MATEMÁTICA ORIENTADA AL PENSAMIENTO COMPUTACIONAL

1° AÑO

Clase Nº 4: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Contenido:

En la clase de hoy trabajaremos los siguientes temas:

- Sistemas de ecuaciones: método de Gauss y eliminación de Gauss-Jordan.
- Sistemas homogéneos.

1. Presentación:

A partir de esta clase, comenzaremos a analizar conceptos fundamentales del Algebra Lineal. Compartiendo las ideas de Miguel de Guzmán[1] (1989), el objeto básico de estudio del algebra lineal radica en aquellas situaciones [...] que se comportan linealmente, es decir, por ejemplo, una causa doblemente intensa produce un efecto doblemente intenso. Esta linealidad está muy presente en fenómenos sociales y naturales siendo los sistemas de ecuaciones lineales un primer acercamiento al estudio científico de los mismos. Según Guzmán (1989).

[1] Miguel de Guzmán, José Colera, pp12, Matemáticas 1, Editorial Anaya

Se dice que la mayor parte del tiempo, los ordenadores actuales, dedican a resolver problemas matemáticos que tienen que ver con la industria y el comercio. Se emplea en el tratamiento de sistemas de ecuaciones lineales, sobre todo en lo que constituye la programación lineal.

Para introducirnos en el tema, te invitamos a visitar el siguiente recurso https://www.youtube.com/watch?v=f2wmUqXlFUk

2. Desarrollo y Actividades:

En esta clase, se introduce uno de los métodos más interesantes para resolver sistemas de ecuaciones lineales, el método de Gauss. Aunque tratemos aquí sistemas sencillos de pocas variables, el método es el mismo, aunque el número de variables sea gigantesco.

INFORMACIÓN Y SISTEMAS DE ECUACIONES

Un departamento de pesca y caza del estado proporciona tres tipos de comida a un lago que alberga a tres especies de peces. Cada pez de la especie 1 consume cada semana un promedio de 1 unidad del alimento 1, 1 unidad del alimento 2 y 2 unidades del alimento 3. Cada pez de la especie 2 consume cada semana un promedio de 3 unidades del alimento 1, 4 del 2 y 5 del 3. Para un pez de la especie 3, el promedio semanal de consumo es de 2 unidades del alimento 1, 1 unidad del alimento 2 y 5 unidades del 3. Cada semana se proporcionan al lago 25000 unidades del alimento 1, 20000 unidades del alimento 2 y 55000 del 3. Si suponemos que los peces se comen todo el alimento ¿cuántos peces de cada especie pueden coexistir en el lago?

Esta información se puede organizar en una tabla como la siguiente.

	Especie de pez			
	1	***2***	***3***	***Total de unidades de alimento***
Unidades de alimento 1	1	3	2	25000
Unidades de alimento 2	1	4	1	20000
Unidades de alimento 3	2	5	5	55000

La información de esta situación organizada en un cuadro, permite representar los mismos en una matriz, donde las filas se interpretan como las unidades de alimento 1, 2, y 3 por cada tipo de pez, y las columnas hacen referencia al tipo de pez y la cantidad de unidades del alimento:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

En la fila 2 y columna 1 tenemos el número 1, esto es, posición $a_{21} = 1$, que se interpreta como la cantidad de unidades del alimento 2 para el pez de la especie 1. ¿Cómo interpretas el valor ubicado en la fila 3 columna 2, esto es a_{32}? ¿dónde se ubica la cantidad de unidades del alimento 1 que necesita el pez de la especie 3?

La matriz anterior, la podemos *ampliar* con los valores totales de unidades de los alimentos 1, 2 y 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & \mathbf{25000} \\ 1 & 4 & 1 & \mathbf{20000} \\ 2 & 5 & 5 & \mathbf{55000} \end{pmatrix}$$

Organizar los datos de un sistema de ecuaciones en una matriz permite resolver el sistema mediante operaciones entre filas que explicaremos más adelante.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Se llama sistema de ecuaciones a dos o más ecuaciones que poseen más de una incógnita, las mismas para todas las ecuaciones. Para indicar que varias ecuaciones forman un sistema, se escribe una debajo de otra y una llave que las abarca todas. Los sistemas se clasifican de acuerdo con la cantidad y el tipo de ecuaciones que los componen. Según el tipo, el caso que vamos a estudiar es de aquellos en los que todas las ecuaciones son lineales.

