MATEMÁTICA ORIENTADA AL PENSAMIENTO COMPUTACIONAL

1° AÑO

Clase Nº 9: Programación lineal

Contenidos involucrados:

- Planteo de problemas de programación lineal
- Resolución de problemas de programación lineal

Presentación

Estimados estudiantes, nos encontramos transitando el último trayecto de Matemática orientada al pensamiento computacional. En esta clase abordaremos de manera introductoria Programación Lineal, (PL), que forma parte de la investigación operativa. La Investigación de Operaciones (IO) es un arte que se enfoca en modelar la realidad de los procesos y organizaciones a través del uso de técnicas matemáticas, estadísticas y algorítmicas para la toma de decisiones. Su origen data sobre la segunda Guerra Mundial, cuando se usó para resolver problemas de optimización logísticos y de planificación de misiones. La ***programación lineal*** *consiste en una serie de técnicas aplicadas en la toma de decisiones empresariales, ya que permite encontrar soluciones óptimas a problemas complejos con* *múltiples variables. A medida que las empresas buscan ser más eficientes y competitivas en un mercado globalizado, la programación lineal se ha convertido en una técnica esencial en la gestión organizacional.*

Mira el siguiente video

https://www.youtube.com/watch?v=AoMXCGcE3LE

Desarrollo y actividades

- **Un ejemplo**

Para introducir el concepto de programación lineal, leemos del texto de Hillier-Lieberman (pp 21):

> *El desarrollo de la programación lineal ha sido clasificado como uno de los avances científicos más importantes de mediados del siglo xx, y estamos de acuerdo con esta aseveración. Su efecto desde 1950 ha sido extraordinario. En la actualidad es una herramienta de uso normal que ha ahorrado miles o millones de dólares a muchas compañías o negocios, incluso empresas medianas, en los distintos países industrializados del mundo; su aplicación a otros sectores de la sociedad se ha ampliado con rapidez. Una proporción muy grande de los programas científicos en computadoras está dedicada al uso de*

la programación lineal. Se han escrito docenas de libros de texto sobre esta materia y se cuentan por cientos los artículos publicados que describen aplicaciones importantes. Expresado en forma breve, el tipo más común de aplicación abarca el problema general de asignar de la mejor manera posible —es decir, de forma óptima— recursos limitados a actividades que compiten entre sí por ellos. Con más precisión, este problema consiste en elegir el nivel de ciertas actividades que compiten por recursos escasos necesarios para realizarlas. Después, los niveles de actividad que se eligen dictan la cantidad de recursos que consumirá cada una de ellas.

Veamos el siguiente problema:

La WYNDOR GLASS CO. produce artículos de vidrio de alta calidad, entre ellos ventanas y puertas de vidrio. Tiene tres plantas. Los marcos y molduras de aluminio se hacen en la planta 1, los de madera en la planta 2; la 3 produce el vidrio y ensambla los productos.

Debido a una reducción de las ganancias, la alta administración ha decidido reorganizar la línea de producción de la compañía. Se discontinuarán varios productos no rentables y se dejará libre una parte de la capacidad de producción para emprender la fabricación de dos productos nuevos cuyas ventas potenciales son mu*y* prometedoras:

- Producto 1: una puerta de vidrio de 8 pies con marco de aluminio
- Producto 2: una ventana corrediza con marco de madera de 4 por 6 pies

El producto 1 requiere parte de la capacidad de producción en las plantas 1 y 3 y nada en la planta 2. El producto 2 sólo necesita trabajo en las plantas 2 y 3. La división de comercialización ha concluido que la compañía puede vender todos los productos que se puedan fabricar en las plantas. Sin embargo, como ambos productos competirían por la misma capacidad de producción en la planta 3, no está claro cuál *mezcla* de productos sería la *más rentable*. Por lo tanto, se ha formado un equipo de IO para estudiar este problema. El grupo comenzó por realizar juntas con la alta administración para identificar los objetivos del estudio. Como consecuencia de ellas se desarrolló la siguiente definición del problema:

> Determinar cuáles *tasas de producción* deben tener los dos productos con el fin de *maximizar las utilidades totales*, sujetas a las restricciones impuestas por las capacidades de producción limitadas disponibles en las tres plantas. (Cada producto se fabricará en lotes de 20 unidades, de manera que la *tasa de producción* está definida como el número de lotes que se producen a la semana.) Se permite *cualquier*

combinación de tasas de producción que satisfaga estas restricciones, incluso no fabricar uno de los productos y elaborar todo lo que sea posible del otro.

