Chapter–1(A)

ফাংশন

FUNCTIONS

Rasel-44 CSE

1. A. 1. ফাংশন (Function) : [NUH-03, 04, [illegible]]

১৬৭৩ খৃষ্টাব্দে লিবনিজ প্রথম 'ফাংশন' শব্দটি ব্যবহার করেন [illegible] ফাংশনের প্রথম সংজ্ঞা দেন। ১৮৩৭ খৃষ্টাব্দে ডিরিখলেট [illegible] দেন, এই সংজ্ঞাটিকে ফাংশনের প্রথম আধুনিক সংজ্ঞা হিসাবে চিহ্নিত করা হয়। [illegible] বিভিন্ন গণিতবিদদের বিভিন্ন প্রচেষ্টায় ফাংশনের আধুনিক সংজ্ঞার [illegible] ফাংশনের সংজ্ঞা দেওয়া হইল।

সংজ্ঞা (Definition) : যদি X ও Y দুইটি অশূন্য সেট এবং f এমন একটি [illegible] হয় যে, প্রত্যেক $x \in X$ এর জন্য একটি অনন্য $y \in Y$ পাওয়া যায় তবে f কে X [illegible] Y সেটে একটি ফাংশন বলা হয়। [If X and Y are two non-empty sets and f is a such rule that gives a unique $y \in Y$ for each $x \in X$ then f is called a function from the set X to the set Y.]

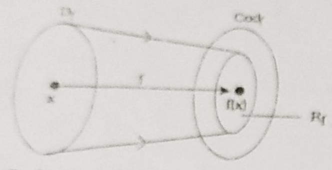
$f : X \to Y$ ফাংশনে x এর f সম্পর্কিত উপাদান f(x) বা y কে x [illegible] (value) বা প্রতিবিম্ব (image) বলা হয়। উপরের সংজ্ঞায় x [illegible] (independent variable) এবং y বা f(x) নির্ভরশীল চলক (dependent variable)।

1.A.2. ফাংশনের ডোমেন, কোডোমেন এবং রেঞ্জ (Domain, Codomain and Range of function) :

[NUH-02, 04, NUH(NM)-07, 08, BSc(Pass)-[illegible]]

ধরি $f : X \to Y$ একটি ফাংশন। তাহা হইলে X কে f এর ডোমেন, Y কে f এর কোডোমেন বা কাউন্টার ডোমেন এবং Y সেটের অন্তর্গত সকল f সম্পর্কিত উপাদান বা প্রতিবিম্ব নিয়ে যে উপসেট গঠিত তাকে ফাংশনটির রেঞ্জ বলা হয়। f এর ডোমেন, কোডোমেন এবং রেঞ্জকে যথাক্রমে D_f, Cod_f এবং R_f দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

[Let $f : X \to Y$ is a function. Then X is called domain of f, Y is called codomain or counter domain of f and the subset in Y of all related elements or image is called range of the function. Domain, Codomain and Range of f are denoted by D_f, Cod_f and R_f respectively.]



এখানে $R_f = \{f(x) \in Cod_f : \forall x \in D_f\}$

অর্থাৎ $R_f \subset Cod_f$.

উদাহরণ-1. যদি $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত ঃ

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{যখন} \quad x < -1 \\ 3x - 6 & \text{যখন} \quad -1 \le x < 5 \\ 4x - 1 & \text{যখন} \quad x \ge 5 \end{cases}$$

(i) $f(-3/2)$; (ii) $f(4)$; (iii) $f(\pi)$; (iv) $f(3 - \sqrt{10})$, (v) $f(\sqrt{5} + 3)$ মানগুলি নির্ণয় কর

সমাধান ঃ (i) $-\frac{3}{2} \in (-\infty, -1)$

সুতরাং $f(-3/2) = 2.(-3/2) + 5 = 2$ [$f(x) = 2x + 5$ সূত্র ব্যবহার করে ।]

(ii) $4 \in [-1, 5)$

সুতরাং $f(4) = 3.4 - 6 = 6$ [$f(x) = 3x - 6$ সূত্র ব্যবহার করে ।]

(iii) $\pi \in [-1, 5)$

সুতরাং $f(\pi) = 3\pi - 6$ [$f(x) = 3x - 6$ সূত্র ব্যবহার করে ।]

(iv) $3 - \sqrt{10} \in [-1, 5)$

সুতরাং $f(3 - \sqrt{10}) = 3(3 - \sqrt{10}) - 6$

$= 3 - 3\sqrt{10}$ [$f(x) = 3x - 6$ সূত্র ব্যবহার করে ।]

(v) $\sqrt{5} + 3 \in [5, \infty)$

সুতরাং $f(\sqrt{5} + 3) = 4(\sqrt{5} + 3) - 1$

$= 4\sqrt{5} + 11$ [$f(x) = 4x - 1$ সূত্র ব্যবহার করে ।]

উদাহরণ-2. $f : \{0, 1, 2, 3\} \to \{2, 5, 8, 11, 15\}$ ফাংশনটি $f(x) = 3x + 2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হইলে ডোমেন, কোডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর। [The function $f : \{0, 1, 2, 3\} \to \{2, 5, 8, 11, 15\}$ is defined by $f(x) = 3x + 2$ then find domain, codomain and range.]

সমাধান ঃ দেওয়া আছে $f : \{0, 1, 2, 3\} \to \{2, 5, 8, 11, 15\}$

ফাংশনটি $f(x) = 3x + 2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত ।

$\therefore D_f = \{0, 1, 2, 3\}$

$Cod_f = \{2, 5, 8, 11, 15\}$

এবং $R_f = \{f(0), f(1), f(2), f(3)\}$

$= \{2, 5, 8, 11\}$.

উদাহরণ-3. $f : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = x^2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হইলে R_f নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $f : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = x^2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত ।

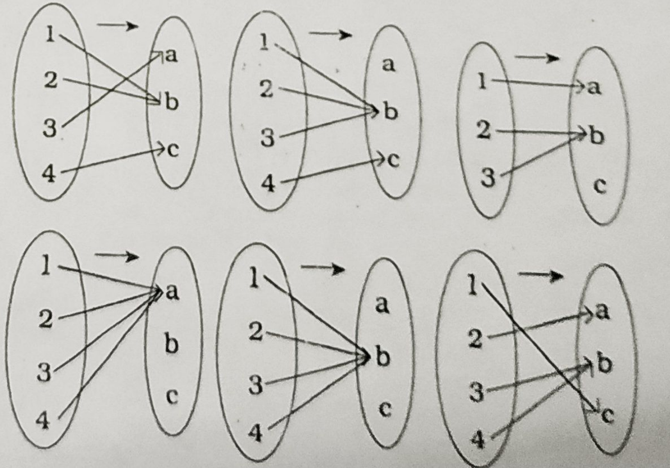
$\therefore R_f = \{f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2)\}$

$= \{4, 1, 0\}$

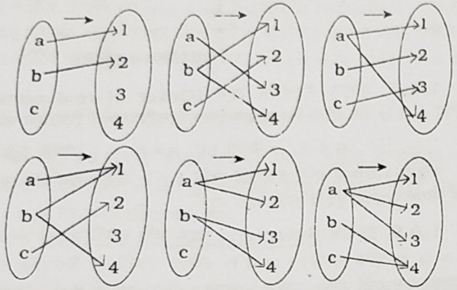
1.A.3. সসীম সেট হইতে সসীম সেটে চিত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত ফাংশন (Function defined by graph from finite set to finite set) ঃ

যদি A সেটের প্রত্যেকটি উপাদান অনন্যভাবে B সেটের উপাদানের সাথে '→' প্রতীকের দ্বারা অথবা অন্য কোন সুবিধাজনক প্রতীকের সাহায্যে চিত্রের মাধ্যমে সম্পর্কিত করা যায় তবে ঐ সম্পর্কের প্রত্যেকটি A সেট হইতে B সেটে সংজ্ঞায়িত ফাংশন হিসাবে চিহ্নিত করা হয়।

উদাহরণ-4. $\{1, 2, 3, 4\}$ সেট হইতে $\{a, b, c\}$ সেটে নিম্নের প্রত্যেকটি চিত্রই সংজ্ঞায়িত ফাংশন। [Each of the following graphs is defined function from the set $\{1, 2, 3, 4\}$ to the set $\{a, b, c\}$.]



উদাহরণ-5. {a, b, c} সেট হইতে {1, 2, 3, 4} সেটে নিম্নের কোন চিত্রই ফাংশন নয়।

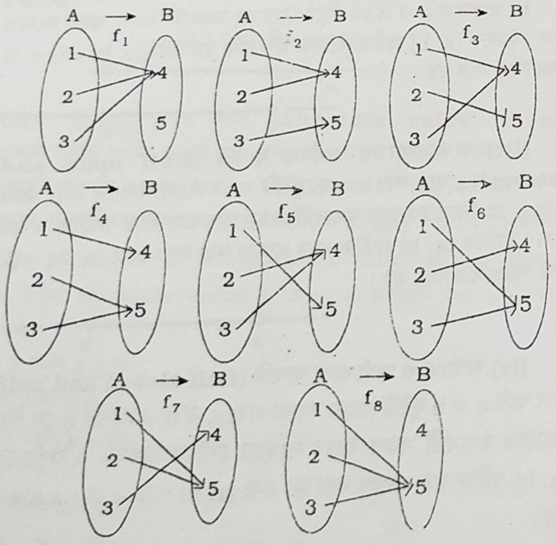


1.A.4. সসীম সেট হইতে সসীম সেটে সংজ্ঞায়িত ফাংশনের সংখ্যা (Number of function defined from finite set to finite set) ঃ

ধরি A এবং B দুইটি সসীম সেট। যদি $n(A) = p$ এবং $n(B) = q$ হয় তবে A সেট হইতে B সেটে q^p সংখ্যক ফাংশন সংজ্ঞায়িত করা যায়।

উদাহরণ-6. ধরি $A = \{1, 2, 3\}$ এবং $B = \{4, 5\}$. তাহলে A সেট হতে B সেটে যতগুলো ফাংশন সংজ্ঞায়িত করা যায় তা চিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

সমাধান ঃ A সেট হতে B সেটে $2^3 = 8$টি ফাংশন সংজ্ঞায়িত করা যায়। ঐ ফাংশনগুলো নিম্নে চিত্রের মাধ্যমে প্রদত্ত হল।



1.A.5. ফাংশনের লেখ (Graph of a Function) ঃ ধরি $f : A \to B$ একটি ফাংশন। তাহা হইলে f এর লেখকে f^* দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয়। $f^* = \{(a, b) : a \in A, f(a) = b\}$, ইহা স্পষ্ট যে $f : A \to B$ ফাংশনের লেখ $f^* \subset A \times B$.

