UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

Tema 2: Esquema algorítmico de divide y vencerás
Algoritmos de ordenación

Slides adaptadas a partir del original de Enrique Martín
Estructuras de Datos y Algoritmos (EDA)
Grado en Desarrollo de Videojuegos
Fac. Informática

Contenidos

Introducción

Introducción

- Análisis de eficiencia
  1. Análisis de eficiencia de los algoritmos ✔
- Algoritmos
  2. **Divide y vencerás (DV), o *Divide-and-Conquer***
  3. Vuelta atrás (VA), o *backtracking*
- Estructuras de datos
  4. Especificación e implementación de TADs
  5. Tipos de datos lineales
  6. Tipos de datos arborescentes
  7. Diccionarios
  8. Aplicación de TADs

Notas sobre Complejidad Algorítmica

n	$\log_{10} n$	n	$n \log_{10} n$	n^2	n^3	2^n
10	1 *ms*	10 *ms*	10 *ms*	0,1 *s*	1 *s*	1,02 *s*
10^2	2 *ms*	0,1 *s*	0,2 *s*	10 *s*	16,67 *m*	$4{,}02 * 10^{20}$ *sig*
10^3	3 *ms*	1 *s*	3 *s*	16,67 *m*	11,57 *d*	$3{,}4 * 10^{291}$ *sig*
10^4	4 *ms*	10 *s*	40 *s*	1,16 *d*	31,71 *a*	$6{,}3 * 10^{3000}$ *sig*
10^5	5 *ms*	1,67 *m*	8,33 *m*	115,74 *d*	317,1 *sig*	$3{,}16 * 10^{30093}$ *sig*
10^6	6 *ms*	16,67 *m*	1,67 *h*	31,71 *a*	317 097,9 *sig*	$3{,}1 * 10^{301020}$ *sig*

Figura: Crecimiento de distintas funciones de complejidad

Notas sobre Complejidad Algorítmica

- Obsérvese la **extraordinaria eficiencia** de los algoritmos de coste $\mathcal{O}(\log n)$: pasar de un tamaño de $n = 10$ a $n = 1\,000\,000$ solo hace que el tiempo crezca de 1 ms a 6.
  - La búsqueda binaria en un vector ordenado, y la búsqueda en ciertas estructuras de datos de este curso, tienen este coste en el caso peor.
- Por otro lado, los algoritmos de coste $\mathcal{O}(2^n)$ son **prácticamente inútiles**: mientras que un problema de tamaño $n = 10$ se resuelve en aprox. un segundo, la edad del universo conocido ($1,4 \times 10^8$ siglos) sería totalmente insuficiente para resolver uno de tamaño $n = 100$.
  - Algunos algoritmos de *vuelta atrás* que veremos en este curso tienen ese coste en el caso peor.

Notas sobre Complejidad Algorítmica

- Esta tabla confirma la afirmación hecha al comienzo de este tema de que para ciertos algoritmos es inútil esperar a que los computadores sean más rápidos.
- Es más productivo invertir esfuerzo en diseñar **mejores algoritmos** para ese problema.

- Hagamos el siguiente experimento: supongamos seis algoritmos con los costes anteriores, tales que tardan todos ellos 1 hora en resolver un problema de tamaño $n = 100$.
  - ¿Qué ocurre si duplicamos la velocidad del computador? O lo que es lo mismo, ¿qué ocurre si duplicamos el tiempo disponible?

$\mathcal{O}$	$t = 1h.$	$t = 2h.$
$\mathcal{O}(\log n)$	$n = 100$	$n = 10\,000$
$\mathcal{O}(n)$	$n = 100$	$n = 200$
$\mathcal{O}(n \log n)$	$n = 100$	$n = 178$
$\mathcal{O}(n^2)$	$n = 100$	$n = 141$
$\mathcal{O}(n^3)$	$n = 100$	$n = 126$
$\mathcal{O}(2^n)$	$n = 100$	$n = 101$

Notas sobre Complejidad Algorítmica

- El de coste logarítmico es capaz de resolver problemas 100 veces más grandes
- El de coste exponencial resuelve un tamaño prácticamente igual al anterior!
- Los de coste $\mathcal{O}(n)$ y $\mathcal{O}(n \log n)$ se comportan de acuerdo a la intuición de un usuario no informático: al duplicar la velocidad del computador (o el tiempo disponible), se duplica aprox. el tamaño del problema resuelto.
- En los de coste $\mathcal{O}(n^k)$, al duplicar la velocidad, el tamaño se multiplica por un factor $\sqrt[k]{2}$.

