Probabilidad y Estadística

Año de cursada 1° AÑO

Clase N.º 6: Cuantificar el azar, parte II.

Contenido: Probabilidad conjunta y condicional. Eventos independientes. Variable aleatoria discreta y continua. Funciones asociadas. Esperanza matemática y varianza.

1. **Presentación:**

Bienvenidos y bienvenidas a la clase n° 6 de Probabilidad y Estadística. Anteriormente iniciamos comenzamos a desarrollar las primeras herramientas y conceptos teóricos para el trabajo que realizaremos en esta área de la Estadística.

Habíamos precisado que la probabilidad es una medición de azar, es decir, asignar un valor que represente la posibilidad de ocurrencia de un determinado evento en relación a la observación de un fenómeno.

Esta herramienta resulta de mucha utilidad, dado que nos permite poder realizar determinadas anticipaciones sobre un hecho que no podemos conocer el resultado de ante mano. Es decir, la probabilidad se torna una herramienta mas para la toma de decisiones en determinados ámbitos, y como podrán notar, nuevamente aparecen las ideas del concepto de Estadísticas que habíamos desarrollado en las primeras clases.

Por último, previamente trabajamos sobre las definiciones de Probabilidad, desde un punto de vista mas o menos teórico. Para esta clase, avanzaremos en el estudio de algunas situaciones que se pueden presentar en la práctica.

2. Desarrollo:

Consecuencias de los axiomas.

(a) La probabilidad de un evento está comprendida entre 0 y 1, siendo 0 la probabilidad del evento imposible y 1 la probabilidad del evento cierto o seguro. $0 \leq P(A) \leq 1$

(b) La probabilidad del complemento de un evento es: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

(c) La probabilidad de la unión de dos eventos no mutuamente excluyentes es: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(d) La probabilidad del evento imposible es cero $P\ (\emptyset) = 0$

Probabilidad Conjunta y Condicional.

Comenzaremos diciendo que la ocurrencia de un evento conjunto es cuando ocurre simultáneamente dos o más eventos. Si queremos calcular la probabilidad de un evento conjunto, estamos en busca de una probabilidad conjunta, esto implica que las frases se unen con "y", mientras que los conjuntos se operan con ∩.

Por ejemplo, Si dado el experimento de arrojar una moneda tres veces, se quiere calcular la probabilidad que aparezca sello (A) y dos caras (B), entonces estamos queriendo calcular P(A∩B).

Si "s" significa que aparezca sello y "c" que aparezca cara, el espacio muestral del ejemplo anterior es Ω={ccc; ccs; csc; scc; css; scs; ssc; sss}. Si nos apoyamos en la teoría clásica, la probabilidad buscada se calcula como:

$$P(A \cap B) = \frac{Número\ de\ casos\ favorables\ al\ evento\ conjunto}{Número\ de\ casos\ igualmente\ posibles} = \frac{3}{8} = 0.375$$

Pero si lo que se quiere es calcular la probabilidad de ocurrencia de un evento, ya "habiendo ocurrido otro suceso", lo que se pretende conocer es una probabilidad condicional.

Si recurrimos al ejemplo anterior podemos observar que, si llamamos A al suceso "que aparezca 1 sello" y B al suceso "que aparezca al menos 2 caras", entonces se tienen las probabilidades $P(A) = \frac{7}{8}$ y $P(B) = \frac{4}{8}$

Ahora, si queremos calcular la probabilidad P(A/B) "que aparezca 1 sello, dado que aparecen al menos 2 caras", el espacio muestral se reduce {ccc; ccs; csc; scc} y $P(A\ /\ B) = \frac{3}{4}$ Si este es el caso, diremos que A y B son eventos dependientes.
Si nos basamos en la teoría clásica de la probabilidad tendremos la fórmula:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{Probabilidad\ conjunta\ de\ A\ y\ B}{Probabilidad\ de\ B}$$

O también: $P(A/B) = \frac{Números\ de\ casos\ favorables\ al\ evento\ conjunto\ A\ y\ B}{Números\ de\ casos\ favorables\ al\ evento\ B}$

Eventos Independientes.

Se dice que dos eventos son independientes si la ocurrencia de uno no depende de la ocurrencia del otro, es decir, el que uno de ellos ocurra no altera la probabilidad simple del otro suceso.

Por ejemplo, el experimento de lanzar un dado y una moneda es tal que el resultado del dado (1; 2; 3; 4; 5; 6) no afecta el resultado de la moneda (sello o cara). Por cada una de las seis caras del dado, tenemos dos posibilidades para el resultado de la moneda, cara o sello, es decir, existen doce resultados distintos. Si queremos calcular la probabilidad que el resultado del primero sea 3 y el resultado de la moneda sea cara, de los doce resultados posibles, uno solo es el resultado al cual se le quiere asignar su probabilidad. La probabilidad buscada es $\frac{1}{12}$.