উদাহরণ-7. ধরি $f : \{0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{R}$ একটি ফাংশন যাহা $f(x) = x^2 + x + 1$ সূত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত। তাহলে f এর লেখ নির্ণয় কর অর্থাৎ f^* নির্ণয় কর।

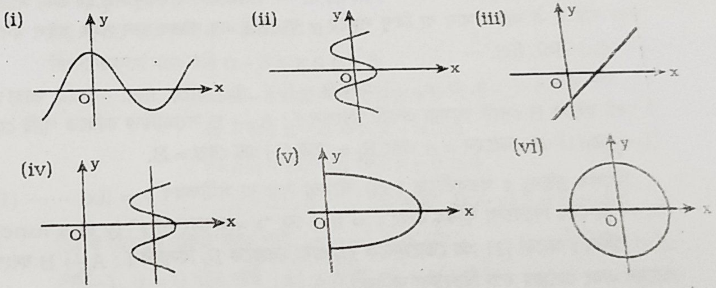
সমাধান ঃ এখানে $f(0) = 0^2 + 0 + 1 = 1 \quad f(1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$

$$f(2) = 2^2 + 2 + 1 = 7 \quad f(3) = 3^2 + 3 + 1 = 13$$

সুতরাং f এর লেখ ঃ $f^* = \{(0, 1), (1, 3), (2, 7), (3, 13)\}$.

1.A.6. লেখচিত্র হইতে ফাংশনের ধারনা ঃ xy সমতলে কোন লেখচিত্র y অক্ষের সমান্তরাল হইলে অথবা y অক্ষের সমান্তরাল কোন সরলরেখা কোন লেখচিত্রকে একাধিক বিন্দুতে ছেদ করিলে ঐ লেখচিত্র $\{(x, f(x)) : y = f(x)\}$ আকারের ফাংশন হইতে পারে না।

উদাহরণ-8. নিম্নের কোন কোন লেখচিত্র ফাংশন নয় তাহা ব্যাখ্যা কর।



সমাধান ঃ xy সমতলে y অক্ষের সমান্তরাল যে কোন সরলরেখা অথবা y অক্ষের সমান্তরাল কোন সরলরেখা যদি কোন লেখচিত্রকে একাধিক বিন্দুতে ছেদ করে তবে ঐ লেখচিত্র $\{(x, f(x)) : y = f(x)\}$ আকারের ফাংশন হইতে পারে না।

সুতরাং (i) এবং (iii) লেখচিত্র দুইটি ব্যতিত কোন লেখচিত্রই ফাংশন নয়।

1.A.7. $y = f(x)$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত ফাংশনের ডোমেন এবং রেঞ্জ (Domain and range of function defined by $y = f(x)$) ঃ

সংজ্ঞা ঃ x এর যে সমস্ত বাস্তব মানের জন্য $y = f(x)$ সূত্র বা সমীকরণটি সংজ্ঞায়িত বা সিদ্ধ হয় তাহার সেট যদি A হয় তবে A কে ঐ সূত্রের ডোমেন বলা হয়। [If A is the set of all real values of x such that the formula or equation $y = f(x)$ be defined or satisfied then A is called domain of the formula.]

সংজ্ঞা ঃ $y = f(x)$ সূত্রের ডোমেন A এর প্রত্যেক মান বা বিন্দু x এর সাপেক্ষে y বা f(x) সূত্রের যে সমস্ত মান পাওয়া যায় তার সেট যদি B হয় তবে B কে ঐ সূত্রের রেঞ্জ বলা হয়। [If B is the set of all values of y or f(x) corresponding each of the values or points x in domain A of the formula $y = f(x)$ then B is called range of the formula.]

উপপাদ্য–1. যদি $y = f(x)$ সূত্রের ডোমেন A এবং রেঞ্জ B হয় তবে দেখাও যে A সেট হইতে B সেটে একটি ফাংশন সংজ্ঞায়িত করা যায়। [If A is domain and B is range of the formula $y = f(x)$ then show that a function is defined from the set A into the set B.]

প্রমাণ ঃ ধরি $y = f(x)$ ...... (1)

সূত্র বা সমীকরণটি x এর ⋯ , a, b, c, ⋯ বাস্তব মান বা বিন্দু সমূহের জন্য সংজ্ঞায়িত এবং ধরি x ঐ বাস্তব মান বা বিন্দু সমূহে y বা f(x) এর বাস্তব মান সমূহ হইল যথাক্রমে f(a), f(b), f(c), ⋯

যদি $A = \{\cdots, a, b, c, \cdots\}$ এবং $B = \{\cdots, f(a), f(b), f(c), \cdots\}$ হয়, তাহা হইলে A সেট হইতে B সেটে আমরা একটি ফাংশন $f : A \to B$ সংজ্ঞায়িত করিতে পারি যেখানে D_f = সূত্র (1) এর ডোমেন = A এবং R_f = সূত্র (1) এর রেঞ্জ = B.

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ পরবর্তীতে ঃ (i) আমরা সূত্র বা সমীকরণ $y = f(x)$ ...... (1) কে ফাংশন হিসাবে বিবেচনা করিব এবং $y = f(x)$ কে "x এর ফাংশন y" (y is a function of x) পড়িব। আরো (1) এর ডোমেনকে D_f এবং রেঞ্জকে R_f হিসাবে $f : A \to B$ ফাংশনের ডোমেন এবং রেঞ্জের মত বিবেচনা করিব।

(ii) কোন সমস্যায় শুধু y অথবা f(x) এর উল্লেখ থাকিলে আমরা $y = f(x)$ কে বুঝিব।

নির্দেশীকা ঃ (i) $y = f(x)$ আকারের ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় করিতে বলা হইলে x এর যে সমস্ত মানের জন্য ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত হইবে তাহার সেটিই ডোমেন হইবে অথবা যে সমস্ত বাস্তব মানের জন্য ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত নয় ঐ সমস্ত বিন্দু সমূহের সেটকে $\mathbb{R}$ হইতে বর্জন করিলে ফাংশনের ডোমেন D_f পাওয়া যাইবে।

(ii) $y = f(x)$ আকারের ফাংশনের ডোমেন D_f এর সমস্ত মানের জন্য y বা f(x) এর যে সমস্ত মান পাওয়া যায় তাহা হইল ফাংশনের রেঞ্জ R_f. অন্যভাবে $y = f(x)$ কে সমাধান করে $x = g(y)$ আকারে পরিণত করে ইহার D_g নির্ণয় করিলে ইহা R_f হইবে অর্থাৎ $D_g = R_f$ হইবে। তবে খেয়াল রাখিতে হইবে যদি $x = a$ বিন্দুতে ফাংশনটি $\frac{0}{0}$ আকারের হয় তবে $x - a$ এর উৎপাদক বা উৎপাদক সমূহ f(x) হইতে বর্জন করে যদি f(a) নির্ণয় করা যায় তবে R_f এ f(a) স্থান পাইবেনা। এই আকারের অন্য বিন্দুর জন্যও আগের মত অগ্রসর হইতে হইবে।

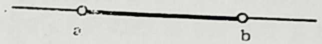
1.A.8. বাস্তব সংখ্যার ক্রম (Order of real numbers) : দুইটি বাস্তব সংখ্যা a ও b এর মধ্যে নিম্নের যে-কোন একটি সম্পর্ক বিদ্যমান থাকবে।

(i) $a < b$ অথবা (ii) $a = b$ অথবা (iii) $a > b$

মন্তব্য ঃ আমরা গণিতে প্রায়ই লিখি $a \geq b$. ইহার অর্থ এই যে হয় $a > b$ অথবা $a = b$. এক সাথে কখনই দুইটি শর্ত খাটে না।

1.A.9. ব্যবধি (Interval) : মনে করি দুইটি বাস্তব সংখ্যা a ও b যেখানে $a < b$ ($a > b$ ও হতে পারে)। a ও b এদের একটি বা উভয়কে বাদ দিয়ে (বা লইয়ে) এবং উহাদের মধ্যবর্তী সকল বাস্তব সংখ্যার সেটকে ব্যবধি বলে। ব্যবধি চার প্রকার। নিম্নে ইহাদের আলোচনা করা হলো।

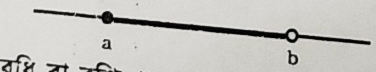
(i) খোলা ব্যবধি (Open interval) : মনে করি a ও b দুইটি বাস্তব সংখ্যা এবং $a < b$. a ও b কে বাদ দিয়ে উহাদের মধ্যবর্তী সকল বাস্তব সংখ্যার সেটকে খোলা ব্যবধি বলে। ইহাকে (a, b) বা]a, b[প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয়।



(ii) বদ্ধ ব্যবধি (Closed interval) : মনে করি a ও b দুইটি বাস্তব সংখ্যা এবং $a < b$. প্রান্তমান a ও b কে নিয়ে উহাদের মধ্যবর্তী সকল বাস্তব সংখ্যার সেটকে বদ্ধ ব্যবধি বলে। ইহাকে [a, b] প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয়।

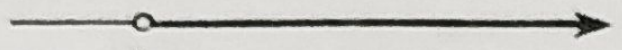
(iii) অর্ধখোলা ও অর্ধবদ্ধ ব্যবধি (Half open and half closed interval) : মনে করি a ও b দুইটি বাস্তব সংখ্যা এবং $a < b$. প্রান্তমান a কে বাদ দিয়ে এবং b কে নিয়ে উহাদের মধ্যবর্তী সকল বাস্তব সংখ্যার সেটকে অর্ধখোলা ও অর্ধবদ্ধ ব্যবধি বলে। ইহাকে (a, b] প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এবং $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয়।

(iv) অর্ধবদ্ধ ও অর্ধখোলা ব্যবধি (Half closed and half open interval) : মনে করি a ও b দুইটি বাস্তব সংখ্যা এবং $a < b$. প্রান্তমান a কে নিয়ে এবং b কে বাদ দিয়ে উহাদের মধ্যবর্তী সকল বাস্তব সংখ্যার সেটকে অর্ধবদ্ধ ও অর্ধখোলা ব্যবধি বলে। ইহাকে [a, b) প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয়।



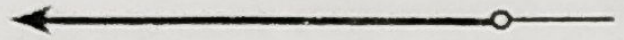
1.A.10. অসীম ব্যবধি বা রশ্মি (Infinite interval or ray) : অসীম ব্যবধি বা রশ্মি দুই প্রকার। নিম্নে উহাদের আলোচনা করা হলো।

(i) খোলা এবং অসীম ব্যবধি (Open and infinite interval) : কোন বাস্তব সংখ্যা a অপেক্ষা বৃহত্তর সকল বাস্তব সংখ্যা নিয়ে গঠিত ব্যবধিকে খোলা এবং অসীম ব্যবধি বলে। ইহাকে (a, ∞) প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয়।



a

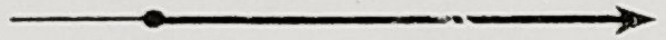
আবার, a অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর সকল বাস্তব সংখ্যা নিয়ে গঠিত ব্যবধিকে খোলা এবং অসীম ব্যবধি বলে। ইহাকে $(-\infty, a)$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয়।



a

(ii) বদ্ধ এবং অসীম ব্যবধি (Closed and infinite interval) : একটি বাস্তব সংখ্যা a সহ a হতে বৃহত্তর সংকল বাস্তব সংখ্যাকে নিয়ে গঠিত ব্যবধিকে বদ্ধ এবং অসীম ব্যবধি বলে। ইহাকে $[a, \infty)$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত করা হয়।