Un sistema de m ecuaciones lineales en n incógnitas es una lista de m ecuaciones, cada una de las cuales es lineal en las mismas n incógnitas, de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

La notación con doble subíndice indica que $a_{i,}$ es el coeficiente de x_j en la

$i{-}ésima$ ecuación. De manera similar, para la misma ecuación b_i es el término independiente.

Si todos los términos independientes $b_1,\ldots,$ del sistema son 0, se dice que el sistema es *homogéneo*.

La solución de un sistema de ecuaciones lineales es una sucesión de números

$s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n$ de manera que $s_1 = x_1, s_2 = x_2, s_3 = x_3, \ldots, s_n = x_n$, que es solución de cada una de las ecuaciones lineales que conforman el sistema. De acuerdo con la(s) solución(es) de un sistema, se produce la siguiente clasificación:

- Trivial: Un sistema de ecuaciones lineales es trivial cuando todas sus ecuaciones son triviales.
- Incompatible o Inconsistente: No tiene ninguna solución.
- Compatible o Consistente Determinado: Tiene una única solución.
- Compatible o Consistente Indeterminado: Tiene infinitas soluciones.

Dos sistemas de ecuaciones lineales se dicen *equivalentes* si tienen las mismas soluciones. Esta es una idea de trabajo muy poderosa, porque para resolver un sistema pasamos a un sistema equivalente que sea más fácil de resolver.

Según la cantidad de ecuaciones que conformen un sistema de ecuaciones lineales, se los clasifica en sistemas $m \times n$, por ejemplo:

Sistema 2×2: Son sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Son de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{12}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Donde a_{11}, a_{12}, a_{21} y a_{22} son coeficientes y b_1 y b_2 son términos independientes. Algunos ejemplos de sistemas:

2×2	2×3	3×2
$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$	$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 4 \end{cases}$	$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 4 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$

Resolver un sistema de ecuaciones lineales es estudiar si es incompatible o compatible, en el segundo caso, se buscan todas sus soluciones. Dicha resolución se puede hacer por distintos métodos, uno muy básico es el tanteo https://www.youtube.com/watch?v=oQQfG1zIPMc

Otros métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales son algebraicos, su estrategia principal es reducir la cantidad de incógnitas del sistema para hacer más simple la tarea. Uno de esos métodos es el de igualación https://www.youtube.com/watch?v=apPXOlZnRhg

Otro método algebraico es el de sustitución https://www.youtube.com/watch?v=LTfv1G2iYuQ&t=1s

Existe otro método de resolución que no es algebraico sino gráfico, que se usa para sistemas 2×2 y 3×3, consiste en construir la gráfica de cada una de las ecuaciones que componen el sistema en el mismo sistema de ejes cartesianos, y establecer si las gráficas resultantes tienen puntos en común. En esta clase nos vamos a concentrar en un método algebraico que se mostrará en la siguiente sección, sin embargo, dejamos el link de un video en el que se encuentra una explicación de la clasificación de sistemas lineales a partir de las gráficas de las ecuaciones que lo componen: https://www.youtube.com/watch?v=uZxjXPtSuBE

MATRICES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Método de eliminación de Gauss Otro método algebraico para resolver un sistema de ecuaciones lineales es el de *reducción*, que consiste en sumar o restar las ecuaciones del sistema entre sí para eliminar una de las incógnitas. Un ejemplo de su uso para un sistema 3×3 se encuentra en: https://www.youtube.com/watch?v=fMLyA0zscjY

De acuerdo con la estrategia de este método de resolución, para pasar el sistema dado a uno equivalente más fácil de resolver, se usan las siguientes operaciones:

- Intercambiar dos ecuaciones.
- Multiplicar una ecuación por una constante diferente de cero.
- Sumar el múltiplo de una ecuación con otra.

