MATEMÁTICA ORIENTADA AL PENSAMIENTO COMPUTACIONAL

1° AÑO

Clase Nº3: PROPIEDADES Y REPRESENTACIÓN DE RELACIONES

Contenidos:

- Propiedades de una relación.
- Clasificación.
- Relaciones de equivalencia y orden.
- Clases de equivalencia
- Diagrama de Hasse

1. Presentación:

En la clase anterior estudiamos los conceptos de producto cartesiano y relaciones. En esta clase profundizaremos el estudio de relaciones ya que juegan un papel importante en la teoría de la computación para elaborar bases de datos y valorar la correspondencia que existe entre sus registros, entre otros procesos.

Te invitamos a visitar un recurso web que nos muestra un panorama amplio en el que tiene aplicación el primero de los conceptos principales *que estudiaremos en la case https://www.youtube.com/watch?v=lp-1rvtRYQg*

1. Desarrollo y Actividades:

En la clase anterior estudiamos el producto cartesiano que ocurre cuando se ejecuta el primer paso de la operación de una sentencia con el comando JOIN, y las relaciones que se pueden determinar a partir de este entre los conjuntos vinculados.

Una relación entre dos conjuntos no vacíos A y B, quedó definida como un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$, cuyos elementos son los pares ordenados para los cuales es verdadera una propiedad relativa a los elementos de A y B. Si no recuerdas bien cómo desarrollamos este tema en la clase 2, te invitamos a que la revises nuevamente, porque los conceptos que estudiaremos en esta nueva clase son una continuación del tema relaciones. Si te quedan dudas sobre este tema recuerda que siempre podrás consultar en el foro o en las tutorías cuando nos encontremos. Como en las clases anteriores, es necesario apropiarse de este material por medio de una lectura atenta de la clase, los recursos complementarios propuestos en su desarrollo y la bibliografía indicados, además de la realización de las actividades propuestas.

PROPIEDADES DE RELACIONES

Para comprender cómo se realiza una estructura de datos y el análisis de algoritmos en la teoría de la computación, es necesario estudiar las propiedades que las relaciones pueden verificar desde el punto de vista matemático. Ello tiene el propósito de fundamentar las bases de la informática y la computación. Las propiedades de una relación se estudian en relaciones aplicadas sobre un mismo conjunto. En este curso, analizaremos las propiedades de relaciones finitas, permitiendo representarlas mediante grafos dirigidos facilitando la comprensión de estas.

Propiedad Reflexiva

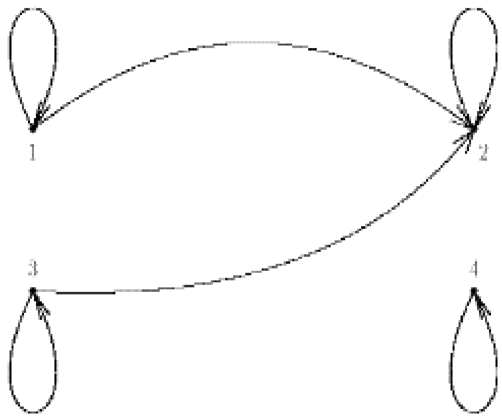
Una relación R sobre un conjunto A es reflexiva cuando cada elemento de A está relacionado consigo mismo, esto es, si $a \in A$ entonces $(a, a) \in R$. Por tanto, si se encuentra al menos un elemento del conjunto AA que no se halle relacionado consigo mismo, R es no reflexiva si hay algún par reflexivo, R es arreflexiva si no hay ningún par reflexivo.

En términos del digrafo de la relación, R es reflexiva si en cada vértice hay un bucle.

Ejemplo:

Sea el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y R una relación de A en A establecida como

$$R = \{(1,1), (1,2), (2,2), (3,3), (3,2), (4,4)\}$$



¿Qué característica tendrá la matriz booleana de una relación reflexiva?