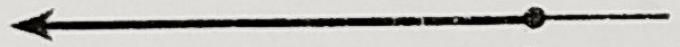
$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \le x\}$$



a

আবার, একটি বাস্তব সংখ্যা a সহ a হতে ক্ষুদ্রতর সকল বাস্তব সংখ্যাকে নিয়ে গঠিত ব্যবধিকে বদ্ধ এবং অসীম ব্যবধি বলে। ইহাকে $(-\infty, a]$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত করা হয়।

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \le b\}$$



a

1.A.11. বাস্তব সংখ্যার পরম মান (Absolute value of real numbers) : যে-কোন বাস্তব সংখ্যা x এর মান শূন্য বা ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হবে। কিন্তু x এর পরমমান সবসময়ই শূন্য বা ধনাত্মক হবে। x এর পরম মানকে $|x|$ দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয়। [The value of any real number x is zero or positive or negative. But absolute value of x is always zero or positive. The absolute value of x is denoted by $|x|$ and defined as follows]

$$|x| = \begin{cases} x \text{ যখন } x \ge 0 \\ -x \text{ যখন } x < 0 \end{cases}$$

$$\text{অথবা } |x| = \begin{cases} 0 \text{ যখন } x = 0 \\ x \text{ যখন } x > 0 \\ -x \text{ যখন } x < 0 \end{cases}$$

উদাহরণ ঃ $|0| = 0$, $|3| = 3$, $|-3| = -(-3) = 3$.

উপপাদ্য-2. x, α ও δ প্রত্যেকেই ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা হলে দেখাও যে $|x - \alpha| \le \delta$ যদি এবং কেবল যদি $\alpha - \delta \le x \le \alpha + \delta$ হয়। [If all x, α and δ are real numbers then show that $|x - \alpha| \le \delta$ if and only if $\alpha - \delta \le x \le \alpha + \delta$.]

প্রমাণ ঃ প্রথমে মনে করি $|x - \alpha| \le \delta$. তাহলে বাস্তব সংখ্যার পরম মানের সংজ্ঞানুসারে $(x - \alpha) \ge 0$ হলে পাই

$$|x - \alpha| = x - \alpha$$

এবং $(x - \alpha) < 0$ হলে $|x - \alpha| = -(x - \alpha)$

$\therefore |x - \alpha| \le \delta$ শর্ত হতে পাই

$x - \alpha \le \delta$ এবং $-(x - \alpha) \le \delta$

$\Rightarrow x \le \alpha + \delta$ এবং $x - \alpha \ge -\delta$

$\Rightarrow x \le \alpha + \delta$ এবং $x \ge \alpha - \delta$

$\Rightarrow \alpha - \delta \le x \;\cdots\cdots (1)$

এবং $x \le \alpha + \delta \;\cdots\cdots (2)$

(1) ও (2) হতে পাই $\alpha - \delta \le x \le \alpha + \delta$

বিপরীতক্রমে মনে করি $\alpha - \delta \le x \le \alpha + \delta$

$\Rightarrow \alpha - \delta \le x$ এবং $x \le \alpha + \delta$

$\Rightarrow -\delta \le x - \alpha$ এবং $x - \alpha \le \delta$

$\Rightarrow \delta \ge -(x - \alpha)$ এবং $x - \alpha \le \delta$

$\therefore x - \alpha \le \delta \;\cdots\cdots (3)$ এবং $-(x - \alpha) \le \delta \;\cdots\cdots (4)$

(3) ও (4) কে একত্র করে পাই $|x - \alpha| \le \delta$

নোট-1. $\alpha = 0$ হলে পাই $|x| \le \delta$ বা $-\delta \le x \le \delta$

নোট-2. $|x - \alpha| < \delta$ হলে $\alpha - \delta < x < \alpha + \delta$

ছাত্র-ছাত্রীদের পাঠদানকালে লক্ষ্য করেছি যে ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ বাহির করা তাদের নিকট এক দুরুহ ব্যাপার। তাই তাদের কষ্ট লাঘবের জন্য ডোমেন ও রেঞ্জ বাহির করার কিছু নিয়ম এবং তৎপরে প্রত্যেক নিয়মের কিছু অংক সহজভাবে সমাধান করে দেওয়া হলো।

1.A.12. ডোমেন ও রেঞ্জ বাহির করার কিছু নিয়ম ঃ

1) $f(x) = c$ (ধ্রুবক) আকারের ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় ঃ

এখানে x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ এর কেবলমাত্র মান c পাওয়া যায় [Here f(x) gives only the value c for all real values of x]

$\therefore D_f = \mathbb{R}$ এবং $R_f = \{c\}$

1. $f(x) = ax + b\ (a \neq 0)$ আকারের ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় ঃ

[illegible] x এর সকল বাস্তব মানের জন্য f(x) এর মান বাস্তব হয় [Here f(x) gives real values for all real values of x.]

$D_f = \mathbb{R}$

আবার, $y = f(x) = ax + b\ (a \neq 0)$

$\Rightarrow x = \frac{y-b}{a}$

[illegible] y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়। [Here x gives real values for all real values of y.]

$R_f = \mathbb{R}$

উদাহরণ-৯. $f(x) = 3x + 5$ ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ বাহির কর।

সমাধান ঃ এখানে $f(x) = 3x + 5$ ফাংশনটি x এর সকল বাস্তব মানের জন্য [illegible]। সুতরাং প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন সকল বাস্তব সংখ্যার সেট।

[illegible] $D_f = \mathbb{R}$

আবার $y = f(x) = 3x + 5$ হতে $x = \frac{y-5}{3}$

[illegible] y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x বাস্তব হয়। সুতরাং প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ সকল বাস্তব সংখ্যার সেট।

[illegible] $R_f = \mathbb{R}$

2. $f(x) = \frac{1}{ax+b}\ (a \neq 0)$ আকারের ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় ঃ

এখানে $ax + b = 0$ বা $x = -\frac{b}{a}$ এর জন্য f(x) সংজ্ঞায়িত নয় এবং $x = -\frac{b}{a}$ ব্যতীত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য f(x) এর মান বাস্তব হয় অর্থাৎ f(x) সংজ্ঞায়িত হয়। [Here f(x) is not defined for $ax + b = 0$ or $x = -\frac{b}{a}$ and f(x) gives real values that is f(x) is defined for all real values of x except $x = -\frac{b}{a}$.]

$D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{b}{a}\right\}$

আবার, $y = f(x) = \frac{1}{ax+b}\ (a \neq 0)$

$\Rightarrow ax + b = \frac{1}{y}$

$\Rightarrow x = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{y} - b\right)$

এখানে y = 0 ব্যতীত y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়। [Here x gives real values for all real values of y except y = 0]

$\therefore R_f = \mathbb{R} - \{0\}$

উদাহরণ-10. নিচের ফাংশনগুলির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find domain and range of the following functions]

(i) $f(x) = \frac{1}{x-2}$ (ii) $f(x) = \frac{2}{x+3}$ (iii) $f(x) = \frac{1}{2x+1}$

সমাধান ঃ (i) $f(x) = \frac{1}{x-2}$

x = 2 ব্যতীত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য f(x) এর মান বাস্তব হয়। [f(x) gives real values for all real values of x except x = 2.]

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

আবার, $y = f(x) = \frac{1}{x-2}$

$\Rightarrow x - 2 = \frac{1}{y}$

$\Rightarrow x = \frac{1}{y} + 2$

y = 0 ব্যতীত y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়। [x gives real values for all real values of y except y = 0.]

$\therefore R_f = \mathbb{R} - \{0\}$

(ii) $f(x) = \frac{2}{x+3}$

x = – 3 ব্যতীত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য f(x) এর মান বাস্তব হয়। [f(x) gives real values for all real values of x except x = – 3.]

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \{-3\}$

আবার, $y = f(x) = \frac{2}{x+3}$

$\Rightarrow x + 3 = \frac{2}{y}$

$\Rightarrow x = \frac{2}{y} - 3$

y = 0 ব্যতীত y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়। [x gives real values for all real values of y except y = 0.]

$\therefore R_f = \mathbb{R} - \{0\}$

(iii) $f(x) = \frac{1}{2x+1}$

এখানে $2x + 1 = 0$ বা $x = -\frac{1}{2}$ এর জন্য f(x) সংজ্ঞায়িত নয় এবং $x = -\frac{1}{2}$ ব্যতীত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য f(x) এর মান বাস্তব হয়। [Here f(x) is not defined for $2x + 1 = 0$ or $x = -\frac{1}{2}$ and f(x) gives real values for all real values of x except $x = -\frac{1}{2}$.]

$$\therefore D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

আবার, $y = f(x) = \frac{1}{2x + 1}$

$$\Rightarrow 2x + 1 = \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y} - 1\right)$$

$y = 0$ ব্যতীত y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়। [x gives real values for all real values of y except $y = 0$.]

$$\therefore R_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

4. $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ **(a, c ≠ 0) আকারের ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় ঃ**

এখানে $cx + d = 0$ বা $x = -\frac{d}{c}$ এর জন্য f(x) সংজ্ঞায়িত নয়। এবং $x = -\frac{d}{c}$ ব্যতীত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য f(x) এর মান বাস্তব হয়। [Here f(x) is not defined for $cx + d = 0$ or $x = -\frac{d}{c}$ and f(x) gives real values for all real values of x except $x = -\frac{d}{c}$.]

$$\therefore D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$$

আবার, $y = f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$

$$\Rightarrow cxy + dy = ax + b$$

$$\Rightarrow x(cy - a) = b - dy$$

$$\Rightarrow x = \frac{b - dy}{cy - a}$$

এখানে $cy - a = 0$ বা $y = \frac{a}{c}$ ব্যতীত y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়। [Here x gives real values for all real values of y except $cy - a = 0$ or $y = \frac{a}{c}$.]

$$\therefore R_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{a}{c}\right\}$$

উদাহরণ-11. নিম্নের ফাংশনগুলির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find domain and range of the following functions]

(i) $f(x) = \frac{x}{x + 1}$ [NUH(NM)-2008]

(ii) $f(x) = \frac{x - 3}{2x + 1}$ [NUH-2004]

সমাধান ঃ (i) $f(x) = \frac{x}{x + 1}$

$x = -1$ ব্যতীত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য f(x) এর মান বাস্তব হয়। [f(x) gives real values for all real values of x except $x = -1$.]

$$\therefore D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$$

আবার, $y = f(x) = \frac{x}{x + 1}$

$$\Rightarrow xy + y = x$$

$$\Rightarrow x = -\frac{y}{y - 1}$$

$y = 1$ ব্যতীত y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়। [x gives real values for all real values of y except $y = 1$.]

$$\therefore R_f = \mathbb{R} - \{1\}$$

(ii) $f(x) = \frac{x - 3}{2x + 1}$

$2x + 1 = 0$ বা $x = -\frac{1}{2}$ ব্যতীত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য f(x) এর মান বাস্তব হয়। [f(x) gives real values for all real values of x except $2x + 1 = 0$ or $x = -\frac{1}{2}$.]

$$\therefore D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

আবার, $y = f(x) = \frac{x - 3}{2x + 1}$

$$\Rightarrow 2xy + y = x - 3$$

$$\Rightarrow x(2y - 1) = -(y + 3)$$

$$\Rightarrow x = -\frac{y + 3}{2y - 1}$$

$y = \frac{1}{2}$ ব্যতীত y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়। [x gives real values for all real values of y except $y = \frac{1}{2}$.]

$$\therefore R_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

5. $f(x) = \frac{x^2 - a^2}{x - a}$ আকারের ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় :

এখানে $x = a$ এর জন্য $f(x)$ সংজ্ঞায়িত নয় এবং $x = a$ ব্যতীত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ এর মান বাস্তব হয়। [Here $f(x)$ is not defined for $x = a$ and gives real values for all real values of x except $x = a$.]

