MATEMÁTICA ORIENTADA AL PENSAMIENTO COMPUTACIONAL

1° AÑO

Clase Nº 2: RELACIONES

Contenido:

En la clase de hoy trabajaremos los siguientes temas:

- Relaciones.
- Relaciones definidas en un conjunto.
- Dominio e imagen, relación inversa.
- Representación: diagrama sagital, matriz asociada, dígrafo.
- Composición de relaciones.

PRESENTACIÓN

En el curso de INTROTEC han estudiado varios conceptos de la teoría de conjuntos que, como comentamos en la clase anterior, son necesarios como herramientas útiles para el trabajo con bases de datos. En esta clase estudiaremos relaciones que son otros conceptos de la teoría de conjuntos, que permiten entender el funcionamiento interno de los comandos en SQL. Te invitamos a visitar un recurso web para introducirnos en el tema *https://*[*www.youtube.com/watch?v=HHRk-jcgRu*](https://www.youtube.com/watch?v=HHRk-jcgRu)

1. Desarrollo y Actividades:

PRODUCTO CARTESIANO

Si A y B son dos conjuntos no vacíos, se define el producto cartesiano de A y B como el conjunto $A \times B$ de todos los pares ordenados (a, b) con $a \in A$ y $b \in B$, así $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \; y \; b \in B\}$

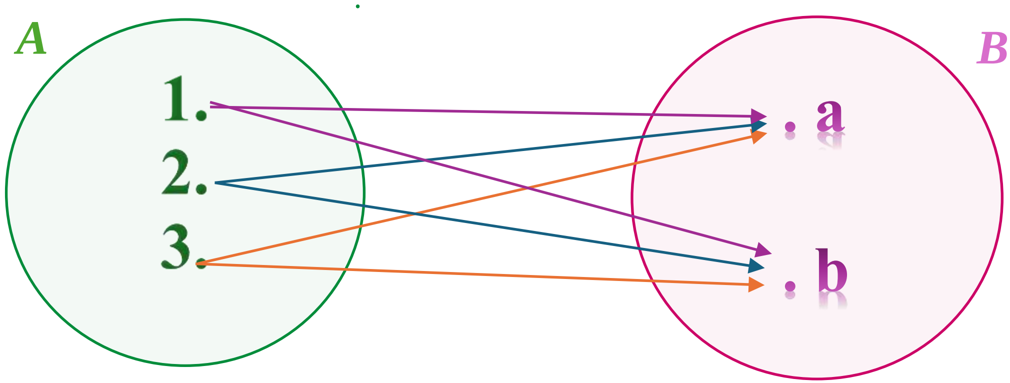
La cardinalidad de $A \times B$ es $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

Veamos un ejemplo: Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b\}$ entonces $A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$

Los elementos de $A \times B$ también pueden ser organizados en una tabla así

A \ B	a	b
1	(1, a)	(1, b)
2	(2, a)	(2, b)
3	(3, a)	(3, b)

Los elementos de $A \times B$ pueden ser organizados en una tabla como en el ejemplo anterior, pero también se pueden representar en el siguiente diagrama, denominado diagrama sagital



El orden de los elementos en el par ordenado de los elementos del producto cartesiano es importante, puesto que permite distinguir un elemento de otro: (a, b) es diferente a (b, a).

El concepto de conjunto producto se extiende a más de dos conjuntos, determinando n-uplas

RELACIONES

Sean A y B dos conjuntos no vacíos y $P\ (x, y)$ una propiedad relativa a los elementos $x \in A$ y $y \in B$ en ese orden. Esto sugiere naturalmente la consideración del producto cartesiano $A \times B$ y la determinación de los pares ordenados (a, b), para los cuales $P\ (a, b)$ es una proposición verdadera, los cuales determinan un conjunto R. De este modo, queda definido un subconjunto $R \subseteq A \times B$ llamado relación.

Veamos un ejemplo:

Sean $A = \{huevos, leche, maíz\}$ y $B = \{vacas, cabras, gallinas\}$ Cuál es la relación R de A a B definida por: $(a, b) \in R \leftrightarrow a$ es producido por b.

