1er Parcial AED3: Parte Domiciliaria

Manuel Panichelli, 72/18

October 10, 2020

Preámbulo

Teoremas / Ejercicios utilizados.

0.1 Arboles

Teorema 1 (Definiciones equivalentes de árbol)**.** Dado $G = (V, X)$ un grafo, las siguientes son equivalentes:

1. G es un árbol, un grafo conexo sin circuitos simples.
2. G es un grafo sin circuitos simples, y e arista tq $e \notin X$, el grafo $G + e$ tiene exactamente un circuito simple el cual contiene a e.
3. G es conexo, pero si se saca cualquier arista queda un grafo no conexo. Es decir, toda arista es puente.

Lema 1. Sea $G = (V, X)$ conexo y $e \in X$.

$$G - e \text{ es conexo } \iff \text{ e pertenece a un circuito simple de G}$$

Teorema 2. Sean $T = (V, X_T)$ un AG de $G = (V, X)$, $e \in X \setminus X_T$. Luego $T + e - f$ con f una arista del único circuito de $G + e$ es AG de G.

Resolución

Ejercicio 1

Ejercicio 2

Hilera con n recipientes con $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{N}$ unidades de agua, se quiere traspasar a dos baldes con capacidades $B_1, B_2 \in \mathbb{N}$. En cada paso se toma el primer recipiente de la hilera y se vuelva completamente en uno de los baldes. Se repite mientras algun balde tenga capacidad suficiente para albergar ***toda*** *el agua del recipiente. El objetivo es maximizar la cantidad de recipientes que se vuelcan.*

TODO: explicar el ejemplo dado, y explicar mejor el algoritmo y la func recursiva.

a) Formulo de forma recursiva una solución del problema con una función matemática $f(i, b)$ la cual tendrá la siguiente semántica: $f(i, b)$ es la máxima cantidad de recipientes que se pueden volcar suponiendo que ya se volcaron $r_1, ...r_{i-1}$ y que el balde con capacidad B_1 tiene b de capacidad restante. Observo que esta información es suficiente para inferir la capacidad restante del balde B_2, dada por

$$b_2 = B_2 - \overbrace{\underbrace{\sum_{j=1}^{i-1} r_j}_{\text{total volcado}} - \underbrace{(B_1 - b)}_{\text{usado en } B_1}}^{\text{usado en } B_2}$$

Veamos la función recursiva:

$$f(i, b) = \begin{cases} 0 & \text{si } (r_i > b \text{ y } r_i > b_2) \text{ o } i = n \\ f(i+1,\ b) & \text{si } r_i > b \\ f(i+1,\ b - r_i) & \text{si } r_i > b_2 \\ max\{f(i+1, b),\ f(i+1,\ b - r_i)\} & \text{si no} \end{cases}$$

b) Es fácil ver que tiene la propiedad de *superposición de subproblemas*, por ejemplo cuando más de un recipiente tiene la misma cantidad de agua. Sean $r_1 = r_2 = 5, r_3 = 10$ y $B_1 = B_2 = 20$.

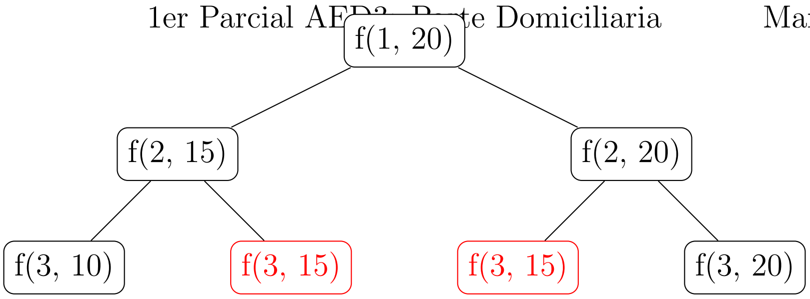


Figure 1: Ejemplo de superposoción de subproblemas. En rojo las llamadas que se superponen.

c) A continuación un algoritmo de programación dinámica *top-down* que implementa la función recursiva de forma bastante directa, agregando memoización mediante una matriz M de $n \times B_1$. Suponiendo que B_1, B_2, los r_i y M son globales,

Algorithm 1 Implementación con programación dinámica.

function BALDES(i, b)
    $b_2 \leftarrow B_2 - \sum_{j=1}^{i-1} r_j - (B_1 - b)$ ▷ $O(n)$
    if $i = n$ o $(r_i > b$ y $r_i > b_2)$ **then**
        return 0
    if $M[i][b] = -1$ **then** ▷ No está memoizado
        if r **then**
            $M[i][b] \leftarrow Baldes(i+1, b)$
        else if a **then**
            $M[i][b] \leftarrow Baldes(i+1, b - r_i)$
        else
            $M[i][b] \leftarrow max\{Baldes(i+1, b),\ Baldes(i+1, b - r_i)\}$
    return $M[i][b]$

El problema se resuelve con el llamado $Baldes(0, B_1)$

d) La complejidad temporal del algoritmo *top-down* es igual a cualquier otro algoritmo de PD, #subproblemas × costo de cada subproblema. En este caso, $O((n \times B_1) \times n) = O(n^2 \times B_1)$. Noto que esto podria mejorarse a $O(n \times B_1)$ si no se calculara b_2 en cada llamado, sino se fuera incrementando y se pasara por parametro.

