LÓGICA

1º AÑO

Clase N.º 4: Lógica Proposicional.

Contenido: **Argumentación y validez.**

Hola, ¿Cómo están? ¡Bienvenidos/as a la cuarta clase! La clase anterior vimos que podemos inferir si una proposición es verdadera o si es falsa sin utilizar tablas de verdad. Pero en el acto de inferir, ¿estamos razonando? ¿Qué es un razonamiento en lógica? ¿Qué implica razonar en lógica proposicional?

¡Los y las invito a responder estas cuestiones a lo largo de dicha clase!

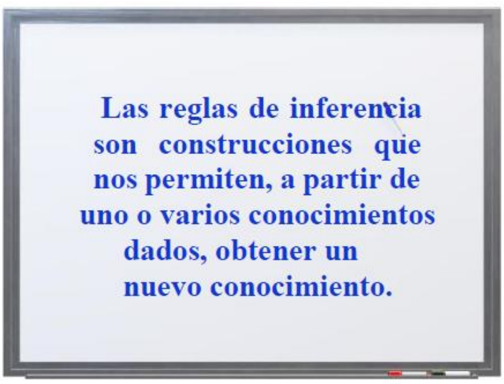
Razonar significa exponer la coherencia de algo; demostrar o probar con argumentos basados en la lógica y el sentido común. Aplicando esta definición a la lógica proposicional podemos decir que:

Se llama razonamiento lógico al proceso mental de realizar una inferencia de una conclusión a partir de un conjunto de premisas.

- Las proposiciones, una o más, de las que se parte, denominadas, como vimos, premisas. Las mismas utilizan expresiones como: "puesto que", "porque", "pues", "ya que", "como", "pero", etc.

- La proposición a la que se arriba, denominada conclusión. La misma utiliza expresiones como: "luego", "por lo tanto", "en consecuencia", "por ende", "así", "podemos inferir", etc.

Para obtener una estructura lógica de los razonamientos, necesitamos que el conjunto de proposiciones esté relacionado mediante un nexo lógico y un tipo de nexo lógico son las reglas de inferencia:



Resumiendo, un razonamiento se da cuando a partir de datos parciales -y utilizando las reglas de inferencia-, se obtiene una conclusión, es decir, un nuevo conocimiento.

Entre los razonamientos distinguimos los deductivos y los no deductivos.

- Un ***razonamiento deductivo*** consta de un conjunto de proposiciones llamadas **premisas** y de otra llamada **conclusión**. Se dice que la conclusión deriva o infiere de las premisas. Es decir, en un razonamiento deductivo la conclusión se infiere o se deduce necesariamente de las premisas.

Por ejemplo:

Premisa 1: $\underbrace{\text{Mi camisa es blanca,}}_{p}$ o $\underbrace{\text{la camisa de Juan es blanca.}}_{q}$

Premisa 2: $\underbrace{\text{La camisa de Juan no es blanca}}_{\sim q}$

Conclusión: $\underbrace{\text{Mi camisa es blanca}}_{p}$

Lo anotamos: $\underbrace{p \vee q; \sim q}_{\text{Premisas}} \vdash \underbrace{p}_{\text{Conclusión}}$

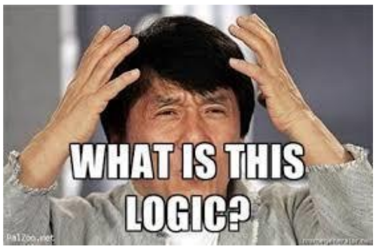
O así:

$$\left.\begin{array}{c} p \wedge q \\ \sim q \end{array}\right\} \text{Premisas } (P_1, P_2, \ldots P_n)$$
$$\overline{\quad p \quad} \; \} \; \text{Conclusión } (Q)$$

En general: $P_1; P_2; P_3 \ldots P_n \vdash Q$

O así, en forma vertical:

$$\begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ . \\ . \\ P_n \\ \hline Q \end{array}$$



Razonamientos deductivos válidos e inválidos

Se dice que un razonamiento es ***válido***, cuando el condicional $(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \ldots \wedge P_n) \rightarrow Q$, llamado ***condicional asociado*** al razonamiento, es una tautología.

