LÓGICA

1º AÑO

Clase N.º 3: Lógica Proposicional.

Contenido: **Reglas de manipulación y Sustitución.**

¡Bienvenidas y bienvenidos a la tercera clase! En la clase 2 vimos que uno de los métodos para otorgar valor de verdad, ya sea V o F, a una proposición compuesta, son las tablas de verdad. En esta clase veremos si existen otras maneras de determinar el valor de verdad.

Les proponemos expresar simbólicamente dichas proposiciones:

María aprobó el examen de álgebra.
No es cierto que María no aprobó el examen de álgebra.

Comparémoslas, ¿Qué podemos decir de ambas afirmaciones? ¿Son proposiciones distintas? ¿Expresan lo mismo? Formalmente son proposiciones distintas, como lo vemos al simbolizarlas, pero expresan lo mismo:

p: *María aprobó el examen de álgebra.*
~(~p): *No es cierto que María no aprobó el examen de álgebra.*

Consideremos dos fórmulas proposicionales (o proposiciones compuestas) que indicaremos por F1 y F2, que estén formadas por las mismas proposiciones simples.

Por ejemplo, si tenemos las fórmulas proposicionales:

F1: $p \rightarrow q$ F2: $\sim p \vee q$

observamos que sus tablas de verdad son iguales:

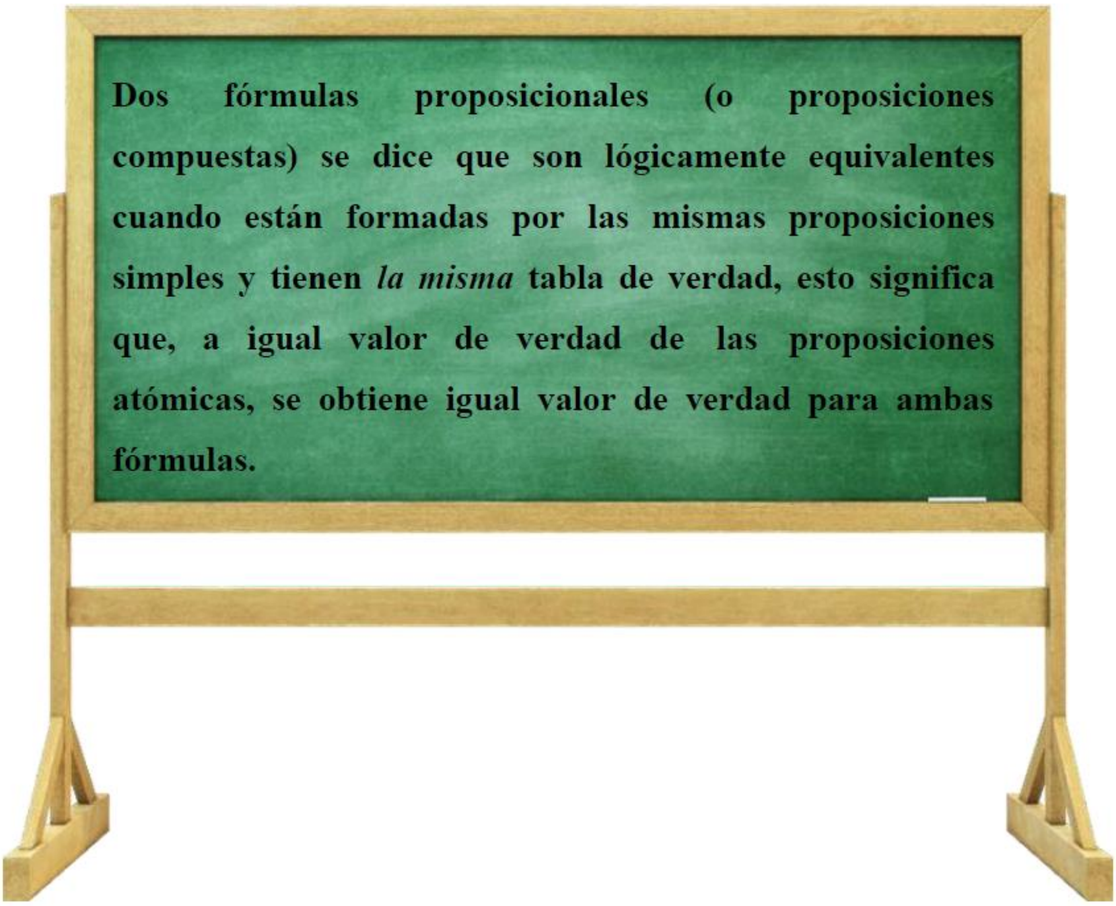
p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	~p ∨ q	
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Por lo tanto, la expresión: $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$, es una tautología, dado que su tabla de verdad resulta:

p	q	$(p \to q)$	$\Leftrightarrow$	$(\sim p \lor q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Entonces, esas fórmulas proposicionales F_1 y F_2 (que involucran las mismas proposiciones simples p y q) son **lógicamente equivalentes** si el bicondicional $F_1 \leftrightarrow F_2$ es verdadero para todos los valores de sus componentes.



También podemos decir que la fórmula proposicional F1, que depende de las proposiciones simples p y q, y la fórmula F2, con las mismas proposiciones, son **lógicamente equivalentes cuando F1 ⇔ F2 es una tautología**.

Notación: Indicamos que F1 y F2 son equivalentes escribiendo $F1 \equiv F2$ o escribiendo $F1 \Leftrightarrow F2$. Utilizaremos proposiciones equivalentes para expresar una misma idea de distintas maneras.