Este método recibe el nombre de *eliminación de Gauss*, es el más usado para resolver sistemas de ecuaciones lineales, generalmente aquellos que tienen misma cantidad de ecuaciones que de incógnitas (sistemas cuadrados de *n* ecuaciones y *n* incógnitas)

El método de Gauss para un sistema de ecuaciones lineales consiste en transformar el sistema a la forma escalonada por renglones, lo que implica obtener una cadena de sistemas de ecuaciones equivalentes hasta obtenerla, cada uno de los cuales se obtiene mediante la aplicación de las operaciones descritas. Por ejemplo, resolver el siguiente sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

Implica transformarlo a la forma

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Cuando se haya encontrado el valor de una incógnita, se sustituye su valor en las expresiones que se fueron obteniendo que permitan encontrar los valores de las otras incógnitas.

No siempre puede ser fácil encontrar la solución de un sistema de ecuaciones lineales por el método de eliminación de Gauss, debido a que deben realizarse varias operaciones algebraicas con bastante cuidado y atención porque es alto el riesgo de cometer errores. Por eso resulta mejor opción si se lo aplica haciendo uso de una matriz y operando solo sobre los coeficientes y los términos independientes del sistema que se encuentran en las filas de la matriz. Esta matriz recibe el nombre de *matriz aumentada del sistema*. A la matriz que solo contiene los coeficientes del sistema se denomina *matriz de coeficientes* del sistema.

El uso de matrices genera economía en el proceso de resolución del sistema, porque al realizar operaciones sencillas entre los elementos de la matriz del sistema resulta algo más práctico que operar sobre las ecuaciones. Es importante destacar que el método así empleado facilita su implementación en programas informáticos para incorporarlo en calculadoras y computadoras. El método así usado, se convierte en un interesante reto de astucia matemática, casi en un juego sobre números.

Cuando se aplica el método de eliminación de Gauss con la matriz del sistema, también ocurre que las matrices que se van obteniendo en el proceso son equivalentes entre sí. Esto es porque se obtuvieron por un número finito de operaciones elementales entre filas, que son las mismas tres que se presentaron para las ecuaciones, pero expresadas para matrices:

- Permutación de filas o columnas entre sí
- Multiplicación de una fila por un número distinto de cero.
- Sumar una fila con otra fila, multiplicada por un número.

Para aplicar el método de eliminación de Gauss con la matriz del sistema, conviene antes aprender a reducir una matriz. Una explicación de ese proceso se encuentra en https://www.youtube.com/watch?v=qYa-iLBlZ6A

En los videos de los siguientes enlaces, encuentras dos ejemplos de cómo se aplica el método de eliminación de Gauss con la matriz del sistema a un sistema de ecuaciones lineales 3×3.

Ejemplo 1: https://www.youtube.com/watch?v=XRcx8-2lLJI

Ejemplo 2: https://www.youtube.com/watch?v=IbdQQVTKuhs

Eliminación de Gauss-Jordan

Existe otro método de solución de sistemas de ecuaciones lineales que también usa la matriz ampliada del sistema, que se denomina método de eliminación de Gauss-Jordan. Este busca ir un paso más allá del método de eliminación de Gauss, consiste en obtener la matriz escalonada equivalente a la matriz ampliada del sistema. La matriz escalonada (también conocida como matriz identidad) es aquella en la que todos los elementos de su diagonal principal son 1, y los elementos en las demás posiciones son 0. Por ejemplo:

$$2\times 2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3\times 3 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4\times 4 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El procedimiento del método de eliminación de Gauss-Jordan es el mismo de Gauss, solo que se avanza más allá de la obtención de la matriz reducida hasta dejarla escalonada.

En los videos de los siguientes enlaces, encuentras dos ejemplos de cómo se aplica el método de eliminación de Gauss-Jordan con la matriz del sistema a un sistema de ecuaciones lineales 3×3.

Ejemplo 1: https://www.youtube.com/watch?v=dFmGzr1j6eY

Ejemplo 2: https://www.youtube.com/watch?v=a5FOMHC5ZNc

SISTEMAS HOMOGENEOS

Como se mencionó anteriormente, un sistema de ecuaciones lineales es considerado **homogéneo** cuando los términos independientes de cada ecuación son iguales a **cero**. En otras palabras, un sistema de ecuaciones homogéneo en forma general se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{2n}x_n = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{3n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Donde $\boldsymbol{a_{ij}}$ son los coeficientes de las variables, $\boldsymbol{x_i}$ son las variables, $\boldsymbol{n}$ la cantidad de variables y m es la cantidad de ecuaciones.