Propiedad Simétrica

Una relación R sobre un conjunto A es simétrica si cada vez que

$$(a, b) \in R \quad \text{entonces} \quad (b, a) \in R$$

R es *no simétrica* si hay algún par simétrico (pero no todos), y si no hay ningún par simétrico, se dice que R es *asimétrica*.

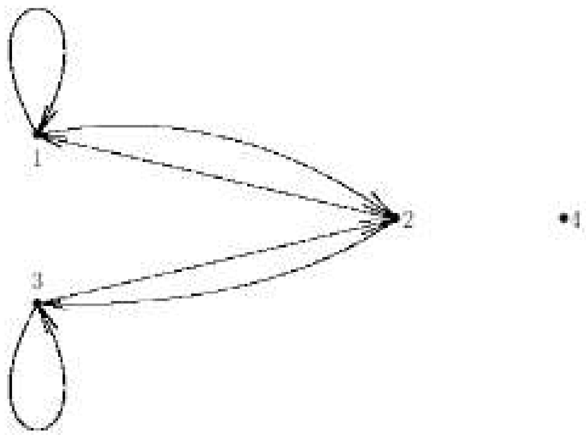
En términos del grafo de la relación, R es simétrica si por cada flecha que une dos vértices en un sentido, hay una flecha (entre los mismos vértices) en el sentido opuesto.

Ejemplos:

1. Sea el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y R una relación de A en A establecida como

$$R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (3,3)\}$$

Además de la observación directa sobre los pares ordenados de R en su escritura por extensión, a través del dígrafo se puede saber fácilmente si es simétrica.

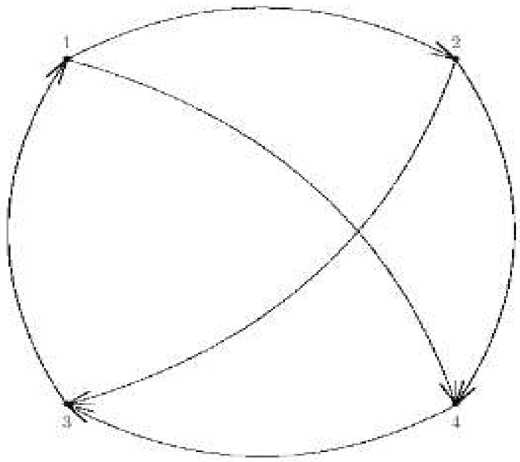


2. Sea el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y R una relación de AxA establecida como

$$R = \{(1,2), (1,4), (2,3), (2,4), (3,1), (4,3)\}$$

Además de la observación directa sobre los pares ordenados de R en su escritura por extensión, a través del dígrafo se puede saber fácilmente que R es *asimétrica.*

- En el dígrafo, vemos que no hay bucles y hay una sola arista que conecta a los nodos



¿Qué característica tendrá la matriz booleana de una relación simétrica?

¿Qué característica tendrá la matriz booleana de una relación asimétrica?

Propiedad Antisimétrica

Una relación R sobre un conjunto A es antisimétrica si cuando $(a, b) \in R$ y $(b, a) \in R$ se cumple que $a = b$, en lenguaje formal:

$$\forall a, b \in A^2 | aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$$

Fijémonos que es casi la misma condición que define a la propiedad simétrica, solo que tiene una condición adicional que es la igualdad.

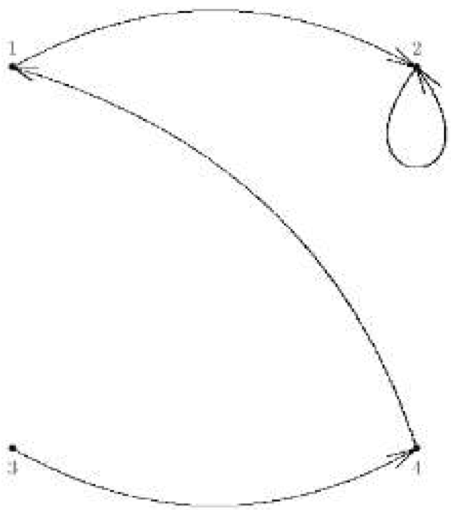
Esta propiedad se puede enunciar de forma equivalente al enunciado anterior por aplicación de la contrarrecíproco:

$R \subseteq A^2$ es antisimétrica sí $\forall a, b \in A^2 | a \neq b \Rightarrow aRb \,\underline{\vee}\, bRa$

En términos de grafo de la relación. R es antisimétrica si no hay ningún par de flechas en sentidos opuestos que unen 2 vértices distintos.