El equipo de IO también identificó los datos que necesitaba reunir:

1. Número de horas de producción disponibles por semana en cada planta para fabricar estos nuevos productos. (Casi todo el tiempo de estas plantas está comprometido con los productos actuales, lo que limita la capacidad para manufacturar nuevos productos.)
2. Número de horas de fabricación que se emplea para producir cada lote de cada artículo nuevo en cada una de las plantas.
3. La ganancia por lote de cada producto nuevo. Se escogió la *ganancia por lote producido* como una medida adecuada una vez que el equipo llegó a la conclusión de que la ganancia incremental de cada lote adicional producido sería, en esencia, *constante*, sin que importase el número total de lotes producidos. Debido a que no se incurre en costos sustanciales para iniciar la producción y la comercialización de estos nuevos productos, la ganancia total de cada uno es aproximadamente la *ganancia por lote que se produce* multiplicada por el *número de lotes*.

Al analizar los datos de costos que se obtuvieron, junto con la decisión sobre los precios de la división de marketing, el departamento de contabilidad calculó las estimaciones para la tercera categoría. De inmediato, el equipo de IO reconoció que se trataba de un problema de programación lineal del tipo clásico de **mezcla de productos** y procedió a la formulación del modelo matemático correspondiente. En la siguiente tabla, se resumen los datos reunidos

Datos del problema de la Wyndor Glass Co.

Planta	Tiempo de producción por lote, horas — Producto 1	Tiempo de producción por lote, horas — Producto 2	Tiempo de producción disponible a la semana, horas
1	1	0	4
2	0	2	12
3	3	2	18
Ganancia por lote	$3 000	$5 000	

Formulación matemática del problema

La definición del problema planteado indica que las decisiones que deben tomarse son el número de lotes de los productos que se fabricarán semanalmente, de manera que se maximice su ganancia total.

Para formular el modelo matemático de programación lineal de este problema se definen:

x_1 =número de lotes del producto 1 que se fabrican por semana

x_2 =número de lotes del producto 2 que se fabrican por semana

Z =ganancia semanal total (en miles de dólares) que generan estos dos productos

Por lo tanto, x_1 y x_2 son las ***variables de decisión*** del modelo. Si se usa el último renglón de la tabla se obtiene la siguiente relación, denominada ***función objetivo:***

$$Z = 3x_1 + 5x_2$$

El objetivo es elegir x_1 y x_2 que *maximice* los valores $Z = 3x_1 + 5x_2$ sujeto a las restricciones impuestas sobre sus valores por las capacidades de producción limitadas de las cuales se disponen en las tres plantas. La tabla indica que cada lote del producto 1 que se produce por semana emplea una hora de producción en la planta 1, y sólo se dispone de 4 horas semanales. En términos matemáticos, esta restricción se expresa mediante la desigualdad $x_1 \leq 4$. De igual manera, la planta 2 impone la restricción $2x_2 \leq 12$. El número de horas de producción usadas a la semana en la planta 3 que se consume al elegir x_1 y x_2 como las tasas de producción de los nuevos productos sería $3x_1 + 2x_2$ En consecuencia, la expresión matemática de la restricción de la planta 3 es $3x_1 + 2x_2 \leq 18$. Por último, como las tasas de producción no pueden ser negativas, es necesario restringir las variables de decisión a valores no negativos: $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$ (condiciones de no negatividad)

Para resumir, en lenguaje matemático de programación lineal, el problema consiste en seleccionar valores de x_1 y x_2 para

$$\textbf{Maximizar } \boldsymbol{Z = 3x_1 + 5x_2}$$

sujeta a las restricciones

$$\boldsymbol{x_1 \leq 4}$$

$$\boldsymbol{2x_2 \leq 12}$$

$$\boldsymbol{3x_1 + 2x_2 \leq 18}$$

$$\boldsymbol{x_1 \geq 0 \text{ y } x_2 \geq 0}$$

El ejemplo anterior es un problema del tipo típico (es una reducción de un caso real) para introducir conceptos y metodologías de resolución.

