MATEMÁTICA ORIENTADA AL PENSAMIENTO COMPUTACIONAL

1° AÑO

Clase Nº 1: OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS Y PROBLEMAS DE CONTEO

Contenidos:

En la clase de hoy trabajaremos los siguientes temas:

- Cardinalidad
- Principio de inclusión-exclusión
- Problemas de conteo

1. Presentación:

¡Hola a todas y a todos! Muy bienvenidos al espacio de Matemática orientada al pensamiento computacional. Este espacio tiene por objetivos no solo brindar a los estudiantes conceptos y metodologías matemáticas, sino también fortalecer la capacidad analítica y el pensamiento abstracto imprescindibles en el estudio de la tecnicatura de Ciencias de datos e Inteligencia Artificial.

En esta clase daremos continuidad al estudio iniciado en el INTROTEC sobre teoría de conjuntos, campo de estudio de fundamental importancia para la ciencia de datos.

2. **Desarrollo y Actividades:**

El estudio de la teoría de conjuntos brinda herramientas sumamente importantes para el estudio de ciencias de datos, ya que ofrece objetos conceptuales y metodológicos que permiten analizar, clasificar y ordenar, siendo en el campo de manejo de base de datos donde más se destaca. Una base de datos contiene variada información organizada en tablas, en las cuales las columnas representan conjuntos de datos. Las bases de datos se utilizan para la administración de la información, para lo cual se almacenan de forma sistemática porque facilita su manejo. Para esto es muy común utilizar el lenguaje de computación SQL, siglas en inglés de *Structured Query Language* que en español se traduce como lenguaje *de consulta estructurada*. Dicho programa se usa para consultar, manipular y definir los datos mediante sentencias del programa basadas en operaciones entre conjuntos y combinaciones mas complejas de estas. Muchas veces, la consulta a una base de datos involucra relaciones cruzadas entre los datos y se aplica a cientos de miles o millones de registros en las tablas de una base de datos, lo que se conoce como *situaciones de tipo alto conteo* de tablas. Entre más tablas estén involucradas en una consulta, significa más cantidad de variables y de opciones disponibles, por lo que se necesita encontrar un buen plan de ejecución frente a muchas opciones posibles en un lapso muy corto. En este curso estudiaremos el concepto de conteo de conjuntos desde el punto de vista matemático, dejando para el área específica el estudio del lenguaje SQL

CARDINALIDAD DE UN CONJUNTO

Se denomina *cardinal de un conjunto finito*, o simplemente *cardinal* de un conjunto, a la cantidad de elementos que tiene un conjunto finito. El concepto de cardinal tiene connotaciones muy profundas, especialmente si se consideran conjuntos infinitos, pero ese estudio no lo vamos a abordar en este curso. Si te interesa profundizar más sobre el concepto de cardinal, te dejamos este enlace:

https://www.youtube.com/watch?v=nWBK9rUKHjk

El **cardinal de un conjunto finito** se escribe $|A|$ para el conjunto A, otra notación para cardinal del conjunto A es n(A)

Como ejemplo, veamos la siguiente situación:

Ejemplo: De los 30 estudiantes de un curso, 12 se inscribieron al taller de programación y 15 al de lógica. 5 de los que participan en el primero, no se inscribieron en el segundo.

Se desea averiguar:

- ¿Cuántos se inscribieron a los dos talleres?
- ¿Cuántos no se inscribieron a ninguno?
- ¿Cuántos se inscribieron solo a lógica?

Antes de seguir leyendo, intenta responder las preguntas anteriores

PRINCIPIO DE INCLUSIÓN-EXCLUSIÓN

La resolución del problema planteado en la sección anterior implica determinar los conjuntos que corresponden a cada pregunta y calcular la cantidad de elementos que tienen.

En la resolución de este tipo de problema muchas veces implica conocer el cardinal de la unión de los conjuntos involucrados. Consideremos que tenemos dos conjuntos, A y B, entonces necesitamos conocer $|A \cup B|$. De acuerdo con la definición de unión de conjuntos, podemos establecer que para calcular $|A \cup B|$ simplemente sumamos $|A|$ y $|B|$, y en el caso que exista algún elemento en $A \cap B$ simplemente lo excluimos. Ello nos lleva a la siguiente expresión:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Tengamos en cuenta que esta se cumple sin importar si $A \cap B = \emptyset$, ya que $|\emptyset| = 0$

¿por qué para calcular $|A \cup B|$ hay que excluir los elementos de $A \cap B$?

