Probabilidad y Estadística

Año de cursada 1° AÑO

Clase N.º 5: Cuantificar el azar

Contenido: Experimentos aleatorios y determinísticos. Espacio muestral y evento. Teoría de la probabilidad. Teoría clásica. Teoría frecuencial. Teoría axiomática.

1. Presentación:

Bienvenidos y bienvenidas a la clase n° 7 de Probabilidad y Estadística. Anteriormente hemos avanzado en la descripción de un conjunto de datos por medio de diferentes medidas, gráficos y tablas de uso frecuente en esta rama de la matemática. Todas estas herramientas que mencionamos provienen del campo de la Estadística Descriptiva que hemos mencionado clases atrás.

Ahora bien, para la clase de hoy, comenzaremos a desarrollas herramientas propias de la Estadística Inferencial. Por supuesto, las herramientas que hemos trabajado con anterioridad nos serán de mucha ayuda a la hora de trabajar en este campo.

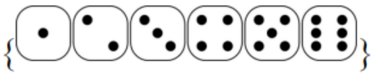
Uno de los principales objetivos de la Estadística Inferencial consiste en poder extender todas las conclusiones que se obtiene por medio de la experiencia muestral a toda la población. Como es de esperarse dicha información solo puede asegurarse en muy pocos casos, pero afortunadamente, existen herramientas que nos permiten cuantificar el azar o la incertidumbre para poder establecer una mayor o menor posibilidad de ocurrencia de un cierto evento.

2. Desarrollo:

Existe una multitud de situaciones que, pudiendo concluir con varios resultados diferentes, no podemos predecir con seguridad cuál se ellos se producirán. ¿Cuántos hijos tendrá un matrimonio? ¿Cuántos clientes visitarán hoy un determinado comercio? ¿Cuánto tiempo transcurrirá hasta que pase el próximo colectivo? ¿Qué equipo ganará el próximo campeonato mundial de fútbol? Estas preguntas tienen en común el hecho de saber que la respuesta es una incertidumbre, sin embargo, se puede intentar hacer alguna cuantificación de esa incertidumbre. De eso justamente se ocupa la teoría de la probabilidad, de cuantificar el azar. Antes que nada, vamos a necesitar definir algunos elementos que posteriormente los vamos a utilizar para definir el propio concepto de probabilidad.

Experimentos determinísticos y experimentos aleatorios

Existen experimentos que, al repetirse producen siempre el mismo resultado, y otros que producen resultados diferentes cada vez que se lo lleva a cabo. Por experimento vamos a entender a una simple acción, una operación que se realiza y que tiene un resultado determinado. Como ejemplos de experimentos podemos citar el simple hecho de arrojar una moneda al aire y dejarla caer observando qué lado queda arriba. Hay que tener en cuenta dónde "finaliza" el experimento, en este caso observar el lado de la moneda que queda hacia arriba. También podríamos estar interesado en saber en qué parte del piso cayó la moneda, suponiendo que tenemos pisos cerámicos con dos colores diferentes. También podríamos observar cuanto tiempo tarda en caer. Todos los ejemplos son experimentos diferentes, aunque se trate siempre de arrojar una moneda. Lo importante de todo esto es que, el resultado obtenido es incierto, depende del azar, esto significa que no sabemos si caerá del lado de cara o del lado de cruz, o si caerá sobre el color blanco o el color negro del piso cerámico, o tardará 1seg; 2,5seg o 3,1seg en tocar el suelo. Para cada uno de estos experimentos tenemos al menos dos resultados posibles, y si bien podemos conocer cuáles son estos resultados posibles, no podemos predecir con exactitud cuál de ellos se producirá, aunque como veremos más adelante, seremos capaces de estimar dicha ocurrencia. Este tipo de experimentos decimos que son aleatorios y de ellos nos ocuparemos en esta unidad. Por otra parte, existen experimentos, que como dijimos, siempre producen el mismo resultado, por ejemplo, si observamos un insecto dentro de un recipiente sin oxígeno y sin alimentos, sabemos con seguridad que el desenlace es su muerte, y aclaramos que no es probable sino es seguro que pierda la vida. Otro caso podría ser observar que ocurre con la moneda del ejemplo anterior, si va a caer o quedará flotando, este resultado es también una certidumbre, salvo que estemos en otro planeta donde no existe atracción gravitatoria. Y un último ejemplo podría ser colocar un recipiente con agua al fuego. Si no hay interrupción del suministro de calor, el resultado cierto es la ebullición. A este tipo de experimentos lo llamamos determinísticos. Volviendo a nuestro experimento de interés, otros casos de experimentos aleatorios podemos citarlos en la siguiente tabla:

EXPERIMENTOS ALEATORIOS	*RESULTADOS POSIBLES*
Arrojar un dado y observar la cantidad de puntos obtenida	
Levantarse una mañana y observar el estado del cielo	*{DESPEJADO; CUBIERTO; PARCIALMENTE NUBLADO}*
Sembrar una semilla y esperar su resultado	*{GERMINA ; NO GERMINA}*
Preguntar a una mujer cuántos hijos tiene	*{0 ; 1 ; 2; …….(en teoría esta serie es infinita)*
Medir la estatura de una persona	*(0 ; ∞)*

Eventos aleatorios y espacio muestral

Como se puede apreciar, cada experimento tiene asociado un conjunto de resultados posibles. Al conjunto de todos los resultados posibles lo llamaremos espacio muestral o espacio probabilístico y cada uno de esos resultados es un evento aleatorio. El conjunto espacio muestral se simboliza con la letra griega omega (Ω) y dicho conjunto puede ser finito o infinito, puede ser numerable o no numerable y puede estar formado por números o por otros elementos. En los ejemplos mencionados se tiene que, en el caso del dado, los resultados no son las distintas caras que pueden quedar hacia arriba. Esas caras tienen puntos que representan números, por eso lo más frecuente es decir que los resultados posibles del experimento arrojar un dado es 1 al 6. En el caso de las mediciones (talla, peso, tiempo de espera, etc.) no podemos precisar la cantidad de números posibles. De lo único que podemos estar seguros es que una persona no puede medir 0 m ni tampoco un número negativo, por eso el paréntesis inicial, y tampoco podemos determinar el valor más alto de talla, en consecuencia, el otro límite del intervalo es infinito (∞). Como ejemplo, se citan algunos experimentos aleatorios y su espacio muestral asociado, tengan en cuenta la notación correspondiente:

EXPERIMENTO: “Arrojar dos monedas”

Ω = {cara, cara; cara, cruz; cruz, cara; cruz, cruz}

EXPERIMENTO: “Seleccionar un alumno de la Tecnicatura y observar su género”

Ω = {varón; mujer}

EXPERIMENTO: “Contar las inasistencias de un docente en todo el mes”

Ω = {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8…26}

Definición de probabilidad

La probabilidad de un evento A, que se simboliza P(A), es un número comprendido entre 0 y 1 que cuantifica en términos relativos las opciones de verificación de dicho evento. Si P(A) = 0 entonces diremos que A es un evento imposible y si P(A) = 1, entonces A será un evento cierto. Teorías de la probabilidad Hasta aquí hemos visto el concepto de probabilidad y sus principales elementos. Ahora veremos las reglas de cálculo de la probabilidad para los distintos eventos que conforman un espacio muestral. Estas reglas se agrupan en las denominadas teorías o enfoques de la probabilidad.

Teoría clásica o “a priori”

La probabilidad de que ocurra un evento A, se calcula como la cantidad de casos favorables a dicho evento, sobre el total de resultados igualmente posibles. Esta teoría hace mención a una importante condición: que los eventos sean igualmente posible. Esto quiere decir que todos los resultados del experimento tienen la misma probabilidad de ocurrencia, como, por ejemplo, cada cara de un dado equilibrado. En símbolos:

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\text{cantidad de casos favorables}}{\text{cantidad de casos igualmente posibles}}$$

Supongamos, por ejemplo, que la experiencia consiste en extraer una carta de un mazo de 52 cartas. Esta experiencia consta de 52 resultados posibles. Si se define a un evento como la extracción de un as, éste tendrá 4 resultados favorables ya que en el mazo hay 4 ases. Por lo tanto, $\mathrm{P}(\text{extraer un as}) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

Esta probabilidad de puede expresar como la fracción 1/13, como decimal 0,08 o bien en porcentaje 8%.

