1er Parcial: parte domiciliaria

Algoritmos y Estructuras de Datos 3 – DC, FCEyN, UBA

07/10/2020

Entrega hasta el lunes 12/10/2020 a las 23:00 mediante el Campus (`https://campus.exactas.uba.ar/mod/assign/view.php?id=141730`) subiendo un único archivo tex nombrado `apellido_nombre.tex` y un único archivo PDF nombrado `apellido_nombre.pdf` (que debe ser el tex compilado). Los archivos podrán sobreescribirse una cantidad ilimitada de veces hasta la hora de entrega (recordar sobreescribir ambos).

Si bien el parcial debe estar hecho en LaTeX, pueden insertar dibujos que hagan a mano pero **deben ser claros** (buena iluminación, buena resolución, etc.)

El archivo **debe** contener nombre, apellido y L.U. en el cuerpo. Para eso pueden poner lo siguiente, que también figura en el link de Campus para la entrega de modo que puedan copiarlo fácilmente:

```
\documentclass[12pt,a4paper]{report}
\usepackage{amsmath,amsfonts,amssymb,amsthm,epsfig,epstopdf,titling,url,array}
\usepackage{fullpage}
\usepackage{fancyhdr}
\pagestyle{fancyplain}
\fancyhf{}
\renewcommand{\headrulewidth}{0pt}
\rhead{Nombre y apellido}
\chead{$1er Parcial AED3: parte domiciliaria$}
\lhead{L.U.}
```

La parte domiciliaria del parcial será calificada como "Aprobada" o "Desaprobada". Para la primera, debe haber al menos 2 ejercicios bien del subconjunto { 1, 2, 5 } y al menos 3 bien en total.

El miércoles 14/10/2020 de 19:00 a 20:30 hs. transcurrirá la parte sincrónica del parcial, que deberá ser aprobada para la aprobación del primer parcial.

El examen es personal y pueden usar las teóricas, las clases prácticas y las guías de ejercicios, citando claramente. Las respuestas deben estar debidamente justificadas.

Para realizar consultas, escribir a aed3-doc@dc.uba.ar.

1) Decimos que un digrafo (con *loops*) tiene forma de ρ cuando todos sus vértices tienen grado de salida igual a 1.

   a) Dibujar 4 digrafos conexos y no isomorfos entre sí que tengan 6 vértices y forma de ρ.[1]

   b) Demostrar que si un digrafo es conexo y tiene forma de ρ entonces tiene un único ciclo.[2]

   c) Diseñar un algoritmo para encontrar un ciclo de longitud máxima en un digrafo con forma de ρ (no necesariamente conexo).

   Consideremos un período de tiempo circular $[0, T]$ tal que llegado el momento T se vuelve a contabilizar el tiempo 0 (e.g., un día, una semana, etc). Dentro del tiempo $[0, T]$ se encuentran definidas n actividades, la i-ésima de las cuales se desarrolla empezando en el instante s_i y terminando en el instante t_i (si $s_i > t_i$, entonces la actividad contiene el instante $0 = T$, ver Figura 1).

[1] Decimos que un digrafo es conexo cuando su grafo subyacente es conexo.

[2] Si $v \to v$ es un *loop*, entonces v, v es un ciclo.

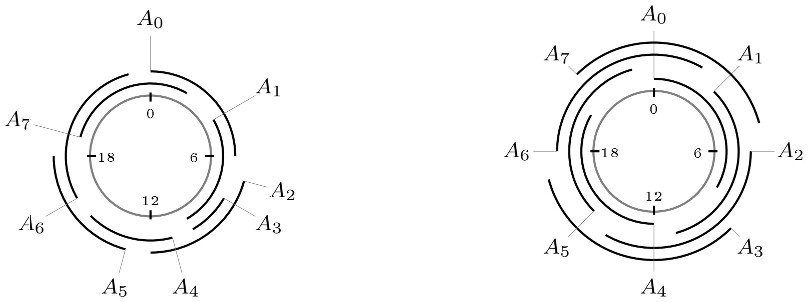


Figura 1: Ejemplos para horizontes de 24 horas con selecciones óptimas de actividades: izquierda = A_0, A_3, A_4, A_6 con razón 4; derecha = A_0, A_3, A_6, A_1, A_4, A_7, A_2, A_5 con razón 8/3.

En el problema de selección de actividades periódicas se busca determinar la máxima cantidad de actividades que un agente puede realizar rutinariamente, suponiendo que el agente es capaz de realizar una única actividad en cada instante. Formalmente, el objetivo es determinar la máxima razón x/y para una secuencia circular de actividades $A_1, \ldots, A_x$ que se realiza en y períodos completos cuando A_{i+1} se inicia lo antes posible una vez terminado A_i, para todo $1 \leq i \leq x$ (con $A_{x+1} = A_1$). Considere la siguiente estrategia golosa para decidir qué actividad j conviene elegir si se elige la actividad i: tomar j como una actividad que no se solapa con i y cuyo tiempo de finalización es el primero desde t_i en un recorrido del tiempo en el sentido de las agujas del reloj.