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \{a\}$

আবার, $y = f(x) = \frac{x^2 - a^2}{x - a}$

$\Rightarrow y = x + a$ যেখানে $x \neq a$

$\Rightarrow x = y - a \quad [\because x \neq a,$ সুতরাং $y \neq 2a]$

$\Rightarrow x = y - a, \ y \neq 2a$

এখানে $y = 2a$ ব্যতীত y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x সংজ্ঞায়িত। [Here x is defined for all real values of y except $y = 2a$.]

$R_f = \mathbb{R} - \{2a\}$.

উদাহরণ-12. নিচের ফাংশনগুলির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find the domain and range of the following functions.]

(i) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

(ii) $f(x) = \frac{x - 3}{x^2 - 9}$

সমাধান : (i) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

এখানে $x = 2$ ব্যতীত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ এর মান বাস্তব হয়। [Here $f(x)$ gives real values for all real values of x except $x = 2$.]

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

আবার $y = f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

$\Rightarrow y = x + 2$ যেখানে $x \neq 2$

$\Rightarrow x = y - 2, \ y \neq 4 \quad [\because x \neq 2]$

এখানে $y = 4$ ব্যতীত y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x সংজ্ঞায়িত। [Here x is defined for all real values of y except $y = 4$.]

$\therefore R_f = \mathbb{R} - \{4\}$

(ii) $f(x) = \frac{x - 3}{x^2 - 9}$

এখানে $x^2 - 9 = 0$ বা $x = \pm 3$ ব্যতীত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ এর মান বাস্তব হয়। [Here $f(x)$ gives real values for all real values of x except $x^2 - 9 = 0$ or $x = \pm 3$.]

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$

আবার, $y = f(x) = \frac{x - 3}{x^2 - 9}$

$\Rightarrow y = \frac{1}{x + 3}$ যেখানে $x \neq 3$

$\Rightarrow x + 3 = \frac{1}{y}$ যেখানে $x \neq 3$ বা $y \neq \frac{1}{6}$

$\Rightarrow x = \frac{1}{y} - 3, \ y \neq \frac{1}{6}$

এখানে $y = \frac{1}{6}$ ব্যতীত y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x সংজ্ঞায়িত। [Here x is defined for all real values of y except $y = \frac{1}{6}$.]

$\therefore R_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{6}\right\}$.

6. **$f(x) = \sqrt{ax + b}$ $(a > 0)$ আকারের ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় :**

এখানে কেবলমাত্র $ax + b \geq 0$ বা $x \geq -\frac{b}{a}$ এর জন্য $f(x)$ এর মান বাস্তব হয়। [Here $f(x)$ gives real values only for $ax + b \geq 0$ or $x \geq -\frac{b}{a}$]

$\therefore D_f = \left\{x : x \geq -\frac{b}{a}\right\}$

$= \left[-\frac{b}{a}, \infty\right)$

আবার, $y = f(x) = \sqrt{ax + b}$ ...... (1)

(1) এ y এর মান ধনাত্মক বা শূন্য অর্থাৎ $y \nless 0$ [The values of y in (1) are positive or zero that is $y \nless 0$]

(1) $\Rightarrow y^2 = ax + b$ যেখানে $y \nless 0$

$\Rightarrow ax = y^2 - b, \ \ y \nless 0$

$\Rightarrow x = \frac{1}{a}(y^2 - b), \ \ y \nless 0$

এখানে $y \geq 0$ এর জন্য x সংজ্ঞায়িত। [Here x is defined for $y \geq 0$]

$\therefore R_f = \{y : y \geq 0\}$

$= [0, \infty)$

নোট : $\sqrt{x^2} = |x|$

অর্থাৎ বাস্তব ফিল্ডে $\sqrt{\ }$ এর মান বিদ্যমান থাকলে উহা সর্বদা ধনাত্মক বা শূন্য হবে।

যেমন $\sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$

এখানে $\sqrt{(-2)^2} = -2$ সত্য নয়।

উদাহরণ–13. নিম্নের ফাংশনগুলির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find the domain and range of the following functions.]

সমাধান : (i) $f(x) = \sqrt{3x - 1}$

এখানে কেবলমাত্র $3x - 1 \geq 0$ বা $x \geq \frac{1}{3}$ এর জন্য f(x) এর মান বাস্তব হয়। [Here f(x) gives real values only for $3x - 1 \geq 0$ or $x \geq \frac{1}{3}$.]

$\therefore D_f = \left\{x : x \geq \frac{1}{3}\right\}$

$= \left[\frac{1}{3}, \infty\right)$

আবার, $y = f(x) = \sqrt{3x - 1}$ ...... (1)

(1) এ y এর মান ধনাত্মক বা শূন্য অর্থাৎ $y \nless 0$ [The values of y in (1) are positive or zero that is $y \nless 0$]

$(1) \Rightarrow y^2 = 3x - 1$ যেখানে $y \nless 0$

$\Rightarrow x = \frac{1}{3}(y^2 + 1), \ y \nless 0$

এখানে $y \geq 0$ এর জন্য x সংজ্ঞায়িত। [Here x is defined for $y \geq 0$]

$\therefore R_f = \{y : y \geq 0\}$

$= [0, \infty)$

(ii) $f(x) = -\sqrt{x + 1}$

এখানে কেবলমাত্র $x + 1 \geq 0$ বা $x \geq -1$ এর জন্য f(x) এর মান বাস্তব হয়। [Here f(x) gives real values only for $x + 1 \geq 0$ or $x \geq -1$.]

$\therefore D_f = \{x : x \geq -1\}$

$= [-1, \infty)$

আবার, $y = f(x) = -\sqrt{x + 1}$ ...... (1)

(1) এ y এর মান ঋণাত্মক বা শূন্য অর্থাৎ $y \ngtr 0$ [The values of y in (1) are negative or zero that is $y \ngtr 0$]

$(1) \Rightarrow y^2 = x + 1, \ y \ngtr 0$

$\Rightarrow x = y^2 - 1, \ y \ngtr 0$

এখানে $y \leq 0$ এর জন্য কেবলমাত্র x সংজ্ঞায়িত। [Here x is defined only for $y \leq 0$.]

$\therefore R_f = \{y : y \leq 0\}$

$= (-\infty, 0]$

7 **$f(x) = \sqrt{ax + b}$ $(a < 0)$ আকারের ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় :**

এখানে কেবলমাত্র $ax + b \geq 0$ বা $x \leq -\frac{b}{a}$ এর জন্য f(x) এর মান বাস্তব হয়। [Here f(x) gives real values only for $ax + b \geq 0$ or $x \leq -\frac{b}{a}$]

$\therefore D_f = \left\{x : x \leq -\frac{b}{a}\right\}$

$= \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right]$

আবার, $y = f(x) = \sqrt{ax + b}$ ...... (1)

(1) এ y এর মান ধনাত্মক বা শূন্য অর্থাৎ $y \nless 0$ [The values of y in (1) are positive or zero that is $y \nless 0$.]

$(1) \Rightarrow y^2 = ax + b$ যেখানে $y \nless 0$

$\Rightarrow ax = y^2 - b, \ y \nless 0$

$\Rightarrow x = \frac{1}{a}(y^2 - b), \ y \nless 0$

এখানে কেবলমাত্র $y \geq 0$ এর জন্য x সংজ্ঞায়িত। [Here x is defined only for $y \geq 0$.]

$\therefore R_f = \{y : y \geq 0\}$

$= [0, \infty)$

উদাহরণ–14. নিম্নের ফাংশনগুলির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find domain and range of the following functions]

(i) $f(x) = \sqrt{1 - x}$

(ii) $f(x) = -\sqrt{1 - 2x}$

(ঙ) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{ax+b}}$ আকারের ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় :

এখানে $ax+b>0$ বা $x>-\frac{b}{a}$ (যখন $a>0$) বা $x<-\frac{b}{a}$ (যখন $a<0$) এর জন্য কেবলমাত্র $f(x)$ এর মান বাস্তব হয়। [Here $f(x)$ gives real values only for $ax+b>0$ or $x>-\frac{b}{a}$ (when $a>0$) or $x<-\frac{b}{a}$ (when $a<0$).]

$\therefore a>0$ এর জন্য $D_f = \left\{x : x > -\frac{b}{a}\right\}$

$= \left(-\frac{b}{a}, \infty\right)$

এবং $a<0$ এর জন্য $D_f = \left\{x : x < -\frac{b}{a}\right\}$

$= \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$

আবার, $y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{ax+b}}$ ------ (1)

(1) এ y এর মান ঋণাত্মক হবে অর্থাৎ $y \nless 0$ হবে।

$(1) \Rightarrow y^2 = \frac{1}{ax+b}$ যেখানে $y \nless 0$

$\Rightarrow ax+b = \frac{1}{y^2}, y \nless 0$

$\Rightarrow x = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{y^2} - b\right), y \nless 0$

এখানে $y>0$ এর জন্য কেবলমাত্র x সংজ্ঞায়িত। [Here x is defined only for $y>0$.]

$\therefore R_f = \{y : y > 0\}$

$= (0, \infty)$

উদাহরণ-15. নিচের ফাংশনগুলির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find the domain and range of the following functions.]

(i) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ (ii) $y = \frac{1}{\sqrt{2-x}}$

সমাধান : (i) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

এখানে $x+1>0$ বা $x>-1$ এর জন্য কেবলমাত্র $f(x)$ এর মান বাস্তব হয়। [Here $f(x)$ gives real values only for $x+1>0$ or $x>-1$.]