Plantillas para obtener el coste de algoritmos recursivos

- Una vez hemos calculado la recurrencia, podemos utilizar *plantillas* de coste. Si la recurrencia encaja con alguna de las dos plantillas, únicamente tendremos que detectar en qué caso concreto estamos y directamente obtendremos el coste.
- El método de las plantillas también se llama *master method* en [Corment *et al.*, 2009]
- Las plantillas se obtienen aplicando el método del expansión-evaluación de manera *simbólica* y luego realizando distinción de casos sobre la expresión resultante. En [Peña, 03] podéis ver el desarrollo completo.

Plantillas con sustracción

Reducción del problema mediante sustracción

Consideremos una recurrencia con el siguiente aspecto:

$$T(n) = \begin{cases} c_1 & \text{si } 0 \leq n < b \\ \mathbf{a}\,T(n - \mathbf{b}) + c_2 n^{\mathbf{k}} & \text{si } n \geq b \end{cases}$$

El orden de esta recurrencia estará en:

$$\begin{array}{lcl} \text{si } a = 1 & \longrightarrow & T(n) \in \Theta(n^{k+1}) \\ \text{si } a > 1 & \longrightarrow & T(n) \in \Theta(a^{n \ div \ b}) \end{array}$$

Plantillas con división

Reducción del problema mediante división

Consideremos una recurrencia con el siguiente aspecto:

$$T(n) = \begin{cases} c_1 & \text{si } 0 \leq n < b \\ \mathbf{a}\,T(n/\mathbf{b}) + c_2 n^{\mathbf{k}} & \text{si } n \geq b \end{cases}$$

El orden de esta recurrencia estará en:

$$\begin{array}{lcl} \text{si } a < b^k & \longrightarrow & T(n) \in \Theta(n^k) \\ \text{si } a = b^k & \longrightarrow & T(n) \in \Theta(n^k \log\ n) \\ \text{si } a > b^k & \longrightarrow & T(n) \in \Theta(n^{\log_b\ a}) \end{array}$$

Métodos algorítmicos

- Los *esquemas algorítmicos* son estrategias conocidas para la resolución de problemas. Son *patrones* que se aplican en la resolución de problemas que presentan unas **características comunes**.
- En este curso veremos únicamente 2 métodos algorítmicos:
  - Divide y vencerás
  - Vuelta atrás
- En el 3^{er} curso veréis más en la asignatura *Métodos algorítmicos en resolución de problemas*:
  - Algoritmos voraces
  - Programación dinámica
  - Ramificación y acotación

Divide y vencerás

Divide y vencerás

El método de *divide y vencerás* se basa en 3 pasos:

1. **Divide** el problema original en un número de subproblemas que son **instancias más pequeñas del mismo problema**.
2. **Resuelve** cada uno de los subproblemas **recursivamente**. Cuando el tamaño del subproblema es *suficientemente* pequeño resuélvelo de manera directa.
3. **Combina** las soluciones a los subproblemas para **construir la solución al problema original**.

Divide y vencerás: esquema

```
1  fun divide-y-vencerás(x : problema) dev y : solución
2    if pequeño(x) then
3      y := metodo-directo(x)
4    else
5      // Descomponer x en k >= 1 problemas más pequeños
6      {x1, ..., xk} := descomponer(x)
7
8      // Resolver recursivamente cada subproblema
9      for j in [1..k]
10       yj := divide-y-vencerás(xj)
11
12     // Combina los yj para obtener la solucion de x
13     y := combina(y1, ..., yk)
14 }
```

Suma de un vector

Suma de un vector

- Consideremos un vector `v[0..N)` de enteros
- ¿Cómo calculamos la suma de todos sus elementos usando el esquema *divide y vencerás*?
- Tenemos varias maneras de dividir el problema en subproblemas más pequeños:
  1. Reducción por sustracción: generar un único subproblema de tamaño $N - k$ y sumar al resultado los k elementos no tratados
  2. Reducción por división: generar k subproblemas de tamaño $\frac{N}{k}$ y sumar sus resultados

Suma de un vector

Solución por sustracción con $k = 1$. Suponemos $0 \leq ini \leq fin \leq N$ y que el algoritmo calcula la suma del subvector v[ini .. fin)

```
1  template <typename T>
2  T sumaDV_1(const vector<T> &v, const int ini,
3             const int fin) {
4    if (fin - ini == 0 ) // n = 0
5      return 0; // Elemento neutro de tipo T
6    else { // n > 0
7      T sum_p = sumaDV_1(v, ini+1, fin);
8      return sum_p + v[ini];
9    }
10 }
```

$$T(n)^1 = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 0 \\ T(n-1) + 4 & \text{si } n > 0 \end{cases} \in \mathcal{O}(n)$$

