MATEMÁTICA ORIENTADA AL PENSAMIENTO COMPUTACIONAL

1° AÑO

Clase Nº 6:

VECTORES EN EL PLANO. ESPACIOS VECTORIALES

Contenido:

En la clase de hoy trabajaremos los siguientes temas:

- Vectores en R^n: concepto, operaciones
- Espacios vectoriales
- Combinaciones lineales
- Generadores
- Dependencia e independencia lineal

1. Presentación

En esta clase trataremos el concepto de vector, concepto muy sencillo, pero de enormes aplicaciones en diversos campos, como son la informática y la física. Los vectores tienen una medida, sentido y dirección, convirtiéndolos en una herramienta fundamental de aplicación en aquellos procesos que involucran movimientos, transformaciones de un punto a otro. En una primera aproximación, geométricamente los vectores se representan por flechas y cumplen determinadas propiedades con la suma y el producto por un escalar (un número, no tiene dirección ni sentido) que también se cumplen en otros conceptos matemáticos, (funciones continuas, polinomios, matrices), definiéndose el campo de los espacios vectoriales, generando *herramientas conceptuales de análisis en geometrías que van más allá de nuestra percepción sensorial*

Mira los siguientes videos acerca de el uso de los vectores en informática

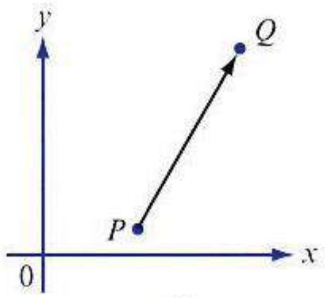
[*https://www.youtube.com/watch?v=4s2D-pr8Klo*](https://www.youtube.com/watch?v=4s2D-pr8Klo)

[*https://www.youtube.com/watch?v=cnPiWHFWA5U*](https://www.youtube.com/watch?v=cnPiWHFWA5U)

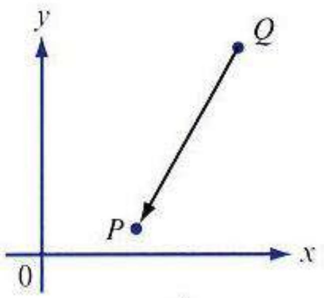
2. Desarrollo y actividades

Vectores en el plano $\boldsymbol{R^2}$ y $\boldsymbol{R^3}$

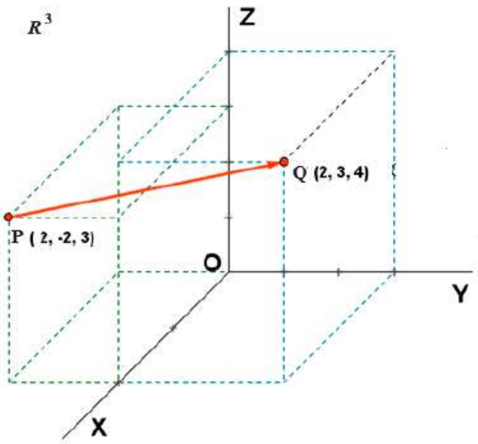
Sean en R^2 o en R^3 los puntos $P\ y\ Q$. Entonces, el segmento dirigido de $P\ a\ Q$, denotado por $\overrightarrow{PQ}$, es un vector (una flecha) de origen en P y extremo Q.



a) $\overrightarrow{PQ}$

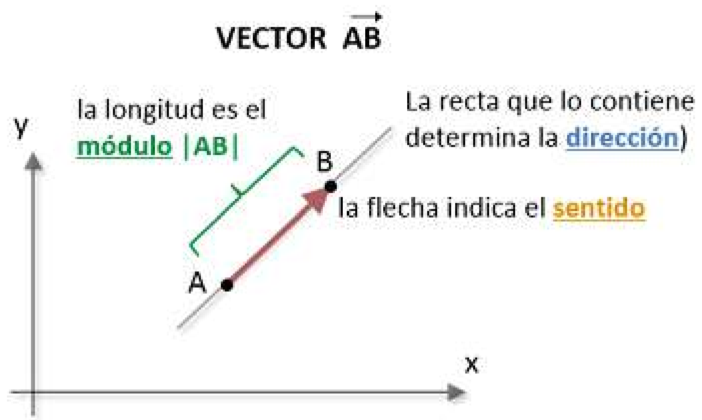


b) $\overrightarrow{QP}$



Las características principales de los vectores son:

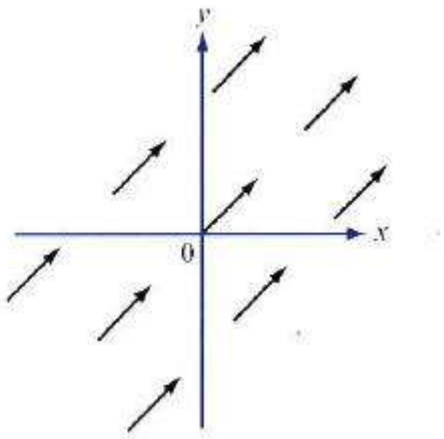
- Modulo, magnitud o norma, que indica la longitud de un vector
- Dirección: es la recta que contiene al vector
- Sentido: donde "apunta la flecha"



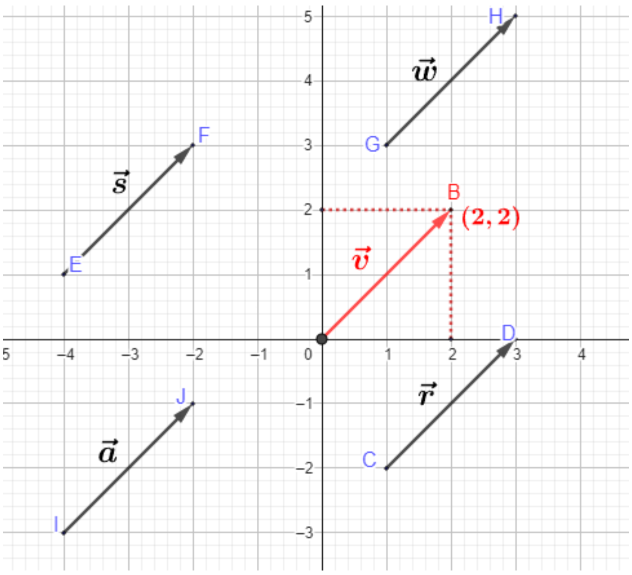
Notación: los vectores se los nombra con dos letras mayúsculas con una flecha arriba, donde la primera letra indica el origen del vector y la segunda letra el extremo del vector: $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{AB}$, o en negrita, $\boldsymbol{PQ}$. Otra notación más reducida es nombrar al vector con una letra minúscula en negrita, $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{PQ}$ o bien, con una flechita arriba: $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$

Vectores equivalentes

Si dos vectores tienen la misma magnitud, sentido y dirección (contenidos en rectas paralelas), se dice que son *equivalentes* sin importar en donde se localizan respecto al origen. En la gráfica, todos los vectores son equivalentes, ya que tienen la misma longitud, mismo sentido y la misma dirección.

