Algoritmos, Azar y Autómatas
Resolución Ejercicios 1 a 3

Manuel Panichelli

September 13, 2021

Resultados previos

Prop. 1 (La cota de Gasti)**.** $\sum_{i=1}^{n} b^i \leq b^{n+1}$

Dem.

$$\sum_{i=1}^{n} b^i \leq \sum_{i=0}^{n} b^i = \frac{b^{n+1}-1}{\underbrace{b-1}_{\geq 1}} \leq b^{n+1} - 1 < b^{n+1}$$

$\square$

Teorema 1 (Piatetski-Shapiro)**.** Sea x un número real, $b \geq 2$ un entero y $A = \{0, \dots, b-1\}$. Las siguientes son equivalentes

1. x es normal a base b
2. Existe una constante C tal que para infinitas longitudes ℓ y para todo $w \in A^\ell$

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{|x[1 \dots n]|_w}{n} < C \cdot b^{-\ell}.$$

3. Existe una constante C tal que para infinitas longitudes ℓ y para todo $w \in A^\ell$

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{||x[1 \dots n\ell]||_w}{n} < C \cdot b^{-\ell}.$$

Ejercicio 1

Demostrar que el número cuya expansión decimal es

$$01234 \dots 9\ 01234 \dots 9\ \ 00\ 01\ 02\ \dots\ 99\ 00\ 01\ 02\ \dots\ 99\ \ 000\ \dots\ 999 \dots$$

Es normal en base 10.

Dem. Voy a llamar C_i a cada concatenación de números de i dígitos en base 10 en orden lexicográfico. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} C_1 &= 0\ 1\ 2\ 3\ \dots\ 9 \\ C_2 &= 00\ 01\ 02\ \dots\ 99 \\ C_3 &= 000\ 001\ 002\ \dots\ 999 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Y observo que como son progresiones aritméticas en orden lexicográfico, vistas como collar son collares (n-n)-perfectos, en los cuales cada bloque de longitud n aparece exactamente n veces.

Luego la secuencia que quiero demostrar que es normal se puede escribir como

$$x = C_1C_1\ C_2C_2\ C_3C_3\ \dots\ .$$

Yo voy a querer contar cantidad de apariciones, y se que en *collares* perfectos es exactamente n, pero esto son secuencias. Para tomarlas como secuencias de todas formas,

- En el primer bloque C_i de C_iC_i, puedo tomar los primeros $i-1$ del 2do C_i para leer el primero como un collar.
- En el segundo bloque, voy a poder tomar los primeros $i-1$ del bloque de siguiente orden $C_iC_iC_{i+1}$. Esto es porque al ser progresiones aritméticas, en la $i+1$-ésima seguro los primeros $i-1$ dígitos son iguales a los primeros $i-1$ de la C_i, ya que están ordenadas lexicográficamente.

Defino S_k como la longitud del segmento inicial que contiene hasta la aparición completa de C_kC_k. Se que $|C_k| = k \cdot b^k$ pues no es más que la concatenación de todos los bloques posibles de longitud k. Luego,

$$S_k = \sum_{i=1}^{n} 2|C_i| = 2\sum_{i=1}^{n} 2i \cdot b^i$$

sean $b = |A| = 10$, $u \in A^\ell$ un bloque de longitud ℓ. Tomo $n \geq S_\ell$. Se que la cantidad de apariciones de u en el bloque C_nC_n y los $n-1$ siguientes correspondientes a los primeros $n-1$ del bloque C_{n+1} (para que el 2do bloque C_n pueda ser tomado como collar) son menores o iguales a

$$2n \cdot b^{n-\ell} + n - \ell.$$

Pues,

- Teniendo en cuenta la observación anterior, podemos tomarlos como collar. Por lo tanto, sabemos que un collar (n, n) aparecerá n veces y como tengo dos concatenados será $2n$.

- $b^{n-\ell}$ es la cantidad de rellenos posibles para bloques de tamaño n que comiencen con u.
- $n-\ell$ son las posiciones en las cuales podría aparecer un bloque u que no pueden ser el principio de un bloque de tamaño n, porque se pasarían del tamaño de la secuencia.