[1] Consideramos $n = fin - ini$

Suma de un vector

Solución por división con $k = 2$. Suponemos $0 \leq ini \leq fin \leq N$ y que el algoritmo calcula la suma del subvector v[ini .. fin)

```
1  template <typename T>
2  T sumaDV_div(const vector<T> &v, const int ini,
3               const int fin) {
4    const int n = fin - ini;
5    if (n < 2) // n < 2
6      return (n == 0) ? 0: v[ini];
7      // expr. condicional -> (Cond) ? Valor_true: Valor_false
8    else { // n >= 2
9      int mit = (fin + ini) / 2;
10     T sum_p1 = sumaDV_div<T>(v, ini, mit);
11     T sum_p2 = sumaDV_div<T>(v, mit, fin);
12     return sum_p1 + sum_p2;
13   }
14 }
```

$$T(n)^2 = \begin{cases} 5 & \text{si } n < 2 \\ 2T(\frac{n}{2}) + 9 & \text{si } n \geq 2 \end{cases} \in \mathcal{O}(n)$$

[2] Consideramos $n = fin - ini$

Suma de un vector

- Hemos comprobado que en ambas soluciones el coste está en $\mathcal{O}(n)$. Es exactamente el mismo coste que nos habría salido si aplicamos el enfoque iterativo natural
- Si probásemos otras variantes de sustracción o división con otros valores de k obtendríamos el mismo coste
- Es *lógico*: para sumar los elementos de un vector de n elementos tendremos que recorrer los n elementos de una u otra forma

Búsqueda en un vector

Búsqueda en un vector no ordenado

- Consideremos un vector **no ordenado** `v` `[0.. N)` de elementos de tipo `T`, y un elemento `e` de tipo `T`
- ¿Cómo comprobamos si dicho elemento aparece en el vector usando el esquema *divide y vencerás*?
- Tenemos varias maneras de dividir el problema en subproblemas más pequeños, pero vamos a centrarnos en la reducción por **división** generando únicamente **2 subproblemas**: *el elemento estará en el vector completo si aparece en alguna de sus dos mitades*

Búsqueda en un vector no ordenado

Suponemos $0 \leq ini \leq fin \leq N$ y que la búsqueda se ciñe al subvector v[ini .. fin)

```
1  template <typename T>
2  bool member(const vector<T> &v, const int ini,
3              const int fin, const T e) {
4    const int n = fin - ini;
5    if (n < 2) {
6      return (n == 0) ? false : (v[ini] == e);
7    } else {
8      const int mit = (ini + fin) / 2;
9      bool b1 = member<T>(v, ini, mit, e);
10     bool b2 = member<T>(v, mit, fin, e);
11     return b1 || b2;
12   }
13 }
```

$$T(n)^3 = \begin{cases} c_1 & \text{si } n < 2 \\ 2T(\frac{n}{2}) + c_2 & \text{si } n \geq 2 \end{cases} \in \mathcal{O}(n)$$

[3] Consideramos $n = fin - ini$

Búsqueda en un vector ordenado

- ¿Cambiaría algo si el vector fuese ordenado? **¡Claro!**
- Si accedo a la posición media (mit = (ini + fin) / 2) del vector v[ini .. fin) y consulto su valor, estaré en una de estas dos situaciones:
  1. Si e $<$ v[mit], sabemos que **no puede aparecer** en el subvector v[mit .. fin)
  2. Si e $>=$ v[mit], sabemos que **si está debe aparecer** en el subvector v[mit .. fin)
- Gracias a esta propiedad, al desarrollar el algoritmo como *divide y vencerás* nos podremos ahorrar una llamada recursiva. Esto va a producir una mejora en el coste
- El algoritmo resultante se llama **búsqueda binaria**

Búsqueda en un vector ordenado

Suponemos $0 \leq ini \leq fin \leq N$ y que la búsqueda se ciñe al subvector v[ini .. fin)

```
1  template <typename T>
2  bool member_ord(const vector<T> &v, const int ini,
3                  const int fin, const T e) {
4    const int n = fin - ini;
5    if (n < 2) {
6      return (n == 0) ? false : (v[ini] == e);
7    } else {
8      const int mit = (ini + fin) / 2;
9      if (e < v[mit])
10       return member_ord<T>(v, ini, mit, e);
11     else
12       return member_ord<T>(v, mit, fin, e);
13   }
14 }
```

