MATEMÁTICA ORIENTADA AL PENSAMIENTO COMPUTACIONAL

1° AÑO

Clase N.º 7:

Contenidos:

- Conjunto de generadores de un espacio vectorial
- Base de un espacio vectorial
- Dimensión
- Rango
- Espacio nulo, nulidad

1. **Presentación**

   En esta clase, vamos a analizar las importantes consecuencias de una combinación lineal entre elementos que pertenecen a un espacio vectorial. Como vimos en la clase anterior, una combinación lineal de vectores pertenecientes a un espacio vectorial puede "generar" un vector, esto es, un vector se escribe en función de otros, lo que lleva a preguntarse si, además de generar a un solo vector, ¿podrá generar a infinitos vectores? Si es así, ¿Qué interpretación tendrá este hecho?

2. Desarrollo y actividades

Conjuntos de generadores

Si todo vector en un espacio vectorial puede expresarse como una combinación lineal de vectores en un conjunto S, entonces se dice que S es un **conjunto generador** del espacio vectorial.

Definición:

Conjunto generador

Se dice que los vectores $v_1, v_2, \dots, v_n$ de un espacio vectorial V **generan** a V si todo vector en V se puede escribir como una combinación lineal de los mismos. Es decir, para todo $v \in V$, existen escalares tales que $a_1, a_2, \dots, a_n$

$$\boldsymbol{v} = a_1 v_1 + \ a_2 v_{2+} \dots + a_n \, v_n$$

Ejemplos:

1. El conjunto de vectores E canónicos en R^2 presentados en la clase anterior, es un conjunto generador de R^2, ya que ***todo*** vector en R^2 se puede escribir como combinación lineal de la base E:

$$E = \{(1,0), (0,1)\}$$

Los vectores canónicos están presentes en todos los elementos que componen un espacio vectorial y siempre son generadores. Por ejemplo, en R^3, los vectores canónicos son

$$E = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,01)\}$$

En R^{2x2}, o sea las matrices de 2x2, las matrices (o vectores) canónicos son de la forma

$$E^{2x2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

2. Determinar si el conjunto de vectores $S\ \{(1,2,3),(0,1,2)(-2,0\ 1)\}$ generan R^3

Planteamos la siguiente combinación lineal:

$$(u_1, u_2, u_3) = \alpha_1(1,2,3) + \alpha_2(0,1,2) + \alpha_3(-2,0,1)$$

$$(u_1, u_2, u_3) = (1\alpha_1, 2\alpha_1, 3\alpha_1) + (0\alpha_2, 1\alpha_2, 2\alpha_2) + (-2\alpha_3, 0\alpha_3, 1\alpha_3)$$

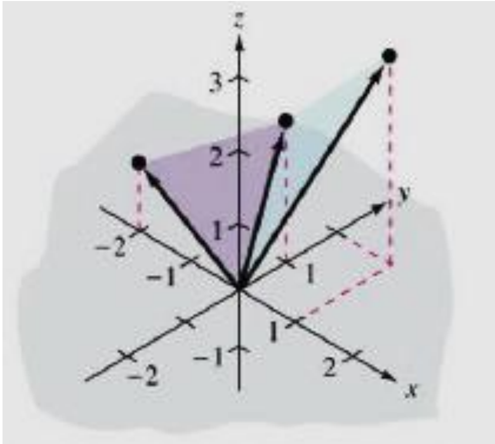
$$(u_1, u_2, u_3) = 1\alpha_1 + 0\alpha_2 - 2\alpha_3, 2\alpha_1 + 1\alpha_2 + 0\alpha_3, 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1\alpha_3$$

Planteamos el siguiente sistema de ecuaciones

$$(1)\begin{cases} 1\alpha_1 + 0\alpha_2 - 2\alpha_3 = u_1 \\ 2\alpha_1 + 1\alpha_2 + 0\alpha_3 = u_2 \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1\alpha_3 = u_3 \end{cases}$$

Para saber si el conjunto S es un generador, hay que analizar si el sistema de ecuaciones es compatible o incompatible. Para ello, se puede recurrir a varios métodos siendo uno de ellos, analizar la existencia de la matriz inversa. Siendo la matriz de coeficientes: $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, se puede verificar que tiene inversa, $C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 2 & -7 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, por lo tanto el sistema tiene solución única, lo que indica que el conjunto $S = \{(1,2,3),(0,1,2)(-2,0\ 1)\}$ genera R^3, cualquier vector en R^3 se puede escribir como combinación lineal del conjunto de vectores S.