Veamos un ejemplo:

Sea el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y R una relación de A en A establecida como $R = \{(1,2), (2,2), (4,1), (3,4)\}$ El digrafo que la representa es:



En el dígrafo de R se ve que entre cada par de vértices diferentes solo hay una arista y para un vértice hay un bucle. Por lo tanto, esta relación es antisimétrica ya que no hay simetría en los pares ordenados de diferentes componentes, por lo cual, no hay un “ida y vuelta” entre diferentes elementos

- La siguiente relación, $S \subseteq B^2$, $S = \{(1, 2)\}$ definida sobre $B = \{1, 2, 3,4\}$ ¿es antisimétrica?

Mira el siguiente video https://www.youtube.com/watch?v=bEZ4tb6rn2E

Propiedad Transitiva

Una relación R sobre un conjunto A es transitiva si cuando

$$(a, b) \in R \text{ y } (b, c) \in R, \text{ entonces } (a, c) \in R.$$

En lenguaje formal:

$$R \text{ es transitiva} \Leftrightarrow \forall a, \forall b, \forall c\text{: } (a, b) \in R \wedge \text{y } (b, c) \in R \Longrightarrow (a, c) \in R$$

Observación: si la relación R sobre un conjunto A tiene *un solo* par ordenado, entonces R es transitiva.

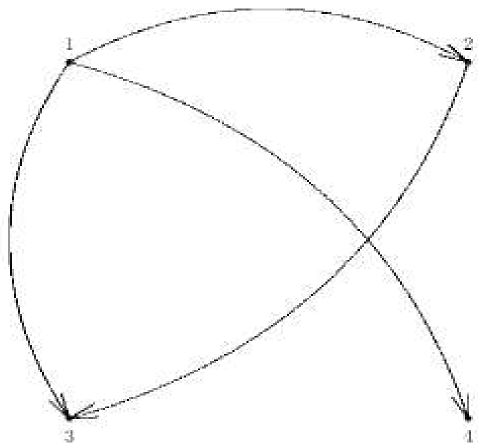
R es *no transitiva* si hay algunos pares ordenados en los que no pueden establecer la transitividad, R es *atransitiva* si no hay pares ordenados en los que no pueden establecerse la transitividad

Ejemplos:

1. Sea el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y R una relación de A en A establecida como

$$R = \{(1,2), (1,3), (1,4)\}$$

El dígrafo de R es el siguiente:



¿Cuál sería el criterio para verificar que R es transitiva a través de la observación directa sobre sus pares ordenados en la escritura por extensión, el dígrafo de R?

2. Sea el conjunto $B = \{1, 2, 3,4\}$ y la relación $S_1 \subseteq B^2$,

$$S_1 = \{(1,2), (1,3), (2,2)\}$$

Vemos que

$$(1,2) \in S_1 \wedge (2,2) \in S_1 \Longrightarrow (2,2) \in S_1$$

$(1,3) \in S_1$, pero *no hay otro par ordenado* con que se pueda relacionar para establecer la transitividad, por lo tanto, S_1 es *no transitiva*.

3. Sea el conjunto $B = \{1, 2, 3,4\}$ y la relación $S \subseteq B^2$,

$$S = \{(1, 2)\ (3,4)\}$$

No es posible establecer alguna relación de transitividad, por lo tanto, S es *atransitiva*

Mira los siguientes videos:

https://www.youtube.com/watch?v=CWBz004a3WU&t=106s

CLASIFICACIÓN DE RELACIONES

Las relaciones binarias (definidas sobre el mismo conjunto) se pueden clasificar según las propiedades que verifican.