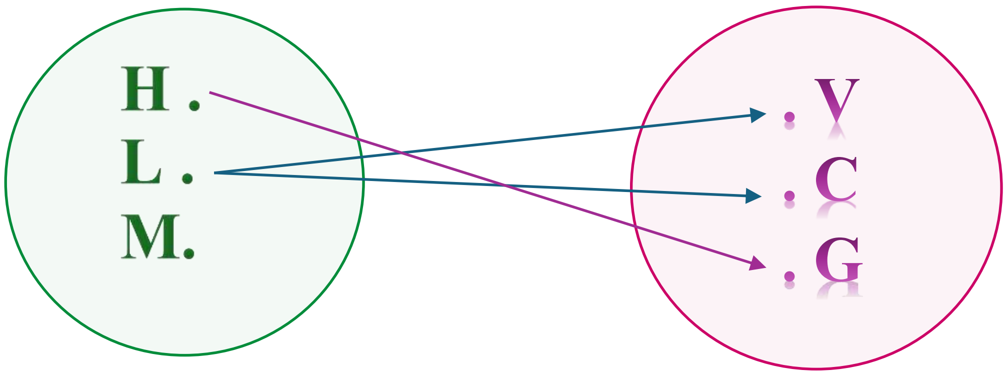
Determinamos en primer lugar $A \times B$

$$A \times B = \{(huevos, vacas), (huevos, cabras), (huevos, gallinas),$$

$$(leche, vacas), (leche, cabras), (leche, gallinas),$$
$$(maíz, vacas), (maíz, cabras), (maíz, gallinas)\}$$

Las parejas ordenadas que determinan la relación es el conjunto:

$R = \{(huevos, gallinas), (leche, vacas), (leche, cabras)\}$



RELACIONES DEFINIDAS SOBRE EL MISMO CONJUNTO

Se puede definir (y es el caso más estudiado) el producto cartesiano de un conjunto consigo mismo. Veamos un ejemplo: Sea el conjunto $A = \{1,2,3\}$. Determinar la relación R de A a A definida por: $(a, b) \in R \leftrightarrow a = b$

El conjunto $A \times A = A^2$ es:

$$A \times A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$$

Por lo tanto, la relación es $R = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$

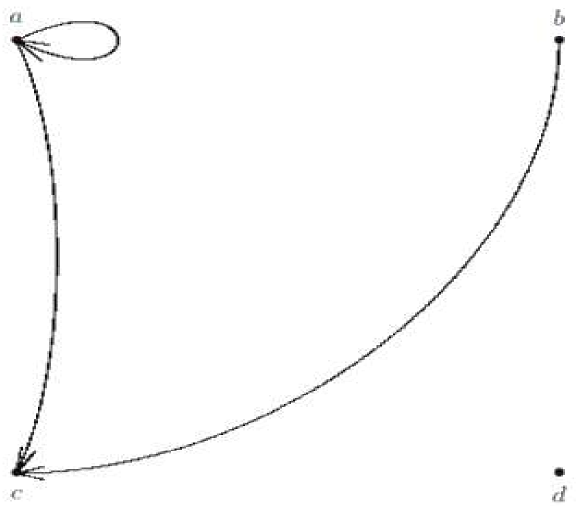
REPRESENTACIÓN DE UNA RELACIÓN: GRAFOS DIRIGIDOS

Cuando una relación se define sobre el mismo conjunto, permite representarla por medio de un digrafo o grafo dirigido. Un grafo es un conjunto de vértices o nodos (puntos) y un conjunto de aristas (líneas) que conectan los nodos. En algunos casos, las aristas están representadas por flechas, obteniendo un grafo dirigido o digrafo. Una relación definida sobre el mismo conjunto se representa por un diágrafo donde los elementos son los nodos y las aristas conectan la primer componente de un par ordenado, nodo inicial, con la segunda componente, nodo final, del mismo par. Cuando un elemento se relaciona consigo mismo, $(a, a) \in R^2$, la arista del digrafo tiene el mismo nodo inicial y final, denominado *bucle*. Si el nodo no se relaciona con algún otro nodo, no se traza ninguna arista, es un nodo aislado. Veamos un ejemplo

Sea el conjunto $A = \{a, b, c\}$, y sea $R \subseteq A^2$ definida como:

$$R = \{(a, a),\ (a, c),\ (b, c)\}.$$

La representación por medio de un dígrafo es la siguiente:



En este ejemplo, el nodo ***d*** es aislado y en el nodo ***a*** hay un bucle.