Gráficamente, los planos que determinan las ecuaciones pertenecen a planos distintos tomados de a dos



Otra forma de analizar si el sistema (1) tiene solución, es calcular el determinante de la matriz de coeficientes. Si el determinante es cero, Det(A) = 0, el sistema no tiene solución, si el DET (A)=0, el sistema tiene solución única. El determinante de una matriz consiste en calcular un valor que caracteriza a dicha matriz. Hay una teoría sumamente valiosa en el desarrollo del concepto de determinante, pero por cuestiones organizativas de la cátedra, en este curso omitiremos su estudio. El cálculo del determinante de una matriz involucra muchas operaciones, por lo que te acercamos la siguiente aplicación para que puedas calcular el determinante:

https://es.symbolab.com/solver/matrix-determinant-calculator

Mira el siguiente video acerca del uso de la aplicación anterior

https://drive.google.com/file/d/1ui3aHQRh3xEiEg4nuzX3ICaOwSe_LANC/view?usp=sharing

En el ejemplo que estamos analizando, el determinante de la matriz de coeficientes $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ es -1:

$$\mathrm{Det}(C) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

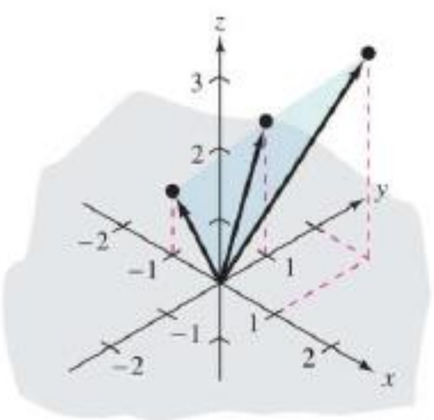
Como es diferente de cero, el sistema tiene solución única, por lo cual S genera todo R^3.

Si te interesa saber un poco más de determinantes, te dejamos los siguientes enlaces:

https://www.youtube.com/watch?v=ojVDN9PT6b8&t=105s

https://www.youtube.com/watch?v=mUnBtTJtsKw

3. El conjunto $R = \{(1,2,3),(0,1,2),\ (-1,0,1)\}$ (notarás que es muy parecido al conjunto S del ejemplo anterior) **no** genera a R^3, lo puedes verificar calculando la inversa o el determinante, que en este ejemplo es cero. Observa que, el vector $w = (1,-2,2) \in R^3$ no se puede escribir como una combinación lineal de R. Observa la gráfica:



Los tres vectores del conjunto R pertenecen al mismo plano (coplanares), por lo que generan una parte de R^3. Decimos que genera un ***subespacio*** $S \subset R^3$

Este resultado indica que, siempre un conjunto de vectores $\in R^n$ de un espacio vectorial Vson generadores, en algunos casos genera a todo

R^n pero, a veces, genera un subespacio, que puede ser un plano, una recta o un punto

Dependencia e independencia lineal

La dependencia o independencia lineal es una cualidad de un conjunto de vectores, y tiene que ver con la relación que tienen estos entre sí. La "dependencia" lineal refiere a que los vectores dependen de alguna forma entre ellos. ¿De qué forma? Un conjunto de vectores es *linealmente dependiente* **(LD)**, si es posible escribir alguno de los vectores del conjunto como combinación lineal de los restantes. En caso contrario, decimos que el conjunto de vectores es *linealmente independiente* **(LI)**

Dependencia lineal. Definición.

Los vectores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}, \dots, \boldsymbol{v_n}$ son *linealmente dependientes* si existen algunos coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ \dots \alpha_n$ **no todos nulos** que verifican:

$$\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \ \alpha_2\boldsymbol{v_2} + \ \ \alpha_3\boldsymbol{v_3} + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{v_n} = 0$$

Si no existen esos coeficientes (o sea, si la única solución es $\alpha_1 = 0, \ \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0, \dots, \alpha_n = 0$, los vectores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}, \dots, \boldsymbol{v_n}$ son l*inealmente independientes*

Acá hay que aclarar algo muy importante. Cuando alguien dice vector cero, está hablando del elemento neutro del EV.

