20.01.2020

Algorytmy numeryczne
Zadanie 4

Wojciech Rosiński
Nr indeksu: 240425

1. Opis zadania

Zadanie polegało na implementacji algorytmu Cubic Spline Interpolation umożliwiającego wyznaczenie wielomianów trzeciego stopnia interpolujących dowolną funkcję oraz wykorzystanie ich do określenia profili wysokościowych tras na podstawie ograniczonej liczby punktów (x = odległość, y = wysokość). W opisywanym algorytmie tworzony jest układ równań zmiennych M potrzebnych do wyznaczenia kolejnych współczynników wspomnianych wyżej wielomianów. Taki układ równań powinien być wyliczony trzema różnymi metodami:

- metoda Gauss'a z częściowym wyborem elementu podstawowego (PG)
- metoda iteracyjna Jacobi'ego,
- metoda iteracyjna Gauss'a – Seidel'a.

Dodatkowo, w zadaniu wykorzystano Google Elevation API celem wykonania testów algorytmu z użyciem rzeczywistych danych.

2. Testy poprawnościowe

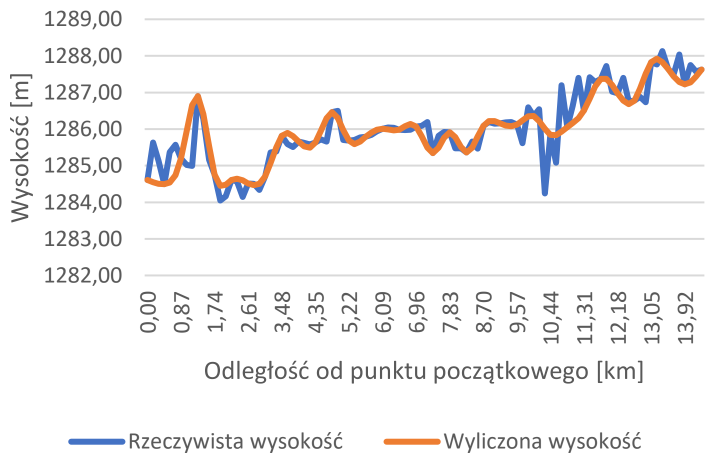
Testy poprawnościowe zostały przeprowadzone na rzeczywistych danych pobranych z czterech tras mających zróżnicowany charakter.

1. Trasa płaska (14,36 km).
2. Trasa o dwóch wzniesieniach (13,64 km).
3. Trasa o wielu wzniesieniach (45,08 km).
4. Trasa z częściowym obszarem depresyjnym (15,21 km).

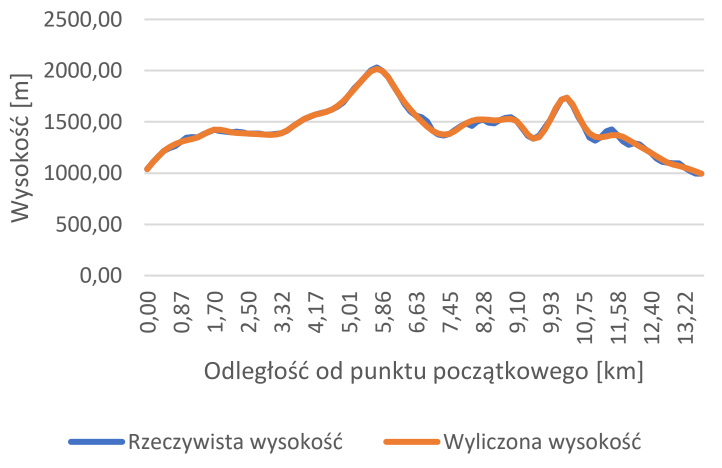
Dla każdej trasy pobrano 100 punktów, z których następnie wykluczono około 2/3, pozostawiając 34 węzły. Na takim ograniczonym zbiorze danych uruchamiany był algorytm CSI.