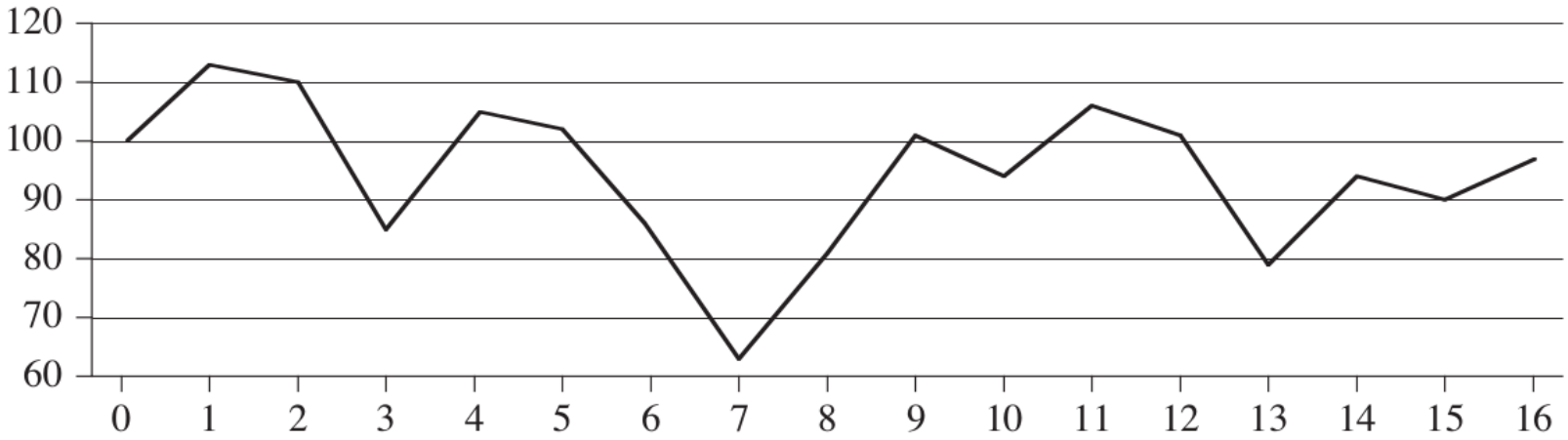
$$T(n)^4 = \begin{cases} c_1 & \text{si } n < 2 \\ T(\frac{n}{2}) + c_2 & \text{si } n \geq 2 \end{cases} \quad \in \mathcal{O}(log\ n)$$

[4] Consideramos $n = fin - ini$

Subvector de suma máxima

Subvector de suma máxima

Imaginemos que conocemos cómo han evolucionado las acciones de una determinada empresa a lo largo de unos días:



Day	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Price	100	113	110	85	105	102	86	63	81	101	94	106	101	79	94	90	97
Change		13	−3	−25	20	−3	−16	−23	18	20	−7	12	−5	−22	15	−4	7

[5]

¿Cómo descubriríamos cuáles fueron los mejores días para comprar y vender las acciones de tal manera que maximizásemos el beneficio?

[5] Imagen obtenida de Thomas H. Cormen *et al.*, 2009

Subvector de suma máxima

- Problemas como el anterior se pueden expresar como **encontrar el subvector de suma máxima** dentro de un vector
- En el caso de la bolsa nos centraríamos en el *vector de diferencias* de un día con el día anterior, que contiene números enteros.
- Querremos encontrar los índices `i` y `j` y la suma máxima $s_{ij} = \sum_{k=i}^{j-1} v[i]$, con $0 \leq i \leq j \leq n$
- Una vez encontrado el subvector de suma máxima `v[i..j)` podemos generar la solución al problema de la bolsa:
  - Compra las acciones el día $i - 1$
  - Vende las acciones el día j

Subvector de suma máxima

Existe una versión iterativa directa: detectar todos los posibles rangos $[i..j)$ con $i \leq j$, calcular la suma $s_{ij} = v[i] + v[i+1] + \ldots + v[j-1]$ y quedarse con la mayor.

```
1 fun suma_max(v : vector<T>[0..n) dev y : tupla
2   suma_max := −∞
3   max_i, max_j := −1
4   for i in [0..n]
5     for j in [i..n]
6       s := suma(v, i, j) ∈ O(j − i)
7       if s > suma_max then
8         suma_max := s, max_i := i, max_j := j
9   y := <suma_max, max_i, max_j>
```