Ejemplos de vectores LD

a) El conjunto de vectores $S = \ \{(1,2),(2,4)\}\ en\ R^2$ es LD porque

$$-2.(1,2) + 1.(2,4) = (0,0)$$

b) El conjunto de vectores $S = \ \{(1,0),(0,1),(-2,5)\}\ en\ R^2$ es LD porque

$$2.(1,0) - 5.(0,1) + 1.(-2,5) = (0,0)$$

c) El conjunto de vectores $S = \{(0,0),(1,2)\}$ en R^2 es LD porque

$$1.(0,0) + 0.(1,2) = (0,0)$$

Comprobación de independencia lineal

Determine si el siguiente conjunto de vectores en R^3es linealmente dependientes o linealmente independiente

$$S = \{v_1, v_2, v_3\} = \{(1,2,3),(0,1,2),(-2,0,1)\}$$

Planteamos la siguiente igualdad:

$$c_1\boldsymbol{v_1} + c_2\boldsymbol{v_2} + c_3\boldsymbol{v_3} = 0$$

$$c_1(1,2,3) + c_2(0,1,2) + c_3(-2,0,1) = (0,0,0)$$

$$(c_1 - 2c_3,\ 2c_1 + c_2,\ 3c_1 + 2c_2 + c_3) = (0,0,0)$$

Generando el siguiente sistema de ecuaciones homogéneo:

$$\begin{cases} c_1 - 2c_3 = 0 \\ 2c_1 + c_2 = 0 \\ 3c_1 + 2c_2 + c_3 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, obtenemos el siguiente resultado:

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

Por lo tanto, el conjunto S es linealmente independiente (L.I)

Te dejamos dos videos donde se muestra como determinar si un conjunto de vectores son LI o LD:

https://www.youtube.com/watch?v=ybSOYDZFhrc

https://www.youtube.com/watch?v=cvtCy3pbT-A

Base de un espacio vectorial

Continuaremos con el estudio de los conjuntos generadores. En particular, se considerarán conjuntos generadores (en un espacio vectorial) que sean LI y que, además, generen todo el espacio. Este tipo de conjuntos forman una base del espacio vectorial

Definición de base

Un conjunto de vectores $S = \{v_1, v_2, v_3 \dots v_n\}$ en un espacio vectorial V se denomina *base* si se cumplen las siguientes definiciones:

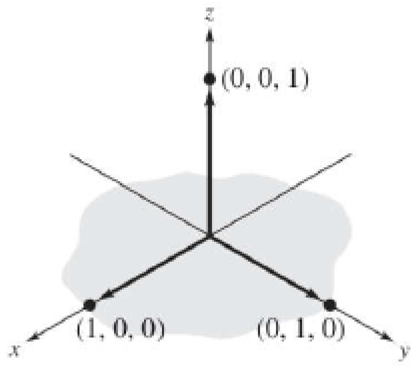
a) S genera a V

b) S es linealmente independiente

Ejemplos:

1) En R^3, el conjunto de vectores canónicos constituye una base, llamada *base estándar*, ya que son generadores de R^3 y son LI

$$E = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$$



2) Demuestre que el conjunto $S = \{(1,1), (1,-1)\}$ es una base de R^2

En primer lugar, se debe demostrar que S es una base de R^2:

$$c_1(1,1) + c_2(1,-1) = (x, y)$$

$$(c_1 + c_2, c_1 - c_2) = (x, y)$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = x \\ c_1 - c_2 = y \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & |x \\ 1 & -1 & |y \end{pmatrix}$$

Como se analizó anteriormente, para saber si el sistema tiene solución única, basta con calcular el determinante o la matriz inversa. Recuerda que, si el determinante es distinto de cero, el sistema tiene solución única, lo mismo si existe la matriz inversa. En este caso, el sistema tiene solución única (pruébalo), por lo que genera todo R^2

Ya sabemos que S es un generador de R^2, por lo cual falta verificar si S es LI:

$$c_1(1,1) + c_2(1,-1) = (0,0)$$

$$(c_1 + c_2, c_1 - c_2) = (0,0)$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & |0 \\ 1 & -1 & |0 \end{pmatrix}$$

Al resolver el sistema, se verifica que $c_1 = 0 \; y \; c_2 = 0$, por lo que S es LI. Al verificar que S es generador de R^2 y es LI, se concluye que S es una base de R^2

Mira el siguiente video:

https://www.youtube.com/watch?v=YsG8IB9Olzw&t=120s

A veces, se puede presentar un espacio vectorial y se pide hallar la base:

Sea el espacio $S \subseteq R^3$ definido como:$S = \{(x, y, z) \in R^3 / x - 2y + z = 0\}$. Hallar la base de S.