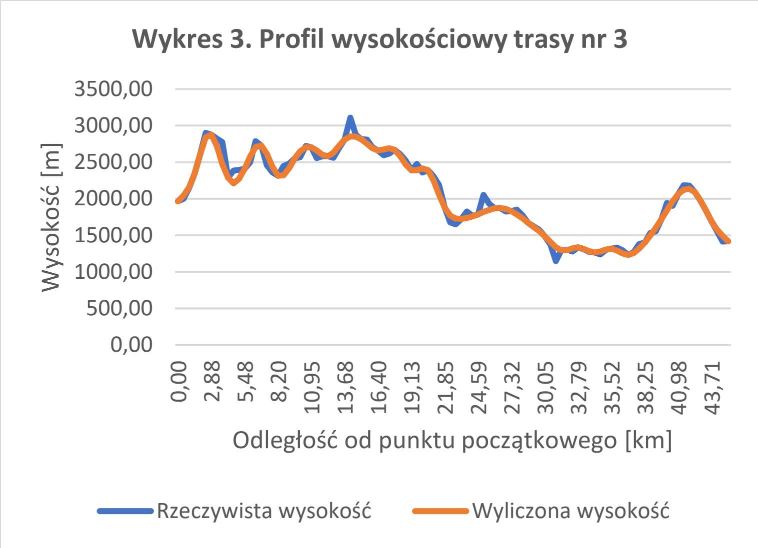
Wykresy przedstawiające profile wysokościowe tras z wartościami rzeczywistymi oraz wartościami wyliczonymi za pomocą wielomianów powstałych w algorytmie CSI (met. PG) dla 100 punktów trasy.

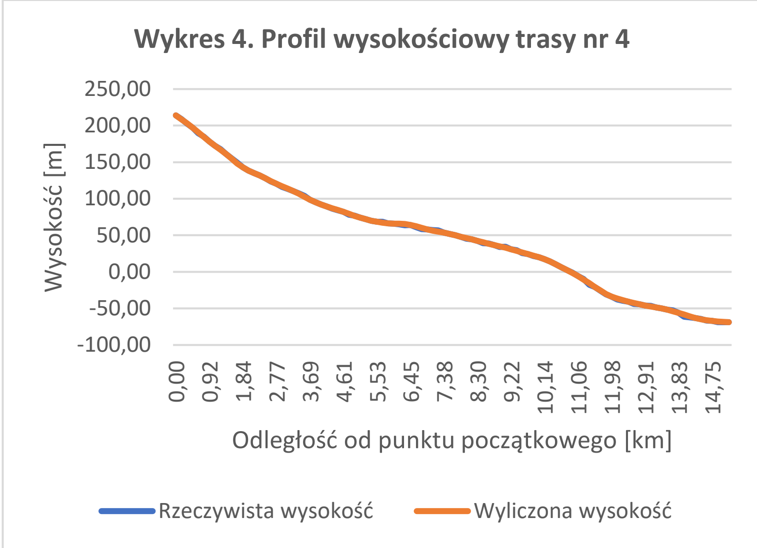
Wykres 1. Profil wysokościowy trasy nr 1



Wykres 2. Profil wysokościowy trasy nr 2







Poniżej przedstawione są uśrednione błędy interpolacji dla czterech tras i trzech metod rozwiązywania układu równań z podziałem na węzły i punkty pomiędzy węzłami. Uśredniony błąd to średnia arytmetyczna z bezwzględnych różnic pomiędzy wartościami rzeczywistymi a wyliczonymi. Jak widać na każdej z tras najmniejszy uśredniony błąd interpolacji (**kolor zielony**) w węzłach wystąpił dla PG. Najprawdopodobniej wynika to z ilości iteracji przyjętej w algorytmach iteracyjnych (Jacobi, Gauss – Seidel), wynoszącej 20. Z kolei dla punktów pomiędzy węzłami najmniejszy średni błąd interpolacji był zależny również od trasy. Można tutaj zauważyć, że dla tras o dużej rozpiętości wysokości najlepiej radził sobie algorytm Gauss'a – Seidel'a.

	Trasa 1	Trasa 2	Trasa 3	Trasa 4
PG	**5,35E-14**	**3,68E-14**	**5,35E-14**	**1,28E-15**
Jacobi	6,69E-14	8,02E-14	6,02E-14	3,84E-15
Gauss - Seidel	6,02E-14	5,35E-14	5,35E-14	3,06E-15

Tabela 1. Uśredniony błąd interpolacji dla 34 węzłów

	Trasa 1	Trasa 2	Trasa 3	Trasa 4
PG	0,380381169592579	15,5671863791039	65,3861132733204	**0,687861715325885**
Jacobi	**0,380381167788145**	15,5671864049538	65,3861134357846	0,687861723665036
Gauss - Seidel	0,380381169592014	**15,5671863790615**	**65,3861132730120**	0,687861715326195

Tabela 2. Uśredniony błąd interpolacji dla punktów pomiędzy węzłami (66 punktów)