Cuando se afirma que dos proposiciones son equivalentes (o lógicamente equivalentes) se excluye la posibilidad de que una sea verdadera y la otra falsa; por lo tanto, una equivalencia nos afirma que sus miembros izquierdo y derecho son o bien ambos verdaderos o bien ambos falsos, es decir las proposiciones tienen el mismo valor de verdad en cada caso.

En principio, para determinar que dos esquemas proposicionales cuyas componentes corresponden a las mismas proposiciones, son equivalentes, basta examinar si sus tablas de verdad son iguales.

Entonces, en el ejemplo anterior, podemos escribir $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$, o bien, $(p \rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$ y decir que $p \rightarrow q$ es **lógicamente equivalente** a $\sim p \vee q$.

Expresiones usuales sinónimas de la equivalencia

Cuando se tiene la expresión $p \Leftrightarrow q$, que leemos *"p es equivalente a q"* frecuentemente encontramos, sobre todo en las definiciones y en algunos teoremas de matemática, expresiones como las siguientes, que indican una equivalencia lógica:

- p es condición necesaria y suficiente para q
- q es condición necesaria y suficiente para p
- p cuando, y sólo cuando q
- p sí, y únicamente si q
- p si y sólo si q

Por ejemplo: "Un triángulo es equilátero si, y sólo si es equiángulo". Que sea equilátero es condición necesaria y suficiente para que sea equiángulo, y viceversa.

Algunas equivalencias lógicas importantes son las llamadas **leyes lógicas** o propiedades del álgebra proposicional:

Idempotencia	$p \wedge p \Leftrightarrow p$; $p \vee p \Leftrightarrow p$
Involución	$\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$
Asociativa de la conjunción	$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
Asociativa de la disyunción	$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
Conmutativa de la conjunción	$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$
Conmutativa de la disyunción	$(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$
Ley de De Morgan en la conjunción	$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$
Ley de De Morgan en la disyunción	$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$
Equivalencia de la implicación	$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \sim p \vee q$
Negación de la implicación	$\sim(p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$
Equivalencia de la doble implicación	$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ $\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$
Negación de la doble implicación	$\sim(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$
Distributiva de la conjunción respecto de la disyunción	$(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$
Distributiva de la disyunción respecto de la conjunción	$(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
Diferencia simétrica	$p \Delta q \Leftrightarrow \sim(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \veebar (\sim p \wedge q)$ $\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$
Absorción	$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$; $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$
Complemento	$p \vee \sim p \rightarrow V$; $p \wedge \sim p \rightarrow F$
Identidad	$p \wedge V \Leftrightarrow p$ $\quad p \wedge F \Leftrightarrow F$
Identidad	$p \vee V \Leftrightarrow V$ $\quad p \vee F \Leftrightarrow p$
Principio de no contradicción	$\sim(p \wedge \sim p)$

Podemos comprobar, mediante tablas de verdad, que las leyes lógicas son equivalencias lógicas, es decir resultan tautologías. Ahora bien ¿cómo utilizamos las leyes lógicas?

Veamos:

Demostrar que la siguiente fórmula es una ley lógica, sin utilizar tabla de verdad: Ley del **contrarrecíproco**: $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$

Demostración:

$p \rightarrow q$ Equivalencia de la implicación

$\sim p \vee q$ Conmutativa de la disyunción

$q \vee \sim p$ Involución

$\sim(\sim q) \vee \sim p$ Equivalencia de la implicación

$\sim q \rightarrow \sim p$

Fíjense que parto desde $p \rightarrow q$ y llego a $\sim q \rightarrow \sim p$ pero también podría haber partido de $\sim q \rightarrow \sim p$ y llegar a $p \rightarrow q$.

Actividad 1: Muestre que las siguientes fórmulas son leyes lógicas sin utilizar tablas de verdad:

a. $p \wedge q \Leftrightarrow \sim(p \rightarrow \sim q)$

b. $p \vee q \Leftrightarrow (\sim p \rightarrow q)$

c. $\sim p \Leftrightarrow p \rightarrow \sim p$

d. $\sim p \Leftrightarrow p \rightarrow (q \wedge \sim q)$

e. $p \vee q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow q$

f. $(p \vee q) \rightarrow r \Leftrightarrow (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$

g. $p \rightarrow q \Leftrightarrow p \rightarrow (p \rightarrow q)$

h. $p \, \Delta \, q \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$

i. $p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee \sim(p \vee q)$

j. $\sim(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow \sim p \Leftrightarrow q$

Actividad 2: ¿Cuál de las siguientes expresiones son lógicamente equivalentes a $(\sim p \vee \sim q) \wedge r$?

a) $p \rightarrow (\sim q \wedge r)$
b) $(p \rightarrow q) \wedge r$
c) $(p \rightarrow \sim q) \wedge r$

Actividad 3: Probar que $\sim p \equiv [(p \vee q) \rightarrow (\sim p \wedge q)] \wedge (p \rightarrow q)$

Actividad 4: Transformar la proposición: $p \rightarrow \sim(\sim q \rightarrow r)$ en otra equivalente que contenga sólo conectivos "∧", "v " y "~"

¡Hemos finalizado la clase 3! Vimos cómo demostrar leyes lógicas sin utilizar tablas de verdad, como también simplificar, negar y simplificar. Esto cumple un rol muy importante en la programación, ¡en las próximas clases vamos a ir descubriéndolo!

Bibliografía:

- Rojo, Armando O. (1996), *Álgebra I,* Buenos Aires - Argentina, El Ateneo.

- Johnsonbaugh, Richard. (2005), *Matemáticas discretas*, México, Pearson Educación.