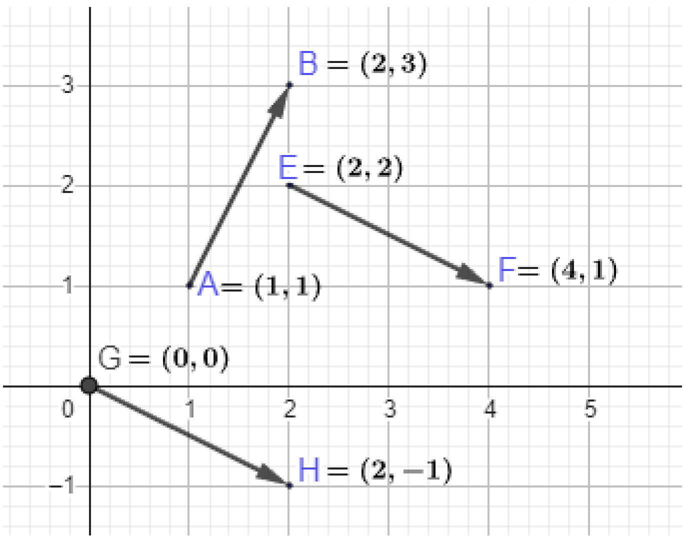


Cuando se trabaja con vectores en el plano (o en el espacio), a menudo solo interesa el módulo, el sentido y la dirección, por lo cual, se podría seleccionar cualquier vector equivalente (en la figura, se puede elegir cualquiera). Pero resulta mucho más cómodo trabajar con vectores que tengan su origen en el punto $(0,0)\ en\ R^2$ o $(0,0,0)\ en\ R^3$, ya que a todo punto en el plano (o en el espacio) le va a corresponder un vector con origen en $(0,0)$ $en\ R^2$ o $(0,0,0)\ en\ R^3$. Para mayor comodidad, de ahora en adelante nos vamos a referir a vectores en R^2 pero los mismos criterios geométricos y algebraicos se aplican para vectores en R^3



En la gráfica, todos los vectores son equivalentes. El vector $\boldsymbol{v}$ tiene su origen en centro de coordenadas, esto es, el punto $(0,0)$. Por lo tanto, el punto $(2,2)$ se lo puede pensar como un vector, por lo que la vector $\boldsymbol{v}$ se puede escribir como $\boldsymbol{v} = (\mathbf{2}, \mathbf{2})$

Para determinar si dos vectores son equivalentes, nos podemos fijar por inspección visual, pero, no es fiable. Lo que se debe hacer es buscar los vectores equivalentes con origen en $(0,0)$ y, si señalan el mismo punto en el plano, entonces son equivalentes. Para hallar el vector equivalente en el origen se debe realizar operaciones muy sencillas que veremos en el siguiente ejemplo:



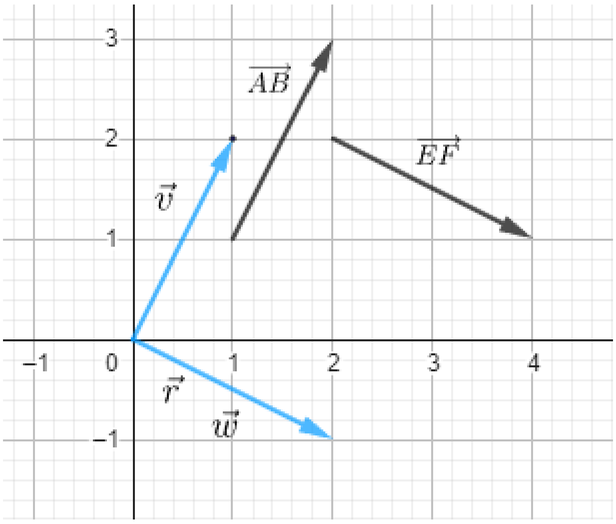
Para hallar el vector equivalente a un vector dado con origen en $(0,0)$, se deben restar a las coordenadas del extremo las coordenadas del origen del vector componente a componente:

Para el vector $\overrightarrow{AB}$, hacemos: $(2,3)-(1,1)=(2-1,3-1)=\mathbf{(1,2)=\vec{v}}$

Para el vector $\overrightarrow{EF}$, hacemos: $(4,1)-(2,2)=(4-2,1-2)=\mathbf{(2,-1)=\vec{w}}$

El vector $\overrightarrow{GH}$, ya está en el origen, $\overrightarrow{GH}=\mathbf{(2,-1)=\vec{r}}$

Por lo tanto, los vectores $\overrightarrow{EF}\ y\ \overrightarrow{GH}$ son equivalentes



Esta última representación permite definir un vector algebraicamente:

Un vector **v** en el plano xy es un par ordenado de números reales (a,b). Los números a y b se denominan **elementos** o **componentes** del vector **v**. El **vector cero** es el vector $(0,0)$, que no tiene dirección ni sentido

Operaciones entre vectores

Suma

Sean en R^2: $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ y $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2)$, se define la suma entre $\boldsymbol{v}$ **y** $\boldsymbol{w}$ como:

$$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$$

Ejemplo:

$\boldsymbol{v} = (3,4)$ y $\boldsymbol{w} = (-1,2), \Longrightarrow$ $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = (3 + (-1), 4 + 2) = (2,6)$

$$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = (2,6)$$

En R^3, la suma se define de la misma manera:

R^3: $\boldsymbol{v} = (2,1,0)$, $\quad \boldsymbol{w} = (4,-3,-1)$ $\quad \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = (6,-2,-1)$

La diferencia entre vectores se interpreta como la suma entre un vector y el vector opuesto (sentido opuesto):

Sean los vectores $\boldsymbol{v} = (3,4)$ $\boldsymbol{w} = (-1,2)$. Resolver $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$

$\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$ lo escribimos como $\boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{w})$**,** siendo $-\boldsymbol{w}$ el opuesto de $\boldsymbol{w}$**.** El opuesto de w es $-(-1,2) \longrightarrow -\boldsymbol{w} = (1,-2)$

$\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{w}) = (3,4) + (1,-2) = (4,2)$

La suma de vectores es conmutativa, asociativa, tiene elemento neutro (vector cero) y elemento inverso: $\boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$

Ejemplo: $\boldsymbol{v} = (3,4), -\boldsymbol{v} = (-3,-4) \Longrightarrow \ \boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{v}) = (0,0)$

Producto por un escalar

En la clase anterior, definimos un escalar como un número real, para diferenciarlo de las matrices. Con el mismo criterio, vamos a multiplicar un escalar (un número) por un vector:

sean R^2: $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)\ y\ \ k \in R \quad \Longrightarrow k.v = k.(v_1, v_2) = (k.v_1, k.v_2)$

ejemplo: $\boldsymbol{v} = (3,4), k = 3 \ \Longrightarrow k.v = 3.(3,4) = (9,12)$

En R^n, el producto por un escalar se define de la misma manera

La suma y el producto por un escalar tiene una interpretación geométrica sumamente interesante en R^2. Mira el siguiente video:

https://www.youtube.com/watch?v=74ujGuokxEA

Producto escalar o producto punto

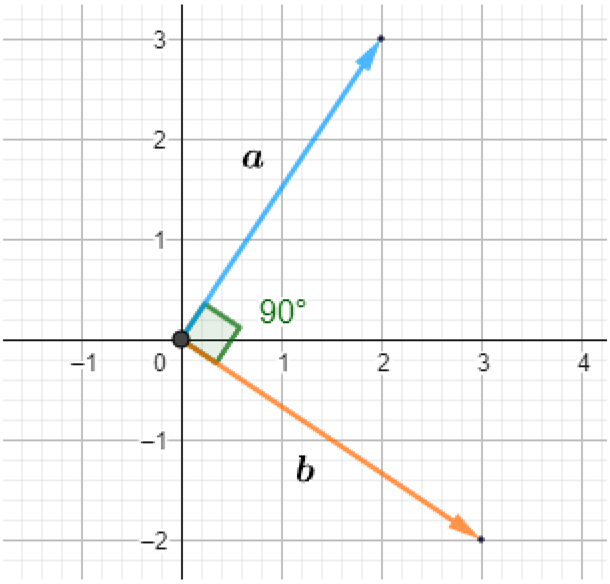
La clase anterior, hemos definido la operación producto escalar. A modo de ejemplo:

$$\boldsymbol{v} = (3,4)\ y\ \ \boldsymbol{w} = (-1,2), \Longrightarrow \ \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = 3.(-1) + 4.2 = \ -3 + 8 = 5$$

Se dice que dos vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son ortogonales si $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$. Geométricamente, si dos vectores son ortogonales, significa que son perpendiculares. Ejemplo:

$$\boldsymbol{a} = (2,3)\ y\ \ \boldsymbol{b} = (3,-2), \Longrightarrow \ \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 6 - 6 = 0$$

Observa el gráfico:



Si el producto escalar es cero, geométricamente indica que los vectores son perpendiculares

Son propiedades del producto escalar:

Sean a, b y c tres n-vectores y sean α y β dos escalares. Entonces

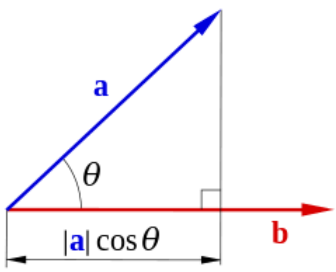
I. $a \cdot 0 = 0$

II. $a \cdot b = b \cdot a$

III. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

IV. $(\alpha a) \cdot b = \alpha(a \cdot b)$

El producto escalar o producto punto entre vectores se puede definir de otra forma: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |a|.|b|.cos(\alpha)$. Esta expresión, permite calcular el ángulo que hay entre los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$