Si realizamos el cálculo del coste de este algoritmo tendremos que está en $\mathcal{O}(n^3)$: dos bucles anidados que dependen de n, más el coste de suma que también depende de la longitud del vector

Subvector de suma máxima

¿Se puede hacer mejor? **Sí**, si nos damos cuenta que suma(v, i, j) repite mucho trabajo: suma(v,i,j+1) = suma(v,i,j) + v[j]. Si modificamos un poco el algoritmo tenemos que:

```
1  fun suma_max(v : vector<T>[0..n)) dev y : tupla
2    suma_max := 0 //Siempre será cota inferior
3    max_i := 0, max_j := 0 //Rango vacío, suma 0
4    for i in [0..n-1]
5      s := 0 //suma de v[i.. i)
6      for j in [i+1..n] //Evitamos rangos vacíos
7        s := s + v[j-1]
8        if s > suma_max then
9        suma_max := s, max_i := i, max_j := j
10   y := <suma_max, max_i, max_j>
```

Ahora tenemos un coste en $\mathcal{O}(n^2)$, que es una mejora considerable. ¿Se puede hacer mejor? Probemos con *divide y vencerás*

Subvector de suma máxima

Imaginemos que dividimos el vector en **dos mitades** y podemos obtener el rango de suma máxima para cada una de ellas. ¿Podríamos reconstruir la solución a partir de esa información?

1. El subvector de suma máxima **está completamente en la primera mitad** $\rightarrow$ ¡ya lo tenemos!
2. El subvector de suma máxima **está completamente en la segunda mitad** $\rightarrow$ ¡ya lo tenemos!
3. El subvector de suma máxima **atraviesa la mitad del vector** $\rightarrow$ esto habría que calcularlo...

El problema de encontrar el subvector de suma máxima *que atraviesa la mitad del vector* **no es una instancia del problema original**. No podemos resolverlo de manera recursiva con el mismo procedimiento, pero sí se puede resolver de manera directa $\in \mathcal{O}(n)$ [con $n = fin - ini$]

Subvector de suma máxima

Recorremos el vector desde mit hacia cada uno de los lados, quedándonos con el mejor rango encontrado. Finalmente los *concatenamos*:

```
1  def max_crossing(v : vector<T>, ini,fin,mit : nat)
2                      dev y : tupla
3    // Suponemos ini < mit < fin, luego fin -ini>=2
4    max_left := mit-1, left_sum := v[mit-1], sum := v[mit-1],
5    for i in [mit-2..ini] // Hacia atrás
6      sum := sum + v[i]
7      if sum > left_sum then
8        left_sum := sum, max_left := i
9
10   max_right := mit+1, right_sum := v[mit], sum := v[mit],
11   for j in [mit+1..fin) // Hacia delante
12     sum := sum + v[j]
13     if sum > right_sum then
14       right_sum := sum, max_right := j+1
15       // Si v[j] se ha sumado, max_right debe ser j+1
16
17   y := <left_sum + right_sum, max_left, max_right>
```

Subvector de suma máxima

Con estos 3 ingredientes ya sí que podemos resolver el problema de encontrar el subvector de suma máxima en v[ini .. fin) usando el método de *divide y vencerás*:

- Si $fin - ini = 0 \rightarrow$ Rango vacío, suma máxima $= 0$
- Si $fin - ini = 1 \rightarrow$ Rango unitario, suma máxima $= max(0, v[ini])$
- Si $fin - ini \geq 2 \rightarrow$ Sea la mitad mit = (ini+fin) / 2. El subvector de suma máxima será el máximo entre:
  1. El subvector de suma máxima en v[ini .. mit)
  2. El subvector de suma máxima en v[mit .. fin)
  3. El subvector de suma máxima que atraviesa la separación, es decir, incluye v[mit−1] y v[mit]

Subvector de suma máxima

```
1  fun max_subvector(v : vector<T>, ini,fin : nat) dev y : tupla
2    len := fin - ini
3    if len = 0 then
4      y := <0, ini, ini>
5    else if len == 1 then
6      if v[ini] > 0 then
7        y := <v[ini], ini, fin>
8      else
9        y := <0, ini, ini>
10   else
11     mit := (ini + fin) / 2
12     l := max_subvector(v, ini, mit)
13     r := max_subvector(v, mit, fin)
14     cross := max_crossing(v, ini, fin, mit)
15     y := max_tuple(l, r, cross)
```

La función max_tuple recibe 3 tuplas y devuelve aquella que tenga un mayor valor en su primera componente. Por lo tanto su coste está en $\mathcal{O}(1)$

