MATEMÁTICA ORIENTADA AL PENSAMIENTO COMPUTACIONAL

1° AÑO

Clase Nº 5: MATRICES

Contenido:

En la clase de hoy trabajaremos los siguientes temas:

- Matrices: definición, generalidades
- Operaciones con matrices: suma, producto por un escalar
- Producto escalar. Multiplicación de matrices
- Inversión de matrices.
- Sistemas de ecuaciones matricial

1. **Presentación:**

En la clase anterior hemos estudiado y trabajado sistemas de ecuaciones y la resolución mediante el método de Gauss y Gauss Jordan, y en la clase 1 hemos introducido el concepto de matriz booleana para representar relaciones. En esta clase desarrollaremos matrices que es una herramienta muy útil en informática para manejar el almacenamiento de múltiples valores de una información en una sola variable.

Te invitamos a visitar el siguiente recurso para introducirnos en el tema https://www.youtube.com/watch?v=9FKFgNQktkU

2. **Desarrollo y Actividades:**

Los conceptos que estudiaremos en esta clase dan continuidad al estudio que venimos haciendo de la Matemática orientada al pensamiento computacional para el uso y manejo de bases de datos. Te invitamos a que veas el siguiente video sobre matrices.

Conceptos básicos: https://www.youtube.com/watch?v=m6w5vLA3Lnw

Si te quedan dudas sobre estos temas puedes consultar en el foro de la clase o en las tutorías cuando nos encontremos.

INFORMACIÓN Y MATRICES

Base de datos de venta de autos

De la base de datos de ventas de una concesionaria de autos, se extrae la información para los dos primeros meses del año sobre el último modelo fabricado en sus diferentes versiones (básico, full y súper) y colores (blanco, negro, rojo, verde). Las matrices determinadas son:

$$E = \begin{pmatrix} 100 & 110 & 130 & 90 \\ 60 & 50 & 40 & 70 \\ 40 & 60 & 50 & 70 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 90 & 110 & 100 & 65 \\ 60 & 50 & 80 & 40 \\ 40 & 70 & 40 & 30 \end{pmatrix}$$

¿Qué información contiene cada matriz? ¿Cuáles son los criterios seleccionados para la información por filas y columnas para ambas matrices?

Mediante operaciones entre matrices, es posible obtener información de interés

Matriz de total de autos vendidos entre los meses de Enero y Febrero

$$E + F = \begin{pmatrix} 190 & 220 & 230 & 155 \\ 120 & 100 & 120 & 110 \\ 80 & 130 & 90 & 100 \end{pmatrix}$$

¿Cómo crees que se obtuvo esta matriz? ¿Cuáles son los criterios para la información por filas y columnas para la matriz?

Matriz de diferencia de autos vendidos entre los dos meses

$$E - F = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 30 & 25 \\ 0 & 0 & -40 & 30 \\ 0 & -10 & 10 & 40 \end{pmatrix}$$

¿Cómo crees que se obtuvo esta matriz? ¿Cuáles son los criterios para la información por filas y columnas para la matriz? ¿Cómo interpretas el valor numérico que observas en esta matriz en la fila 3 y columna 2? ¿Y en la fila 2 columna 2?

Para calcular la proyección de ventas para meses siguientes se usan los indicadores de años anteriores. Estos muestran que para el mes de abril se prevé un incremento en las ventas de un 35% respecto del último conocido. El cálculo para ese modelo se realizaría multiplicando los valores de la matriz de febrero por 1,35. Ello sería la multiplicación por escalar de la matriz F (febrero).

$$1{,}35 \cdot F = \begin{pmatrix} 121{,}5 & 148{,}5 & 135 & 87{,}75 \\ 81 & 67{,}5 & 108 & 54 \\ 54 & 94{,}5 & 54 & 40{,}5 \end{pmatrix}$$

Base de datos de envíos

A partir del envío que hizo una ONG a dos zonas de la Argentina que fueron afectadas por las inundaciones del 2 de abril de 2013, se establecen dos matrices A y B. La matriz A muestra la cantidad enviada a cada zona de ropa, medicinas y alimentos no perecederos medidos en toneladas, y la matriz B

muestra el valor en pesos de cada tonelada por cada tipo de objetos en cada envío.