$\therefore D_f = \{x : x > -1\}$

আবার, $y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ ...... (1)

(1) এ y এর মান কেবলমাত্র ধনাত্মক হবে। [The values of y in (1) are only positive.]

$(1) \Rightarrow y^2 = \frac{1}{x+1}, y \nleq 0$

$\Rightarrow x + 1 = \frac{1}{y^2}, y \nleq 0$

$\Rightarrow x = \frac{1}{y^2} - 1, y \nleq 0$

এখানে $y > 0$ এর জন্য কেবলমাত্র x সংজ্ঞায়িত।

$\therefore R_f = \{y : y > 0\}$

$= (0, \infty)$.

(ii) $y = \frac{1}{\sqrt{2-x}}$

এখানে $2 - x > 0$ বা $x < 2$ এর জন্য কেবলমাত্র f(x) এর মান বাস্তব হয়। [Here f(x) gives real values only for $2 - x > 0$ or $x < 2$.]

$\therefore D_f = \{x : x < 2\}$

$= (-\infty, 2)$

আবার, $y = \frac{1}{\sqrt{2-x}}$ ...... (1)

(1) এ y এর মান কেবলমাত্র ধনাত্মক হবে।

$(1) \Rightarrow y^2 = \frac{1}{2-x}, y \nleq 0$

$\Rightarrow 2 - x = \frac{1}{y^2}, y \nleq 0$

$\Rightarrow x = 2 - \frac{1}{y^2}, y \nleq 0$

এখানে $y > 0$ এর জন্য কেবলমাত্র x সংজ্ঞায়িত হবে।

$\therefore R_f = \{y : y > 0\}$

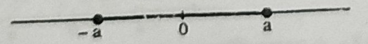
$= (0, \infty)$

9. $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ আকারের ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় ঃ

এখানে f(x) এর মান বাস্তব হবে যদি $a^2 - x^2 \geq 0$ হয়

$\Rightarrow x^2 \leq a^2$

$\Rightarrow -a \leq x \leq a$



$\therefore D_f = \{x : -a \leq x \leq a\}$

$= [-a, a]$

আবার, $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ ...... (1)

(1) এ y এর মান ঋণাত্মক হতে পারে না।

$(1) \Rightarrow y^2 = a^2 - x^2, y \nless 0$

$\Rightarrow x^2 = a^2 - y^2, y \nless 0$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{a^2 - y^2}, y \nless 0$

এখানে x সংজ্ঞায়িত হবে যদি $a^2 - y^2 \geq 0$ এবং $y \nless 0$ হয়।

$\Rightarrow y^2 \leq a^2$ কিন্তু $y \nless 0$

$\Rightarrow -a \leq y \leq a$ যেখানে $y \nless 0$

$\Rightarrow 0 \leq y \leq a$

$\therefore R_f = \{y : 0 \leq y \leq a\}$

$= [0, a]$

উদাহরণ-16. নিম্নের ফাংশনগুলির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find domain and range of the following functions] [NUH(NM)-2006]

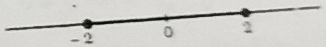
(i) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

(ii) $y = \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}}$

সমাধান (i) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

এখানে f(x) এর মান বাস্তব হবে যদি

$4 - x^2 \geq 0$ হয়।



$\Rightarrow x^2 \leq 4$

$\Rightarrow -2 \leq x \leq 2$

$\therefore D_f = \{x : -2 \leq x \leq 2\}$

$= [-2, 2]$

আবার, $y = f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ ...... (1)

(1) এ y এর মান ঋণাত্মক হয় না অর্থাৎ y এর মান ধনাত্মক বা শূন্য হবে।

$(1) \Rightarrow y^2 = 4 - x^2$ যেখানে $y \nless 0$

$\Rightarrow x^2 = 4 - y^2, y \nless 0$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{4 - y^2}, y \nless 0$

এখানে x এর মান বিদ্যমান থাকবে যদি $4 - y^2 \geq 0$ এবং $y \nless 0$ হয়।

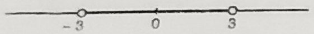
$$\Rightarrow y^2 - 4 \leq 0 \text{ এবং } y \nless 0$$
$$\Rightarrow y^2 \leq 4 \text{ এবং } y \nless 0$$
$$\Rightarrow -2 \leq y \leq 2 \text{ এবং } y \nless 0$$
$$\Rightarrow 0 \leq y \leq 2$$

$R_f = \{y : 0 \leq y \leq 2\}$
$= [0, 2]$

(ii) $y = \dfrac{1}{\sqrt{9 - x^2}}$

এখানে y এর মান বাস্তব হবে যদি $9 - x^2 > 0$ হয়।

$$\Rightarrow x^2 < 9$$
$$\Rightarrow -3 < x < 3$$



$\therefore D_f = \{x : -3 < x < 3\}$
$= (-3, 3)$

আবার, $y = \dfrac{1}{\sqrt{9 - x^2}}$ ফাংশনে y এর মান ঋণাত্মক বা শূন্য হবে না অর্থাৎ y এর মান ধনাত্মক হবে।

$\therefore y^2 = \dfrac{1}{9 - x^2}$ যেখানে $y \nleq 0$

$\Rightarrow 9 - x^2 = \dfrac{1}{y^2}, y \nleq 0$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{9 - \dfrac{1}{y^2}}, y \nleq 0$

এখানে x এর মান বিদ্যমান থাকবে যদি $9 - \dfrac{1}{y^2} \geq 0$ এবং $y \nleq 0$ হয়।

$$\Rightarrow 9y^2 - 1 \geq 0 \text{ এবং } y \nleq 0$$
$$\Rightarrow y^2 - \frac{1}{9} \geq 0 \text{ এবং } \nleq 0$$
$$\Rightarrow y^2 \geq \frac{1}{9} \text{ এবং } y \nleq 0$$
$$\Rightarrow \left(y \leq -\frac{1}{3} \text{ বা } y \geq \frac{1}{3}\right) \text{ এবং } y \nleq 0$$
$$\Rightarrow y \geq \frac{1}{3}$$

$$\therefore R_f = \left\{y : y \geq \frac{1}{3}\right\}$$
$$= \left[\frac{1}{3}, \infty\right)$$

দ্রষ্টব্য ঃ নিম্নে দুইটি অসমতার সমাধান পদ্ধতি আলোচনাসহ কয়েকটি অসমতার সমাধান ছকে দেয়া হলো ঃ

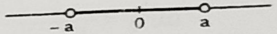
1.A.13. $x^2 - a^2 < 0$ অসমতার সমাধান ঃ

এখানে $(x + a)(x - a) < 0$

দুইটি উৎপাদকের গুণফল ঋণাত্মক হলে একটি উৎপাদক ধনাত্মক এবং অপরটি ঋণাত্মক হবে।

$\therefore (x + a > 0$ এবং $x - a < 0)$ অথবা $(x + a < 0$ এবং $x - a > 0)$ হবে।

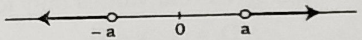
১ম ক্ষেত্রে ঃ $x + a > 0$ এবং $x - a < 0$



$$\Rightarrow x > -a \text{ এবং } x < a$$
$$\Rightarrow -a < x < a$$

২য় ক্ষেত্রে ঃ $x + a < 0$ এবং $x - a > 0$

$$\Rightarrow x < -a \text{ এবং } x > a$$



এখানে $x < -a$ এবং $x > a$ শর্তে x এ কোন মান বিদ্যমান নাই।

$\therefore x^2 - a^2 < 0$ অসমতাটির সমাধান $-a < x < a$

1.A.14. $x^2 - a^2 > 0$ অসমতার সমাধান ঃ

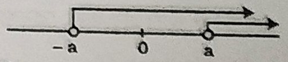
এখানে $(x + a)(x - a) > 0$

দুইটি উৎপাদকের গুণফল ধনাত্মক হলে উভয় উৎপাদক ধনাত্মক অথবা উভয় উৎপাদক ঋণাত্মক হবে।

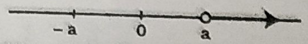
$\therefore (x + a > 0$ এবং $x - a > 0)$ অথবা $(x + a < 0$ এবং $x - a < 0)$

১ম ক্ষেত্রে ঃ $x + a > 0$ এবং $x - a > 0$

$$\Rightarrow x > -a \text{ এবং } x > a$$

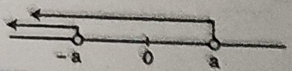


এখানে $x > -a$ এবং $x > a$ শর্তে $x > a$ হবে।

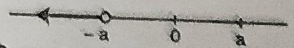


২য় ক্ষেত্রে ঃ $x + a < 0$ এবং $x - a < 0$

$$\Rightarrow x < -a \text{ এবং } x < a$$



এখানে $x < -a$ এবং $x < a$ শর্তে $x < -a$ হবে।



$\therefore x^2 - a^2 > 0$ অসমতাটির সমাধান ঃ $x < -a$ অথবা $x > a$

1.A.15. $x^2 - a^2 < 0$ বা $x^2 - a^2 > 0$ অসমতার সমাধানের নিয়মে সমাধান করা যায় এইরূপ কয়েকটি অসমতার সমাধান ও সংখ্যারেখায় ইহার অবস্থান নিম্নের ছকে দেয়া হলো। এখানে a ও b ধনাত্মক এবং $a < b$ ধরা হয়েছে।

অসমতা	সমাধান	সংখ্যারেখা
$x^2 - a^2 < 0$	$-a < x < a$	$-a$ 0 a
$(x + a)(x - b) < 0$	$-a < x < b$	$-a$ 0 b
$(x - a)(x - b) < 0$	$a < x < b$	a 0 b
$(x - a)(x + b) < 0$	$-b < x < a$	$-b$ 0 a
$(x + a)(x + b) < 0$	$-b < x < -a$	$-b$ 0 $-a$
$x^2 - a^2 > 0$	$x < -a$ বা $x > a$	$-a$ 0 a
$(x + a)(x - b) > 0$	$x < -a$ বা $x > b$	$-a$ 0 b
$(x - a)(x - b) > 0$	$x < a$ বা $x > b$	a 0 b
$(x - a)(x + b) > 0$	$x < -b$ বা $x > a$	$-b$ 0 $-a$
$(x + a)(x + b) > 0$	$x < -b$ বা $x > -a$	$-b$ 0 $-a$

নোট ঃ উৎপাদকদ্বয় অনুপাত আকারে থাকলেও একইরূপ সমাধান হবে।

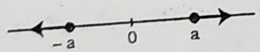
10. $f(x) = \sqrt{x^2 - a^2}$ আকারের ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় ঃ