Subvector de suma máxima

- El coste de esta función estaría definido por la siguiente recurrencia:

$$T(n)^6 = \begin{cases} c_1 & \text{si } n < 2 \\ 2T(\frac{n}{2}) + c_2 n & \text{si } n \geq 2 \end{cases} \in \mathcal{O}(n.log\ n)$$

- Este coste mejora al de nuestro mejor algoritmo iterativo: $\mathcal{O}(n^2)$
- Sin embargo se puede mejorar aún más: cada llamada recursiva podría devolver los subvectores máximos que comienzan en sus extremos (ver Narciso Martí *at al.*, 2013). En este caso el coste puede bajar y estar en $\mathcal{O}(n)$

[6] Consideramos $n = fin - ini$

Ordenación

Ordenación

Hasta ahora hemos visto cómo se aplica el esquema de *divide y vencerás* a distintos problemas, pero hay un problema concreto donde este esquema es muy útil: **la ordenación**.

- Los métodos iterativos (inserción, selección, burbuja) ordenan en $\mathcal{O}(n^2)$. ¿Se puede hacer mejor?
- **Sí**: el algoritmo *mergesort* ordena en $\mathcal{O}(n.log\ n)$ en el caso peor, y *quicksort* en $\mathcal{O}(n.log\ n)$ en el caso promedio. ¿Se puede hacer aún mejor?
- **No**: cualquier algoritmo de ordenación *basado en comparaciones* debe realizar al menos $n.log\ n$ comparaciones [Thomas H. Cormen *et al.*, 2009. **Capítulo 8**]

Ordenación

El enfoque de *divide y vencerás* que hay detrás de *mergesort* y *quicksort* es el mismo:

1. Dividir el vector en dos *partes*
2. Ordenar recursivamente cada una de las partes
3. Combinar ambas partes ordenadas para obtener el vector ordenado completo

La diferencia radica en cómo realizar la partición y la posterior combinación:

- *mergesort* divide por la mitad en dos partes de igual tamaño $\mathcal{O}(1)$ y luego tiene que mezclarlas de manera ordenada $\mathcal{O}(n)$
- *quicksort* utiliza un pivote para recolocar los elementos del vector en 3 partes con coste $\mathcal{O}(n)$: los estrictamente menores, los iguales y los estrictamente mayores. Luego la combinación es innecesaria: $\mathcal{O}(1)$

Ordenación: mergesort

Ordenación: mergesort

```
1 proc mergesort(v : vector<T>, ini, fin: nat)
2 // Ordena el vector v[ini .. fin )
3   if ini < fin - 1 then // longitud > 1
4     mid := (ini + fin) / 2
5     mergesort(v, ini, mid)
6     mergesort(v, mid, fin)
7     merge(v, ini, mid, fin)
8   // Si longitud <= 1 no hay que hacer nada
9   // porque ya está ordenado
```

- mergesort no devuelve nada, sino que ordena el propio vector v
- El código de *mergesort* es muy sencillo, aunque aún queda detallar el procedimiento merge()
- Si $n = fin - ini$ y el coste de merge $\in \mathcal{O}(n)$[7] tenemos la recurrencia:

$$T(n) \begin{cases} c_1 & \text{si } n < 2 \\ 2T(\frac{n}{2}) + c_2 n & \text{si } n \geq 2 \end{cases} \in \mathcal{O}(n.log\ n)$$

[7] Lo verificaremos más adelante

Mezcla ordenada

```
1  proc merge(v : vector<T>, p,q,r : nat) {
2  // Suponemos p<=q<=r, v[p..q) y v[q..r) ordenados
3  // Genera una mezcla ordenada de ambas partes en v[p.. r)
4     nl := q - p, nr := r - q
5     vl : vector<T>[0..nl) // Memoria adicional
6     vr : vector<T>[0..nr) // Memoria adicional
7
8     for i in [0..nl) // Copia v[p.. q) en vl[0.. nl)
9       vl[i] = v[p+i]
10    for j in [0..nr) // Copia v[q.. r) en vr[0.. nr)
11      vr[j] = v[q+j]
12
13    i := 0, j := 0;
14    for k in [p..r) // Mezclamos vl y vr en v
15      if j >= nr ∨ (i < nl ∧ vl[i] <= vr[j]) then
16      // El vector vr está agotado o
17      // vr y vl no agotados y vl[i] <= vr[j]
18        v[k] := vl[i]
19        i := i + 1
20      else
21        v[k] := vr[j]
22        j := j + 1
```