Sea N una posición cualquiera. Tomo n tal que

$$S_n \leq N < S_{n+1}.$$

Para poder usar el Teorema de Piatetski-Shapiro, voy a tener que acotar el cociente $\frac{|x[1\ldots N]|_u}{N}$. Noto que

$$\begin{aligned}
|x[1\ldots N]|_u &\leq |x[1\ldots S_{n+1}+n]|_u \\
&\leq \underbrace{|x[1\ldots S_\ell - 1]|_u + \overbrace{\ell - 1}^{\text{entre bloques}}}_{A} + |x[S_\ell \ldots S_{n+1}+n]|_u \\
&\leq A + \sum_{i=\ell}^{n+1} |x[S_{i-1}\ldots S_i + (i-1)]|_u + \overbrace{\ell - 1}^{\text{entre bloques}} \\
&= A + \sum_{i=\ell}^{n+1} 2ib^{i-\ell} + i - \cancel{\ell} + \cancel{\ell} - 1 \\
&= A + b^{-\ell}\sum_{i=\ell}^{n+1} 2(n+1)b^i + \underbrace{\sum_{i=\ell}^{n+1} i - 1}_{B} \\
&\leq A + B + 2(n+1)b^{-\ell}b^{n+2} && \text{(Por 1)}
\end{aligned}$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
\limsup_{N\to\infty} \frac{|x[1\dots N]|_u}{N} &\leq \limsup_{N\to\infty} \frac{A + B + 2(n+1)b^{-\ell}b^{n+2}}{S_n} \\
&= \limsup_{N\to\infty} \cancelto{0}{\frac{A}{S_n}} + \cancelto{0}{\frac{B}{S_n}} + \frac{2(n+1)b^{-\ell}b^{n+2}}{\sum_{i=1}^{n} 2ib^i} \\
&\leq \limsup_{N\to\infty} \frac{2(n+1)b^{-\ell}b^{\cancel{n}+2}}{2n\cancel{b^n}} \\
&= \limsup_{N\to\infty} \frac{2n+2}{2n} b^{-\ell}b^2 \\
&= \limsup_{N\to\infty} (1 + \cancelto{0}{\frac{1}{n}}\,) b^{-\ell}b^2 \\
&= b^2 \cdot b^{-\ell} \\
&< \underbrace{b^3}_{C} \cdot b^{-\ell}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, por el Teorema de Piatetski-Shapiro con $C = b^3$ la secuencia x es normal a base 10. $\square$

Ejercicio 2

Demostrar que la concatenación de secuencias de Bruijn de orden sucesivo es normal.

Dem. Voy a llamar C_k a cada secuencia de de Bruijn de orden k. Luego, puedo expresar la cadena como,

$$x = C_1 C_2 C_3 \dots\ .$$

Teniendo en cuenta que la longitud de una secuencia de Bruijn de orden k es $b^k + k - 1$, defino S_k como la longitud del segmento inicial de x que contiene hasta C_k inclusive:

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} b^i + i - 1.$$

Sea ℓ una longitud, $u \in A^\ell$ un bloque de esa longitud y tomo algún $n > S_\ell$ (para que seguro esté la secuencia de Bruijn que contiene a u). Como la cantidad de apariciones de u en C_ℓ es exactamente una, la cantidad de apariciones en C_n es

$$b^{n-\ell} + n - \ell,$$

Ya que

- $b^{n-\ell}$ es la cantidad de formas posibles de *rellenar* palabras de longitud n que arranquen con u.

- $n-\ell$ contempla todas las palabras que no podrían comenzar por u porque se pasan del final.

Luego, en la concatenación de todas las de Bruijn, puedo contar en cada una y luego contemplar las $\ell - 1$ posiciones en las que podría aparecer entre cada una.

Sea N una posición cualquiera, y tomo n tal que

$$S_n \leq N \leq S_{n+1}.$$

Quiero usar el Teorema de Piatetski-Shapiro, por lo que voy a tener que acotar de alguna forma el cociente $\frac{|x[1\ldots N]|_u}{N}$. Veamos el numerador,

$$\begin{aligned}
|x[1\ldots N]|_u &\leq |x[1\ldots S_{n+1}]|_u \\
&\leq \underbrace{|x[1\ldots S_\ell - 1]|_u + \overbrace{\ell - 1}^{\text{entre bloques}}}_{A} + |x[S_\ell \ldots S_{n+1}]|_u \\
&\leq A + \sum_{i=\ell}^{n+1} |x[S_{i-1}\ldots S_i]|_u + \overbrace{\ell - 1}^{\text{entre bloques}} \\
&= A + \sum_{i=\ell}^{n+1} b^{i-\ell} + i - \cancel{\ell} + \cancel{\ell} - 1 \\
&= A + b^{-\ell}\sum_{i=\ell}^{n+1} b^i + \underbrace{\sum_{i=\ell}^{n+1} i - 1}_{B} \\
&\leq A + B + b^{-\ell} b^{n+2} && \text{(Por 1)}
\end{aligned}$$