এখানে $f(x)$ এর মান বাস্তব হবে যদি $x^2 - a^2 \geq 0$ হয়।

$$\Rightarrow x^2 \geq a^2$$

$$\Rightarrow x \leq -a \text{ বা } x \geq a$$

$\therefore D_f = \{x : x \leq -a\} \cup \{x : x \geq a\}$



$= (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$

আবার, $y = f(x) = \sqrt{x^2 - a^2}$ ...... (1)

(1) এ y এর মান কেবলমাত্র ধনাত্মক বা শূন্য হবে।

(1) $\Rightarrow y^2 = x^2 - a^2$ যেখানে $y \nless 0$

$\Rightarrow x^2 = y^2 + a^2, \; y \nless 0$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{y^2 + a^2}, \; y \nless 0$

এখানে $y \geq 0$ এর জন্য x সংজ্ঞায়িত হবে।

$\therefore R_f = \{y : y \geq 0\}$

$= [0, \infty)$

উদাহরণ–17. নিম্নের ফাংশনগুলির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find domain and range of the following functions.] **[NUH(NM)–2007]**

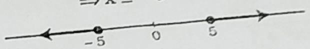
(i) $f(x) = \sqrt{x^2 - 25}$ (ii) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$

সমাধান ঃ (i) $f(x) = \sqrt{x^2 - 25}$

এখানে $f(x)$ এর মান বাস্তব হবে যদি $x^2 - 25 \geq 0$ হয়।

$$\Rightarrow x^2 \geq 25$$

$$\Rightarrow x \leq -5 \text{ বা } x \geq 5$$



$\therefore D_f = \{x : x \leq -5\} \cup \{x : x \geq 5\}$

$= (-\infty, -5] \cup [5, \infty)$

আবার, $y = f(x) = \sqrt{x^2 - 25}$ ...... (1)

(1) এ y এর মান কেবলমাত্র ধনাত্মক বা শূন্য হবে।

(1) $\Rightarrow y^2 = x^2 - 25$ যেখানে $y \nless 0$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{y^2 + 25}, \; y \nless 0$

এখানে $y \geq 0$ এর জন্য x সংজ্ঞায়িত।

$\therefore R_f = \{y : y \geq 0\}$

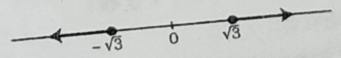
$= [0, \infty)$

(ii) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$

এখানে $f(x)$ এর মান বাস্তব হবে যদি $x^2 - 3 \geq 0$ হয়।

$$\Rightarrow x^2 \geq 3$$

$$\Rightarrow x \leq -\sqrt{3} \text{ বা } x \geq \sqrt{3}$$



$\therefore D_f = \{x : x \leq -\sqrt{3}\} \cup \{x : x \geq \sqrt{3}\}$

$= (-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, \infty)$

[illegible]

উদাহরণ-১৯. নিচের ফাংশনগুলির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find domain and range of the following functions.]

(i) $y = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$

(ii) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ [NUH(NM)-2008]

(iii) $y = \sqrt{x^2 + 1}$

(iv) $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

সমাধান: (i) $y = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$

$= \sqrt{(x-2)(x-5)}$

এখানে y এর মান বাস্তব হবে যদি $(x-2)(x-5) \geq 0$ হয়।

$\Rightarrow x \leq 2$ বা $x \geq 5$

$\therefore D_f = \{x : x \leq 2\} \cup \{x : x \geq 5\}$

$= (-\infty, 2] \cup [5, \infty)$

আবার, $y = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$ ...... (1)

(1) এ y এর মান সর্বদা ধনাত্মক বা শূন্য।

(1) $\Rightarrow y^2 = x^2 - 7x + 10$ যেখানে $y \nless 0$

$\Rightarrow x^2 - 7x + (10 - y^2) = 0,\ y \nless 0$

এখানে x এর মান বাস্তব এবং সংজ্ঞায়িত হবে যদি নিশ্চায়ক ≥ 0 এবং $y \nless 0$ হয়।

$\Rightarrow 49 - 4(10 - y^2) \geq 0$ এবং $y \nless 0$ হয়।

$\Rightarrow 4y^2 + 9 \geq 0$ এবং $y \nless 0$

$\Rightarrow y \geq 0$, যা উভয় অসমতার জন্য সত্য।

$R_f = \{y : y \geq 0\}$

$= [0, \infty)$

(ii) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

এখানে y এর মান বাস্তব হবে যদি $x^2 - 2x \geq 0$ হয়।

$\Rightarrow x(x-2) \geq 0$

$\Rightarrow x \leq 0$ বা $x \geq 2$

$\therefore D_f = \{x : x \leq 0\} \cup \{x : x \geq 2\}$

$= (-\infty, 0] \cup [2, \infty)$

আবার, $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ ...... (1)

(1) এ y এর মান ঋণাত্মক হবে না।

(1) $\Rightarrow y^2 = x^2 - 2x$ যেখানে $y \nless 0$

$\Rightarrow x^2 - 2x - y^2 = 0$ এবং $y \nless 0$

এখানে x এর মান বাস্তব ও সংজ্ঞায়িত হবে যদি নিশ্চায়ক ≥ 0 এবং $y \nless 0$ হয়।

$\Rightarrow 4 + 4y^2 \geq 0$ এবং $y \nless 0$

$\Rightarrow y \geq 0$, যা উভয় অসমতার জন্য সত্য।

$\therefore R_f = \{y : y \geq 0\}$

$= [0, \infty)$

• **(iii)** $y = \sqrt{x^2 + 1}$ ...... (1)

এখানে x এর সকল মানের জন্য y এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore D_f = R$

আবার (1) এ y এর মান ধনাত্মক বা শূন্য হবে।

(1) $\Rightarrow y^2 = x^2 + 1$ যেখানে $y \nless 0$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{y^2 - 1},\ y \nless 0$

x সংজ্ঞায়িত হবে যদি $y^2 - 1 \geq 0$ এবং $y \nless 0$ হয়

$\Rightarrow (y \leq -1$ বা $y \geq 1)$ এবং $y \nless 0$

$\Rightarrow y \geq 1$

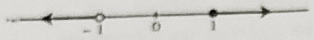
$\therefore R_f = \{y : y \geq 1\}$

$= [1, \infty)$

(iv) $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ ...... (1)

এখানে y এর মান বাস্তব হবে যদি $\dfrac{x-1}{x+1} \geq 0$ হয়।

$$\Rightarrow x < -1 \text{ বা } x \geq 1$$



$\therefore D_f = \{x : x < -1\} \cup \{x : x \geq 1\}$

$= (-\infty, -1) \cup [1, \infty)$

আবার (1) এ y এর মান ধনাত্মক বা শূন্য হবে।

$(1) \Rightarrow y^2 = \dfrac{x-1}{x+1}$ যেখানে $y \not< 0$

$\Rightarrow xy^2 + y^2 = x - 1, \ y \not< 0$

$\Rightarrow x(1 - y^2) = y^2 + 1, \ y \not< 0$

$\Rightarrow x = \dfrac{y^2 + 1}{(1 + y)(1 - y)}, \ y \not< 0$

এখানে $y = 1$ ব্যতীত $y \geq 0$ এর জন্য x সংজ্ঞায়িত।

$\therefore R_f = \{y : y \geq 0\} - \{1\}$

$= [0, \infty) - \{1\}$

$= [0, 1) \cup (1, \infty)$

উদাহরণ–19. নিম্নের ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find domain and range of the following functions.]

(i) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4x}}$

(ii) $y = \dfrac{1}{x^2 - 4x + 3}$ [NUH(NM)–2007]

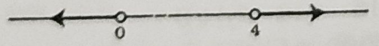
(iii) $y = f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 3x - 2}$.

সমাধান : (i) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4x}}$ ...... (1)

এখানে y এর মান বাস্তব হবে যদি $x^2 - 4x > 0$ হয়।

$$\Rightarrow x(x - 4) > 0$$

$$\Rightarrow x < 0 \text{ বা } x > 4$$



$\therefore D_f = \{x : x < 0\} \cup \{x : x > 4\}$

$= (-\infty, 0) \cup (4, \infty)$

আবার (1) এ y এর মান অঋণাত্মক হবে।

$(1) \Rightarrow y^2 = \dfrac{1}{x^2 - 4x}$ যেখানে $y \not< 0$

$\Rightarrow x^2 - 4x - \dfrac{1}{y^2} = 0, \ y \not< 0$

x এর মান বাস্তব ও সংজ্ঞায়িত হবে যদি নিশ্চায়ক ≥ 0 এবং $y \not< 0$ হয়।

$\Rightarrow 16 + \dfrac{4}{y^2} \geq 0$ এবং $y \not< 0$

$\Rightarrow y > 0$, যা উভয় অসমতার জন্য সত্য।

$\therefore R_f = \{y : y > 0\}$

$= (0, \infty)$

(ii) $y = \dfrac{1}{x^2 - 4x + 3}$

$= \dfrac{1}{(x-1)(x-3)}$

এখানে $x = 1$ বা $x = 3$ ব্যতীত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য y এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \{1, 3\}$

আবার, $y = \dfrac{1}{x^2 - 4x + 3}$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 3 - \dfrac{1}{y} = 0$

এখানে x এর মান বাস্তব হবে যদি নিশ্চায়ক ≥ 0 হয়।

$$\Rightarrow 16 - 4\left(3 - \frac{1}{y}\right) \geq 0$$

$$\Rightarrow 4 + \frac{4}{y} \geq 0$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{y} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{y+1}{y} \geq 0$$

$$\Rightarrow y \leq -1 \text{ বা } y > 0$$

$\therefore R_f = \{y : y \leq -1\} \cup \{y : y > 0\}$

$= (-\infty, -1] \cup (0, \infty)$

(iii) $y = f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 3x + 2}$

$= \dfrac{x^2}{(x-1)(x-2)}$

এখানে $x = 1$ বা $x = 2$ ব্যতীত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য y এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \{1, 2\}$

আবার, $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 3x + 2}$

$\Rightarrow x^2y - 3xy + 2y = x^2$

$\Rightarrow (y-1)x^2 - 3xy + 2y = 0$

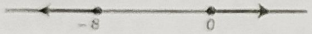
এখানে x এর মান বাস্তব হবে যদি নিশ্চায়ক ≥ 0 হয়।

$\Rightarrow 9y^2 - 4(y-1)\cdot 2y \geq 0$

$\Rightarrow y^2 + 8y \geq 0$

$\Rightarrow y(y+8) \geq 0$

$\Rightarrow y \leq -8$ বা $y \geq 0$



$\therefore R_f = \{y : y \leq -8\} \cup \{y : y \geq 0\}$

$= (-\infty, -8] \cup [0, \infty)$

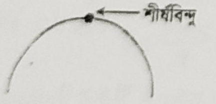
1. $f(x) = ax^2 + bx + c$ আকারের ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় ঃ