Supongamos que en una institución educativa que ofrece la carrera de ingeniería de sistemas, se tiene una base de datos con la información de las y los estudiantes ingresantes y el lenguaje de programación que están estudiando aquellos que cursan la asignatura de Programación. La coordinación de la carrera necesita saber cuántos estudiantes ingresantes estudian algún lenguaje de programación. Revisando la base de datos se establece el problema de conteo asociado como sigue:

En una clase de 50 estudiantes ingresantes, 30 estudian BASIC, 25 Pascal y 10 ambos lenguajes. ¿cuántos estudiantes ingresantes estudian algún lenguaje de programación?

Con estos conceptos ya podemos solucionar el problema de conteo planteado: la clase de 50 estudiantes ingresantes será el conjunto universal U, los estudiantes que estudian BASIC será el subconjunto A y los que estudian Pascal será el subconjunto B. En el problema están dados $|A|$ y $|B|$, que son $|A| = 30$ y $|B| = 25$. Para poder calcular $|A \cup B|$ necesitamos saber cuántos elementos de A y de B se ajustan a la condición de estudiante ingresante que estudia algún lenguaje de programación, por lo que tenemos que dejar por fuera a los que estudian los dos lenguajes, es decir, $A \cap B$. En el problema está dado que $|A \cap B| = 10$. Con esta información podemos calcular la expresión

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B| = 30 + 25 - 10$$

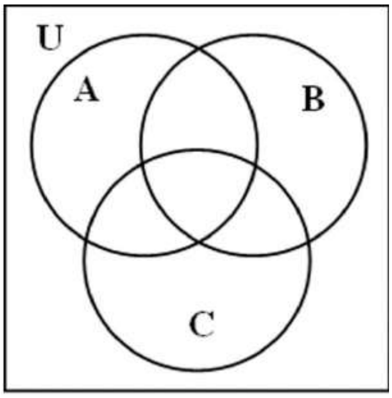
$$|A \cup B| = 55 - 10$$

$$|A \cup B| = 45$$

Este resultado indica que son 45 registros de las tablas correspondientes a BASIC y Pascal que se ajustan a la condición de estudiante ingresante que estudia algún lenguaje de programación.

¿Por qué se dijo que A y B son subconjuntos? ¿de qué conjunto lo son?

En otros problemas de conteo intervienen tres conjuntos, sean A, B y C



Para calcular $|A \cup B \cup C|$, usamos

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

La expresión anterior se denomina principio de ***inclusión – exclusión.***

Si en la situación en estudio están involucrados más de tres conjuntos (no hay un máximo de conjuntos, pero la representación gráfica es mucho más complicada, ¿Cómo sería la representación por medio de diagramas de Venn de 4 conjuntos?), el principio de **inclusión – exclusión** es más extenso.

En forma general, para *n* cantidad de conjuntos, el **principio de inclusión-exclusión** se enuncia como sigue:

Sean $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ *conjuntos finitos, entonces*

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i,j=1\ i<j}^{n} |A_i \cap A_j| + \sum_{i,j,k=1\ i<j<k}^{n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots$$

$$+(-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

Los símbolos nuevos se leen así:

$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$	La unión de todos los conjuntos A_1, A_2, A_3 hasta A_n
$\sum_{i=1}^{n} \lvert A_i \rvert$	La sumatoria de los cardinales de todos los conjuntos A_1, A_2, A_3 hasta A_n
$\sum_{i,j=1\ i<j}^{n} \lvert A_i \cap A_j \rvert$	La sumatoria de los cardinales de todas las intersecciones de dos conjuntos entre A_1, A_2, A_3 hasta A_n, de modo que el primero sea anterior al segundo