Busquemos una regla que nos permita calcular la probabilidad conjunta de eventos independientes. Por un lado, sabemos que $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ lo que nos conduce a la siguiente igualdad: $P(A \cap B) = P(A/B).P(B)$

Pero el evento A no depende de la ocurrencia del evento B, es decir, la probabilidad de A no se ve afectada por B, por lo tanto, $P(A/B) = P(A)$.

Si reemplazamos esta igualdad en la última la anterior, tenemos la *Regla especial de multiplicación*. $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

Variable Aleatoria.

Para introducir este concepto vamos a utilizar un ejemplo. Supongamos que nuestro equipo favorito de futbol, digamos, la selección nacional, debe jugar dos partidos, cada uno de los cuales puede ganar, empatar o perder. Consideremos el experimento aleatorio "observar ambos partidos y esperar el resultado". El espacio muestral resultante es:

$$\Omega = \{GG; GE; GP; EG; EE; EP; PG; PE; PP\}$$

Los resultados de este experimento aleatorio no son números. Por eso, para poder cuantificarlos, tendremos que asociar un número a cada uno de estos resultados. Vamos ahora a asignar a cada uno de los nueve eventos posibles, la cantidad de puntos obtenida (recuerden que por cada partido ganado se otorgan tres puntos, por el empate, un punto y ningún punto si se pierde).

Evento	*Puntos obtenidos*
GG	6
GE	4
GP	3
EG	4
EE	2
EP	1
PG	3
PE	1
PP	0

Una variable aleatoria es aquella cuyos valores surgen asignando números, a los resultados de un experimento aleatorio.

Al estudiar la teoría de probabilidad hemos visto que únicamente se pueden asignar probabilidades a los resultados de un experimento aleatorio, denominados eventos. Como los valores que asumen las variables aleatorias surgen de cuantificar eventos, es lógico pensaren asignar probabilidades a cada uno de los valores que ellas asumen. Podemos, entonces, asignar una probabilidad a cada evento o resultado posible y, consecuentemente, a cada valor de la variable aleatorio. Esto se lleva a cabo por medio de una función de probabilidad.

Una función de probabilidad es aquella que surge al asignar probabilidades cada uno de los valores de una variable aleatoria.

Supongamos que los resultados del espacio muestral son igualmente probables y, por ello, es lógico pensar en asignarle a cada uno la misma probabilidad, o sea 1/9.

A partir de este razonamiento, construimos la siguiente tabla:

Valores de la variable aleatoria X	$P(x)$
0	1/9
1	2/9
2	1/9
3	2/9
4	2/9
6	1/9

Nótese que la suma de las probabilidades correspondientes a todos los valores posibles que toma la variable aleatoria es siempre igual a 1.

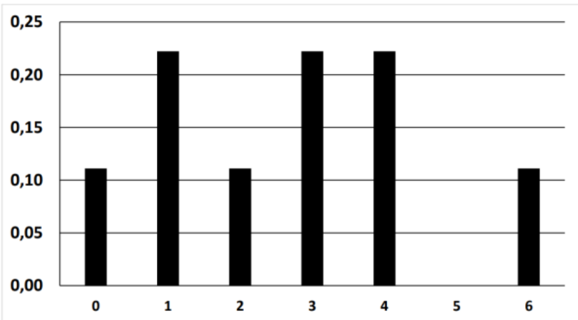
Esto se debe a que los valores surgen de la cuantificación de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio y ya hemos visto que:

P(Ω) = 1

Esta es una regla que se denomina Ley de cierre y la vamos a simbolizar como sigue: $\sum p(x_i) = 1$

Esto se lee: la sumatoria de las probabilidades de cada uno de los valores de la variable aleatoria X es igual a 1.

Podemos representar gráficamente la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta por medio de un gráfico a bastones. En este caso, tendremos:



Podemos observar que la tabla anterior es muy parecida a la tabla de frecuencias aprendida en la unidad 1.

En la primera columna aparecen los distintos valores que toma la variable aleatoria X y en la segunda, la correspondiente probabilidad p(x) que puede asimilarse a la noción de frecuencia relativa.

La variable aleatoria X toma solamente los valores 0, 1, 2, 3, 4 y 6. De acuerdo a lo estudiado, X es una variable aleatoria discreta.

Simbolizaremos con x_i los valores particulares que toma la variable aleatoria X y en este caso se tendrá: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$,

$x_5 = 4$, $x_6 = 6$.

Si p(x) es la función que asigna probabilidades a cada valor de la variable aleatoria X, podemos llamarla función de probabilidad de X y construir la siguiente tabla:

Valores de la variable aleatoria X	$p(x)$	$P(X)$
0	1/9	1/9
1	2/9	3/9
2	1/9	4/9
3	2/9	6/9
4	2/9	8/9
6	1/9	9/9

P(X): Función de Probabilidad Acumulada

En la tercera columna de la tabla aparece una nueva función que se denomina función de distribución de probabilidad. Esta función acumula probabilidades de una manera semejante a la columna de las frecuencias acumuladas en una tabla de frecuencias y se simboliza con F(x).