- **Programación Lineal, ¿Qué es?**

La **programación lineal** (**LP**, también conocida como **optimización lineal**) es el campo de la investigación operativa dedicada a maximizar o minimizar (optimizar) una función lineal, denominada *función objetivo*, de tal forma sujetas a una serie de *restricciones* expresadas mediante un sistema de ecuaciones o inecuaciones lineales. Las restricciones determinan la región factible determinadas por las soluciones del problema planteado, entre las cuales hay que hallar la solución óptima (maximización o minimización). Son múltiples las técnicas de resolución aplicadas, dependiendo del tipo de problema (logística, dieta, asignación, camino mínimo…). Con el avance de la programación, se han creado múltiples y eficaces algoritmos para abordar rápida y eficazmente los problemas planteados, que pueden involucrar hasta miles de variables y restricciones

Mira el siguiente documento:

https://docs.google.com/document/d/1wGfUqI6Wz68FifmiYzHdaIGcKt7gQAYf/edit?usp=sharing&ouid=113637116118972348120&rtpof=true&sd=true

Resolución de problemas de PL

Son variados los métodos de resolución de problemas de PL, ya que se cuenta en la actualidad con potentes algoritmos computacionales. Dichos algoritmos se basan en la aplicación de métodos matemáticos que proporciona la teoría de espacios vectoriales. Un método ampliamente utilizado para problemas “chicos”, es el llamado método simplex. En este curso, para resolver un problema de PL utilizaremos la aplicación PHPSimplex:

https://www.phpsimplex.com/simplex/simplex.htm?l=es

Cuando se comienza a estudiar PL, el método de resolución más utilizado es del tipo geométrico, sólo aplicable para modelos de 2 o 3 variables de decisión, por lo cual su uso práctico es muy limitado, pero permite al estudiante comprender los conceptos básicos implicados.

Resolución Gráfica

El método gráfico se basa en la representación gráfica de las restricciones del modelo de programación lineal, generando una región en forma de polígono convexo denominada ***región factible***, en la cual hay infinitas soluciones que satisfacen las restricciones del problema, dichas soluciones se denominan ***soluciones factibles***. La solución factible buscada, ***solución óptima*****,** (máximo o mínimo) se encontrará en uno de los vértices del polígono.

Veamos la resolución gráfica del problema de la Wyndor Glass Co:

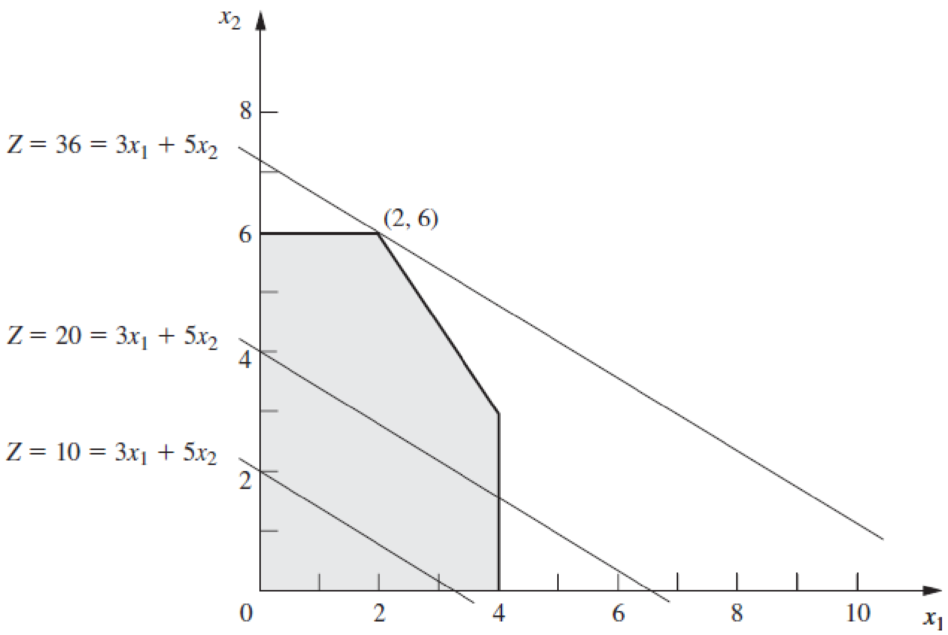
$$\text{Maximizar} \quad Z = 3x_1 + 5x_2,$$

sujeta a las restricciones

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad &\leq 4 \\ 2x_2 &\leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \end{aligned}$$

y

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$



El equipo de IO utilizó este procedimiento para encontrar que la solución óptima deseada es **$x_1 = 2$, $x_2 = 6$, con $Z = 36$**. Esta solución indica que la Wyndor Glass Co. debe fabricar los productos 1 y 2 a una tasa de 2 y 6 lotes por semana, respectivamente, con una ganancia total resultante de 36 000 dólares semanales. No existe otra mezcla de los dos productos que sea tan redituable, *de acuerdo con el modelo*.