Si la implicación es tautológica (implicación lógica), la anotamos con una flecha doble: $(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \ldots \wedge P_n) \rightarrow Q$

También se puede anotar así: $\models [(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \ldots \wedge P_n) \rightarrow Q]$

Es decir que la conclusión (Q) es consecuencia lógica de las premisas, y **no se da el caso que las premisas sean verdaderas y la conclusión, falsa.**

Un razonamiento que no es válido, se dice **inválido** o que es una **falacia**. Un razonamiento con dos premisas, se denomina un silogismo.

Veamos ejemplos:

Primer ejemplo: Vamos a analizar la validez del razonamiento planteado al principio:

$$p \vee q; \sim q \vdash p$$

Para ello contamos con las tablas de verdad para verificar si resulta una tautología.

p	q	(p∨q)	∧	~q	→	p
V	V	V	F	F	V	V
V	F	V	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V	F
F	F	F	F	V	V	F

La columna verde indica el resultado final, es una tautología. Por lo tanto, el razonamiento es válido. Esta forma de verificar si un razonamiento es o no válido se llama **"método del condicional asociado".**

Segundo ejemplo: $(p \vee q) \wedge p \vdash \sim q$

Realizamos la tabla de verdad, para ver si el condicional asociado resulta una tautología:

p	q	(p∨q)	∧	p	→	~q
V	V	V	V	V	F	F
V	F	V	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V	F
F	F	F	F	F	V	V

No es una tautología (es una contingencia), por consiguiente, el razonamiento no es válido, es inválido (o es una falacia).

Actividad 1: Probar la validez de los siguientes razonamientos utilizando el condicional asociado.

a. $[(p \to q) \to p] \vdash p$
b. $(p \triangle q) \vdash (p \vee q)$
c. $[(p \wedge q) \to r] \vdash [p \to (q \to r)]$
d. $[p \to (q \to r)] \vdash [(p \wedge q) \to r]$

Prueba de invalidez: Es un método más simple y general, para comprobar si un razonamiento es inválido o válido. Si, por ejemplo, tomamos el razonamiento: $(p \leftrightarrow q)$; $(p \vee q) \vdash (q \wedge \sim p)$ y armamos una tabla como la siguiente:

Proposiciones componentes		Premisas		Conclusión
p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \vee q$	$q \wedge \sim p$
V	V	V	V	F
V	F	F	V	F
F	V	F	V	V
F	F	V	F	F

Vemos que existe una línea con conclusión falsa y con todas las premisas verdaderas. Entonces, el razonamiento es **inválido**.

Si no existe ese caso, si no se puede dar la situación que de premisas verdaderas sé llegue a una conclusión falsa, el razonamiento es **válido**.

Cuando en el razonamiento participan tres o más proposiciones simples, el método de hacer una tabla de verdad no resulta práctico. Podemos entones recurrir al procedimiento denominado *"***prueba de la invalidez***"*.

Este procedimiento consiste en **suponer que el razonamiento es inválido** (no válido). Por lo tanto, habría una situación en que las premisas sean todas verdaderas y la conclusión falsa. Si esto se puede dar, si tiene coherencia, resulta un **razonamiento inválido**, tal como lo habíamos supuesto.

Si nos encontramos con alguna **contradicción** en esa suposición, el razonamiento es **válido.**

Por ejemplo, si queremos comprobar la validez del razonamiento siguiente:

$(p \vee \sim q)$;$(\sim q \leftrightarrow r)$; $(p \vee \sim r) \vdash p$

Podemos armar una tabla con las premisas y la conclusión y sólo con la línea que nos interesa: La que tiene todas las premisas verdaderas y la conclusión falsa. Es decir, lo supongo inválido. Para luego comprobar si eso tiene sentido o existe contradicción.

1°Supongo Premisas verdaderas y conclusión falsa

Premisas			Conclusión
$p \vee \sim q$	$\sim q \leftrightarrow r$	$p \vee \sim r$	p
F V	V V	F F	F
V	V	V	F

2° Voy deduciendo los valores de verdad

3° Se contradice

Es Válido

Pasos:

1°- Anoto V (verdadero) en todas las premisas y F (falso) en la conclusión.

2°- Realizo la deducción: Por ejemplo, en este caso, si la conclusión es falsa, *p* es falsa. Pongo F debajo de todas las *p*.