Los grafos se estudian desde la teoría de grafos, también llamada teoría de las gráficas, que es una disciplina de muy amplia aplicación en diferentes campos, en particular para la teoría de la computación es muy importante.

Para ampliar estos conceptos, te invitamos a visitar un recurso web https://www.youtube.com/watch?v=pzca71UtH-A

DOMINIO E IMAGEN DE UNA RELACION

Sea una relación R tal que $R \subseteq A \times B$, se define:

- El dominio de R, denotado por $Dom(R)$, es el conjunto de todos los primeros elementos de los pares ordenados que pertenecen a R. Esto es $Dom(R) = \{a \in A, existe\ b | b \in B\ y\ (a, b) \in R\}$
- La imagen o rango de R, denotada por $Img(R)$, es el conjunto de todos los segundos elementos de los pares ordenados que pertenecen a R. Esto es $Img(R) = \{b \in B, existe\ a | a \in A\ y\ (a, b) \in R\}$.

Retomando los dos últimos ejemplos, podemos decir que:

- $R = \{(huevos, gallinas), (leche, vacas), (leche, cabras)\}$ tiene

$$Dom(R) = \{huevos, leche\}\ e$$

$$Img(R) = \{gallinas, vacas, cabras\}$$

- $R = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$ tiene

$$Dom(R) = \{1, 2, 3\} \text{ e } Img(R) = \{1, 2, 3\}$$

RELACION INVERSA

Sea la relación $R \subseteq A \times B$, se denomina relación inversa de

R, se denota R^{-1}, que verifica:

$$R^{-1} \subset B \times A \quad \text{y} \quad R^{-1} = \{(y,x) \,/\, (x,y) \in R\}$$

¿Cuáles son las relaciones inversas para los dos últimos ejemplos?

REPRESENTACIÓN: MATRIZ ASOCIADA A UNA RELACIÓN

Como vimos en ejemplos anteriores, el producto cartesiano se puede representar en una tabla o en forma gráfica mediante un diagrama sagital y, en el caso de la relación definida sobre el mismo conjunto, se puede representar por medio de un digrafo dirigido. Una relación por supuesto que acepta estas formas de representación, y cuando es entre dos conjuntos finitos admite una especial que se denomina matriz de la relación. Una matriz es un arreglo rectangular de números ordenados por m filas o renglones y n columnas que estudiaremos con más detalle en otras clases.
Te invitamos a ver un recurso web donde se explica sintéticamente el concepto de matriz: https://www.youtube.com/watch?v=m6w5vLA3Lnw

La matriz de una relación se define como sigue:
Dados dos conjuntos finitos no vacíos $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ y

$B = \{b_1, b_1, \dots, b_n\}$ y una relación R cualquiera de A a B, llamaremos matriz

de R a la matriz booleana siguiente:

$$M_R = (r_{ij}): r \begin{cases} 1, & si\ (a_i, b_i) \in R \\ 0, & si\ (a_i, b_i) \notin \mathrm{R} \end{cases} \quad \text{donde } i = 1,2,\dots,m \quad j = 1,2,\dots,n$$

Veamos un ejemplo: Un curso recibe una clase de programación en la que se asigna una calificación semanal:

Estudiantes (E): Andrés (a), Barbara (b), Camila (c), Daniela (d)

Calificaciones (C): Insuficiente (1), Aprobado (2), Bueno (3), Distinguido (4), Sobresaliente (5)

Por tanto, $E = \{a, b, c, d\}$, $C = \{1,2,3,4,5\}$

El producto cartesiano $E \times C$ contiene todas las posibles calificaciones que los estudiantes pueden obtener en la clase, son 20 posibilidades ¿por qué esa cantidad?

$$E \times C = \{(a,1),(a,2),(a,3),(a,4),(a,5),(b,1),(b,2),(b,3),(b,4),(b,5),(c,1),(c,2),(c,3),(c,4),(c,5),(d,1),(d,2),(d,3),(d,4),(d,5)\}$$

Sea R la relación de E a C definida por:

$$(x,y) \in R \leftrightarrow x \text{ obtuvo la calificación } y$$

En la planilla de notas se tiene

Estudiante	**Calificación**
Andrés	Aprobado
Barbara	Distinguido
Camila	Distinguido
Daniela	Sobresaliente