Teoría frecuencial o “a posteriori”

Hay situaciones en las cuales no se puede aplicar la noción de un número definido de casos igualmente probables. Por ejemplo, si una moneda no es perfecta, la probabilidad de obtener cara al lanzarla, no es 1/2, debido a que los dos resultados posibles no son igualmente probables. En estos casos, se puede aplicar la teoría de probabilidad, conocida con el nombre de teoría frecuencial de la probabilidad. Esta teoría expresa que, si se repite un experimento aleatorio un número bastante grande de veces, la probabilidad de un evento en particular puede asimilarse a la frecuencia relativa. En otras palabras, la ley de comportamiento de los fenómenos aleatorios surge de la distribución de frecuencias con que se presentan. Este enfoque del cálculo de la probabilidad, a partir del concepto de frecuencia relativa, es el más ligado a los hechos de la vida cotidiana y a la aplicación práctica de la estadística. Supongamos que realizamos el experimento de tirar una moneda al aire un número n muy grande de veces. Cada resultado individual del experimento será impredecible puesto que la obtención de cara o cruz depende estrictamente del azar. Es lógico pensar que, si tiramos la moneda un número "n" de veces, donde n = 100, a pesar del comportamiento irregular de los resultados individuales, los resultados promedios o globales mostrarán una sorprendente regularidad. Al finalizar el experimento, podremos cuantificar la probabilidad del evento que consiste en la caída de la moneda mostrando la faz "cara". Ese valor estará dado por el cociente entre, la cantidad de veces que la moneda cayó en esa posición y la cantidad "n" de veces que se la arrojó. Como ya hemos visto, el número de veces que se presenta un evento es la frecuencia absoluta fi y la frecuencia relativa fr = fi/n representa la proporción de veces que se presenta un evento en particular, en las n repeticiones del experimento. La experiencia indica que la frecuencia relativa tiende a estabilizarse para grandes valores de n. Es decir, podemos establecer una ley de comportamiento de los fenómenos aleatorios a través de muchas repeticiones del experimento.

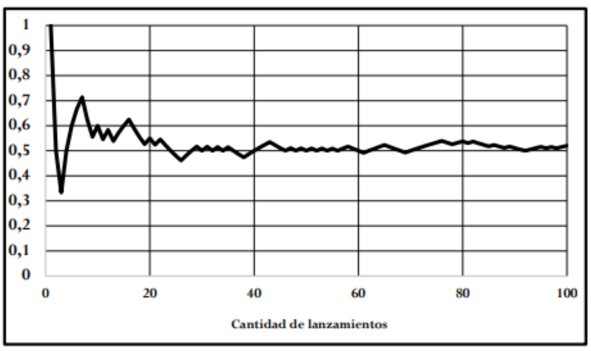


Gráfico 1: Proporción de caras en una simulación de 100 lanzamientos de una moneda

La frecuencia relativa h(A) varía ampliamente para valores pequeños de n. Pero, al aumentar el número n de repeticiones del experimento, la proporción de "caras" se va estabilizando alrededor de un cierto valor límite o ideal muy próximo a 1/2. Al repetir muchas veces un mismo experimento en condiciones uniformes, la estabilidad de las frecuencias relativas se presenta de manera casi permanente. Podemos asociar un número P(A) a cada evento A surgido por medio de la realización de un experimento aleatorio, de manera tal que la frecuencia relativa de A, fr(A), será aproximadamente igual a P(A) si se considera una larga serie de repeticiones del experimento. Diremos que P(A) es la probabilidad del evento A en el experimento. No debemos olvidar aquí, que la frecuencia relativa y la probabilidad, al vincularse, establecen una relación entre una situación de experimentación real (frecuencia realmente observada) y un modelo conceptual o ideal (frecuencia teórica o esperada). Por eso, esta asimilación de la probabilidad a las frecuencias relativas sólo es posible ante experimentos que se puede repetir indefinidamente. Y, aun así, siempre cabrá la duda respecto de la magnitud que debe tener n para que esta aproximación se produzca.

A continuación, se describe un ejemplo donde se aplica la teoría frecuencial. El departamento de alumnado $P(A) \cong \frac{fr(A)}{n}$ de una determinada escuela tiene registrado los datos de los tutores de los alumnos y los clasificó según su ocupación en empleados públicos, privados o desocupados. Se confeccionó entonces la siguiente tabla:

Tipo de ocupación	*Frecuencia absoluta*	*Frecuencia relativa*
Empleado público	123	0,506
Empleado privado	102	0,420
Desocupado	18	0,074
Total	243	1

De esta tabla se desprende por ejemplo que la probabilidad de que un alumno tenga su padre desempleado es: $\mathrm{P(Desocupado)} = \frac{18}{243} = 0{,}074$

Teoría axiomática

A diferencia de la teoría clásica y la frecuencial, la axiomática no provee una regla de cálculo, sino que establece tres axiomas que toda probabilidad debe cumplir. Un axioma es una proposición o afirmación que es tan evidente que no necesita ser demostrada.