এখানে x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ এর মান বাস্তব হবে।

$\therefore D_f = \mathbb{R}$

আবার, $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ প্যারাবোলার সমীকরণ যার অক্ষ y অক্ষের সমান্তরাল। সুতরাং প্যারাবোলার শীর্ষবিন্দু লঘিষ্ঠ বিন্দু বা গরিষ্ঠ বিন্দু হবে।

$a < 0$ হলে প্যারাবোলার আকার হবে;



$a > 0$ হলে প্যারাবোলার আকার হবে;

$\boxed{b^2 - 4ac \geq 0}$

$b^2 - 4a\cdot(c-y) \geq 0$

$\Rightarrow b^2 - 4ac + 4ay \geq 0$

$\Rightarrow y \geq (4ac - b^2)/4a$

$\therefore$ $a < 0$ এর জন্য $R_f = (-\infty,$ শীর্ষবিন্দুর কোটি$]$

এবং $a > 0$ এর জন্য $R_f = [$শীর্ষবিন্দুর কোটি$, \infty)$

নোট ঃ নিশ্চায়ক ≥ 0 ধরেও রেঞ্জ নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ-20. নিম্নের ফাংশনগুলির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find domain and range of the following functions]

(i) $y = \dfrac{1}{2}x^2 + 2x + 5$

(ii) $y = -\dfrac{1}{2}x^2 - 2x$

সমাধান ঃ (i) $y = \dfrac{1}{2}x^2 + 2x + 5$

এখানে x এর সকল বাস্তব মানের জন্য y এর মান বাস্তব হবে।

$\therefore D_f = \mathbb{R}$

আবার, $y = \dfrac{1}{2}x^2 + 2x + 5$

$\Rightarrow x^2 + 4x + 10 = 2y$

$\Rightarrow (x+2)^2 = 2y - 6$

$= 2(y-3)$

$\therefore$ প্যারাবোলায় শীর্ষবিন্দু $= (x + 2 = 0, y - 3 = 0)$

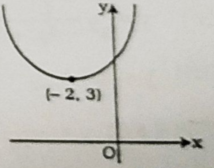
$= (x = -2, y = 3)$

$= (-2, 3)$

$\therefore$ শীর্ষবিন্দুর কোটি $= 3$

$\therefore R_f = [$শীর্ষবিন্দুর কোটি$, \infty)$

$= [3, \infty)$



অন্যভাবে রেঞ্জ নির্ণয় ঃ

$y = \dfrac{1}{2}x^2 + 2x + 5$

$\Rightarrow x^2 + 4x + (10 - 2y) = 0$

এখানে x এর মান বাস্তব হবে যদি নিশ্চায়ক ≥ 0 হয়।

$\Rightarrow 16 - 4(10 - 2y) \geq 0$

$\Rightarrow -24 + 8y \geq 0$

$\Rightarrow y \geq 3$

$\therefore R_f = \{y : y \geq 3\}$

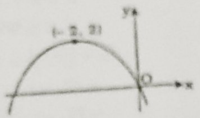
$= [3, \infty)$

(iii) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x$

এখানে x এর সকল বাস্তব মানের জন্য y এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore D_f = \mathbb{R}$

আবার, $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x$ প্যারাবোলার সমীকরণ।



$\Rightarrow x^2 + 4x = -2y$

$\Rightarrow (x+2)^2 = -2(y-2)$

$\therefore$ প্যারাবোলার শীর্ষবিন্দু $= (x + 2 = 0, y - 2 = 0)$

$= (-2, 2)$

শীর্ষবিন্দুর কোটি = 2

$\therefore R_f = (-\infty,$ শীর্ষবিন্দুর কোটি$]$

$= (-\infty, 2]$

অন্যভাবে রেঞ্জ নির্ণয় ঃ

$$y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x + 2y = 0$$

এখানে x এর মান বাস্তব হবে যদি নিশ্চায়ক ≥ 0 হয়।

$$\Rightarrow 16 - 4 \cdot 2y \geq 0$$

$$\Rightarrow y \leq 2$$

$\therefore R_f = \{y : y \leq 2\}$

$= (-\infty, 2]$

12. খণ্ডিত ফাংশন (Piece wise function) এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় ঃ

যদি কোন ফাংশন ডোমেনের বিভিন্ন অংশের জন্য ভিন্ন ভিন্নভাবে সংজ্ঞায়িত হয় তবে তাকে খণ্ডিত ফাংশন বলা হয়।

$$y = \begin{cases} f_1(x) & \text{যখন } x < a \\ f_2(x) & \text{যখন } a \leq x < b \\ f_3(x) & \text{যখন } x \geq b \end{cases}$$ একটি খণ্ডিত ফাংশন।

এখানে $x < a$, $a \leq x < b$ এবং $x \geq b$ ব্যবধিতে y এর মান সংজ্ঞায়িত। সুতরাং ব্যবধিগুলির সংযোগ (union) সেটি ফাংশনটির ডোমেন হবে।

$\therefore D_f = \{x : x < a\} \cup \{x : a \leq x < b\} \cup \{x : x \geq b\}$

$= (-\infty, a) \cup [a, b) \cup [b, \infty)$

$= (-\infty, \infty)$

$= \mathbb{R}$

আবার প্রত্যেক ব্যবধিতে বিদ্যমান সকল y এর মানের সেট রেঞ্জ হবে। নিচে উদাহরণের সাহায্যে খণ্ডিত ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করা হলো।

উদাহরণ-21. নিচের ফাংশনগুলির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find domain and range of the following functions]

(i) $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{যখন } 0 < x < 1 \\ 10 & \text{যখন } 1 < x \leq 2 \\ 15 & \text{যখন } 2 < x \leq 3 \end{cases}$

(ii) $y = \begin{cases} 1 - x & \text{যখন } -1 \leq x < 1 \\ 0 & \text{যখন } 1 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 4 & \text{যখন } x > 2 \end{cases}$ [NUB-2007]

সমাধান ঃ (i) $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{যখন } 0 < x < 1 \\ 10 & \text{যখন } 1 < x \leq 2 \\ 15 & \text{যখন } 2 < x \leq 3 \end{cases}$

এখানে $0 < x < 1$, $1 < x \leq 2$ এবং $2 < x \leq 3$ ব্যবধিতে f(x) এর মান সংজ্ঞায়িত

$\therefore D_f = \{x : 0 < x < 1\} \cup \{x : 1 < x \leq 2\} \cup \{x : 2 < x \leq 3\}$

$= (0, 1) \cup (1, 2] \cup (2, 3]$

$= (0, 1) \cup (1, 3]$

আবার, $0 < x < 1$ ব্যবধিতে $f(x) = 5$

$1 < x \leq 2$ ব্যবধিতে $f(x) = 10$

এবং $2 < x \leq 3$ ব্যবধিতে $f(x) = 15$

$\therefore R_f = \{5, 10, 15\}$

(ii) $y = \begin{cases} 1 - x & \text{যখন } -1 \leq x < 1 \\ 0 & \text{যখন } 1 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 4 & \text{যখন } x > 2 \end{cases}$

এখানে $-1 \leq x < 1$, $1 \leq x \leq 2$ এবং $x > 2$ ব্যবধিতে y এর মান সংজ্ঞায়িত।

$\therefore D_f = \{x : -1 \leq x < 1\} \cup \{x : 1 \leq x \leq 2\} \cup \{x : x > 2\}$

$= [-1, 1) \cup [1, 2] \cup (2, \infty)$

$= [-1, \infty)$

আবার $-1 \le x < 1$ ব্যবধিতে $y = 1 - x$ হতে পাই $0 < y \le 2$

$1 \le x \le 2$ ব্যবধিতে $y = 0$

এবং $2 < x$ ব্যবধিতে $y = x^2 - 4$ হতে পাই $0 < y$

$\therefore R_f = \{y : 0 < y \le 2\} \cup \{0\} \cup \{y : y > 0\}$

$= (0, 2] \cup \{0\} \cup (0, \infty)$

$= [0, \infty)$

13. পরম মান ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় ঃ

পরম মান ফাংশনকে খণ্ডিত ফাংশনে প্রকাশ করে ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করতে হয়। $a < b$ এর জন্য একটি পরমমান ফাংশনকে নিম্নরূপে খণ্ডিত ফাংশনে প্রকাশ করা যায়।

$$f(x) = |x - a| + |x - b|$$

$x < a$ এর জন্য $f(x) = -(x - a) - (x - b) = a + b - 2x$

$a \le x < b$ এর জন্য $f(x) = (x - a) - (x - b) = b - a$

$b \le x$ এর জন্য $f(x) = (x - a) + (x - b) = 2x - a - b$

$$\text{খণ্ডিত ফাংশন, } f(x) = \begin{cases} a + b - 2x & \text{যখন } x < a \\ b - a & \text{যখন } a \le x < b \\ 2x - a - b & \text{যখন } b \le x \end{cases}$$

উদাহরণ-22. নিচের ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find domain and range of the following functions]

(i) $f(x) = |x + 1| + |x - 1|$ [NUH(NM)-2005]

(ii) $f(x) = |x - 1| + |x + 3|$ [NUH-2008]

(iii) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ [DUH-1981]

সমাধান ঃ (i) $f(x) = |x + 1| + |x - 1|$

$x < -1$ এর জন্য $f(x) = -(x + 1) - (x - 1)$

$= -2x$

$-1 \le x < 1$ এর জন্য $f(x) = x + 1 - (x - 1)$

$= 2$

$1 \le x$ এর জন্য $f(x) = x + 1 + x - 1$

$= 2x$

$$\text{সুতরাং আমরা পাই, } y = f(x) = \begin{cases} -2x & \text{যখন } x < -1 \\ 2 & \text{যখন } -1 \le x < 1 \\ 2x & \text{যখন } 1 \le x \end{cases}$$

$\therefore D_f = \{x : x < -1\} \cup \{x : -1 \le x < 1\} \cup \{x : 1 \le x\}$

$= (-\infty, -1) \cup [-1, 1) \cup [1, \infty) = \mathbb{R}$

আবার, $x < -1$ ব্যবধিতে $y > 2$

$-1 \le x < 1$ ব্যবধিতে $y = 2$

$1 \le x$ ব্যবধিতে $y > 2$

$\therefore R_f = \{y : y > 2\} \cup \{2\}$

$= (2, \infty) \cup \{2\}$

$= [2, \infty)$

(ii) $f(x) = |x - 1| + |x + 3|$

$= |x + 3| + |x - 1|$

$x < -3$ এর জন্য $f(x) = -(x + 3) - (x - 1) = -2x - 2$

$-3 \le x < 1$ এর জন্য $f(x) = (x + 3) - (x - 1) = 4$

$1 \le x$ এর জন্য $f(x) = (x + 3) + (x - 1) = 2x + 2$

$$\text{সুতরাং আমরা পাই, } y = f(x) = \begin{cases} -2x - 2 & \text{যখন } x < -3 \\ 4 & \text{যখন } -3 \le x < 1 \\ 2x + 2 & \text{যখন } 1 \le x \end{cases}$$