Ahora veamos el cociente completo,

$$\begin{aligned}
\frac{|x[1\ldots N]|_u}{N} &\leq \frac{A + B + b^{-\ell}b^{n+2}}{S_n} \\
&= \frac{A}{S_n} + \frac{B}{S_n} + \frac{b^{-\ell}b^{n+2}}{S_n}
\end{aligned}$$

Veamos los cocientes por separado. Primero, como A es una constante que solo depende de ℓ, claramente $\frac{A}{S_n} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$. Además,

$$\begin{aligned}\frac{B}{S_n} &= \frac{\sum_{i=\ell}^{n+1} i-1}{\sum_{i=1}^{n} b^i + i - 1} \\ &\leq \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{b^n + n - 1} \\ &\approx \frac{\mathcal{O}(n^2)}{\mathcal{O}(b^n)} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\frac{b^-\ell b^{n+2}}{S_n} &= \frac{b^-\ell b^{n+2}}{\sum_{i=1}^{n} b^i + i - 1} \\ &\leq \frac{b^-\ell b^{n+2}}{b^n + \underbrace{n-1}_{\geq 0}} \\ &\leq \frac{b^-\ell b^{\cancel{n}+2}}{\cancel{b^n}} \\ &= b^{-\ell} b^2.\end{aligned}$$

Juntando todo,

$$\begin{aligned}\limsup_{N\to\infty} \frac{|x[1\ldots N]|_u}{N} &\leq \cancelto{0}{\frac{A}{S_n}} + \cancelto{0}{\frac{B}{S_n}} + b^{-\ell} b^2 \\ &< b^{-\ell} \underbrace{b^3}_{C}.\end{aligned}$$

En conclusión, por el Teorema de Piatetski-Shapiro tomando $C = b^3$, x es normal para cualquier base b, y por lo tanto es normal. $\square$

Ejercicio 3

Def. 1 (Collares (k, n)-perfectos)**.** Una secuencia circular es (k, n)-perfecta si tiene longitud $n|A|^k$ y cada palabra de longitud k ocurre exactamente n veces en posiciones diferentes modulo n, para cualquier convención del punto inicial.

Def. 2 (Secuencias (k, k)-perfectas)**.** Una secuencia (no circular) perfecta de orden k se obtiene partiendo de una secuencia circular (k, k)-perfecta y agregando como sufijo los primeros $k-1$ símbolos (así simulando la circularidad)

Demostrar que la concatenación de secuencias $(2n, 2n)$-perfectas para $n = 1, 2, 3, \ldots$ es una secuencia normal.

Dem. Voy a llamar a cada secuencia $(2i, 2i)$-perfecta C_i, y de esa forma mi secuencia entera se puede expresar como

$$x = C_1 C_2 \ldots.$$

Tomo $b = |A|$ el tamaño del alfabeto, y defino la longitud del segmento inicial hasta la secuencia C_i inclusive como

$$\begin{aligned} S_k &= \sum_{i=1}^{k} |C_i| \\ &= \sum_{i=1}^{k} 2i \cdot b^{2i} + 2i - 1. \end{aligned}$$

Para ver que sea normal, quiero aplicar el Teorema de Piatetski-Shapiro. Sea ℓ una longitud, $u \in A^\ell$ un bloque. Tomo $n > S_{\lceil \ell/2 \rceil}$. Se que en una secuencia $(2n, 2n)$-perfecta, u aparece a lo sumo $2n \cdot b^{2n-\ell} + 2n - \ell$ veces, pues

- $2n$ es la cantidad de apariciones de cualquier palabra de longitud $2n$ en un collar $(2n, 2n)$-perfecto, por definición
- $b^{2n-\ell}$ es la cantidad de formas diferentes de *rellenar* las palabras que comiencen con el bloque u.
- $2n - \ell$ contempla las posiciones en las cuales podría aparecer u que no pueda a ser al principio de una palabra de longitud $2n$, porque se pasaría del final del bloque.