Axioma 1: La probabilidad de un evento A es siempre no negativa $P(A) \geq 0$

Axioma 2: La probabilidad del espacio muestral es 1. $P(\Omega) = 1$

Axioma 3: Si A y B son dos eventos mutuamente excluyentes, entonces la probabilidad de la unión de estos eventos es igual a la suma de las probabilidades de cada uno de ellos $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Dos eventos son mutuamente excluyentes cuando la aparición de uno de ellos excluye la aparición del otro, en otros términos, decimos que no se pueden producir al mismo tiempo. Este es el momento de realizar algunas aclaraciones con respecto a las operaciones entre eventos. Esto se desprende del álgebra de conjuntos, tema que en matemática se desarrolla en el primer año de la formación superior. El espacio muestral Ω es el conjunto universal, el que contiene todos los eventos posibles. A su vez cada evento puede ser un subconjunto de Ω. Los eventos son elementales si no se pueden dividir en eventos más simples.

3. Actividad:

1. Un curso de matemática tiene 50 varones y 30 mujeres. Si se considera el experimento de seleccionar un estudiante al azar de esta clase, determine:

a) P (de que sea elegido un varón)

b) P (de que sea elegida una mujer)

c) P (de que sea elegido un varón o una mujer) d) Si se simboliza como A: que sea varón y B: que sea mujer ¿son A y B eventos mutuamente excluyentes?

2. Un investigador médico, analizando 90 historias clínicas de pacientes Infartados, encontró la siguiente información con respecto al hábito de fumar:

Categoría de fumador	*Cantidad de pacientes*
Menos de 10	10
Entre 10 y 20	30
Más de 20	50

Sean los eventos:

A: Paciente, que fuma menos de 10 cigarrillos diarios

B: Paciente que fuma entre 10 y 20 cigarrillos diarios

C: Paciente que fuma más de 20 cigarrillos diarios calcule:

a) P(A)

b) P(B)

c) P(C)

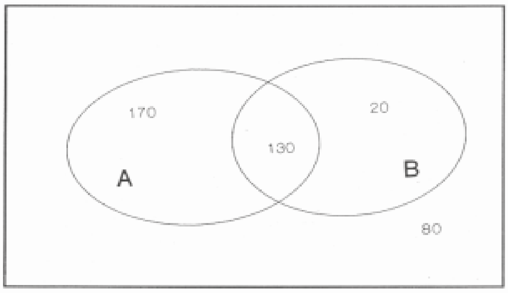
d) P(A U B)

e) P(A U C)

f) P(B U C)

g) ¿Qué categoría de fumador tiene mayor probabilidad de sufrir un infarto?

3. De los 400 empleados de una empresa, 300 cuentan con cobertura médica integral, 150 intervienen en un plan de participación en las utilidades y 130 participan en ambos programas. Si A = "empleados que cuentan con cobertura médica integral" y B = "empleados que participan en un plan de participación de utilidades". La representación gráfica de esta situación, utilizando el diagrama de Venn, es la siguiente:



Calcular la probabilidad de que un empleado seleccionado al azar:

a) Participe por lo menos en uno de los programas

b) No participe en ninguno de los programas

c) No participe en las utilidades

d) Tenga cobertura médica pero no participe en las utilidades

4. Cierre:

En esta clase, hemos podido comenzar a desarrollar las herramientas propias de la Estadística Inferencial. Como habrán podido notar, el recorrido se asemeja a las primeras clases del espacio, ya que en este momento no haremos uso del software, pero es importante que podamos incorporar estos elementos un tanto más teórico para, posteriormente, poder operar el programa dándole presiones para el correcto procesamiento de los datos.

Les dejo un saludo cordial, les deseo un buen fin de semana y por cualquier cosa ya saben, pueden comunicarse por la mensajería interna del campus.

5. Bibliografía:

- ✓ Ruiz Diaz, G. (2019). Estadística y Probabilidad. Notas de cátedra. Universidad Nacional de Formosa.
- ✓ García, J; López, N; Calvo, J. (2011). Estadísticas Básicas para Estudiantes de Ciencias. Facultad de Ciencias Físicas Universidad Complutense de Madrid. España.
- ✓ Wackerly, D; Mendenhall, W; Schaeffer, R. (2010). Estadística Matemática con Aplicaciones. 7ma Ed. Cengage Learning. Santa Fe, México.