Mira el siguiente video para ver como se construye la solución gráfica del problema de la Wyndor Glass Co. y como se utiliza la aplicación que van a utilizar para resolver problemas de PL

https://drive.google.com/file/d/1W1SkkT71EUJblliPX5zifDxtnIuA8P8e/view?usp=sharing

Planteo de un problema de programación lineal

Plantear un problema de PL consiste en reconocer las variables de decisión, las restricciones y la función objetivo.

- *Variables de decisión:* Son las variables x_i que están **bajo el control** de la persona que toma las decisiones. Sus valores óptimos se determinarán al resolver el problema
- *Función objetivo:* Expresa matemáticamente el **objetivo que se pretende alcanzar** en la solución del problema; ya sea **minimizar o maximizar**. Por ejemplo: maximizar las utilidades de la empresa o minimizar los costos de producción.

Se expresa de la siguiente manera:

$$Max\ o\ Min\ (Z) = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + \cdots + C_nX_n$$

$X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ = Variables de decisión

$C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n$ = Constantes

- *Restricciones:* Son las limitaciones que **restringen las opciones permisibles para las variables de decisión**.

Cada restricción se expresa matemáticamente con cualquiera de estos signos:

- **Menor que o igual a (≤)**. Cuando existe un límite superior, por ejemplo: las horas extras de trabajo no pueden ser mayor a 2 horas diarias
- **Igual a (=)**. Indica una relación obligatoria, por ejemplo: el inventario final es igual al inventario inicial más la producción menos las ventas.
- **Mayor que o igual a (≥)**. Cuando existe un límite inferior, por ejemplo: la producción de cierto producto debe ser superior a la demanda pronosticada.

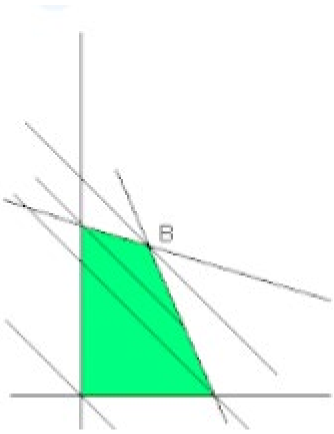
Cualquier problema de programación lineal debe presentar una o varias restricciones. Se debe considerar dentro de las restricciones la no negatividad de las variables de decisión.

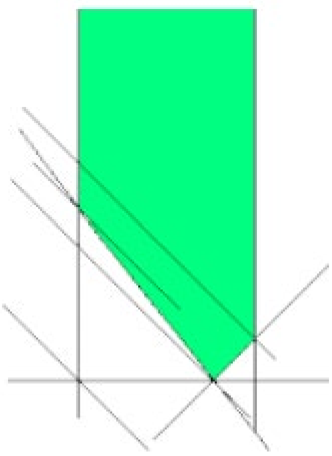
Tipos de soluciones de un problema de PL

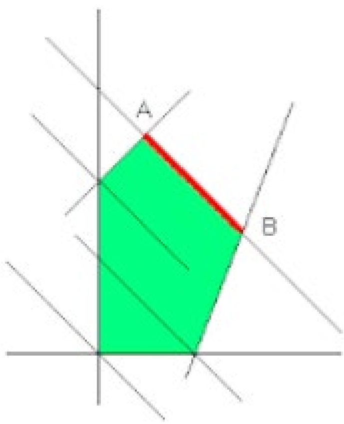
Los tipos de soluciones que podemos encontrar en un problema de Programación Lineal son:

- **Única:** Los valores de las variables de decisión son únicos.
- **Múltiple:** Las variables de decisión pueden tomar múltiples valores.
- **No acotada** (ausencia de solución): No existe un valor extremo o límite para la función objetivo, por lo que puede decirse que el problema carece de solución.
- **No factible:** cuando no existe una combinación de valores de las variables de decisión que cumplan todas las restricciones.

