Big) \geq \frac{1}{2}.$$

    Por ejemplo, para $n = 5$, $V = [4, 2, 9, 3, 7]$ y $P = [0.15, 0.2, 0.3, 0.1, 0.25]$, la media ponderada es $V[5] = 7$ porque

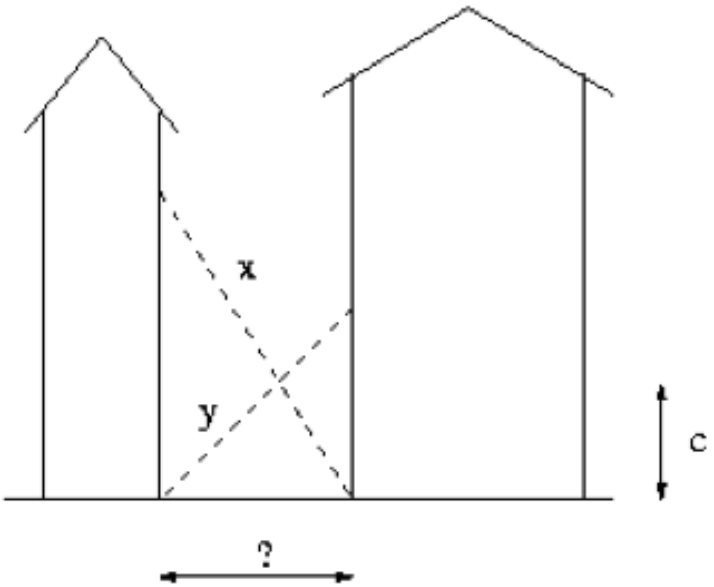
    $$\sum_{V[i]<7} p_i = p_1 + p_2 + p_4 = 0.15 + 0.2 + 0.1 = 0.45 < \frac{1}{2}, \text{ y}$$

    $$\sum_{V[i]\leq 7} p_i = p_1 + p_2 + p_4 + p_5 = 0.15 + 0.2 + 0.1 + 0.25 = 0.7 \geq \frac{1}{2}.$$

Diseñar un algoritmo de tipo *divide y vencerás* que encuentre la mediana ponderada en un tiempo lineal en el caso peor. (Obsérvese que V puede no estar ordenado.)

17. Se tienen n bolas de igual tamaño, todas ellas de igual peso salvo dos más pesadas, que a su vez pesan lo mismo. Como único medio para dar con dichas bolas se dispone de una balanza romana clásica. Diseñar un algoritmo que permita determinar cuáles son dichas bolas, con el mínimo posible de pesadas (que es logarítmico).
Indicación: Considerar también el caso en el que solo hay una bola diferente.

18. **Escaleras cruzadas** Una calle estrecha está flanqueada por dos edificios muy altos. Se colocan dos escaleras en dicha calle como muestra el dibujo: una de ellas, de longitud x metros, colocada en la base del edificio que está en el lado derecho de la calle y apoyada sobre la fachada del edificio situado en el lado izquierdo de la calle; la otra, de longitud y metros, colocada en la base del edificio que está en el lado izquierdo de la calle y apoyada sobre la fachada del edificio situado en el lado derecho de la calle. El punto donde se cruzan ambas escaleras está a altura exactamente c metros del suelo. Se pide diseñar un algoritmo que calcule la anchura de la calle con tres decimales de precisión.



(Enunciado original en `http://uva.onlinejudge.org/external/105/10566.pdf`)

19. **Resolución de una ecuación** Dados números reales p, q, r, s, t, u tales que $0 \leq p, r \leq 20$ y $-20 \leq q, s, t \leq 0$, se desea resolver la siguiente ecuación en el intervalo $[0, 1]$ con cuatro decimales de precisión:

$$p * e^{-x} + q * sen(x) + r * cos(x) + s * tan(x) + t * x^2 + u = 0$$

(Enunciado original en `http://uva.onlinejudge.org/external/103/10341.pdf`)