Équations aux dérivées Partielles

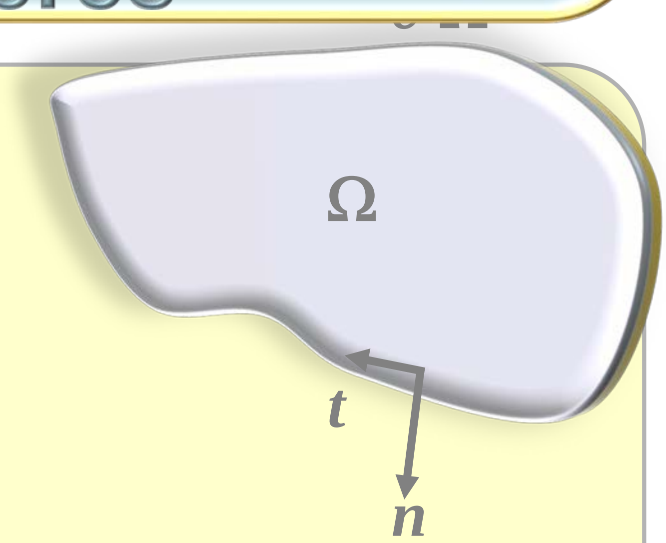
Caractéristiques

Les EDPs comprennent des derivées par rapport à plus d'une variable indépendante

Typiquement, 1–3 dimensions spatiales plus le temps

En général, on retrouve une combinaison des problèmes aux valeurs initiales et aux valeurs aux frontières

Conditions Initiales et aux Frontières



•**Conditions Initiales:** point de départ pour les problèmes de propagation

•**Conditions de bord:** spécifiés sur les frontières afin d'alimenter la solution dans tout le domaine

$$\begin{cases} Dirichlet \quad u = f \; sur \; \partial\Omega \\ Neumann \quad \dfrac{\partial u}{\partial n} = f \; sur \; \partial\Omega \\ Robin \quad \dfrac{\partial u}{\partial n} + ku = f \; sur \; \partial\Omega \end{cases}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

EDP à étudier

Afin de simplifier l'étude on se limitera à une EDP (pas au systèmes) ayant 2 variables indépendantes, soit:

- Deux variables spatiales: x et y
- Une variable spatiale x et le temps t

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Classification des EDPs

Équation générale de deuxième ordre à deux variables indépendantes

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g$$

EDPs: a, b, c linéaires,….,g = f(x,y) seulement

$b^2 - ac$

- < 0 elliptique
- $= 0$ parabolique
- > 0 hyperbolique

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Types d' EDP

Hyperbolique

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \nu^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$$

Parabolique

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

Elliptique

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \rho(x, y)$$

Classification des EDPs

Hyperbolique: phénomène dépendant du temps et qui ne tends pas nécessairement vers un état stationnaire(le mouvement des vagues)

Parabolique: phénomène dépendant du temps et qui évolue vers un état stationnaire (diffusion de la chaleur)

Elliptique: phénomène qui a déjà atteint l'état stationnaire (indépendant du temps)

Méthodes aux différences

On discrétise l'espace et le temps

- Le continuum devient un domaine défini par un maillage
- On remplace les dérivées par des différences finies
- La discrétisation produit un système algébrique
- La précision dépend du pas de discrétisation

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Navier-Stokes (2D)

EDP non linéaires

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Équations paraboliques

L'équation de la chaleur

Transfert de chaleur dans une barre unidimensionnelle

$x = 0$ $\qquad$ $x = a$

$g_1(t)$

$g_2(t)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad 0 < x < a, \;\; 0 \le t \le T$$