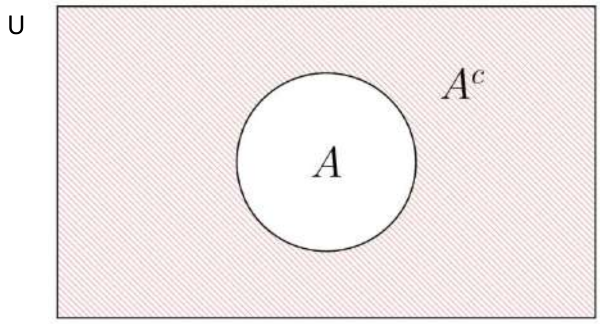
Te dejamos los links de dos videos en los que explican ejemplos del principio de inclusión-exclusión para que profundices el tema:

https://www.youtube.com/watch?v=_BjJxo8T6CA

https://www.youtube.com/watch?v=cx-zcOhmBcY

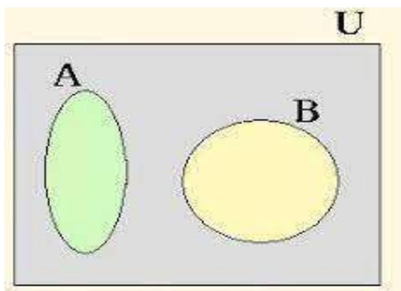
Consideremos los conjuntos finitos U universal, A y B tales que $A \subseteq U, B \subseteq U$ y $A \cap B = \emptyset$ ¿cómo se calculan $|A'|$ y $|A \cup B|$?

Para el primer caso, la representación gráfica con diagramas de Venn es



Entonces se puede decir que $A \cup A' = U$ y que $A \cap A' = \emptyset$, por lo cual se obtiene $|A| + |A'| = |U|$, y en consecuencia $|A'| = |U| - |A|$.

Para el segundo caso, la representación gráfica con diagramas de Venn es:



Por el principio de inclusión-exclusión para $n = 2$, $|A \cup B| = |A| + |B|$

¿Por qué no aparece en el cálculo $|A \cap B|$?

Veamos un ejemplo más de problemas de conteo, ahora en el que intervienen 3 conjuntos.

En una encuesta a 100 personas sobre el idioma que estudian, se obtuvo que 28 estudian español, 30 alemán, 42 francés, 8 español y alemán, 10 español y francés, 5 alemán y francés, y 3 personas estudian los tres idiomas. ¿Cuántas personas no estudian idiomas? ¿Cuántas personas tenían francés como el único idioma de estudio?

Para resolver el problema iniciamos organizando los datos en conjuntos según los idiomas estudiados:

$$E = \{x|x\ es\ persona\ que\ estudia\ español\}$$

$$A = \{x|x\ es\ persona\ que\ estudia\ alemán\}$$

$$F = \{x|x\ es\ persona\ que\ estudia\ francés\}$$

Es importante destacar que algunos conjuntos resultan de la intersección de los anteriores:

$$E \cap A = \{x|x\ es\ persona\ que\ estudia\ español\ y\ alemán\}$$

$$E \cap F = \{x|x\ es\ persona\ que\ estudia\ español\ y\ francés\}$$

$$A \cap F = \{x|x\ es\ persona\ que\ estudia\ alemán\ y\ francés\}$$

$$E \cap A \cap F = \{x|x\ es\ persona\ que\ estudia\ español, alemán\ y\ francés\}$$

De acuerdo con los datos del problema:

$|E| = 28,\ |A| = 30,\ |F| = 42,\ |E \cap A| = 8,\ |E \cap F| = 10,\ |A \cap F| = 5$ y $|E \cap A \cap F| = 3$

Para poder saber cuántas personas no estudian idiomas, aplicamos el principio de inclusión-exclusión para $n = 3$, con lo cual obtenemos la cantidad de personas que estudian idiomas. Luego restamos esa cantidad del total de personas encuestadas. Usamos la segunda expresión encontrada antes

$$|E \cup A \cup F| = |E| + |A| + |F| - |E \cap A| - |E \cap F| - |A \cap F| + |E \cap A \cap F|$$

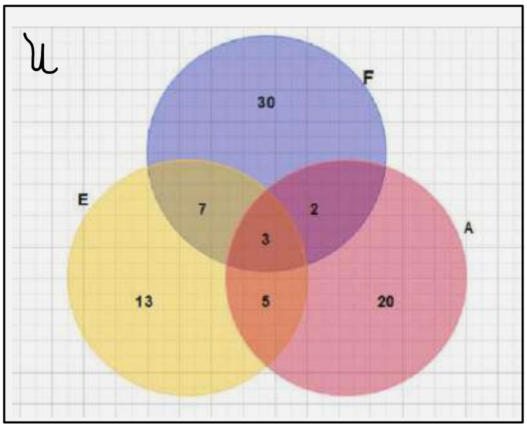
$$|E \cup A \cup F| = 28 + 30 + 42 - 8 - 10 - 5 + 3$$

$$|E \cup A \cup F| = 103 - 23$$

$$|E \cup A \cup F| = 80$$

Son 80 personas las que estudian idiomas, por lo que las que no estudian idiomas son $100 - 80 = 20$.