Ejercicio 3

Ejercicio 4

Un ***puente*** *de un grafo es un eje del grafo tal que al removerlo se obtiene un grafo con más c.cs. Sea $G = (V, X)$ un grafo conexo y $e \in X$. Demostrar que e es un puente de G sii e pertenece a todo AG de G.*

Dem. Demostremos la ida y la vuelta.

⇒) Sea e puente de G. qvq pertenece a todo AG de G.
Va por el absurdo: supongo que no pertenece a ningún árbol generador de G, y sea $T = (V, X_T)$ uno cualquiera. Como $e \notin T$, por (1.2), $T + e$ tiene exactamente un circuito simple C, el cual contiene a e. Sea $f \in C, f \in X_T$. Como f pertenece al único circuito de $T + e$, por (2) el árbol $T' = T + e - f$ es árbol generador de G, y $e \in T'$. Pero estabamos suponiendo que e no pertenecía a ningún AG de G. Abs! Entonces pertenece a todos.

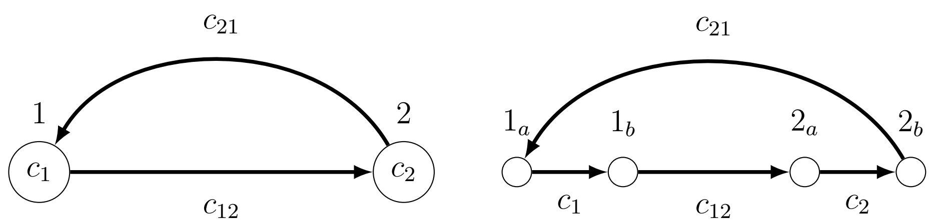
⇐) Como e pertenece a todo AG de G, y por (1.3) todas las aristas de un arbol son puente, en particular e es puente de G.

□

Ejercicio 5

Cabinas de peaje inverso, en las que se le paga un monto al conductor que pase. Cada cabina de peaje $i \in \{1 \dots C\}$ tiene un costo asociado c_i, el cual es negativo para las cabinas inversas, y el costo c_{ij} del viaje de la cabina i a la j, en caso de que se pueda de forma directa.

a) Para modelar el problema, me gustaría representar a las cabinas como nodos, donde una cabina es adyacente a otra si se puede viajar de forma directa. Pero tenemos un problema, las aristas y los vértices tendrían peso, cuando los grafos que modelamos solo tienen peso en las aristas. Vamos a tener que usar una representación muy similar a la de la clase de Mirko. Veamos un ejemplo



(a) Digrafo original (b) Digrafo adaptado

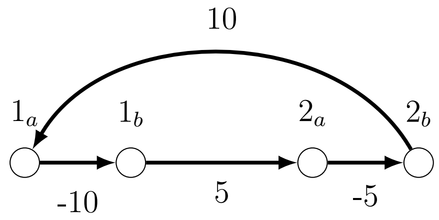
Figure 2: Ejemplo de representación de cabinas con digrafos

Separo cada nodo i con peso c_i en dos, i_a e i_b, con un arco de peso c_i de i_a a i_b. Todos los arcos salen de i_b, y llegan a i_a. De esta forma, me aseguro que cualquier camino que pase por el nodo pague el costo del peaje. Luego, habrá un arco de i_b a j_a con peso c_{ij} si es posible viajar de forma directa de la cabina i a la j.

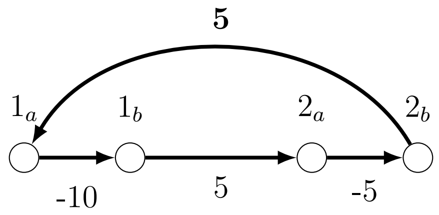
Matemáticamente, $G = (V, X)$ donde

$$\begin{aligned} V &= \{1_a, 1_b, \dots C_a, C_b\}, \\ X &= \{(i_b, j_a, c_{ij}) \mid \text{se puede viajar de forma directa de i a j}\} \cup \\ &\quad \{(i_a, i_b, c_i) \mid i \in \{1, \dots, C\}\}. \end{aligned}$$

Con este modelo, se podrá obtener una ganancia recorriendo *eternamente* las cabinas si el grafo tiene **ciclos negativos**, circuitos que luego de recorrerlos dan una ganancia.



(a) Cabinas sin ciclos negativos



(b) Cabinas con ciclos negativos

Figure 3: Ejemplo de cabinas con y sin ciclos negativos

En la figura 3 se pueden ver dos ejemplos de cabinas y montos. En 3a no hay ningún ciclo negativo, a pesar de que el camino $P : 1_a\ 1_b\ 2_a\ 2_b$ tiene costo -10, al volver a 1_a se vuelve 0, con lo cual recorrer infinitamente nunca daría ganancias. En cambio, en 3b se puede ver como con un pequeño ajuste, el ciclo $C : 1_a\ 1_b\ 2_a\ 2_b\ 1_a$ tiene costo -5, con lo cual se puede recorrer eternamente, generando ganancias.

b) Para resolver el problema del inciso anterior, basta con ver si hay ciclos negativos en algún camino de una cabina a la otra. Para ello, se puede usar el algoritmo de **Floyd**, pensado para resolver camino mínimo *múltiples orígenes, múltiples destinos*, que puede ser adaptado para detectar ciclos negativos. Este tiene una complejidad temporal de $O(n^3)$ con n la cantidad de vertices. Y en nuestro caso, $n = 2 \times |C|$, el doble de la cantidad de cabinas, ya que cada una se separa en dos nodos.