Por lo tanto, la relación $R \subseteq E \times C$ es $R = \{(a, 2), (b, 4), (c, 4), (d, 5)\}$

La matriz de R tiene 4 filas ya que $|E|$ = 4 y 5 columnas ya que $|C|$ = 5 y revisando en orden uno a uno los elementos de $E \times C$ con los de R se obtiene

$$R_M = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Dos observaciones importantes:

- La matriz de una relación caracteriza a la misma, si se conoce la relación, se conoce la matriz y si se conoce la matriz, sabremos de qué relación se trata.
- Si MR es la matriz de una relación R de A en B, cada fila se corresponde con un elemento de A y cada columna con un elemento de B. Para calcular el dominio de R bastará ver en qué filas hay al menos un uno y para calcular la imagen bastará con ver en qué columnas hay al menos un uno.

COMPOSICIÓN DE RELACIONES

Los padres de Ana son José y Marta. José tiene un hermano llamado Andrés y Marta es hija única. En esa configuración familiar se involucran dos relaciones respecto de José, la de hermano y la de padre: Andrés es hermano de José, quien a su vez es padre de Ana; de ello surge la relación de tío entre Andrés y Ana. Matemáticamente se diría que la relación tío es la composición de las relaciones hermano y padre.

Veamos otro ejemplo con conjuntos de letras y números. Sean los conjuntos A, B y C y las relaciones R y S tales que

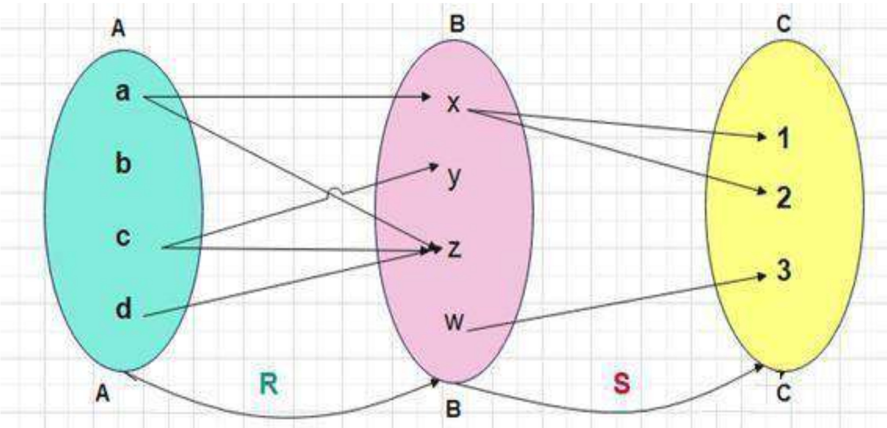
$$A = \{a, b, c, d\} \quad B = \{x, y, z, w\} \quad C = \{1, 2, 3\}$$

$$R \subseteq A \times B \quad \text{y} \quad S \subseteq B \times C$$

$$R = \{(a, x), (a, z), (c, y), (c, z), (d, z)\}$$

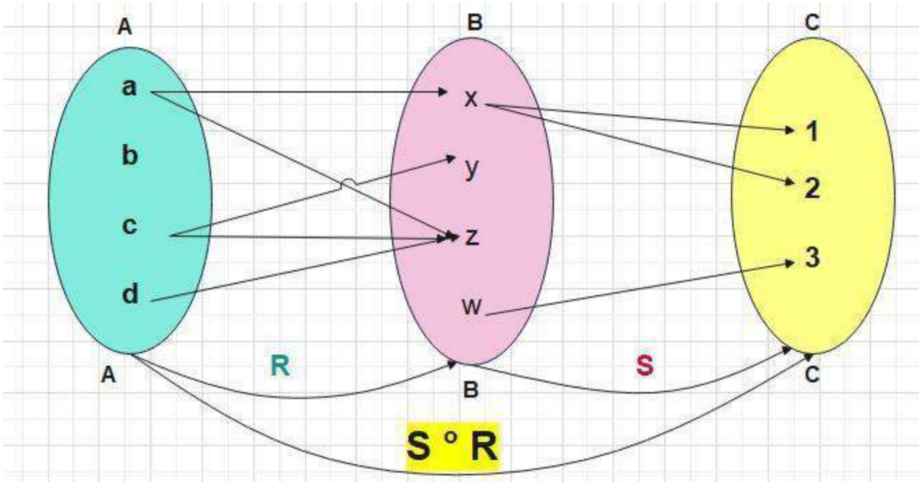
$$S = \{(x, 1), (x, 2), (w, 3)\}$$

Visualicemos R y S mediante un diagrama de Venn



El diagrama permite visualizar que el conjunto B está "en el medio" entre R y S, por lo cual se puede hablar de una relación que va del conjunto A al conjunto C, que se denomina **COMPOSICION $S \circ R$** y es