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} Ropa & Medic. & Alim. \end{array} \\ \begin{array}{c} Z1 \\ Z2 \end{array} & \begin{pmatrix} 220 & 12 & 680 \\ 180 & 40 & 450 \end{pmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} Envío\ I & Envío\ II \end{array} \\ \begin{array}{c} Ropa \\ Medic. \\ Alim. \end{array} & \begin{pmatrix} 1600 & 1680 \\ 400000 & 434000 \\ 880 & 960 \end{pmatrix} \end{array}$$

Para calcular el valor en pesos por el total de toneladas de ropa, medicamentos y alimentos no perecederos recibidos en cada zona por cada envío, se deben multiplicar ambas matrices:

$$A \times B = \begin{pmatrix} 220 & 12 & 680 \\ 180 & 40 & 450 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1600 & 1680 \\ 400000 & 434000 \\ 880 & 960 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 222.1600 + 12.400000 + 680.880 & 222.1680 + 12.434000 + 680.960 \\ 180.1600 + 40.400000 + 450.880 & 180.1680 + 40.434000 + 450.960 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 5398400 & 1042560 \\ 16684000 & 18094400 \end{pmatrix}$$

Si la matriz B tuviera 2 filas, ¿se podrá realizar la multiplicación? ¿Y si tuviera 3 filas y 3 columnas? ¿Qué información brinda cada elemento de la matriz anterior?

Las matrices son una herramienta útil en la computación para manipular información de una base de datos en un sistema informático, ya que ofrecen facilidad y liviandad. Las matrices tienen usos prácticos en todas las aplicaciones en la informática y la programación, en esta última es un punto base para el trabajo debido a que se las usa en cualquier lenguaje de programación, son útiles para solucionar problemas con tablas o datos ordenados. Es por eso que las matrices son básicas para la solución de problemas en informática, específicamente en programación que la concibe como una zona de almacenamiento continuo, que contiene una serie de elementos del mismo tipo ordenada en filas y columnas, que son los elementos de la matriz. Así, las matrices son estructuras de datos que permite almacenar un conjunto de datos del mismo tipo.

Para muchas tareas informáticas, la multiplicación entre matrices es una operación elemental. La multiplicación entre matrices es clave para que nuestros teléfonos celulares procesen imágenes y que los asistentes de voz puedan identificar casi todo lo que les pedimos. La aplicación de la operación también alcanza contextos más complejos como las simulaciones en el campo de la meteorología para predecir el clima y la compresión de datos para su transmisión por Internet, entre otros.

MATRICES

Una matriz es una distribución de números dispuestos en forma rectangular, alineados en filas y columnas. Cuando una matriz tiene m filas y n columnas, decimos que su dimensión es $m \times n$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \text{Columna 1} & \text{Columna 2} & \text{Columna 3} & \cdots & \text{Columna } n \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Fila 1} \\ \text{Fila 2} \\ \text{Fila 3} \\ \vdots \\ \text{Fila } m \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

Las matrices se denotan con letras mayúsculas: $A_{m\times n}$ es la matriz A de m filas y n columnas. Los elementos de la matriz se denotan con letras minúsculas: a_{ij} es el elemento de la matriz A ubicado en la fila i y columna j. Estos valores i y j números, llamados subíndices, se usan para hacer referencia a los elementos de la matriz porque determinan su ubicación dentro de esta, el primero indica la fila, y el segundo la columna.

Ejemplos:

$$A_{3,4} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & \sqrt{5} \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 7 \end{pmatrix} \qquad V_{3,1=} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad W_{1,,4} = (0 \;\; 1 \;\; 3 \;\; 5)$$

En los ejemplos, la matriz V de 3 filas y una columna, es un ***vector columna***, la matriz W de una fila y 4 columnas, es un ***vector fila***

Definiciones

- Matriz cuadrada. Cuando una matriz tiene el mismo número de filas que de columnas, esto es, si $m = n$, entonces se llama **matriz cuadrada de orden** n y los elementos $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ se denominan elementos de la **diagonal principal**.

$$A_{2,2} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 \\ 3 & \mathbf{2} \end{bmatrix} \quad B_{3,3} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & 0 & 5 \\ 2 & \mathbf{4} & 5 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

- Se denomina **matriz nula** de cualquier dimensión, a aquella en la que todos sus elementos son ceros.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (0 \quad 0 \quad 0) \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Dos matrices son **iguales** cuando coinciden término a término

- Se denomina **matriz transpuesta** de un matriz A, y se designa por A^t, a la matriz que se obtiene al cambiar en A las filas por las columnas y las columnas por filas:

$$A_{m,n} = \left(a_{i,j}\right) \qquad A^t_{n,m} = (a_{j,i})$$

$$A_{3,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 3 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad {A^t}_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Mira el siguiente video

https://www.youtube.com/watch?v=aTsgBk34zyY

- Se denomina **matriz identidad o unidad** a una matriz cuadrada cuyos elementos de la diagonal principal son unos y el resto de los elementos son ceros: $a_{ij} = 1$ si $i = j$, y $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$, se denota I_n