Mezcla ordenada

- El procedimiento merge(v, p, q, r) contiene 3 bucles:
  - L8 con $nl = q - p$ iteraciones de coste constante
  - L10 con $nr = r - q$ iteraciones de coste constante
  - L14 con $r - p$ iteraciones de coste constante
- Si tomamos $n = r - p$ tenemos que:
  - los bucles L8 + L10 realizan $(q - p) + (r - q) = r - p = n$ iteraciones
  - el bucle L14 realiza n iteraciones
- En total, tenemos que merge(v, p, q, r) realiza un número de operaciones proporcional a n, luego su coste $\in \mathcal{O}(n)$

Evaluación de mergesort

- Hemos visto que el coste de *mergesort* es óptimo: su coste $\in \mathcal{O}(n.log\ n)$, y esa es la cota inferior para cualquier algoritmo de ordenación. ¿Por qué seguimos buscando?
- *mergesort* tiene una ligera desventaja, ya que necesita **espacio adicional** para la mezcla ordenada. Concretamente:
  - En L5 reserva $q - p$ elementos en memoria
  - En L6 reserva $r - q$ elementos en memoria
  - En total cada llamada a merge tiene un coste de n elementos de memoria. Si calculamos el **coste en memoria adicional** nos saldrá una recurrencia así:

$$T_{mem}(n) \begin{cases} 0 & \text{si } n < 2 \\ 2\,T_{mem}(\frac{n}{2}) + n & \text{si } n \geq 2 \end{cases} \quad \in \mathcal{O}(n.log\ n)$$

Evaluación de mergesort

- En cada llamada a merge estamos creando 2 vectores, pero podríamos reutilizarlos de una llamada a otra
- Para ello, antes de empezar la ordenación podemos creamos dos vectores *vl* y *vr* de tamaño $n/2$ y que todas las llamadas a merge los utilicen
- En ese caso el coste en memoria adicional baja de $\mathcal{O}(n.log\ n)$ a $\mathcal{O}(n)$. ¿Se puede mejorar?
- Para mejorarlo necesitamos un algoritmo **lineal** para la mezcla ordenada que no use memoria adicional. Existen, pero son complicados y hay que implementarlos con cuidado para no «fastidiar» el coste de la ordenación:
  - M.A. Kronrod. *Optimal ordering algorithm without operational field*. Soviet Math. Dokl., 10 (1969), pp. 744-746
  - Antonios Symvonis. *Optimal Stable Merging*. The Computer Journal, 38(8), 1995.

Ordenación: quicksort

Ordenación: quicksort

A diferencia de *mergesort*, *quicksort* realiza el «trabajo duro» para generar los subproblemas, mientras que la combinación de resultados es trivial. Para ello:

1. Escoge un elemento del vector que usará como **pivote** para realizar el particionado
2. Usando ese pivote, reordena los elementos del vector para formar 3 partes **consecutivas**: los elementos menores que el pivote, los iguales al pivote, y los elementos mayores al pivote
3. Los elementos iguales al pivote **ya están en su lugar definitivo**, así que únicamente hay que ordenar recursivamente los menores y mayores
4. Una vez esas partes están ordenadas no hay que hacer nada: todo está en su sitio

quicksort

```
1 proc quicksort(v : vector<T>, ini,fin : nat)
2   // Ordena v[ini .. fin )
3   if ini < fin - 1 then // longitud > 1
4     pivote := elige_pivote(v ,ini , fin)
5     i,j := partition(v, pivote, ini, fin)
6     // Parte en 3 trozos
7     quicksort(v, ini, i)
8     quicksort(v, j, fin)
```

- Suponemos un mecanismo para elegir al pivote elige_pivote $\in \mathcal{O}(1)$
- La función partition (v, pivote, ini, fin) recoloca los elementos de v[ini .. fin) y nos devuelve 2 índices i y j tales que
  - $\forall k \in [ini..i).v[k] < pivote$
  - $\forall k \in [i..j).v[k] = pivote$
  - $\forall k \in [j..fin).v[k] > pivote$
- Es importante que el coste de partition esté en $\mathcal{O}(n)$, con $n = fin - ini$

partition

```
1  // Problema de la bandera holandesa – Edsger Dijkstra
2  // Reordena v[ini .. fin ) en 3 segmentos contiguos
3  fun partition(v : vector<T>, pivote : T,
4                ini,fin : nat) dev i,j: nat
5    i := ini, j := ini, k = fin
6    // MENORES → [ini..i); IGUALES → [i..j)
7    // MAYORES → [k..fin); SIN PROCESAR → [j..k)
8    while j < k
9      if v[j] < pivote then
10       swap(v, i, j) // Intercambio de elementos
11       i := i+1, j := j+1
12     else if v[j] > pivote then
13       swap(v, j, k-1) // Intercambio de elementos
14       k := k-1
15     else
16       j := j+1
```