$$S \circ R = \{(a, 1), (a, 2)\}$$



Formalmente, la composición de relaciones se define como sigue:

Sea R una relación de A a B y S una relación de B a C, la composición de R y S es una relación consistente de los pares ordenados (a, c), donde $a \in A$ y $c \in C$ y para los cuales existe un elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in S$ (otra forma de decirlo es aRb y bRc).

Lo que nos dice la definición se puede expresar de una manera un poco más simple así: si tenemos dos relaciones, en las cuales la imagen de una de ellas es el dominio de la otra, entonces podemos determinar una relación que resulta de combinar las dos relaciones dadas así:

Si $R \subseteq A \times B$ y $S \subseteq B \times C$ es posible definir una relación de A a C, llamada composición entre R y S, mediante:

$S \circ R = \{(a, c) \,|\exists b \in B \; y \; (a, b) \in R \; y \; (b, c) \in S\}$

Consideremos otro ejemplo:

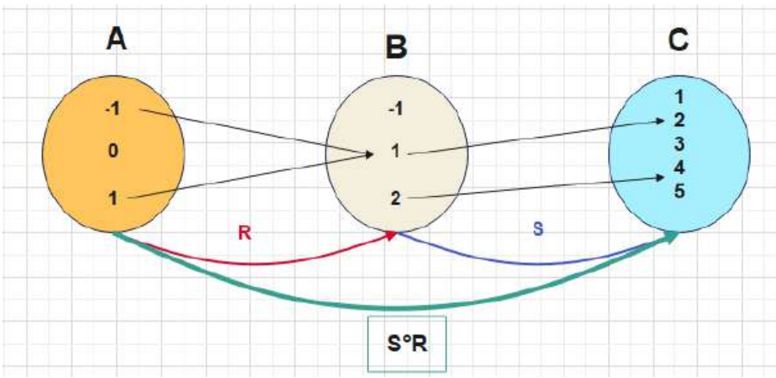
Sean los conjuntos A, B y C y las relaciones $R \subseteq A \times B$ y $S \subseteq B \times C$ tales que

$$A = \{-1, 0, 1\} \qquad B = \{-1, 1, 2\} \qquad C = \{1, 2, 3,4,5\}$$

Si $(x, y) \in R$ entonces y es el cuadrado de x

Si $(y, z) \in S$ entonces z es el doble de y

La representación mediante diagramas de Venn muestra:



De modo que se determina:

$$S \circ R = \{(-1,2), (1,2)\}$$

$$S \circ R = \{(x, z) \mid z = 2. x^2\}$$

¿Cuál es el dominio de $S \circ R$? ¿Cuál es la imagen?

Te invitamos a visitar un recurso web en el que se explica la composición de relaciones entre conjuntos: https://www.youtube.com/watch?v=30e5FI9eYNE

Actividades:

1. En una clase solo han quedado Rodrigo, Susana y Thiago así que les han brindado un salón más chico con tan solo 5 sillas. Considerando A como el conjunto de estudiantes y B como el conjunto de las 5 sillas

determinar de cuántas maneras diferentes se pueden sentar los chicos en las sillas.