Mira el siguiente video acerca del producto escalar

https://www.youtube.com/watch?v=2x-KlV_a-Fg

El producto escalar tiene propiedades geométricas sumamente interesantes, que se aplican especialmente en física. Está fuera del alcance de este curso analizar las mismas. Si te interesa saber un poco más de este tema, te dejo el siguiente enlace:

https://www.youtube.com/watch?v=eXA4806YuqY&t=2575s

Espacios vectoriales en $\boldsymbol{R^n}$

En el apartado anterior, se analizaron los espacios vectoriales determinados por vectores en $R^2\ y\ R^3$, ya que se los puede interpretar geométricamente. Pero los espacios vectoriales tienen elementos de mayores dimensiones, por ejemplo, las matrices. En estos espacios ya no hay una interpretación gráfica pero, sin embargo, por ser un espacio vectorial hay una geometría implícita en ellos pero desde el punto de vista estructural, es decir, a partir de las operaciones y propiedades presentes en todo espacio vectorial. Vamos a extender las operaciones vistas en $R^2\ y\ R^3$ a espacios vectoriales generales de R^n .

Definición de suma vectorial y multiplicación escalar en $\boldsymbol{R^n}$

Sean $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)\ y\ \boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$ vectores en R^n y sea c un número real. Entonces la suma de $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ se define como el vector

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3, \dots, u_n + v_n)$$

Y el producto por un escalar de $\boldsymbol{u}$ por c se define como

$$c\boldsymbol{u} = (cu_1, cu_2, cu_3, \dots, cu_n)$$

R^4: $\boldsymbol{v} = (-1, 1, 0{,}2)$, $\quad \boldsymbol{w} = (0, 3, -1, 2) \quad \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = (-1, 4, -1, 4)$

A menudo es útil representar un vector $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$ en R^n ya sea como una matriz renglón de 1X n (vector renglón) o como una matriz columna de n X1 (vector columna). Este planteamiento es válido, ya que las operaciones matriciales de suma y multiplicación por un escalar dan los mismos resultados que las operaciones vectoriales correspondientes. Es decir, las sumas matriciales

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n) + (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$$
$$= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3, \dots, u_n + v_n)$$

y

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ . \\ . \\ . \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ . \\ . \\ . \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \\ . \\ . \\ . \\ u_n + v_n \end{pmatrix}$$

producen el mismo resultado que la operación suma vectorial

El mismo argumento se aplica a la multiplicación escalar; la única diferencia en las tres notaciones vectoriales es cómo se despliegan las tres componentes.

Combinación lineal

Sean $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}, \dots, \boldsymbol{v_n}$ vectores en un espacio vectorial V. Entonces cualquier vector de la forma

$$\boldsymbol{w} = \alpha_1 \boldsymbol{v_1} + \alpha_2 \boldsymbol{v_2} + \alpha_3 \boldsymbol{v_3} + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v_n}$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n$ son escalares, se denomina **combinación lineal** de $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$

Veamos algunos ejemplos:

- El vector (2, 3) es combinación lineal de los vectores (2, 1) y (1 , 1), porque

(2, 3) = -1. (2, 1) + 4. (1, 1) (verifica la operación)

En este ejemplo, $\alpha_1 = -1 \;\; y \;\; \alpha_2 = 4$

- Con matrices

  La matriz $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ es combinación lineal de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ porque

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = 4.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 5.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- El vector (1, 2, 3), ¿es CL de (-1, 4, 2) y (0 , 0 , 1) ?