Relaciones de equivalencia

Una relación R sobre un conjunto AxA es de ***equivalencia*** si es reflexiva, simétrica y transitiva.

Ejemplo:

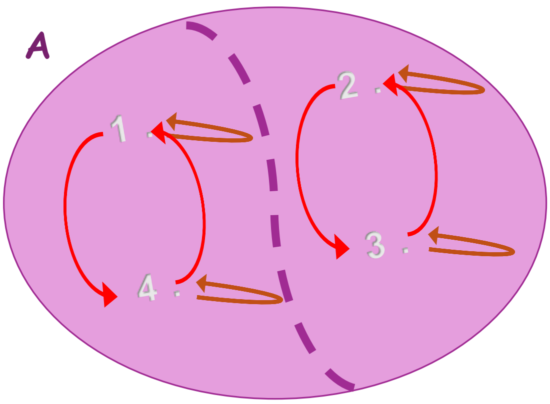
1. Sea el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y una relación dada:

$$R = \{(1,1), (1,4), (4,1), (4,4), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3)\}$$

Se cumple que R es de equivalencia por los siguientes motivos:

- *Propiedad Reflexiva*: los pares (1,1), (2,2), (3,3) y (4,4) pertenecen a R para todos los elementos de AxA.
- *Propiedad Simétrica*: los pares (1,4) y (4,1) pertenecen a R, estos otros (2,3) y (3,2) pertenecen a R y el resto de los pares son simétricos consigo mismos.
- *Propiedad transitiva:* Si los pares (1,4) y (4,4) pertenecen a R, entonces (1,4) pertenece a R. El resto de los pares de la relación cumplen esta propiedad.

Observa el dígrafo de la relación:



Notarás que los elementos han quedado "separados" en subconjuntos. Se dice que la relación de equivalencia determina una *partición* del conjunto A en clases de **equivalencia**. En este ejemplo, las clases son A_1 y A_2, determinando el conjunto partición de A, P_A, o conjunto cociente $\frac{\boldsymbol{A}}{\sim}$

$$P_A = \{A_1, A_2\}, \qquad \frac{\boldsymbol{A}}{\sim} = \{A_1, A_2\}$$

Los elementos que pertenecen a una clase o partición, decimos que son equivalentes entre ellos, por ejemplo, en la clase A_1, el 1 y el 4 son equivalentes: **1~4**, en la clase A_2, el 2 y el 3 son equivalentes: **2~3**

En una relación de equivalencia, las clases o particiones cumplen:

- Ninguna partición es vacía
- Las clases son disjuntas entre sí
- La unión de las partes es igual al conjunto

Una relación de equivalencia permite clasificar los elementos de un conjunto en clases de equivalencia, de modo que los elementos de cada clase tienen una misma propiedad. Toda relación de equivalencia determina una partición, toda partición corresponde a una relación de equivalencia. Mira el siguiente video:

https://www.youtube.com/watch?v=SHXGO5aPDM4&t=316s

Relaciones de orden

Es muy importante en matemáticas saber ordenar los elementos de un conjunto en base a ciertas condiciones y criterios convenientes. Es así que, en matemáticas, el orden queda determinado a través del término preceder (ir delante, anteceder): se comparan dos elementos de un par ordenado que pertenecen a una relación de orden y se puede determinar que elemento se ubica delante de otro Si los elementos $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ determinan un par ordenado de una relación de orden, $(a, b) \in R$, decimos que $\boldsymbol{a}$ precede a $\boldsymbol{b}$, en ese caso, a y b son comparables. Simbólicamente, si $\boldsymbol{a}$ precede a $\boldsymbol{b}$, se escribe como