2. Dada la relación R: $\{x\ limita\ con\ y\}$, escriba para cada par, $\in$ ó $\notin$ según corresponda:

$(Buenos\ Aires, Santa\ Fe)$ ______________ R

$(Mendoza, San\ Luis)$ ______________ R

$(San\ Juan, Formosa)$ ______________ R

$(Tucumán, Corrientes)$ ______________ R

$(Neuquén, Santa\ Cruz)$ ______________ R

3. Sea el conjunto $A = \{1,2,3,4\}$ y las relaciones

$$R_i \subseteq A^2, con\ i = 1, 2, 3, 4,$$

donde:

$R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,2), (3,3), (3,2), (4,4)\}$

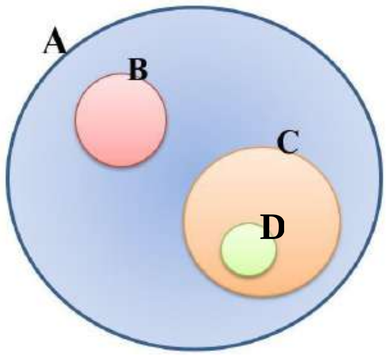
R_2 definida como $(a, b) \in R_2 \Leftrightarrow a = 2b$

R_3 definida como $(a, b) \in R_3 \Leftrightarrow b < 4$

R_4 definida como $(a, b) \in R_4 \Leftrightarrow a|b$

a) Definir por extensión las relaciones R_2, R_3 y R_4
b) Indicar dominio, imagen y relación inversa de cada una de las relaciones
c) Representar mediante matriz y por dígrafo.

4. Sea el conjunto $M = \{A, B, C, D\}$, donde A, B, C, D son conjuntos que se relacionan entre sí según el siguiente diagrama:



Sea la relación $R \subset MxM = \{x \; está \; incluido \; en \; el \; conjunto \; y\}$

Representa la relación R por extensión.

5. Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 4, 6, 16\}$ y $C = \{2, 3, 8, 10\}$ y las relaciones $R \subseteq A \times B$ y $S \subseteq B \times C$ definidas por:

$$(x, y) \in R \iff y = x^2 \quad \text{y} \quad (y, z) \in S \iff z = \frac{y}{2}$$

   a. Determinar R y S por extensión
   b. Definir la composición $S \circ R \subseteq A \times C$ por extensión.

Evaluación:

Te invitamos a que accedas al foro de registro de intercambio en el aula de la asignatura en el campus virtual de la carrera, propuesto como actividad obligatoria. No olvides que siempre podrás volver a la teoría presentada en esta clase o hacer las preguntas que consideres necesarias en el foro correspondiente a esta clase, los encuentros sincrónicos o las tutorías presenciales.

3. Actividad Integradora de Cierre:

Llegados a este punto te proponemos leer el siguiente enunciado bajo la interpretación que hemos concebido a partir de lo leído a lo largo de la clase.

Si L y M son las relaciones en el conjunto de los números enteros Z dadas por:

$$L = \left\{m \in \frac{z}{(m, m+1)}\right\} \quad y \;\; M = \left\{m \in \frac{z}{(m,\;\, m^2)}\right\}$$

Calcula:

a) $L \circ L$ **b)** $M \circ M$ **c)** $L \circ M$ **d)** $M \circ L$ **e)** M^{-1}

f) $M^{-1} \circ M$ **g)** $M \circ M^{-1}$

En el siguiente enlace encontrarán como analizar y resolver la ejercitación https://drive.google.com/file/d/1xDVyol5X0Z-0r0GsF9SOwxoQkWnT17n5/view?usp=sharing

4. Cierre:

En este momento de la clase es importante que te preguntes ¿Por qué crees que es importante tener este conocimiento para un Técnico Superior en Ciencias de Datos e Inteligencia Artificial?

Te invitamos a que nos dejes tus impresiones sobre lo que aprendimos hoy a través de una intervención en el foro de la clase. También puedes compartir links de recursos, como artículos o videos, por ejemplo, que hayas buscado y te hayan parecido interesantes mientras estudiabas este tema.

Recuerda que es importante que participes de los foros, de los encuentros sincrónicos y en lo posible de las tutorías presenciales.

5. Bibliografía Obligatoria:

- Rojo, O. A. (1996). Capítulo 3: Relaciones. Algebra I [archivo PDF]. Recuperado de: https://bibliotecavirtualdenovpinas.files.wordpress.com/2020/08/alg__ebrai-armando-rojo-1.pdf

- Gonzáles Gutiérrez F.J. (2004), Capítulo 6 Relaciones. Apuntes de matemática discreta [archivo PDF]. Recuperado de: https://drive.google.com/file/d/17XgnjlRI0nSEwA9WVnZNylo5Dm1cWBEI/view?usp=sharin