$\therefore D_f = \{x : x < -3\} \cup \{x : -3 \le x < 1\} \cup \{x : 1 \le x\}$

$= (-\infty, -3) \cup [-3, 1) \cup [1, \infty)$

$= \mathbb{R}$

আবার, $x < -3$ ব্যবধিতে $y > 4$

$-3 \le x < 1$ ব্যবধিতে $y = 4$

$1 \le x$ ব্যবধিতে $y > 4$

$\therefore R_f = \{y : y > 4\} \cup \{4\}$

$= [4, \infty)$

(iii) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$

$x < 0$ এর জন্য $f(x) = \dfrac{x}{-x} = -1$

$0 < x$ এর জন্য $f(x) = \dfrac{x}{x} = 1$ [$x = 0$ এর জন্য $f(x)$ বিদ্যমান নয়]

$$\text{সুতরাং আমরা পাই, } y = f(x) = \begin{cases} -1 & \text{যখন } x < 0 \\ 1 & \text{যখন } 0 < x \end{cases}$$

$\therefore D_f = \{x : x < 0\} \cup \{x : x > 0\}$

$= \mathbb{R} - \{0\}$ এবং $R_f = \{-1, 1\}$

14. সূচকীয় ফাংশন ও লগারিদিমিক ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় ঃ

$y = a^x$ কে সূচকীয় ফাংশন বলা হয়।

এখানে x এর সকল বাস্তব মানের জন্য y এর মান বিদ্যমান।

$\therefore D_f = \mathbb{R}$

আবার, $y = a^x$

$\Rightarrow x = \log_a y$ লগারিদিমিক ফাংশন।

এখানে $y > 0$ এর জন্য কেবলমাত্র x এর মান বিদ্যমান।

$\therefore R_f = \{y : y > 0\}$

$= (0, \infty)$

নোট ঃ $\log_a (0)$ বা $\log_a$ (ঋণাত্মক সংখ্যা) বিদ্যমান নয়।

উদাহরণ–23. নিম্নের ফাংশনগুলির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Find domain and range of the following functions]

(i) $f(x) = e^x$

(ii) $f(x) = ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

সমাধান ঃ (i) $f(x) = e^x$

এখানে x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ এর মান বিদ্যমান।

$\therefore D_f = \mathbb{R}$

আবার, $y = f(x) = e^x$

$\Rightarrow e^x = y$

$\Rightarrow x = ln\, y$

এখানে কেবলমাত্র $y > 0$ এর জন্য x এর মান বিদ্যমান।

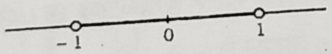
$\therefore R_f = \{y : y > 0\}$

$= (0, \infty)$

(ii) $f(x) = ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

এখানে $f(x)$ এর মান বিদ্যমান হবে যদি

$\frac{1+x}{1-x} > 0$ হয়।



$\Rightarrow \frac{x+1}{x-1} < 0$

$\Rightarrow -1 < x < 1$

$\therefore D_f = \{x : -1 < x < 1\}$

$= (-1, 1)$

আবার, $y = f(x) = ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

$\Rightarrow ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = y$

$\Rightarrow \frac{1+x}{1-x} = e^y$

$\Rightarrow 1 + x = e^y - xe^y$

$\Rightarrow x = \frac{e^y - 1}{e^y + 1}$

এখানে y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore R_f = \mathbb{R}$

উদাহরণ–24. $f(x) = ln(x-2)$ ফাংশনটির D_f এবং R_f নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ আমরা জানি লগারিদম শুধু ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত।

$\therefore f(x) = ln(x-2)$ এর মান বাস্তব হবে যদি $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$ হয়।

$\therefore$ ডোমেন $D_f = \{x : x > 2\} = (2, \infty)$

আবার ধরি $y = f(x) = ln(x-2) \Rightarrow x - 2 = e^y$

$\Rightarrow x = e^y + 2$

y এর সকল বাস্তব মানের জন্য e^y বাস্তব, ফলে $x = e^y + 2$ বাস্তব।

$\therefore$ রেঞ্জ $R_f = \mathbb{R}$.

15. ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় ঃ

(i) $y = \sin x$

x এর সকল বাস্তব মানের জন্য y এর মান বিদ্যমান।

$\therefore D_f = \mathbb{R}$

আবার, $x = \sin^{-1} y$

এখানে x এর মান কেবলমাত্র $-1 \le y \le 1$ ব্যবধিতে বিদ্যমান।

$\therefore R_f = \{y : -1 \le y \le 1\}$

$= [-1, 1]$

(ii) $y = \cos x$

সাইন ফাংশনের অনুরূপ, $D_f = \mathbb{R}$ এবং $R_f = [-1, 1]$

(iii) $y = \tan x$

এখানে $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ এর জন্য y এর মান বিদ্যমান নয়।

এর এইমান সমূহ ব্যতীত অবশিষ্ট সকল বাস্তব মানের জন্য y তার মান বিদ্যমান।

$\therefore D_f = \mathbb{R} - \left\{\dots -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots\right\}$

আবার, $y = \tan x \Rightarrow x = \tan^{-1} y$

এখানে y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বিদ্যমান।

$\therefore R_f = \mathbb{R}$

[illegible] $y = \cot x$

[illegible] $= 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ এর জন্য y এর মান বিদ্যমান নয় এবং অবশিষ্ট [illegible] জন্য y এর মান বিদ্যমান।

$D_f = R - \{\cdots - 2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \cdots\}$

[illegible] $y = \cot x$

$\Rightarrow x = \cot^{-1} y$

[illegible] y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বিদ্যমান।

$R_f = R$

(v) $y = \sec x$

এখানে $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ এর জন্য y এর মান বিদ্যমান নয় এবং অবশিষ্ট সকল বাস্তব মানের জন্য y এর মান বিদ্যমান।

$$D_f = R - \left\{\cdots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \cdots\right\}$$

আবার, $y = \sec x$

$\Rightarrow x = \sec^{-1} y$

এখানে $-1 < y < 1$ ব্যতীত y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বিদ্যমান।

$R_f = R - (-1, 1)$

$= (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

(vi) $y = \operatorname{cosec} x$

এখানে $x = n\pi$; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ এর জন্য y এর মান বিদ্যমান নয় এবং অবশিষ্ট সকল বাস্তব মানের জন্য y এর মান বিদ্যমান।

$\therefore D_f = R - \{\cdots - 2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \cdots\}$

আবার, $y = \operatorname{cosec} x$

$\Rightarrow x = \operatorname{cosec}^{-1} y$

এখানে $-1 < y < 1$ ব্যতীত y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বিদ্যমান।

$\therefore R_f = R - (-1, 1)$

$= (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

নোট : বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ পরস্পর পরিবর্তন হবে।

উদাহরণ-25. নিম্নলিখিত প্রত্যেকটি ফাংশনের ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।

(i) $f(x) = \sin 2x$, (ii) $f(x) = \cos 3x$ এবং (iii) $f(x) = \tan 4x$.

সমাধান : (i). আমরা জানি সাইন অনুপাতের সর্বনিম্ন মান -1 এবং সর্বোচ্চ মান $+1$. সুতরাং সকল $x \in \mathbb{R}$ এর জন্য $f(x) = \sin 2x$ এর মান বাস্তব হবে এবং এইমান -1 ও 1 সহ এদের মধ্যবর্তী বাস্তব সংখ্যা হবে। অর্থাৎ

$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq f(x) = \sin 2x \leq 1$$

$\therefore$ ডোমেন $D_f = \mathbb{R}$ এবং রেঞ্জ $R_f = [-1, 1]$

(ii) আমরা জানি কোসাইন অনুপাতের সর্বনিম্ন মান -1 এবং সর্বোচ্চ মান $+1$. সুতরাং সকল $x \in \mathbb{R}$ এর জন্য $f(x) = \cos 3x$ এর মান বাস্তব হবে এবং এইমান -1 ও 1 সহ এদের মধ্যবর্তী বাস্তব সংখ্যা হবে। অর্থাৎ

$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq f(x) = \cos 3x \leq 1$$

$\therefore$ ডোমেন $D_f = \mathbb{R}$ এবং রেঞ্জ $R_f = [-1, 1]$.

(iii) $f(x) = \tan 4x = \pm\infty$ হলে ফাংশনটি অসংজ্ঞায়িত হয়।

আবার $\tan 4x = \pm\infty$ হলে পাই

$$4x = (2n+1)\frac{\pi}{2}; n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

$$\Rightarrow x = (2n+1)\frac{\pi}{8}; n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

$$\Rightarrow x = \cdots, \frac{-3\pi}{8}, \frac{-\pi}{8}, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \cdots$$

x এর এই মানগুলি ব্যতীত অন্য সকল বাস্তব সংখ্যার সেট ডোমেন হবে এবং রেঞ্জ হবে সকল বাস্তব সংখ্যার সেট।

$$\therefore \text{ ডোমেন } D_f = \mathbb{R} - \left\{\cdots, \frac{-3\pi}{8}, \frac{-\pi}{8}, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \cdots\right\}$$

এবং রেঞ্জ $R_f = \mathbb{R}$.

উদাহরণ-26. দেখাও যে ফাংশন $f(x) = \frac{x}{\sin(1/x)}$ এর $D_f = \mathbb{R} - \left\{\cdots -\frac{1}{2\pi}, -\frac{1}{\pi}, 0, \frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \cdots\right\}$ এবং $R_f = \mathbb{R} - \{0\}$. **[NUH–2004]**

সমাধান : $x = 0$ অথবা $\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ হলে $f(x) = \frac{x}{\sin(1/x)}$ ফাংশনটি অসংজ্ঞায়িত হয়।

এখন $\sin\frac{1}{x} = 0$ হলে পাই

$$\frac{1}{x} = n\pi, n \in Z$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{n\pi}, n \in Z - \{0\} = \cdots, -\frac{1}{2\pi}, -\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \cdots$$

সুতরাং $x = \cdots, -\frac{1}{2\pi}, -\frac{1}{\pi}, 0, \frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \cdots$

এর জন্য ফাংশন অসংজ্ঞায়িত হয়। এই মানগুলি ডোমেনে স্থান পাবে না।

$$\therefore \text{ ডোমেন } D_f = \mathbb{R} - \left\{\cdots, -\frac{1}{2\pi}, -\frac{1}{\pi}, 0, \frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \cdots\right\}$$

আবার, যেহেতু $x \neq 0$. সুতরাং $f(x) \neq 0$

$\therefore$ রেঞ্জ $R_f = \mathbb{R} - \{0\}$.

1(C) অধ্যায়ে শিক্ষার্থীদের সুবিধার্থে আরো অনেক ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ সম্পর্কে চিত্রের সাহায্যে আলোচনা করা হইয়াছে। লেখচিত্র থেকে অতি সহজেই ডোমেন ও রেঞ্জ সম্পর্কে ধারণা করা যায়।