Como las premisas son verdaderas, voy deduciendo los valores de verdad de las demás proposiciones, según los conectivos participantes. Por ejemplo, si $p \vee \sim q$ es verdadero, y p es falso, entonces $\sim q$ tiene que ser verdadero. Y anoto debajo de las proposiciones, esas conclusiones.

Si no se contradice en nada, el razonamiento **es inválido**. Si en algún momento se presenta una contradicción, es porque esa situación (premisas verdaderas y conclusión falsa) no es posible, y el razonamiento **es válido.**

En el ejemplo, se da la **contradicción** cuando a la premisa $p \vee \sim r$ la supusimos verdadera, sin embargo, p es falsa y $\sim r$ también, lo que hace falsa su disyunción. Por lo tanto, este razonamiento **es válido**.

Actividad 2: Analizar si los siguientes razonamientos son válidos mediante la prueba de la invalidez.

a. $(p \leftrightarrow q), (p \vee q) \vdash (q \wedge \sim p)$

b. $(p \wedge q), [(p \wedge q) \rightarrow r], (r \rightarrow s) \vdash s$

c. $(p \rightarrow q), (t \vee \sim q), (s \wedge p) \vdash (s \wedge \sim t)$

d. $(\sim p \rightarrow q), (r \vee \sim p), \sim r \vdash q$

e. $[p \rightarrow (q \wedge r)], (\sim r \vee \sim q) \vdash \sim p$

f. $(\sim t \vee \sim r), [\mathrm{s} \rightarrow (t \wedge r)], (q \rightarrow s), (q \vee p) \vdash p$

g. $(m \wedge n), [(m \vee n) \rightarrow s), [s \rightarrow (p \rightarrow q)], (q \rightarrow r) \vdash (p \rightarrow r)$

h. $\sim(p \wedge q), (\sim q \rightarrow t), (\sim p \rightarrow t), (s \rightarrow \sim t) \vdash \sim s$

i. $(p \rightarrow \sim q), (\sim q \rightarrow \sim s), [(p \rightarrow \sim q) \rightarrow \sim t], (r \rightarrow t) \vdash \sim r$

Hay unos razonamientos válidos elementales que se denominan **Reglas o Leyes de inferencia**. Los principales son:

Modus Ponens (del latín: Modo afirmar): $[(p \to q) \wedge p] \Rightarrow q$

o en forma vertical:

$$\begin{array}{c} p \to q \\ \underline{p} \\ q \end{array}$$

o también:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ p \\ \therefore q \end{array}$$

($\therefore$ se lee: "Por lo tanto…")

Esta ley nos dice que, si se prueba el antecedente, también se prueba el consecuente de la inferencia.

Modus Tollens (modo negar): $[(p \to q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$

En forma vertical:

$$\begin{array}{c} p \to q \\ \underline{\sim q} \\ \sim p \end{array}$$

Esta ley nos dice que, si negamos el consecuente se prueba la negación del antecedente de la inferencia o implicación.

Silogismo disyuntivo/Modus Tollendo Ponens (negar afirmando):

- $[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$
- $[(p \vee q) \wedge \sim q] \Rightarrow p$

Su forma vertical:

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ \underline{\sim p} \\ q \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} p \vee q \\ \underline{\sim q} \\ p \end{array}$$

En una disyunción inclusiva, si negamos una de las dos posibilidades, entonces se afirma la otra posibilidad que nos queda.

Silogismo hipotético (transitividad de la implicación): $(p \to q) \wedge (q \to r) \Rightarrow (p \to r)$

En forma vertical:
$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{q \to r} \\ p \to r \end{array}$$

Lo que nos indica esta ley es que, si una proposición implica una segunda, y la segunda proposición implica una tercera, entonces la primera proposición implica la tercera proposición.

Simplificación: $(p \wedge q) \Rightarrow p$ o así: $(p \wedge q) \Rightarrow q$

En forma vertical:
$$\begin{array}{c} p \wedge q \\ q \\ \hline p \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} p \wedge q \\ p \\ \hline q \end{array}$$

Si $p \wedge q$ es verdadera, entonces p es verdadera, o bien *q* también es verdadera como nueva conclusión. Tener en cuenta que ya que si $p \wedge q$ es verdadero, entonces son verdaderas ambas proposiciones componentes.