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observa que las matrices identidad I_3 ya las viste en la resolución de sistemas de ecuaciones por el método de Gauss -Jordan

OPERACIONES ENTRE MATRICES

- **Suma**

La condición para poder sumar (o restar, considerando a la resta como una suma de signo negativo) dos matrices es que sean de la misma dimensión. La suma o resta de dos matrices $m \times n$ es otra matriz $m \times n$ cuyos elementos son las sumas o restas de los elementos término a término

Observa los siguientes videos:

https://www.youtube.com/watch?v=S89lkpvajyU

https://www.youtube.com/watch?v=TFNhQq8wxmY&t=480s

Propiedades:

1. Asociativa: $(A+B)+C=A+(B+C)$
2. Conmutativa $(A+B)=(B+A)$
3. La matriz nula $0_{m,n}$es la matriz neutra (no modifica):

$$A_{m,n}+0_{m,n}=A_{m,n}$$

4. Existencia de elemento opuesto $(-A_{m,n})$: $A_{mn}+(-A)_{mn}=0_{mn}$

Multiplicación de una matriz por un escalar

Se llama escalar a un número real. Para multiplicar un escalar por una matriz se multiplica cada elemento de la matriz por el escalar. Esto es, si

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad k\in R, \implies k\cdot A=\begin{pmatrix} K\cdot a_{11} & \cdots & K\cdot a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K\cdot a_{m1} & \cdots & K\cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Multiplicación de escalar por matriz: https://www.youtube.com/watch?v=-ArUqjhQIBM

Multiplicación de matrices

Es natural suponer que el producto entre matrices se realiza multiplicando componente por componente, pero, como se vio en el ejemplo de la página 4, la multiplicación entre matrices es más elaborada. Comencemos explicando el producto escalar entre las matrices especiales que denominamos vectores columnas y filas[1]. A los vectores los denominaremos con letras minúsculas

- **Producto escalar**

Sean $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$ dos vectores de *n*-dimensión. Entonces, el *producto escalar* de *a y b* denotado por $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ está dado por

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

Debido a la notación, el producto escalar se denomina con frecuencia, *producto punto* o *producto interno* de los vectores. Observa que el producto escalar de dos *n*-vectores es un escalar (es decir, un número)

El producto escalar también se aplica entre vectores filas y entre un vector renglón y un vector columna:

$$(a_1 a_2 \cdots a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots a_n b_n$$

[1] En las clases siguientes, se desarrollará brevemente vectores. Las matrices se las pueden considerar como un conjunto de vectores,(filas o columna) ya que forman parte de un espacio vectorial

Observa que, para poder realizar el producto escalar los vectores deben tener la misma cantidad de componentes

Ejemplos:

Sean $a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, c = (1 \ \ 0 - 2)$

$$a \cdot b = 1.3 + (-2).(-2) + 3.4 = 3 + 4 + 12 = 19$$

$$b \cdot c = 3.1 + (-2).0 + 4.(-2) = 3 + 0 - 8 = -5$$

Producto entre matrices

Consideremos a cada fila de la matriz A como vectores fila, y a cada columna de la matriz B como vectores columna. Para multiplicar las matrices $A y\ B$, esto es, $A \,.\, B$, realizaremos el producto escalar entre cada uno de los vectores filas de A por cada uno de los vectores columna de B en forma ordenada.

Sea $A = (a_{i,j})$ una matriz $m \times n$, y sea $B = (b_{i,j})$ una matriz $n \times p$. Entonces el producto de $A\ y\ B$ es una matriz $C = (c_{i,j})$ en donde

$$c_{i,j} = (\text{renglón } i \text{ de } A) \cdot (\text{columna } j \text{ de } B)$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1n}b_{n1} & \cdots & a_{11}b_{1p} + \cdots + a_{1n}b_{np} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + \cdots + a_{mn}b_{n1} & \cdots & a_{m1}b_{1p} + \cdots + a_{mn}b_{np} \end{pmatrix}$$

La condición para poder multiplicar dos matrices A y B, en ese orden, es que el número de columnas de la primera (A) coincida con el número de filas de la segunda (B). Esto es, $A_{m\times n} \times B_{n\times p} = C_{m\times p}$ es tal que un elemento c_{ij} de la matriz resultado se obtiene de realizar el producto escalar de cada fila i de A por la columna j de B. Es por ello que la matriz resultado tiene el mismo número de filas que A y el mismo número de columnas que B

Esto es, si son $A_{m\times n}$ y $B_{n\times p}$ entonces $A \times B = C$ donde es $C_{m\times p}$ tal que

$$C = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{j1} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{jm} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}b_{j1} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{mj}b_{jn} \end{pmatrix}$$