Para saber cuántas personas tenían francés como el único idioma de estudio, usamos la representación en diagrama de Venn mostrando las regiones correspondientes a los elementos de los conjuntos y sobre ellas los cardinales correspondientes.



De lo cual se encuentra que las personas que solo estudian francés son 30.

Frecuentemente, en los problemas de conteo se realizan consultas sobre determinada información, que visualmente lo relacionamos con ciertas regiones en el diagrama de Venn Por ejemplo, si tenemos el siguiente

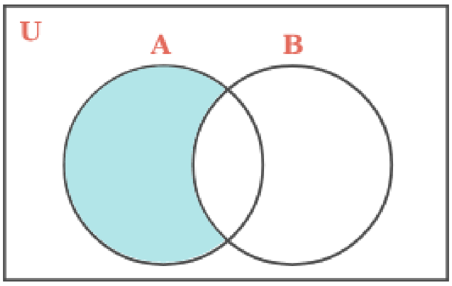


diagrama y solamente queremos saber cuántos elementos *solo* (únicamente) pertenecen al conjunto A, $S(A)$, debemos calcular el cardinal de esa región, ¿Cómo se puede expresar esta situación?

La consulta solicitada corresponde a una diferencia entre conjuntos: $A - B$, por lo que se debe calcular el cardinal $|S(A)| = |A - B|$, donde

$$|\mathbf{S(A)}| = |\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}| - |\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}|$$

Por ejemplo: Si $|A| = 90,\quad |B| = 98\quad |A \cap B| = 65\quad |U| = 150$

Calcular $|S(A)|$

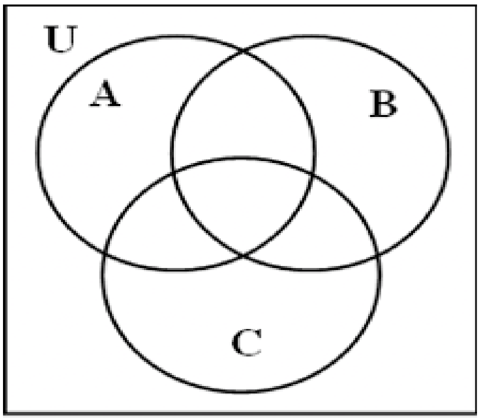
$$|S(A)| = |A - B| = |A| - |A \cap B|$$

$$|S(A)| = 90 - 65$$

$$|S(A)| = 25$$

Por supuesto que se pueden realizar consultas sobre diferentes regiones, por lo cual hay que expresar dichas regiones como una operación entre conjuntos y realizar los cálculos correspondientes. (ver ejercicios 1 y 2)

Si tenemos tres conjuntos

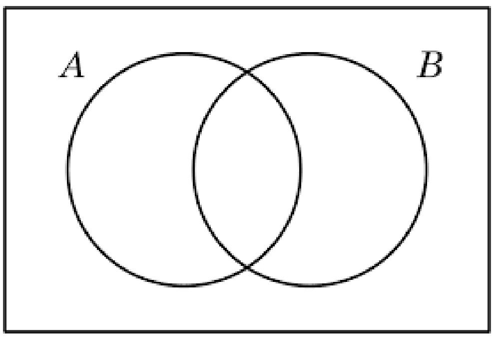


Para calcular $|S(A)|$, se plantea $|\mathbf{S(A)}| = |\mathbf{A}| - |\mathbf{A} \cap \mathbf{B}| - |\mathbf{A} \cap \mathbf{C}| + |\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C}|$

¿por qué?

