Notas de

Algoritmos, Azar y Autómatas

Manuel Panichelli

September 5, 2021

Chapter 1

Introducción

1.1 Azar

Azar es **imposibilidad de predecir**, **falta de patrones**, imposibilidad de abreviar, comprimir.

Vamos a categorizar el azar según diferentes modelos de cómputo

- Autómatas finitos
- Autómatas de pila
- Máquinas de turing

Def. 1. Una secuencia es **azarosa** (para los autómatas de la clase C) cuando, esencialmente, la única forma de describirla (mediante un autómata de la clase C) es nombrando explícitamente cada uno de sus símbolos.

Esto quiere decir que no tiene patrones (porque sino podríamos nombrar menos) y que no se puede comprimir. *Esencialmente* porque se pueden hacer pequeñas conversiones. Por ejemplo, las cadenas de $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ son azarosas para AF pero no para AP (porque es un lenguaje libre de contexto pero no regular).

Hay distintos *grados de azar*:

1. **Azar puro**: Impredecibilidad / incompresibilidad para máquinas de turing
2. **Azar básico**: Impredicibilidad / incompresibilidad para autómatas finitos.

1. Una secuencia es **random** si, esencialmente, sus *segmentos iniciales* solo se pueden describir explícitamente por una Turing Machine (no pueden ser comprimidos por una TM)

2. Una secuencia es **normal** si, esencialmente, sus segmentos iniciales solo se pueden describir explicitamente por un autómata finito.

Cosas que no copié

1. Kolmogorov / program size complexity
2. Definicion de azar de Chaitin basado en kolmogorov
3. Martin Löf random

1.2 Numeros normales

Def. Una **base** es un entero ≥ 2. Para un $x \in \mathbb{R}$ en el intervalo unitario[1], su **expansión** en base b es una **secuencia** $a_1 a_2 a_3 \ldots$ de enteros de $0, 1, \ldots, b-1$ tales que

$$x = 0.a_1 a_2 a_3 \ldots,$$

donde $x = \sum_{k \geq 1} \frac{a_k}{b_k}$ y x no termina con una cola de $b-1$.

Def. 2 (Números normales, Borel 1909)**.** Un número real x es,

- **Simplemente normal a base** b si en la expansión de x en base b, cada digito ocurre con una frecuencia de $1/b$ en el límite.

  (En el límite todos los símbolos tienen la misma frecuencia)

- **Normal a base** b si para cada entero positivo k, cada bloque de k digitos (arrancando de cualquier posición) ocurre en la expansión de x en base b con una frecuencia en el límite de $1/b^k$

- **Absolutamente normal** si es normal para todas las bases.

Ejemplos:

- 0.01 002 0003 00004 000005 0000006 00000007 000000008 ... no es simplemente normal a base 10 (el 0 tiene más frecuencia que el resto)

- 0.0123456789 0.0123456789 0.0123456789 0.0123456789 ... es simpelemente normal a base 10, pero no es simplemente normal a base 100.

  Pasar de base 10 a base 100 es tomar combinaciones de dos dígitos en base 10 de forma contigua

- El ternario de cantor no es simplemente normal a base 3 (las expansiones no tienen el dígito 1)

[1] El intervalo unitario es el intervalo cerrado $[0, 1]$

- Los numeros racionales no son normales a ninguna base

  Si agarro un número racional, por ej 3.14

  $$3.14 \rightsquigarrow 3.140000000\ldots$$

  en base 10 tiene un período que se repite

- La constante de Liouville $\sum_{n\geq 1} 10^{-n!}$ no es normal a base 10

Teorema 1 (Borel 1909)**.** Casi todos los números reales son absolutamente normales.

Son las constantes matemáticas usuales como π, e o $\sqrt{2}$ absolutamente normales? O al menos simplemente normales a alguna base? Es una pregunta abierta.

Teorema 2 (Champernowne, 1933)**.** Todos los numeros naturales en base 10 concatenados es normal a base 10.

$$0.123456789101112131415161718192021\ldots$$

No se sabe si es normal a bases que no son potencias de 10

Teorema 3 (Cassels 1959; Schmidth 1961)**.** Casi todos los números del ternario de Cantor son normales a base 2.

Teorema 4 (Bailey y Borwein 2012)**.** El número de Stoneham $\alpha_{2,3} = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{3^k 2^{3^k}}$ es normal a base 2 pero no simplemente normal a base 6.

1.2.1 Normalidad y autómatas finitos

Def. 3. Una secuencia $x = a_1 a_2 a_3 \ldots$ es **compresible** por un trasductor finito T si y solo si en la corrida en T $q_0 \xrightarrow{a_1|v_1} q_1 \xrightarrow{a_2|v_2} q_2 \xrightarrow{a_3|v_3} q_3 \ldots$ satisface que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{|v_1 v_2 \ldots v_n|}{n} < 1.$$

Recordar que los a son símbolols y los v cadenas, posiblemente vacías.

Teorema 5. Una secuencia es **normal** si y solo si es **incompresible por todo one-to-one transducer**.

Teorema (Becher, Casrton, Heiber 2013)**.** Los transductores finitos uno a uno no deterministicos con contadores no pueden comprimir secuencias normales.

Teorema.

Los trasductores de pila no determinísticos pueden comprimir secuencias normales.

0123456789 9876543210 00 01 02 03 . . . 98 99 99 98 97 . . . 03 02 01 00 000 001 002 . . .

Va pusheando y cuando detecta el cambio empieza a desapilar. Parecido al APD que reconoce $w\#w^r$