Ejemplos

1) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+4 & 9-8 \\ 5-12 & 15+24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -7 & 39 \end{pmatrix}$

2) $\underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}} \underset{3\times 3}{\begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}} = \underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} -5 & 7 & -1 \\ -3 & 6 & 6 \end{bmatrix}}$

3) $\underset{1\times 3}{\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}} \underset{3\times 1}{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}} = \underset{1\times 1}{\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}}$

4) $\underset{3\times 1}{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}} \underset{1\times 3}{\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}} = \underset{3\times 3}{\begin{bmatrix} 2 & -4 & -6 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}}$

Mira el siguiente video de multiplicación de matrices

https://www.youtube.com/watch?v=Tjrm3HsqBXE

Propiedades del producto de matrices

a. Asociativa: $(A_{m,n} \times B_{n,p}) \times C_{p,q} = A_{m,n} \times (B_{n,p} \times C_{p,q})$
b. La multiplicación no es conmutativa (¿por qué?)
c. La matriz **identidad** es el neutro en el producto de matrices cuadradas:

$$A_{n,n} \times I_n = A_{n,n} \qquad I_n \times A_{n,n} = A_{n,n}$$

d. Propiedad distributiva

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$

$$(B + C) \times D = B \times D + C \times D$$

Forma matricial de un sistema de ecuaciones. Combinación lineal

Una aplicación práctica de la multiplicación de matrices es la representación de un sistema de ecuaciones lineales. Observa como el sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mj}x_j + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Puede escribirse como como una ecuación matricial $Ax = b$, donde A es la matriz de coeficientes del sistema y $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{b}$ son matrices columnas (o vectores columna)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ & & \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 24 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Es mucho más sencillo escribir el sistema en la forma $Ax = b$. Además, existen otras ventajas, ya que las columnas de la matriz representan vectores, permitiendo introducir conceptos muy profundos que permiten abordar diversos problemas. En la próxima sección veremos cómo se puede resolver un sistema cuadrado si se conoce una matriz llamada *inversa* de A.

INVERSIÓN DE MATRICES

Sea A es una matriz cuadrada de dimensión n, si existe una matriz B tal que $A_n \times B_n = I_n$ entonces B se llama ***matriz inversa*** de A, se denota con A^{-1} y se dice que A es invertible o no singular. Si A_n no tiene inversa, entonces no es invertible o es singular

Las matrices cuadradas pueden dividirse en dos clases:

- No singulares (invertibles)
- Singulares (no invertibles)

Propiedad

Sea una matriz cuadrada A_n invertible, por lo tanto A_n tiene inversa A^{-1} y se verifica:

$$A_n {A^{-1}}_n = I_n \qquad {A^{-1}}_n A_n = I_n$$

Ejemplo:

Sean las matrices $A_{3,3}$ y su matriz inversa A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -15 & -8 & -3 \\ -9 & -5 & -2 \\ -5 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -15 & -8 & -3 \\ -9 & -5 & -2 \\ -5 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \quad \times \quad A^{-1} \quad = \quad I_3$$

$$\begin{pmatrix} -15 & -8 & -3 \\ -9 & -5 & -2 \\ -5 & -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \quad \times \quad A \quad = \quad I_3$$

Para calcular la matriz inversa (si existe) de una matriz cuadrada, hay dos métodos: 1) por Gauss-Jordan, 2) Determinante y matriz adjunta

En este curso, estudiaremos el cálculo de la matriz inversa por Gauss – Jordan mediante un ejemplo

Ejemplo: hallar la matriz inversa de la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Colocamos la matriz A y, a continuación, separada por una línea vertical, la matriz identidad:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ahora se le aplica a la matriz A las operaciones entre filas vistas en la clase anterior para transformarla en la matriz identidad, quedando, a la derecha, la matriz identidad. Si no se obtiene la matriz identidad, significa que la matriz no es invertible (es singular)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) F_1 + F_2 \mapsto F_1 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) F_3 - 2F_1 \rightarrow F_3$$

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{matrix}}_{A^{-1}} \right) \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Observa que:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}\,A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mira los siguientes videos

https://www.youtube.com/watch?v=W214PLI0quQ&t=332s

https://www.youtube.com/watch?v=lrh5MKNZihQ

Ahora que ya conoces como calcular la matriz identidad de una matriz invertible, veremos como se resuelve una ecuación matricial:

Sea la matriz invertible A y su inversa A^{-1} . Sea el sistema de ecuaciones expresado en forma matricial

$$Ax = b$$

Multiplicando los dos miembros por A^{-1}

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b$$

$$(A^{-1}A)x = A^{-1}b \quad \text{Propiedad asociativa del producto}$$

$$I\,x = A^{-1}b \qquad \text{Por ser } A^{-1}A = I$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A^{-1}b}$$

Veamos un ejemplo:

Resuelve por matrices el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \quad = 8 \\ \quad x_2 + x_3 = 13 \\ x_1 + 2x_2 \quad = 13 \end{cases} \quad \text{Matriz } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculemos A^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) F3 - F1 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} F3 - F2 \to F3 \\ F1 - F3 \to F1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (-1)F3 \\ F2 + F3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ 13 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema como $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A^{-1}b}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ 13 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Actividades

1. Una compañía produce mesas y sillas en 2 fábricas. La matriz C muestra los costos de fabricación en cada fábrica.

$$C = \begin{array}{cc} \text{Locación 1} & \text{Locación 2} \\ \left[\begin{array}{cc} 627 & 681 \\ 135 & 150 \end{array}\right] & \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{Mesas} \\ \text{Sillas} \end{array}$$

   a) Si la mano de obra constituye $\frac{2}{3}$ del costo, determine la matriz $\boldsymbol{L}$ que arroja los costos de mano de obra en cada fábrica.
   b) Encuentre la matriz $\boldsymbol{M}$ que arroja los costos de material en cada fábrica. (asuma que sólo hay costos de mano de obra y material)

2. Realice las operaciones matriciales indicadas sabiendo que $c = -2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$a)\ B(CA) \quad b)\ B(A + C) \quad c)\ (cB)(C + C) \quad d) C(BC) \quad e)\ B(C + 0)$

3. Verifique que $(AB)^T = B^T A^T$

$$a) \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ y \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$b) \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\ y \quad B = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Considere una matriz invertible A y señale cuál de las siguientes afirmaciones es cierta

a) El producto de A por I es A^{-1}

b) A es una matriz de 2 x 3

c) $A = A^{-1}$

d) Aes una matriz cuadrada

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta sobre el sistema

$$\begin{cases} 4x - 5y = 3 \\ 6x + 7y = 4 \end{cases} ?$$

a) No tiene solución porque $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ no es invertible

b) Tiene solución $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$

c) Si tuviera una solución se encontraría resolviendo $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

d) Su solución es $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

5. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones por el método matricial

$$a)\begin{cases} x + 2y = -1 \\ x - 2y = 3 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x + 2y = 10 \\ x - 2y = -6 \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ x + 2y - z = 4 \\ x - 2y + z = -2 \end{cases} \qquad d)\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x + 2y - z = 3 \\ x - 2y + z = -3 \end{cases}$$

Evaluación

Te invitamos a que accedas al foro de intercambio en el campus virtual de la carrera propuesto como actividad de evaluación de la clase. En el foro te pedimos que publiques la solución del ejercicio siguiente en la actividad integradora de cierre

No olvides que siempre podrás volver a la teoría presentada en esta clase o hacer las preguntas que consideres necesarias en el foro correspondiente a esta clase, los encuentros sincrónicos o las tutorías presenciales.

3. Actividad Integradora de Cierre:

Para resolver la siguiente actividad, tendrás que acceder al texto adjunto en el siguiente enlace:

https://docs.google.com/document/d/1GETDyZ-p8jRDMcIoKnsba2Vt5Tr_YTa9/edit?usp=sharing&ouid=113637116118972348120&rtpof=true&sd=true

Encuentre la matriz renglón sin codificar, del tamaño indicado para los mensajes dados. Después codifique el mensaje utilizando la matriz A

MENSAJE: “Please send money”

TAMAÑO DE LA MATRIZ RENGLÓN: 1x3

MATRIZ CODIFICADA

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Cierre:

Consideramos que es importante que te preguntes ¿Qué aporta a un Técnico Superior en Ciencias de Datos e Inteligencia Artificial saber de matrices y sus operaciones?

5. Bibliografía Obligatoria:

- Ron Larson, (2016). Capítulo 2: Matrices *Fundamentos del Álgebra Lineal*, séptima edición, Editorial: Cengage Learning, recuperado de **https://drive.google.com/file/d/15Qzi4iV8-w6ABbMyUn_CnuNnaanrrfpA/view?usp=sharing**
- Stanley I Grossman. (2006). Capítulo 1: Sistemas de ecuaciones y matrices *Álgebra Lineal*, edit Mc Graw Hill, recuperado de **https://drive.google.com/file/d/1H-1_QGxzaATSl-oguW5hxi4xSPQI61JW/view?usp=sharing**