Para analizar la solución, mira el siguiente video:

https://www.youtube.com/watch?v=iG7pQoEAlIE&list=PLyaHe04FbGh6MICQlBg692pX4Ee0HZMNq&index=3

Bases y dependencia lineal

Si $S = \{v_1, v_2, v_3 \dots v_n\}$ es una base de un espacio vectorial V, entonces todo conjunto que contiene más de n vectores en V es linealmente dependiente

Ejemplo: Dado que R^3 tiene una base que consta de tres vectores, entonces el conjunto

$$S = \{(1,2,-1),(1,1,0),(2,3,0),(5,9,-1)\}$$

Debe ser LD, verifícalo

Número de vectores en una base

Si un espacio vectorial *V* tiene una base con *n* vectores, entonces toda base de *V* tiene *n* vectores

Ejemplo: El conjunto $S = \{(1,2,-1),(1,1,0),\}$ no es una base de R^3, ya que sólo tiene dos vectores, pero sí es una base para un subespacio de *V*

Dimensión de un espacio vectorial

Si un espacio vectorial *V* tiene una base de *n* vectores, entonces el número n se denomina dimensión de *V* y se denota por *dim(V)* = *n*. Si *V* consta solamente del vector nulo, entonces la dimensión de V se define como cero. La dimensión de un subespacio de *V* puede ser igual o menor que la dimensión de *V*

- Ejemplo

Determinar la dimensión del subespacio $W \subseteq R^3$

$$W = \{(d, c-d, c) : c\ y\ d\ son\ números\ reales\}$$

En este link podrás ver la solución

https://drive.google.com/file/d/1Wa3lz9CbRe-gP49OiCjgyVw0IY5rXgnI/view?usp=sharing

Espacio renglón y espacio columna. Rango

En la clase 5 de matrices, hemos mencionado que las columnas y renglones o filas de una matriz A_{mxn} son vectores:

Sea la matriz $A_{2x3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Los vectores renglón son: $(0, 1, -1)\ y\ (-2, 3, 4)$ y los vectores fila son $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\ y\ \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Observa que, los vectores renglón son vectores del espacio R^3, y las vectores columnas son vectores del espacio R^2

El conjunto de vectores renglón o espacio renglón de una matriz A_{mxn} determinan un conjunto generador del subespacio R^m. De forma análoga, los vectores columna o espacio columna de una matriz A_{mxn} determinan un conjunto generador del subespacio R^n

Considerando la matriz $A_{2x3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ del ejemplo anterior, S_1 es el conjunto generador de un subespacio de R^3, y S_2 es el conjunto generador de un subespacio de R^2:

$$S_1 = \{(0, 1, -1)\ \ (-2, 3, 4)\} \qquad\qquad S_2 = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$$

Si tenemos un generador de un subespacio vectorial, podemos hallar la base de dicho espacio determinando los vectores LI del conjunto generador. Lo mismo pasa con los espacios columnas y espacios filas, podemos calcular sus bases:

Ejemplos:

a) Encontrar una base para el espacio renglón de

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 6 & -1 \\ 3 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \to v_1 \\ \to v_2 \\ \to v_3 \\ \to v_4 \\ \to v_5 \end{array}$$

el generador del espacio renglón A es:

$G(A) = \{(1,3,1,3),(0,1,1,0),(-3,0,6,-1),(3,4,-2,1),(2,0,-4,2)\}$

Mediante operaciones entre renglones, obtenemos la siguiente matriz:

$$B= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \to w_1 \\ \to w_2 \\ \to w_3 \\ \\ \\ \end{array}$$

Las matrices $A\ y\ B$ son equivalentes por renglones. Observa que los dos últimos renglones de la matriz B, son cero, por lo visto hasta este momento, significa que los vectores $v_4\ y\ v_5$ de la matriz A son una combinación lineal de los otros vectores, por lo que una base para espacio renglón A es:

$B_r = \{(1,3,3,1),(0,1,1,0),(0,0,0,1)\}, \qquad Dim(B_r) = 3$

b) Encontrar una base para el espacio columna de la matriz A del ejemplo anterior.