Definir el digrafo de actividades D que tiene un vértice i por cada actividad y que tiene un arco (arista) $i \to j$ cuando j es la elección golosa que se toma si se elige i.

d) Demostrar que D es un digrafo con forma de ρ.

e) opcional) Demostrar que el ciclo máximo de D es una solución al problema de selección de actividades. **Ayuda:** demostrar por inducción en i ($i \leq x$) que existe una solución $A_1, \ldots, A_x$ donde A_{i+1} es la elección golosa para A_i, tomando $A_{x+1} = A_1$.

f) Usando los resultados anteriores, dar un algoritmo para resolver el problema de selección de actividades, suponiendo que las actividades se describen usando un conjunto de pares $[s_i, t_i]$ donde $0 \leq s_i, t_i \leq T$, $s_i \neq t_i$ y $T = 2n$.

2) Se tiene una hilera con n recipientes que tienen $r_1, \ldots, r_n$ unidades de agua ($r_i \in \mathbb{N}$, $r_i < n$). Se quiere traspasar el agua de los recipientes a dos baldes con capacidades B_1 y B_2 ($B_1, B_2 \in \mathbb{N}$, $B_1, B_2 < n$). Para ello, en cada paso se toma el primer recipiente de la hilera y se vuelca completamente en uno de los baldes. Esta operación se repite mientras algún balde tenga una capacidad suficiente para albergar toda el agua del recipiente. El objetivo es maximizar la cantidad de recipientes que se vuelcan.

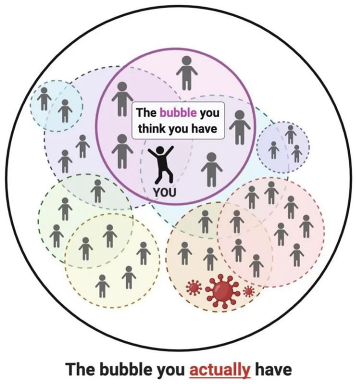
a) Escribir una función recursiva $f(i, b)$ para este problema que tenga la siguiente semántica: $f(i, b)$ es la máxima cantidad de recipientes que se pueden volcar suponiendo que ya se volcaron los recipientes $r_1, \ldots, r_{i-1}$ y el balde de capacidad B_1 tiene una capacidad remanente de b unidades de agua. **Ayuda:** observar que ya se volcaron $r_1 + ... + r_{i-1}$ unidades y, por lo tanto, se puede determinar la capacidad remanente del balde con capacidad B_2.

b) Mostrar que f tiene la propiedad de superposición de subproblemas para el caso considerado.

c) Diseñar un algoritmo de programación dinámica *top-down* para resolver el problema, indicando cuál es la invocación a la función que permite resolver el problema.

d) Determinar la complejidad temporal del algoritmo *top-down*.

3) *a*) Interpretar la siguiente imagen y explicarla con terminología de grafos.



- *The bubble you think you have* = La burbuja que creés que tenés
- *You* = Vos
- *The bubble you actually have* = La burbuja que tenés realmente

b) Probar que un grafo de n vértices que tiene más de $((n-1)(n-2))/2$ aristas es conexo.

4) Un puente de un grafo es un eje del grafo tal que al removerlo se obtiene un grafo con más componentes conexas. Sea G un grafo conexo y e uno de sus ejes. Demostrar que e es un puente de G si y sólo si e pertenece a todo árbol generador de G.

5) Para organizar el tráfico, la ciudad de Ciclos Positivos ha decidido implementar las cabinas de peaje inverso. La idea de estas cabinas es incentivar la circulación de vehículos por caminos alternativos, estableciendo un monto que se le paga a le conductore de un vehículo cuando pasa por la cabina. Estas cabinas inversas se suman a las cabinas regulares, donde le conductore paga por pasar por la cabina. Dado que no tenemos empleo y aún no vendimos nuestro vehículo, queremos explotar un nuevo negocio que consiste en transitar por la ciudad de Ciclos Positivos a fin de obtener una ganancia que nos permita subsistir. Para ello, obtuvimos la información del costo c_i de transitar por cada cabina i de peaje ($c_i < 0$ si la cabina es inversa) y del costo c_{ij} que cuesta viajar de forma directa de cada cabina i a cada cabina j en caso de que esto sea posible (es decir, no pasando por otras cabinas intermedias).

a) Modelar como un problema de grafos el problema de determinar si es posible obtener una ganancia recorriendo eternamente las cabinas de la ciudad.

b) Dar un algoritmo para resolver el problema del inciso anterior, indicando su complejidad temporal.