La diferencia $k-j$ decrece en cada iteración ($k-1$ o $j+1$). Si $n = fin - ini$ entonces el bucle realiza n iteraciones de coste constante $\rightarrow$ coste $\in \mathcal{O}(n)$

Coste de quicksort

El coste de quicksort dependerá del tamaño de las partes generadas por partition , que a su vez depende del **pivote** elegido:

- Caso mejor: todos los elementos iguales al pivote $\rightarrow i = ini$, $j = fin$

$$T_{mejor}(n) \begin{cases} c_1 & \text{si } n < 2 \\ 2\,T_{mejor}(0) + c_2 n & \text{si } n \geq 2 \end{cases} \in \mathcal{O}(n)$$

- Caso peor: todos los elementos mayores, o todos menores $\rightarrow i = ini \vee j = fin$. Además, no hay más elementos con el mismo valor que el pivote $\rightarrow j = i + 1$

$$T_{peor}(n) \begin{cases} c_1 & \text{si } n < 2 \\ T_{peor}(n-1) + c_2 n & \text{si } n \geq 2 \end{cases} \in \mathcal{O}(n^2)$$

- Caso promedio $\in \mathcal{O}(n.log\ n)$ [Thomas H. Cormen *et al.*, 2009]

Coste en memoria de quicksort y pivotaje

Desde el punto de vista de coste en espacio, quicksort no necesita ninguna cantidad de memoria adicional. Las llamadas a quicksort y partition utilizan una cantidad constante de variables.

A la hora de elegir el pivote se pueden seguir distintas técnicas:

- Escoger el primer elemento del vector (v[ini]). Si el vector original está «bastante ordenado» tiende a generar el caso peor
- Escoger una posición al azar
- Seleccionar 3 posiciones al azar y quedarse con el valor *mediano*.

En todo caso la técnica de selección debe ser poco costosa: $\mathcal{O}(1)$

Estabilidad de la ordenación

- Un método de ordenación es estable si dos elementos con la misma clave aparecen en el mismo orden relativo tras la ordenación
- Si los vectores a ordenar contienen enteros no importa, pero sí cuando ordenamos estructuras complejas (p.ej. registros sanitarios en base a su apellido)

Algoritmo	**¿Estable?**
Bubble sort	✔
Insertion sort	✔
Selection sort	
Mergesort	✔
Quicksort	

Otros problemas clásicos

Otros problemas clásicos

En este tema hemos visto unos cuantos ejemplos de problemas que admiten una solución siguiendo el esquema de *divide y vencerás*. Sin embargo, nos hemos dejado algunos problemas clásicos sin tratar:

- Multiplicación de matrices cuadradas $N \times N$ con el algoritmo de Strassen $\in \mathcal{O}(n^{log\ 7})$
  [Thomas H. Cormen *et al.*, 2009]
- Encontrar el i-ésimo menor elemento de un vector $\in \mathcal{O}(n)$
  [Gilles Brassard, Paul Bratley. *Fundamentals of Algorithmics*. Prentice Hall, 1996]
- Obtener la envolvente convexa (*convex hull*) de un conjunto de puntos $\in \mathcal{O}(n.log\ n)$
  [Joseph O'Rourke. *Computational Geometry in C (Second Edition)*. Cambridge University Press, 1998]

Bibliografía

Bibliografía

- Narciso Martí, Yolanda Ortega, Alberto Verdejo. *Estructuras de Datos y Métodos Algorítmicos: 213 Ejercicios resueltos (2ª Edición)*. Garceta, 2013. **Capítulo 11**.
  `http://cisne.sim.ucm.es/record=b3290150~S6*spi`
  También está disponible la versión de Pearson Prentice-Hall:
  `http://cisne.sim.ucm.es/record=b2789524~S6*spi`
- Larry Nyhoff. *ADTs, data structures, and problem solving with C++ (Second Edition)*. Pearson/Prentice Hall, 2005. **Capítulo 13**.
  `http://cisne.sim.ucm.es/record=b3601644~S6*spi`
- Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronarld L. Rivest, Clifford Stein. *Introduction to Algorithms (Third Edition)*. MIT Press, 2009. **Capítulos 2, 4 y 7**.
  `http://cisne.sim.ucm.es/record=b2541535~S6*spi`