$$a \preccurlyeq b$$

Relaciones de orden amplio

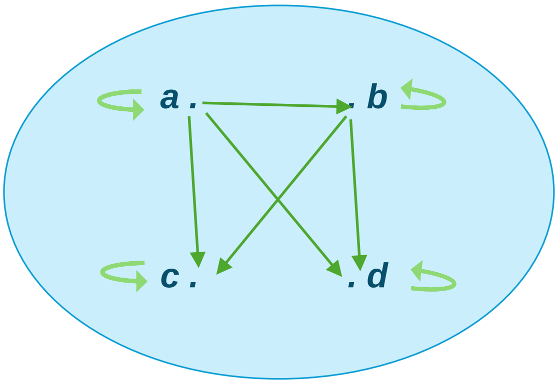
Sea R una relación binaria en un conjunto A, esto es, $R \subseteq A2$. Si R satisface las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva, se dice que R es una relación de orden amplio simplemente R es una relación de orden

Ejemplo:

Sea el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ y la relación $R \subseteq A^2$ determinada por

$$R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, c), (a, c), (b, d), (a, d)\}$$

La relación R es reflexiva, antisimétrica y transitiva (verifícalo), por lo cual decimos que ***R*** es un orden. Veamos su representación mediante grafos



Si tomamos, por ejemplo, el par ordenado (b, c), decimos que b y c son comparables: $b \preccurlyeq c$

¿Hay elementos en ***R*** que no son comparables?

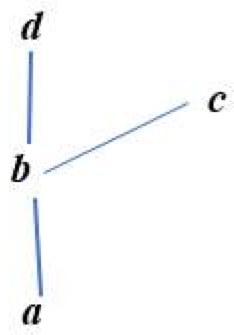
Si en una relación de orden hay elementos que no son comparables (no se establecen entre ellos la relación $\preccurlyeq$), decimos que el orden es parcial, en cambio, si todos los elementos son comparables, decimos que el *orden es total*

Diagrama de Hasse

Observando el digrafo, resulta dificultoso "ver" como los elementos están ordenados. Por ello, resulta más sencillo utilizar otro tipo de gráfica que se obtiene de una simplificación de la representación por digrafo. Ese tipo de grafica se denomina *diagrama de Hasse*, en honor al matemático Helmut Hasse (1898 - 1979). La idea del diagrama de Hasse es eliminar gráficamente cierta información que se sabe que se cumple, resultando un gráfico más conveniente para visualizar el orden de la relación. Cabe recordar que las representaciones gráficas de las relaciones se aplican sobre conjuntos finitos Para obtener el diagrama de Hasse se elimina la información redundante del dígrafo y se simplifica lo restante mediante los siguientes pasos:

- Se suprimen los bucles (ya se sabe que la relación es reflexiva)
- Se suprimen las aristas transitivas (ya se sabe que la relación es transitiva)
- Sólo se dibujan las aristas entre elementos diferentes que estén relacionados
- Puede omitirse el sentido de las aristas (las flechas) si se las dibujan de abajo hacia arriba:

El digrafo del ejemplo anterior queda representado por medio de un diagrama de Hasse de la siguiente manera:



el diagrama de Hasse nos permite ver como los elementos están

ordenados, utilizando el símbolo $\preccurlyeq$:

$$a \preccurlyeq b \preccurlyeq d \quad a \preccurlyeq b \preccurlyeq c$$

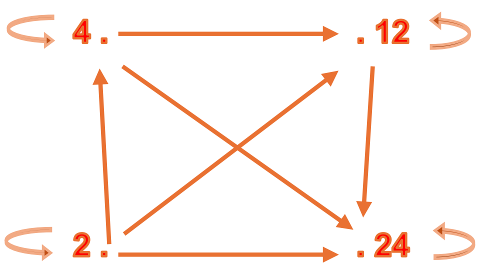
Claramente se ve que $d \not\preccurlyeq c$ (no están ordenados) ya que no son comparables, también se puede escribir que d y c son no comparables de la siguiente manera: $d \parallel c$ Por lo analizado, R es *un orden parcial.*

Veamos otro ejemplo. Sea $M = \{2, 4, 12, 24\}$, y sea la relación $R \subseteq M^2$ definida como $\forall x \in M, \forall y \in M, (x, y) \in R \Leftrightarrow \boldsymbol{x}$ divide a $\boldsymbol{y}$

$R = \{(2,2)(4,4)(12,12)(24,24)(2,4)(2,12)(2,24)(4,12)(4,24)(12,24)\}$

R es una relación de orden (verifica que cumple la propiedad reflexiva, antisimétrica y transitiva).