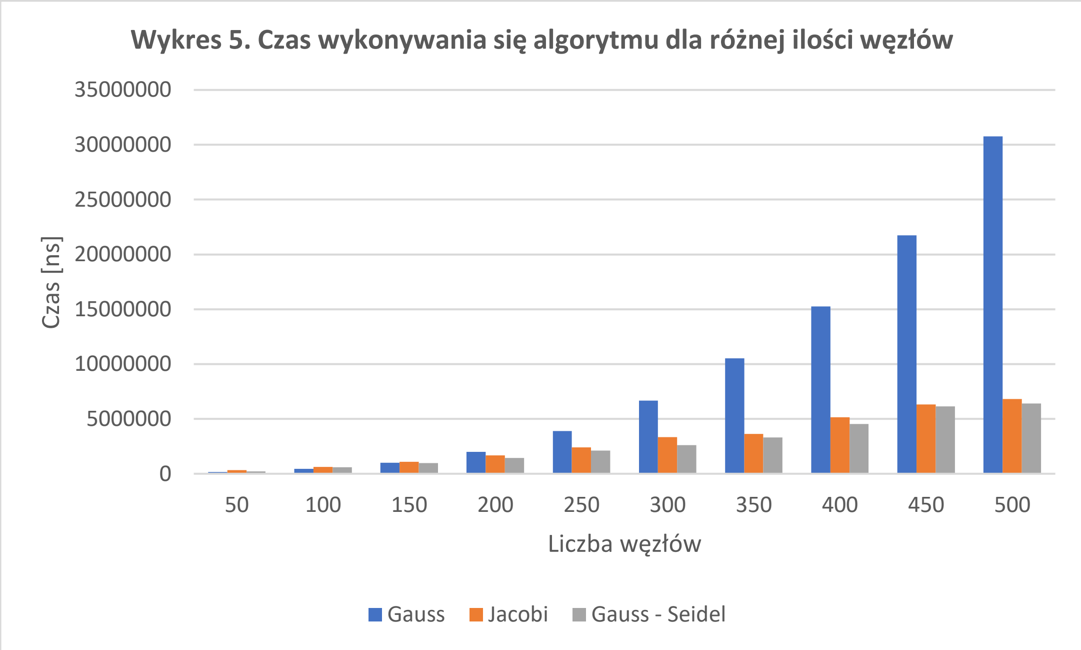
Poniższa tabela przedstawia współczynniki trzech pierwszych wielomianów powstałych z 34 węzłów trasy nr 3 z podziałem na metody rozwiązywania układów równań. Można tutaj zauważyć zbliżone wartości współczynników dla algorytmu PG i Gauss'a – Seidel'a. Obie metody iteracyjne są zbieżne.

		A	B	C	D
0	**PG**	1965,82202148437	160,203000736663	0	50,9288061143438
	Jacobi	1965,82202148437	160,203001385069	0	50,9288057906657
	Gauss-Seidel	1965,82202148437	160,203000724785	0	50,9288061202731
1	**PG**	2336,96582031250	466,271334833950	216,247738797294	-193,7450322941110
	Jacobi	2336,96582031250	466,271334111046	216,247737422931	-193,7450310177100
	Gauss-Seidel	2336,96582031250	466,271334823587	216,247738822471	-193,7450323064740
2	**PG**	2875,18505859375	-145,919681369926	-634,499794443385	296,5871474910740
	Jacobi	2875,18505859375	-145,919684683162	-634,499790212984	296,5871462409230
	Gauss-Seidel	2875,18505859375	-145,919681357235	-634,499794472497	296,5871475063490

Tabela 3 Współczynniki trzech pierwszych wielomianów dla trasy nr 3 z 34 węzłami

3. Testy wydajnościowe

Na niżej ukazanym wykresie można zauważyć, że wraz ze wzrostem ilości węzłów wzrasta również czas wykonywania się algorytmu. Co więcej, widać tutaj przewagę metody Gaussa'a – Seidel'a nad innymi metodami rozwiązywania układów równań.



Na poniższym wykresie przedstawiono czas wykonywania się algorytmu w zależności od przyjętej ilości iteracji. Czas rośnie wraz ze wzrostem ilości iteracji dla obu metod. Istotnym faktem jest to, że metoda Jacobi'ego potrzebuje nieco więcej czasu niż metoda Gauss'a – Siedel'a dla większości ilości iteracji.