No se puede simplificar en una disyunción, ya que si $(p \vee q)$ es verdadero, no se sabe cuál de ambas proposiciones componentes es verdadera, o si lo son las dos. En una disyunción, se puede usar la ley de adición o ampliación.

Adición o ampliación: $p \Rightarrow (p \vee q)$

En forma vertical:
$$\begin{array}{c} p \\ \hline p \vee q \end{array}$$

Es decir que podemos agregar una proposición unida por disyunción, que no va a afectar al valor de verdad de la implicación o inferencia lógica. Tener presente que **no se puede ampliar con una conjunción, sólo disyunción.**

<u>Conjunción o adjunción:</u> $p;\ q \Rightarrow p \wedge q$

En forma vertical:

$$\begin{array}{c} p \\ \underline{q} \\ p \wedge q \end{array}$$

Si podemos afirmar dos proposiciones (o más), entonces podemos afirmar su conjunción.

Mediante las reglas de inferencia podemos justificar o probar la validez de dicho razonamiento utilizando las reglas de inferencia. Veamos un ejemplo:

$$\begin{array}{ll} p \Rightarrow q & (1) \\ r \vee p & (2) \\ \sim r & (3) \\ \hline q & \end{array}$$

a. De las premisas 2 y 3 tenemos que:

$$\begin{array}{l} r \vee p \\ \sim r \\ \hline p \end{array} \quad (4) \text{ Por Silogismo Disyuntivo}$$

b. De las premisas 1 y 4 tenemos que:

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ p \\ \hline q \end{array} \quad \text{Por Modus Ponens}$$

Llegamos así a la conclusión

<u>Actividad 3:</u> Analizar si los siguientes razonamientos son válidos o no

a)
$$\begin{array}{c} \sim (p \wedge r) \\ q \Rightarrow r \\ q \\ \hline \sim p \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ \sim q \\ p \vee r \\ s \Rightarrow \sim r \\ \hline \sim s \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{c} p \wedge q \Rightarrow r \\ r \Rightarrow q \\ p \wedge q \\ \hline q \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{c} p \wedge q \Rightarrow r \\ \sim r \vee s \\ \sim s \\ \hline \sim p \vee \sim q \end{array}$$

e)
$$\begin{array}{c} p \wedge r \\ p \Rightarrow s \\ r \Rightarrow t \\ \hline s \wedge t \end{array}$$

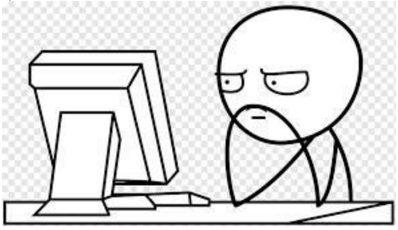
f)
$$\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ r \vee p \\ \sim r \\ \hline q \end{array}$$

g)
$$\begin{array}{c} s \Rightarrow (p \vee q) \\ s \\ \sim p \\ \hline q \end{array}$$

h)
$$\begin{array}{c} p \vee t \\ \sim t \\ p \Rightarrow q \wedge s \\ \hline s \wedge q \end{array}$$

i)
$$\begin{array}{c} p \vee q \\ t \Rightarrow \sim p \\ \sim (q \vee r) \\ \hline \sim t \end{array}$$

¡Hemos finalizado la clase 4! Vimos qué es un razonamiento, como demostrar su validez utilizando la prueba de invalidez como también las reglas de inferencia… Y ya vamos acercándonos al cierre de la primera unidad, por ende, a cerrar la lógica proposicional.



Bibliografía:

- Cátedra de Matemática. (2018, 17 octubre). *Argumentos* [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=pKonlSQEhZg

- Cátedra de Matemática. (2018b, octubre 17). *Argumentos válidos* [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=7chV3i6z4nQ

- ProfeGuille Matemática. (2013, 27 abril). *INFERENCIA LÓGICA O ARGUMENTO LOGICO - PROBLEMAS Y EJERCICIOS RESUELTOS* [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=OmX1Xg6bnlk

- Rojo, Armando O. (1996), *Álgebra I*, Buenos Aires - Argentina, El Ateneo.

- Johnsonbaugh, Richard. (2005), *Matemáticas discretas*, México, Pearson Educación.