Planteamos la definición de CL:

$$(1, 2, 3) = k_1. (-1, 4, 2) + k_2. (0, 0, 1)$$

$$(1, 2, 3) = (-k_1, 4k_1, 2k_1 + k_2)$$

Acordate que para que dos vectores sean iguales todas las componentes tienen que ser iguales. Así que en realidad tenemos tres ecuaciones:

$1 = - k_1 \Rightarrow k_1 = - 1$

$2 = 4 k_1 \Rightarrow k_1 = ½$

$3 = 2 k_1 + k_2$

Para que se cumpla la primera igualdad, k1= -1, pero en la segunda ecuación se tiene que $k_1 = ½$, k_1 no puede tener valores diferentes, por lo que no hay forma de escribir (1,2,3) como CL de los vectores (-1, 4, 2) y (0, 0, 1)

- ¿(5,3) es CL de (1,0) y (0,1)?

Hacemos lo mismo que en el caso anterior: buscamos dos coeficientes k1 y k2para que se cumpla:

$(5, 3) = k_1.\ (1, 0) + k_2.\ (0, 1) \Rightarrow (5,3) = (k_1, k_2)$

Como todas las componentes tienen que ser iguales, $k_1 = 5$ y $k_2 = 3$, entonces es una **CL.**

- ¿(5,10) es CL de (1,2) y de (2,4)?

$(5, 10) = k_1.\ (1, 2) + k_2.\ (2, 4) \Rightarrow$

$(5, 10) = (k_1 + 2k_2, 2k_1 + 4k_2)$

Igual que en los otros casos, tenemos dos igualdades:

$5 = k_1 + 2\ k_2$

$10 = 2\ k_1 + 4\ k_2$

Observa que estas dos ecuaciones son básicamente la misma: la segunda es igual a la primera, pero toda multiplicada por 2. Así que en realidad tenemos una sola ecuación, y dos incógnitas (k_1 y k_2). Como hay más incógnitas que ecuaciones, esto no tiene una sola solución, tiene infinitas.

Una solución es $k_1 = 5$ y $k_2 = 0$; otra es $k_1 = 1$ y $k_2 = 2$; como se ve, hay infinitas soluciones

IMPORTANTE: No te pierdas de ver el siguiente video:

https://www.youtube.com/watch?v=LiCgq817MkY

Conjuntos de generadores

Si todo vector en un espacio vectorial puede expresarse como una combinación lineal de vectores en un conjunto S, entonces se dice que S es un **conjunto generador** del espacio vectorial.

Ejemplos:

1. Determinar si el conjunto de vectores $S\ \{(1,2,3),(0,1,2)(-2,0\ 1)\}$ genera R^3

Planteamos la siguiente combinación lineal:

$$(u_1, u_2, u_3) = \alpha_1(1,2,3) + \alpha_2(0,1,2) + \alpha_3(-2,0,1)$$

$$(u_1, u_2, u_3) = (1\alpha_1, 2\alpha_1, 3\alpha_1) + (0\alpha_2, 1\alpha_2, 2\alpha_2) + (-2\alpha_3, 0\alpha_3, 1\alpha_3)$$

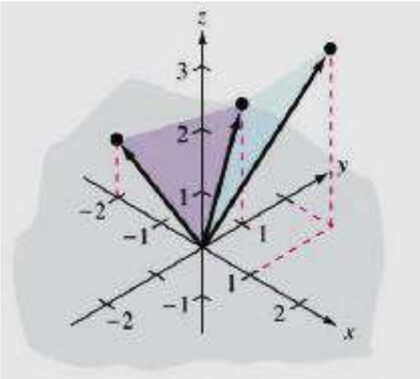
$$(u_1, u_2, u_3) = 1\alpha_1 + 0\alpha_2 - 2\alpha_3, 2\alpha_1 + 1\alpha_2 + 0\alpha_3, 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1\alpha_3$$

Planteamos la ecuación vectorial

$$\begin{cases} 1\alpha_1 + 0\alpha_2 - 2\alpha_3 = u_1 \\ 2\alpha_1 + 1\alpha_2 + 0\alpha_3 = u_2 \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1\alpha_3 = u_3 \end{cases}$$

Siendo la matriz de coeficientes: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Esta matriz tiene inversa, por lo tanto el sistema tiene solución lo que indica que el conjunto $S = \{(1,2,3),(0,1,2)(-2,0\ 1)\}$ genera R^3, lo que significa que cualquier vector en R^3 se puede escribir como combinación lineal del conjunto de vectores S