3. **Actividades:**

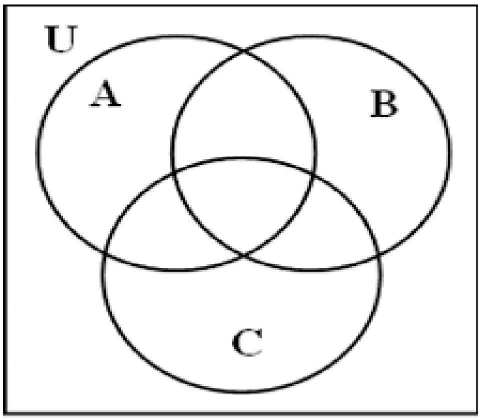
1. Expresa el cálculo de los siguientes cardinales, teniendo en cuenta el siguiente diagrama:



$a)\ |S(B)|$ $\quad b)|A \cap B|$

$c)\ |U|$ $\quad d)\ |(A \cup B)'|$

2. Expresa el cálculo de los siguientes cardinales, teniendo en cuenta el siguiente diagrama:



$a)\ |S(B)|$ $b)|A \cap B \cap C|$

$c)\ |U|$ $d)\ |A \cap B|$

3. Se realiza una encuentra entre 100 personas para conocer cuál es su destino turístico preferido: Acapulco o Cancún. De ellas, 35 respondieron que prefieren Cancún; 23 Acapulco y 19 que Cancún le gusta tanto como Acapulco.

   a) ¿Cuántas personas prefieren sólo Cancún?

   b) ¿Cuántas personas prefieren otros destinos que no sean Cancún o Acapulco?
4. De un grupo de 65 alumnos: 30 prefieren lenguaje, 40 prefieren matemática y 5 prefieren otros cursos ¿Cuántos prefieren Matemática y Lenguaje?
5. Se encuestaron a 180 amas de casa sobre sus preferencias por los canales de televisión A, B, C obteniendo los siguientes resultados: 110 ven el canal A, 120 ven el canal B y 130 ven el canal C; 66 ven los canales A

y C, 78 ven los canales A y B y 90 ven los canales B y C; 52 ven los tres canales. Responde a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántas amas de casa no ven ninguno de estos canales?
b) ¿Cuántas amas de casa ven solamente el canal A?
c) ¿Cuántas amas de casa ven solamente el canal B?
d) ¿Cuántas amas de casa ven solamente el canal C?
e) ¿Cuántas amas de casa ven solamente uno de estos canales?

4. Evaluación:

Te invitamos a que accedas al foro obligatorio del aula Moodle y compartas el proceso de resolución y el resultado de la siguiente actividad.

Actividad Integradora de Cierre:

De 300 alumnas que salieron al recreo: 90 bebieron Inca Kola; 60 bebieron Coca Cola; 10 bebieron ambas bebidas. ¿Cuántas alumnas bebieron sólo una de estas bebidas?

5. Cierre:

En nuestro primer encuentro vamos aprendiendo que la matemática como ciencia es capaz de explicar varias situaciones reales y del plano abstracto, provee abordajes diversos para situaciones de la informática. En cuanto a su aplicación en la computación nos ayuda a estructurar el pensamiento para hacer una buena lectura y comprensión de la situación por resolver.

En este momento de la clase es importante que te preguntes ¿Por qué será necesario que un Técnico Superior en Ciencias de Datos e Inteligencia Artificial tenga el conocimiento de las operaciones entre conjuntos? ¿Por qué le será importante saber resolver problemas de conteo para el trabajo en Ciencias de Datos e Inteligencia Artificial?

Te invitamos a que nos dejes tus impresiones sobre lo que aprendimos hoy a través de una intervención en el foro de la clase.

6. Bibliografía Obligatoria:

- Grassman W.K., Tremblay J.P. (1998) Capítulo 5: Conjuntos y relaciones. *Matemática discreta y lógica, una perspectiva desde la computación* [archivo PDF]. Recuperado de https://www.academia.edu/36077153/Matematica_discreta_y_logica_W_K_Grassmann

- Grimaldi R. (1994), Capítulo 3: Teoría de conjuntos. *Matemática discreta y combinatoria, una introducción con aplicaciones* [archivo PDF], Recuperado de https://www.pdfdrive.com/matem%C3%A1ticas-discreta-y-combinatoria-una-introducci%C3%B3n-con-aplicaciones-3ed-d157054717.html
- Lipschutz, S. (1970). Capítulo 1: Conjuntos y Subconjuntos. *Teoría y problemas de Teoría de Conjuntos y temas afines* [archivo PDF]. Recuperado de https://www.academia.edu/41341422/Teor%C3%ADa_de_conjuntos_y_temas_afines_Seymur_Lipschutz
- Rojo, O. A. (1996). Capítulo 2: Conjuntos. *Algebra I* [archivo PDF]. Recuperado de https://bibliotecavirtual8denovpinas.files.wordpress.com/2020/08/algebra-i-armando-rojo-1.pdf