En este caso, conviene trabajar con la matriz transpuesta de A, A^t, que es la matriz que tiene por renglones las filas de la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 6 & -1 \\ 3 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \ A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 6 & -2 & -4 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Reduciendo por renglones a la matriz A^t, obtenemos:

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 9 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \rightarrow v_1 \\ \rightarrow v_2 \\ \rightarrow v_3 \\ \end{array} \end{array}$$

Así, los vectores

$v_1 = (1, 0, -3, 3, 2), \ \ v_2 = (0, 1, 9, -5, -6), \ \ v_3 = (0, 0, 1, -1, -1)$

forman una base para A^t, que es equivalente a decir que los vectores v_1, v_2, v_3 forman base para el espacio columna de A:

$$B_c = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 13 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 9 \\ -5 \\ -.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad Dim(B_c) = 3$$

En los dos ejemplos anteriores, trabajamos con la misma matriz, A, y las dimensiones de las bases $B_r \ y \ B_c$ son iguales. Esto siempre sucede cuando se calcula las dimensiones de las bases de un espacio renglón y un espacio columna de una matriz, A ese número lo llamamos ***rango*** de A y lo denotamos como ***rango (A)***. Otras notaciones: $r(A), Rang\ (A)$. En el ejemplo, el ***rango (A)****=3*

Espacio nulo de una matriz

Recordemos (clase 4, pág. 11), que un sistema de ecuaciones lineales homogéneo es de la forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{2n}x_n = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{3n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Si escribimos el sistema en forma matricial, nos queda:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots \dots & a_{1n} \\ & \dots & \\ & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} \dots \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

En forma reducida: $A.\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0},$ dónde A es una matriz de mxn, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots x_n)^t$ es el vector columna de las incógnitas y $\boldsymbol{0} = (0, 0, \dots, 0)^t$ es el vector cero en R^m.

En un sistema de ecuaciones homogéneo $A.\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0},$ el conjunto de todas las soluciones es un subespacio de R^n llamado ***espacio nulo*** de A y es denotado por $N(A)$. La dimensión del espacio nulo de A es la ***nulidad*** de A

1. Determinar el espacio nulo de una matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Escucha el siguiente audio para que te puedas orientar en cómo pensar este ejercicio.

https://drive.google.com/file/d/1uQwItcCN-THWq408tbM74wsyFiZvbrIx/view?usp=sharing

Te mostramos la solución: $N(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, la nulidad es 2

Hay una relación entre el espacio solución n de un sistema de ecuaciones lineal homogéneo, el rango de la matriz y la nulidad:

Si A es una matriz de mxn de rango r, entonces la dimensión del espacio solución de $A.\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ es: $n = rango\ A + nulidad\ de\ A$

Ejemplo: Sea la matriz A_{4x3} y el espacio columna que determinan los vectores $a_{1,}a_{2,}a_{3,}a_{4,}a_5$

$$\begin{array}{c} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & 0 & -12 \end{pmatrix} \\ \quad\quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \end{array}$$

a) Determine el rango y la nulidad de A

b) Determine la base de los vectores columna de A

Intenta resolver la ejercitación, te dejamos las respuestas así analizas tus procesos:

a) Rango $(A) = 3$, nulidad de A es 2

b) Base del espacio columna de A

$$B(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Actividades

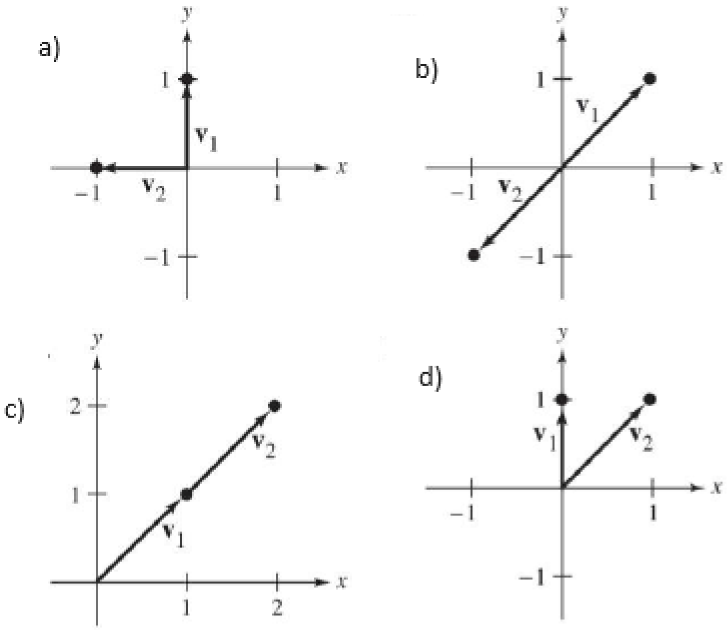
1. Determina en cada caso, si el conjunto S es linealmente independiente o linealmente dependiente