Anteriormente, hemos visto que un sistema de ecuaciones de la forma general, con no todos los $b_i = 0$, existen tres tipos de soluciones: que no tenga soluciones, que tenga una solución o que tenga infinitas soluciones. Para un sistema de ecuaciones homogéneo la situación es más sencilla, sólo se pueden dar dos situaciones: solución trivial o infinitas soluciones. Una solución es *trivial* si $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots x_n = 0$, o sea que *todas* las variables (incógnitas) tengan por solución el valor cero. Otra posibilidad, es que hayan infinitas soluciones

Ejemplos:

1. El siguiente sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \quad \textit{tiene por solución } (x_1, x_{2,} x_3) = (0,0,0)$$

Así, el sistema tiene *solución trivial* (verifícalo)

2. Resolver el siguiente sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 - 11x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & |0 \\ 3 & -3 & 2 & |0 \\ -1 & -11 & 6 & |0 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_2 \to F_2 - 3F_1 \\ F_3 \to F_3 + F_1 \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & |0 \\ 0 & -9 & 5 & |0 \\ 0 & -9 & 5 & |0 \end{pmatrix} F_2 \to -\frac{1}{9}\ F_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & |0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{9} & |0 \\ 0 & -9 & 5 & |0 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \to R_1 - 2R_2 \\ R_3 \to\ R_3 + 9R_2 \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{9} & |0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{9} & |0 \\ 0 & 0 & 0 & |0 \end{pmatrix}$$

Observa que la fila 3 es toda cero**,** o sea, se elimina**.** Al reescribir la matriz como un sistema de ecuaciones (equivalente al sistema original), obtenemos

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{9}x_3 = 0 \\ x_2 - \frac{5}{9}x_3 = 0 \end{cases}$$ $despejando$ x_1 y x_2 obtenemos $x_1 = \frac{1}{9}x_3$ y

$x_2 = \frac{5}{9}x_3$

Las variables x_1 y x_2 "***dependen***" del valor que tome x_3, por lo cual decimos que x_3 es una *variable libre* $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{9}x_3, \frac{5}{9}x_3, x_3\right)$

Esta solución también se puede expresar en la forma

$(x_1, x_2, x_3) = x_3\left(\frac{1}{9}, \frac{5}{9}, 1\right)$, expresión que estudiaremos con más detalle en clases posteriores. Podemos obtener infinitas soluciones dando valores distintos a x_3:

$$x_3 = 0 \rightarrow (x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$$

$$x_3 = 1 \rightarrow (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{9}, \frac{5}{9}, 1\right)$$

$$x_3 = 9 \rightarrow (x_1, x_2, x_3) = (1, 5, 9)$$

Podemos seguir sustituyendo a x_3 por cualquier número real, a menos que la situación a resolver contemple alguna condición en las soluciones.

- Si un sistema de ecuaciones homogéneo tiene más incógnitas *n* que ecuaciones *m*, o sea *n* > *m*, entonces el sistema homogéneo tiene infinitas soluciones

Ejemplo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_{1-2}x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$$ observa que $n = 3$ y $m = 2$, $n > m$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & |0 \\ 4 & -2 & 7 & |0 \end{pmatrix} F_2 \rightarrow F_2 - 4F_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & |0 \\ 0 & -6 & 11 & |0 \end{pmatrix} F_2$$

$$\rightarrow -\frac{1}{6}F_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & |0 \\ 0 & 1 & -11/6 & |0 \end{pmatrix} F_1 \rightarrow F_1 - F_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5/6 & |0 \\ 0 & 1 & -11/6 & |0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + \frac{5}{6}x_3 = 0 \\ x_2 - \frac{11}{6}x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_1 = -\frac{5}{6}x_3 \\ x_2 = \frac{11}{6}x_3 \end{matrix} \Rightarrow \quad \boldsymbol{(x_1, x_2, x_3) = \left(-\frac{5}{6}x_3, \frac{11}{6}x_3, x_3\right)}$$

Actividades

1. Plantea y resuelve con el método de Gauss-Jordan la siguiente situación:

Un puesto de frutas vende dos variedades de frutillas: estándar y de lujo. Una caja de frutillas estándar se vende en $700 y una de lujo se vende en $1200. En un día, el puesto vende 140 cajas de frutillas a un total de $110.000. ¿Cuántas cajas de cada tipo se vendieron?