Sea N una posición cualquiera de x. Puedo tomar n tal que

$$S_n \leq N < S_{n+1}.$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
|x[1\dots N]|_u &\leq |x[1\dots S_{n+1}]|_u \\
&\leq \underbrace{|x[1\dots \lceil \ell/2\rceil - 1]|_u + \overbrace{\ell - 1}^{\text{entre bloques}}}_{A} + |x[\lceil \ell/2\rceil \dots S_{n+1}]|_u \\
&= A + |x[\lceil \ell/2\rceil \dots S_{n+1}]|_u \\
&\leq A + \sum_{i=\lceil \ell/2\rceil}^{n+1} |x[S_{i-1}\dots S_i]|_u + \overbrace{\ell - 1}^{\text{entre bloques}} \\
&\leq A + \sum_{i=\lceil \ell/2\rceil}^{n+1} 2i\cdot b^{2i-\ell} + 2i - \cancel{\ell} + \cancel{\ell} - 1 \\
&= A + \sum_{i=\lceil \ell/2\rceil}^{n+1} 2i\cdot b^{2i-\ell} + \overbrace{\sum_{i=\lceil \ell/2\rceil}^{n+1} 2i - 1}^{B} \\
&\leq A + B + \sum_{i=\lceil \ell/2\rceil}^{n+1} 2(n+1)\cdot b^{2i-\ell} \\
&= A + B + 2(n+1)b^{-\ell} \sum_{i=\lceil \ell/2\rceil}^{n+1} b^{2i} \\
&\leq A + B + 2(n+1)b^{-\ell} b^{2(n+2)} && \text{(Por Prop. 1)}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
\frac{|x[1\dots N]|_u}{N} &\leq \frac{|x[1\dots S_{n+1}]|_u}{S_n} \\
&\leq \frac{A + B + 2(n+1)b^{-\ell}b^{2(n+2)}}{S_n} \\
&= \frac{A}{S_n} + \frac{B}{S_n} + \frac{2(n+1)b^{-\ell}b^{2(n+2)}}{S_n}
\end{aligned}
$$

Veamos cada una por separado. Primero,

$$
\begin{aligned}
\frac{2nb^{-\ell}b^{2(n+2)}}{S_n} &= \frac{2(n+1)b^{-\ell}b^{2(n+2)}}{\sum_{i=1}^{n} 2i\cdot b^{2i}+2i-1}\\
&\leq \frac{(2n+2)b^{-\ell}b^{2(n+2)}}{2n\cdot b^{2n}+\underbrace{2n-1}_{\geq 0}}\\
&\leq \frac{(2n+2)b^{-\ell}b^{\cancel{2n}+4}}{2n\cdot \cancel{b^{2n}}}\\
&= \frac{\cancel{2n}b^{4-\ell}}{\cancel{2n}}+\underbrace{\frac{2b^{4-\ell}}{2n}}_{\xrightarrow[N\to\infty]{} 0}\\
&= b^{-\ell}b^{4}
\end{aligned}
$$

Como A no depende de n, claramente $\frac{A}{S_n} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$. Además, como

$$
B=\sum_{i=\lceil \ell/2\rceil}^{n+1} 2i-1 \leq \sum_{i=1}^{n+1} 2i-1 = n^2,
$$

Tengo que

$$
\begin{aligned}
\frac{B}{S_n} &= \frac{\sum_{i=\lceil \ell/2\rceil}^{n+1} 2i-1}{\sum_{i=1}^{n} 2i\cdot b^{2i}+2i-1}\\
&\leq \frac{n^{\cancel{2}}}{2\cancel{n}\cdot b^{2n}}\\
&\approx \frac{\mathcal{O}(n)}{\mathcal{O}(b^n)} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0
\end{aligned}
$$

Juntando todo,

$$
\begin{aligned}
\limsup_{N\to\infty} \frac{|x[1\ldots N]|_u}{N} &\leq \limsup_{N\to\infty} \cancelto{0}{\frac{A}{S_n}} + \cancelto{0}{\frac{B}{S_n}} + \frac{2(n+1)b^{-\ell}b^{2(n+2)}}{S_n}\\
&= b^{-\ell}b^4 < \underbrace{b^5}_{C}\cdot b^{-\ell}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, aplicando el Teorema de Piatetski-Shapiro con $C=b^5$ afirmamos que x es normal para todo b, entonces es normal.

$\square$