Veamos las representaciones gráficas:



Dígrafo de R

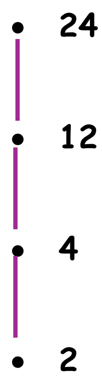


Diagrama de Hass de R

Observa que, en el digrafo, es más dificultoso ver como los elementos están ordenados, pero no sucede lo mismo con el diagrama de Hasse (en este ejemplo el diagrama es del tipo lineal) que claramente muestra los elementos del conjunto M ordenados

Orden estricto

Sea R una relación binaria en un conjunto AxA, esto es, $R \subseteq A^2$. Si R satisface las propiedades, asimétrica y transitiva, se dice que R es una relación de *orden estricto.*

Ejemplo Sea $M = \{2, 4, 12, 24\}$ sea la relación $R \subseteq M^2$definida como

$$\forall x \in M, \forall y \in M, (x, y) \in R \Leftrightarrow x < y$$

$$R = \{(2,4)(2,12)(2,24)(4,12)(4,24)(12,24)\}$$

¿se puede representar una relación de orden estricto mediante un diagrama de Hasse? La inclusión " $\subset$ " entre conjuntos, ¿es un orden estricto?

Actividades:

1. Sea el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$. Representa con un digrafo y analiza las propiedades de cada una de las siguientes relaciones definidas sobre A

$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (2,3)\}$

$B = \{(x,y) \ / \ x > y\}$

$S = \{(1,1), (3,2), (2,3)\}$

$M = \{(x,y) \ / \ x + y = 4\}$

$T = \{(1,2), (2,1), (3, 1)\}$

$N = \{(x,y) \ / \ x \text{ es múltiplo de } y\}$

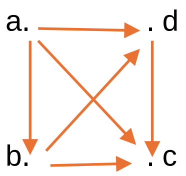
$V = \{(1,2), (2,3), (1.3), (3,1)\}$

$C = \{(x,y) \ / \ x \leq y\}$

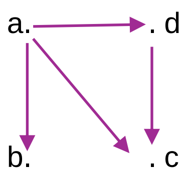
$W = \{(1,2), (2,3)\}$

2. Indica si las siguientes relaciones son de orden, (parcial o total, amplio o estricto) o de equivalencia (en este caso, representa por extensión el conjunto cociente)

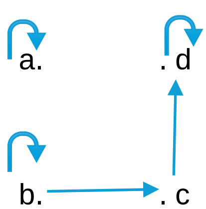
a)



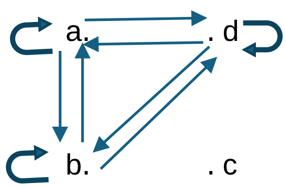
b)



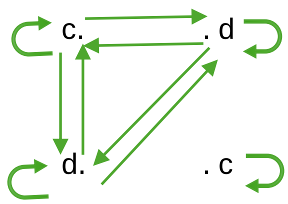
c)



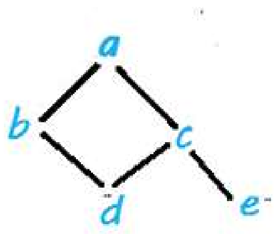
d)



e)



3. Sea el conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$ ordenado por una relación R como se muestra en el siguiente diagrama de Hasse



   a. Determina por extensión la relación R.
   b. Indica si R es una relación de orden parcial o total. Si es un orden parcial, ¿Cuáles son los elementos no comparables?
   c. Determina una relación $S \subset R$ de manera que S sea un orden total. Representa por un diagrama de Hasse.