Solución Única **No acotada** **Infinitas soluciones**







Solución de un modelo de minimización

Un estudiante de administración de empresas del Nowledge College necesita completar un total de 65 cursos para graduarse. El número de cursos de administración tendrá que ser mayor que o igual a 23. El número de cursos ajenos al área de administración deberá ser mayor que o igual a 20. El curso de administración promedio requiere un libro de texto que cuesta $60 e implica 120 horas de estudio. Los cursos ajenos al área de administración requieren un libro de texto que cuesta $24 e implican 200 horas de estudio. El estudiante dispone de un presupuesto de $3,000 para libros.

a. Formule un conjunto de ecuaciones lineales para describir la función objetivo y las restricciones.

b. Resuelva el problema por el método gráfico utilizando la aplicación

Función Objetivo

$$Z(mín) = 120x + 200y$$

Restricciones:

- Cursos Necesarios para graduarse: $x + y = 65$
- Cantidad de Cursos de Administración: $x \geq 23$
- Cantidad de Cursos ajenos a Administración: $y \geq 20$

- Presupuesto del estudiante: $60x + 24y \leq 3000$
- Condiciones de no negatividad $x \geq 0,\ y \geq 0$

Resuelve utilizando la aplicación PHPSimplex

Actividades

Plantea en cada caso, un modelo matemático de PL y resuelve utilizando la aplicación PHPSimplex

1. Una compañía fabrica y venden dos modelos de lámpara L_1 y L_2. Para su fabricación se necesita un trabajo manual de 20 minutos para el modelo L_1 y de 30 minutos para el L_2; y un trabajo de máquina de 20 minutos para el modelo L_1 y de 10 minutos para L_2. Se dispone para el trabajo manual de 100 horas al mes y para la máquina 80 horas al mes. Sabiendo que el beneficio por unidad es de 15 y 10 euros para L_1 y L_2, respectivamente, planificar la producción para obtener el máximo beneficio.

   Atención: Las medidas de tiempo utilizadas en este problema, deben estar expresadas en las mismas unidades: horas o minutos

   Respuesta: la solución óptima es fabricar 210 unidades del modelo L_1 y 60 unidades del modelo L_2, obteniendo una ganancia de 3750 USD.

2. Un fabricante produce bicicletas y motonetas, las cuales deben proce sarse a través de dos Centrales de producción mecánica. La Central 1 tiene un máximo de 120 horas disponibles, y la Central 2 tiene un máximo de 180horas disponibles. La manufactura de una bicicleta requiere 6 horas en la Central 1 y 3 horas en la Central 2; la fabricación de una motoneta requiere4 horas en la Central 1 y 10 horas en la Central 2. Si la utilidad por bicicleta en unidades monetarias es $ 45 (dólares por ejemplo), y por motoneta es de$ 55, determinar el número de bicicletas y de motonetas que se deberían fabricar para obtener la máxima utilidad

   Respuesta: 10 Bicicletas y 15 Motonetas, con una Utilidad Máxima de $ 1 275.

3. Suponiendo que se cuenta con dos alimentos: pan y queso; cada uno de ellos contiene calorías y proteínas en diversas proporciones. Un kilogramo de pan contiene 2 000 calorías y 50 gramos de proteínas, y un kilogramo de queso contiene 4 000 calorías y 200 gramos de proteínas. Suponiendo que una dieta normal requiere cuando menos 6 000 calorías y 200 gramos de proteínas diariamente. Por tanto, si el kilogramo de pan cuesta $ 6 y $ 21 el queso. ¿Qué cantidades de pan y queso se debe comprar para

satisfacerlos requisitos de la dieta normal, gastando la menor cantidad de dinero?

Respuesta: 2 Kg de Pan y 1/2 Kg de Queso, con un gasto mínimo de $ 22,50

4. Una empresa que comercializa 2 tipos de compuestos alimenticios para animales. El primero contiene cuatro unidades de nutriente AY 2 unidades del nutriente B el segundo contiene 2 unidades del nutriente AY 3 unidades de nutriente B. Se quiere conseguir una dieta que proporcione como mínimo 20 unidades de AY 18 unidades de B. Si el costo de una unidad del primer producto es de 2 dólares y del segundo es de 2,5 dólares Calcular qué cantidad de cada tipo de compuesto hay que tomar para un costo mínimo.

   Respuesta: Se debe tomar 3 unidades del primer compuesto y 4 unidades del segundo compuesto

Cierre

Te invitamos a que nos dejes tus impresiones sobre lo que aprendimos hoy a través de una intervención en el foro de la clase. También puedes compartir links de recursos, como artículos o videos, por ejemplo, que hayas buscado y te hayan parecido interesantes mientras estudiabas este tema.

Bibliografía

Hillier- Lieberman, (2010), *Introducción a la investigación de operaciones* 9na edición, editorial McGraw-Hill

https://drive.google.com/file/d/1jRAmyXKOLXNO8kNLe2rRpwUL11tqFsGf/view?usp=sharing