2. Cada matriz corresponde a un sistema de ecuaciones lineales. Determine si dichos sistemas son equivalentes.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 6 & -8 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 6 & 9 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

3. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por el método de Gauss y clasifícalos. Verifica los resultados mediante el uso de la aplicación Symbolab u otra aplicación. Grafica mediante la aplicación, ¿Qué sucede con la gráfica en cada caso?

$$a)\begin{cases} x + 2y + 4z = 3 \\ 2x + 4y + 8z = 1 \\ -y + z = -2 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} 3x + 2y - 2z = 4 \\ 4x + y - z = 7 \\ x + 4y - 4z = -2 \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} x - y - z = -10 \\ x + 2y + z = 11 \\ 2x - y + z = 8 \end{cases}$$

4. Sea el siguiente sistema

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ ax + by = 6 \end{cases}$$

Determina para que par de valores de a y b el sistema es inconsistente, compatible determinado y compatible indeterminado, justifica la respuesta.

a) a=4, b $= -2$ b) a=-1, b =1 c) $a = 1, b = -\frac{1}{2}$

5. Encuentra todas las soluciones a los siguientes sistemas de ecuaciones homogéneos

$$\boldsymbol{a})\ \begin{cases} \boldsymbol{x_1 - 3x_2 = 0} \\ \boldsymbol{-2x_1 + 6x_2 = 0} \end{cases} \qquad \boldsymbol{b})\ \begin{cases} \boldsymbol{x_1 + x_2 - x_3 = 0} \\ \boldsymbol{2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0} \\ \boldsymbol{-x_1 - 7x_2 - 6x_3 = 0} \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} x_1 + x_2 - \quad x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0 \\ -5x_1 + 13x_2 - 10x_3 = 0 \end{cases}$$

3. Evaluación

Te invitamos a que accedas en el aula Moodle al evaluativo obligatorio de las clases 2 y 3. No olvides que puedes realizar consultas mediante el foro

4. Actividad Integradora de Cierre:

Nicole inició una nueva dieta que requiere el consumo de 460 calorías en cada comida, 6 gramos de fibra y 11 gramos de grasa. La tabla siguiente muestra el contenido de fibra, grasas y calorías de una porción de cada uno de los 3 alimentos en el desayuno.

a) ¿Cuántas porciones de cada alimento debe consumir Nicole para seguir su dieta? Resuelve utilizando eliminación Gaussiana

b) Si comió 2 tostadas y las mismas cantidades de nueces y frutas calculadas en el punto a), ¿en cuántas calorías se excede del consumo diario recomendado?

c) Si una tostada aportara 100 calorías, una nuez aportara 50 calorías y una fruta aportara 90 calorías y se mantiene el requerimiento de calorías por comida, ¿Cuántas porciones de cada alimento deberá consumir?

Alimento	**Fibra**	**Grasa**	**Calorías**
Tostada	2	1	100
Nueces	0	5	120
Fruta	2	0	60

5. Cierre:

En este momento de la clase te invitamos a preguntarte, ¿cuál sería la representación gráfica de un sistema de ecuaciones de 4 variables y 4 ecuaciones?

Te invitamos a que nos dejes tus impresiones sobre lo que aprendimos hoy a través de una intervención en el foro de la clase. También puedes compartir links de recursos, como artículos o videos, por ejemplo, que hayas buscado y te hayan parecido interesantes mientras estudiabas este tema.

Recuerda que es importante que participes de los foros, de los encuentros sincrónicos

6. Bibliografía Obligatoria:

- Larson, R. (2015). Matrices. En *Fundamentos del Álgebra Lineal* (pp. 39-102), 7ª edición, Cengage Learning, recuperado de https://drive.google.com/file/d/15Qzi4iV8w6ABbMyUn_CnuNnaanrrfpA/view?usp=sharing
- Grossman, S. (2008). Sistemas de ecuaciones y matrices. En *Álgebra Lineal* (pp. 1-167), 6ª edición, Mc Graw Hill, recuperado de https://drive.google.com/file/d/1H-1_QGxzaATSloguW5hxi4xSPQI61JW/view?usp=sharing
- Recursos web

  Sistemas de ecuaciones lineales, Julio profe: https://www.youtube.com/watch?v=-Ip03K7hG44