4. La relación en N, los números naturales definida por " x divide a y" es un orden parcial.

   a. Completa con el símbolo correcto: $\preccurlyeq$ o $\|$ (no comparable), entre cada par de números

   2 … . .8   18 … . .24   3 … … 9   5 … … 12

   b. Decir si cada uno de los siguientes subconjuntos de N es totalmente ordenado

   R = {24, 2, 6} S = {1, 3, 15, 5} A = {2, 8, 32, 4}

5. Analiza las propiedades de las siguientes relaciones definidas en N = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, marca con una X la casilla correspondiente cuando se cumpla la propiedad indicada.

<table>
<tr><th rowspan="2">RELACIONES</th><th colspan="5">PROPIEDADES</th><th rowspan="2">ORDEN</th><th rowspan="2">EQUIVALENCIA</th></tr>
<tr><th>reflexiva</th><th>Simétrica</th><th>Transitiva</th><th>Asimétrica</th><th>Antisimétrica</th></tr>
<tr><td>R_1:
...es divisor de...</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>R_2:
...es igual a...</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>R_3:
...es el doble de...</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>R_4:
...es menor que...</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>R_5:
...es mayor o igual a...</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Evaluación

Te invitamos a que accedas a completar el foro obligatorio en el aula de la asignatura en el campus virtual de la carrera. No olvides que siempre podrás volver a la teoría presentada en esta clase o hacer las preguntas que consideres necesarias en el foro correspondiente a esta clase, los encuentros sincrónicos o las tutorías presenciales

Actividad Integradora de Cierre:

En esta actividad integradora de cierre vamos a poner en juego todos los conocimientos que hemos recorrido juntos en esta clase. Tendremos en cuenta los tipos de ejercicios que realizamos, la teoría que leímos y los ejemplos que vimos en los diferentes recursos.

Dado el conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ y la relación:

$$R = \{(a,b),(a,c),(b,c),(c,b),(b,a),(c,a),(e,f),(f,e),(a,a),(b,b),$$
$$(c,c),(d,d),(e,e),(f,f)\}$$

a. Demuestra que R es una relación de equivalencia
b. Representa mediante un digrafo
c. Construye la matriz de la relación (procura que el orden de los elementos de la columna coincida con el orden de los elementos de las filas) y analiza que particularidad tiene la misma al ser una matriz de una relación de equivalencia
d. Determina por extensión las clases de equivalencia

Puedes consultar el siguiente video de la Licenciada María Alicia Pïñeiro para la realización de este ejercicio, también podrás ver ejemplos generales de relaciones de equivalencia:

https://www.youtube.com/watch?v=WZaEH8LRV8U&list=PLA-D111SLqMRVDM3lTgsagOxQg8JTQ9Aw&index=8

Cierre:

Te invitamos a que nos dejes tus impresiones sobre lo que aprendimos hoy a través de una intervención en el foro de la clase. También puedes compartir links de recursos, como artículos o videos, por ejemplo, que hayas buscado y te hayan parecido interesantes mientras estudiabas este tema.

Recuerda que es importante que participes de los foros, de los encuentros sincrónicos y en lo posible de las tutorías presenciales.

Bibliografía Obligatoria:

- Gonzáles Gutiérrez F.J. (2004), Capítulo 6 Relaciones. Apuntes de matemática discreta [archivo PDF]. Recuperado de: https://drive.google.com/file/d/17XgnjlRI0nSEwA9WVnZNylo5Dm1cWBEI/view?usp=sharing
- Lipschutz, S. (1970). Capítulo 1: Conjuntos y Subconjuntos. Teoría y Problemas de Teoría de Conjuntos y temas afines [archivo PDF]. Recuperado de: https://www.academia.edu/41341422/Teor%C3%ADa_de_conjuntos

y_temas_afines_Seymur_Lipschutz

- Rojo, O. A. (1996). Capítulo 3: Relaciones. Algebra I [archivo PDF]. Recuperado de https://bibliotecavirtual8denovpinas.files.wordpress.com/2020/08/algebra- i-armando-rojo-1.pdf