$$S = \{(-2,2),(3,5)\}$$

$$S = \{(-4,-3,4),(1,-2,3),(6,0,0)\}$$

$$S = \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}\right\}$$

2. Observando las gráficas, indique, en cada caso, si el conjunto $\{v_1 , v_2\}$ determinan una base en R^2:



3. Determine si S es una base del espacio vectorial correspondiente:

$a)\ S = \{(1,0,0)(1,1,0)(1,1,1)\}, \qquad S \subset R^3$

$b)\ S = \{(4,3,2)(0,3,2)(0,0,2)\}, \qquad S \subset R^3$

$c)\ S = \{(2t,t), t \in R\}, \qquad S \subset R^2$

$d)\ S = \{(2s - t, s, t), t \in R, s \in R\}, S \subset R^3$

4. Encontrar en cada caso, una base para el espacio columna y una base para el espacio renglón de las siguientes matrices. Indicar la dimensión en cada caso

$$a)\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$b)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c)\begin{pmatrix} 2 & 4 & -3-6 \\ 7 & 14 & -6-3 \\ -2 & -4 & 1\ -2 \\ 2 & 4 & -2-2 \end{pmatrix}$$

5. Indicar el rango y la nulidad de los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$a)\ \begin{cases} x_1 - 4x_2 = 0 \\ 3x_1 - 12x_2 = 0 \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 \qquad\quad = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ -3x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 0 \end{cases}$$

6. La dimensión del espacio renglón de una matriz A de $3x5$ es 2

a) ¿Cuál es la dimensión del espacio columna de A?

b) ¿Cuál es el rango de A?

c) ¿Cuál es la nulidad de A?

3.Actividades de cierre

Hallar las bases y dimensión de los siguientes espacios vectoriales:

$V_1 = \{(x, y, 3x + 2y), x \in R, y \in R\}$

$V_2 = \{(x, 2x, 0), x \in R\}$

$V_3 = \{(2x - y + z, 3x + z, x + y, -3z), x \in R, y \in R\}$

$V_4 = \left\{\begin{pmatrix} 2a & -a \\ 0 & b \end{pmatrix}, a \in R, b \in R\right\}$

En el siguiente enlace podrás ver las soluciones:

https://www.youtube.com/watch?v=8W5k6auEQAA

4.Cierre

Como comentamos en la presentación, las combinaciones lineales en un espacio vectorial introducen conceptos sumamente importantes del álgebra lineal. En esta clase se presentaron conceptos básicos, pero ten en cuenta que las aplicaciones son muy extensas.

Te invitamos a que nos dejes tus impresiones sobre lo que aprendimos hoy a través de una intervención en el foro de la clase. También puedes compartir links de recursos, como artículos o videos, por ejemplo, que hayas buscado y te hayan parecido interesantes mientras estudiabas este tema. No olvides que esta semana debes subir al Moodle un video en el cual expliques algunos de los conceptos vistos hasta la clase 6. La duración del video puede ser de 3 a 5 minutos

Recuerda que es importante que participes de los foros, de los encuentros sincrónicos

5. Bibliografía Obligatoria:

- Larson, R. (2015), capítulo 4. En *Fundamentos del Álgebra Lineal*, 7ª edición, Cengage Learning, recuperado de https://drive.google.com/file/d/15Qzi4iV8w6ABbMyUn_CnuNnaanrrfpA/view?usp=sharing

- Grossman, S. (2008). capítulo 4. En *Álgebra Lineal*, 6ª edición, Mc Graw Hill, recuperado de https://drive.google.com/file/d/1H-1_QGxzaATSloguW5hxi4xSPQI61JW/view?usp=sharing