Gráficamente, los planos que determinan las ecuaciones pertenecen a planos distintos



Dependencia e independencia lineal

La dependencia o independencia lineal es una cualidad de un conjunto de vectores, y tiene que ver con la relación que tienen estos entre sí. La "dependencia" lineal refiere a que los vectores dependen de alguna forma entre ellos. ¿De qué forma? Un conjunto de vectores es *linealmente dependiente* **(LD)**, si es posible escribir alguno de los vectores del conjunto como combinación lineal de los restantes. En caso contrario, decimos que el conjunto de vectores es *linealmente independiente* **(LI)**

Dependencia lineal. Definición.

Los vectores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \dots, \boldsymbol{v}_n$ son *linealmente dependientes* si existen algunos coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ \dots \alpha_n$ **no todos nulos** que cumplan:

$$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \alpha_3 \boldsymbol{v}_3 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n = 0$$

Si no existen esos coeficientes (o sea, si la única solución es $\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0, \dots, \alpha_n = 0$ Los vectores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \dots, \boldsymbol{v}_n$ son l*inealmente independientes*

Acá hay que aclarar algo muy importante. Cuando alguien dice vector cero, está hablando del elemento neutro del EV.

Ejemplos de vectores LD

a) El conjunto de vectores $S = \{(1,2),(2,4)\}\ en\ R^2$ es LD porque
$$-2.(1,2) + 1.(2,4) = (0,0)$$
b) El conjunto de vectores $S = \{(1,0),(0,1),(-2,5)\}\ en\ R^2$ es LD porque
$$2.(1,0) - 5.(0,1) + 1.(-2,5) = (0,0)$$
c) El conjunto de vectores $S = \{(0,0),(1,2)\}\ en\ R^2$ es LD porque
$$1.(0,0) + 0.(1,2) = (0,0)$$

Comprobación de independencia lineal

Determine si el siguiente conjunto de vectores en R^3es linealmente dependientes o linealmente independiente

$$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \{(1,2,3),(0,1,2),(-2,0,1)\}$$

Para analizar si los vectores, son linealmente independientes o linealmente dependientes se plantea la siguiente ecuación vectorial.

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

Al desarrollar esta ecuación se obtiene

$$c_1(1,2,3) + c_2(0,1,2) + c_3(-2,0,1) = (0,0,0)$$
$$(c_1 - 2c_3, 2c_1 + c_2, 3c_1 + 2c_2 + c_3) = (0,0,0)$$

Generando el siguiente sistema de ecuaciones homogéneo:

$$\begin{aligned} c_1 \qquad\quad - 2c_3 &= 0 \\ 2c_1 + \quad c_2 \qquad\quad &= 0 \\ 3c_1 + 2c_2 + \quad c_3 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, obtenemos el siguiente resultado:

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

Por lo tanto, el conjunto *S* es linealmente independiente (L.I)

Te dejo un video donde se muestra como determinar si un conjunto de vectores son LI o LD:

https://www.youtube.com/watch?v=ybSOYDZFhrc

La transformación de imágenes es el proceso por el cual una imagen es transformada en otra al generar una secuencia de imágenes intermedias sintéticas. Dicha transformación tiene una amplia variedad de aplicaciones, que incluyen efectos especiales en películas, la simulación de resultados de curación de heridas y cirugía cosmética y para programas computacionales de progresión de edad. La transformación de una imagen recurre a un proceso llamado distorsión, en el cual una pieza de una imagen se distorsiona. Las matemáticas detrás de la distorsión y transformación pueden incluir la formación de una combinación lineal de los vectores linealmente independientes encuadran a una pieza triangular de una imagen, y realizar una transformación afín para formar vectores nuevos y una imagen distorsionada.