Aprovechando la similitud entre frecuencia relativa y probabilidad, recordemos además que, cuando teníamos una distribución de frecuencias, calculábamos la media y la varianza. También podemos hacerlo ahora.

Generalmente, cuando consideramos una variable aleatoria y su correspondiente función de probabilidad, la media aritmética de esta variable aleatoria se denomina esperanza matemática.

La esperanza matemática de una variable aleatoria discreta, se calcula como la suma de cada valor que toma la variable multiplicado por su respectiva probabilidad.

En símbolos: $\mathrm{E(X)} = \sum x_i . p_i$

Prácticamente, la esperanza matemática calcula el valor esperado promedio de una variable aleatoria el cual está en función de la probabilidad asignada a cada uno de los valores que toma dicha variable.

La varianza, de una variable aleatoria discreta, se define como la suma de los desvíos de cada valor que toma la Variable aleatoria con respecto a la esperanza matemática, elevados al cuadrado y multiplicados por su respectiva probabilidad.

También en esta situación se puede obtener la desviación estándar como la raíz cuadrada positiva de la varianza.

En símbolos: $\mathrm{V(X)} = \sum [x_i - \mathrm{E(X)}]^2 . \mathrm{p}(x_i)$

A continuación, calcularemos la esperanza matemática y la varianza en el ejemplo dado:

Valores de la variable aleatoria *X*	$p(x)$	$x.p(X)$	$[x - E(x)]^2.p(x)$
0	1/9	0	64/81
1	2/9	2/9	50/81
2	1/9	2/9	4/81
3	2/9	6/9	2/81
4	2/9	8/9	32/81
6	1/9	6/9	100/81
	1	**24/9=2,67**	**28/9=3,11**

1. Actividad:

1. Se extrae una bolilla de una urna que contiene 6 bolillas rojas, 4 blancas y 5 azules. Determine la probabilidad de que la bolilla extraída:

a) Sea roja

b) Sea blanca

c) Sea azul

d) No sea roja

e) Sea roja o blanca.

f) Sea blanca o azul.

g) Sea azul y roja.

3. Veintisiete personas fueron clasificadas según sexo y contextura física resultando la siguiente tabla de contingencia:

	Delgada	Media	Robusta	TOTAL
Mujeres	1	5	3	
Varones	6	3	9	
TOTAL				

Si elegimos una persona al azar, calcule la probabilidad de que:

a) Sea varón.

b) Sea mujer y de contextura robusta.

c) Sea de contextura robusta sabiendo que es varón.

d) Sea varón sabiendo que es de contextura robusta.

e) Sea de contextura delgada o sea mujer.

f) Sea mujer siendo delgada.

g) Sea de contextura delgada o robusta.

h) Sea varón o mujer.

i) ¿Los eventos Mujer y Robusta son independientes? Justifique.

2. Supongamos que se planifica un estudio de las familias que tienen tres hijos.

Registramos, en consecuencia, el sexo de cada hijo por orden de nacimiento.

Los resultados posibles de este experimento son:

VVV	MMM
VVM	MVM
VMV	MMV
MVV	MMM

siendo V = varón y M = mujer.

(Supongamos que todos los resultados posibles tienen la misma probabilidad de ocurrir).

Si se define la variable aleatoria X = cantidad de hijas mujeres por familia

a) Determine los valores posibles que asume la variable aleatoria X.

b) Calcule la función de probabilidad de X.

c) Calcule la esperanza matemática, la varianza y la desviación estándar de la variable aleatoria X.

2. Cierre:

De esta manera, llegamos al final de esta clase 8. Pudimos ver a lo largo del material herramientas propias del calculo de probabilidades y avanzado en el estudio de las variables aleatorias. Estas herramientas que hemos trabajado en esta clase nos permitirán avanzan a la siguiente unidad donde veremos algunos modelos de distribución de probabilidades.

Les dejo un saludo cordial, les deseo un buen fin de semana y por cualquier cosa ya saben, pueden comunicarse por la mensajería interna del campus.

3. Bibliografía:

- ✓ Ruiz Diaz, G. (2019). Estadística y Probabilidad. Notas de cátedra. Universidad Nacional de Formosa.
- ✓ García, J; López, N; Calvo, J. (2011). Estadísticas Básicas para Estudiantes de Ciencias. Facultad de Ciencias Físicas Universidad Complutense de Madrid. España.
- ✓ Wackerly, D; Mendenhall, W; Schaeffer, R. (2010). Estadística Matemática con Aplicaciones. 7ma Ed. Cengage Learning. Santa Fe, México.