Actividades

1. Sean los vectores $\boldsymbol{u} = (2, 3)\ y\ \ \boldsymbol{v} = (-5,4)$. Resuelve las siguientes operaciones en forma algebraica y geométrica

a) *3**u***   b) ***u** + **v***   c) ***v** - **u***   d) *2**u** – 7**v***

2. Hallar la magnitud de los siguientes vectores

1. $\mathrm{v} = (4, 4)$	2. $\mathrm{v} = (-4, 4)$	3. $\mathrm{v} = (\sqrt{3}, -2)$	4. $\mathrm{v} = (4, -4)$
5. $\mathrm{v} = (-4, -4)$	6. $\mathrm{v} = (-\sqrt{3}, -2)$	7. $\mathrm{v} = (\sqrt{3}, 1)$	8. $\mathrm{v} = (1, \sqrt{3})$

3. Escriba, en cada caso, al vector ***v*** como una combinación lineal de ***u*** y de ***w,*** donde ***u*** = (1, 2) y ***w*** = (1, 1)

a) ***v*** = (2, 1)	c) ***v*** = (3, 0)	e) ***v*** = (-1, -2)
b) ***v*** = (0, 3)	d) ***v*** = (1, -1)	f) ***v*** = (1,-4

4. Escriba, en cada caso, al vector ***v*** como una combinación lineal de ***u,*** ***a*** y de ***w*** en caso de ser posible

a. ***v*** = (10, 1, 4),   ***u*** = (2, 3, 5),   ***a*** = (1, 2, 4), ***w*** = (-2, 2, 3)

b. ***v*** = (-1, 7, 2),   ***u*** = (1, 3, 5),   ***a*** = (2, -1, 3), ***w*** = (-3, 2, -4)

5. Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} y\ \ B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ en $M_{22.}$ determine cuales de las siguientes matrices son combinaciones lineales de A y de B

a) $\begin{bmatrix} 6 & -19 \\ 10 & 7 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -2 & 28 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 9 & 11 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

6. Determine si los siguientes vectores generan a los espacios indicados

1. En $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

2. En $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

3. En $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

4. En $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

5. En $\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

6. En $\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

7. Determina en cada caso, si el conjunto S es linealmente independiente o linealmente dependiente

a) S = {(-2, 2), (3, 5)}
b) S = {(0, 0), (1, - 1)}
c) S = {(1, 0), (1, 1), (2, - 1)}
d) S = {(1, -4, 1), (6, 3, 2)}
e) S = {(6, 2, 1), (- 1, 3, 2)}
f) S = {(1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3)}
g) S = {(- 4, - 3, 4), (l, -2, 3), (6, 0, 0)}
h) S = {(1, 0, 0), (0, 4, 0), (0, 0, -6), (1, 5, -3)}

8. Determine si las siguientes matrices de M_{22} forman un conjunto LI

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ 22 & 23 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -8 & -3 \\ -6 & 17 \end{bmatrix}$$

Evaluación

Te invitamos a que accedas a los foros de intercambio, te pedimos que subas algún ítem resuelto de los ejercicios 4), 5) y 6)

No olvides que siempre podrás volver a la teoría presentada en esta clase o hacer las preguntas que consideres necesarias en el foro correspondiente a esta clase, los encuentros sincrónicos o las tutorías presenciales.

1. **Actividad Integradora de Cierre:**

Te pedimos que contestes estas preguntas, tus respuestas nos servirá de insumo para los encuentros virtuales de la semana

¿El vector (1,1) es una combinación lineal de los vectores (1, 2) y (- 2,-4)? Grafique estos vectores en el plano y explique su respuesta geométricamente. De manera similar, determine si el vector (1,1) es una combinación lineal de los vectores (1,2) y (2,1). ¿Cuál es el significado geométrico de estas dos preguntas? ¿Cada vector en R2 es una combinación lineal de los vectores (1, 2) y (2, 1)? Dé una explicación geométrica de su respuesta

2. **Cierre:**

Consideramos que es importante que te preguntes ¿Qué aporta a un Técnico Superior en Ciencias de Datos e Inteligencia Artificial saber de vectores?

3. **Bibliografía Obligatoria:**

Ron Larson, (2016). Editorial: Cengage Learning, recuperado de **https://drive.google.com/file/d/15Qzi4iV8-w6ABbMyUn_CnuNnaanrrfpA/view?usp=sharing**

Stanley I Grossman. (2006). *Álgebra Lineal*, edit Mc Graw Hill, recuperado de **https://drive.google.com/file/d/1H-1_QGxzaATSl-oguW5hxi4xSPQI61JW/view?usp=sharing**