c:coefficient

$$u(x,0) = f(x), \qquad 0 < x < a$$

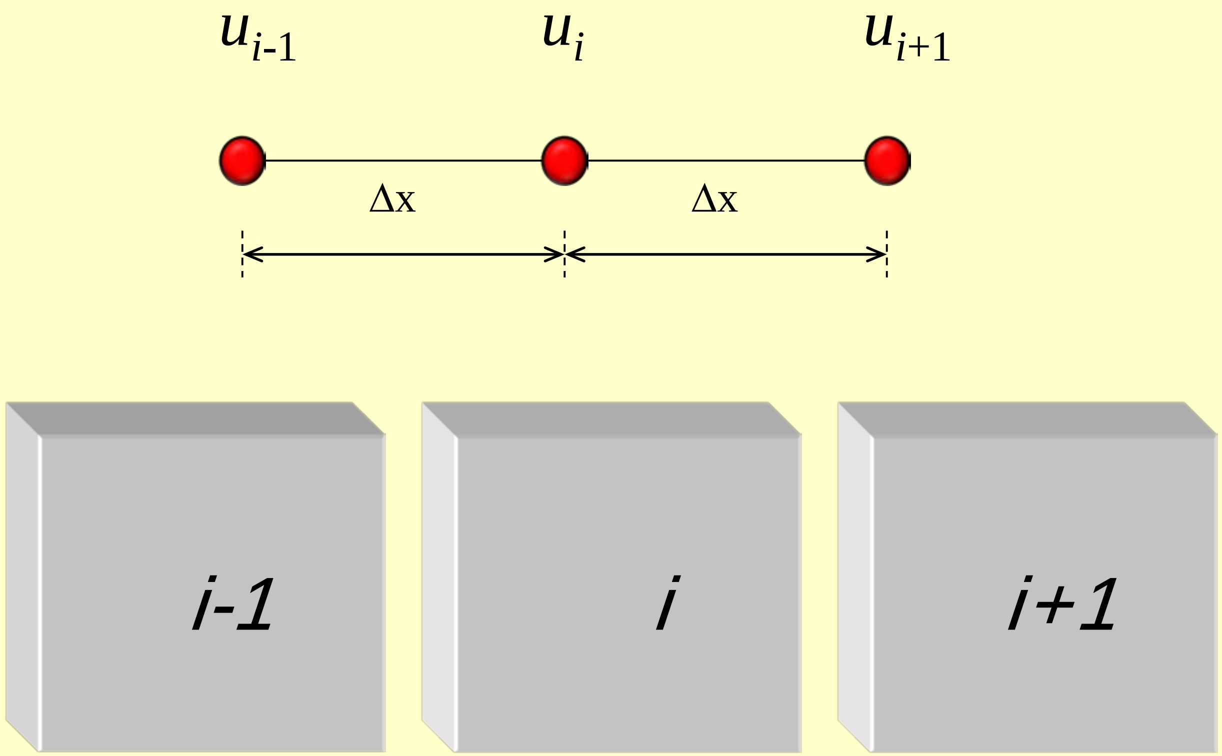
$$\begin{cases} u(0,t) = g_1(t) \\ u(a,t) = g_2(t) \end{cases}, \quad 0 \le t \le T$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Différences Finies

Le moteur de la méthode des différences finies est le développement en séries de Taylor



En avant

$$f_{i+1} = f_i + f_i' h + \frac{f_i'' h^2}{2!} + \frac{f_i''' h^3}{3!} + \ldots..$$

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} - \frac{f_i'' h}{2!} - \frac{f_i''' h}{3!} - \ldots.. = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + Oh$$

En arrière

$$f_{i-1} = f_i - f_i' h + \frac{f_i'' h^2}{2!} - \frac{f_i''' h^3}{3!} + ...$$

$$f_i' = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + \frac{f_i'' h}{2!} - \frac{f_i''' h}{3!} - \ldots\ldots = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + Oh$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Différence centrée

$$f_{i+1} = f_i + f_i' h + \frac{f_i'' h^2}{2!} + \frac{f_i''' h^3}{3!} + ...$$

$$f_{i-1} = f_i - f_i' h + \frac{f_i'' h^2}{2!} - \frac{f_i''' h^3}{3!} + ...$$

La soustraction des equations donne

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + \frac{f_i''' h^2}{3!} + \frac{f_i''''' h^4}{5!} - \ldots = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + Oh^2$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Différence centrée

$$f_{i+1} = f_i + f_i^{'}h + \frac{f_i^{''}h^2}{2!} + \frac{f_i^{'''}h^3}{3!} + ...$$

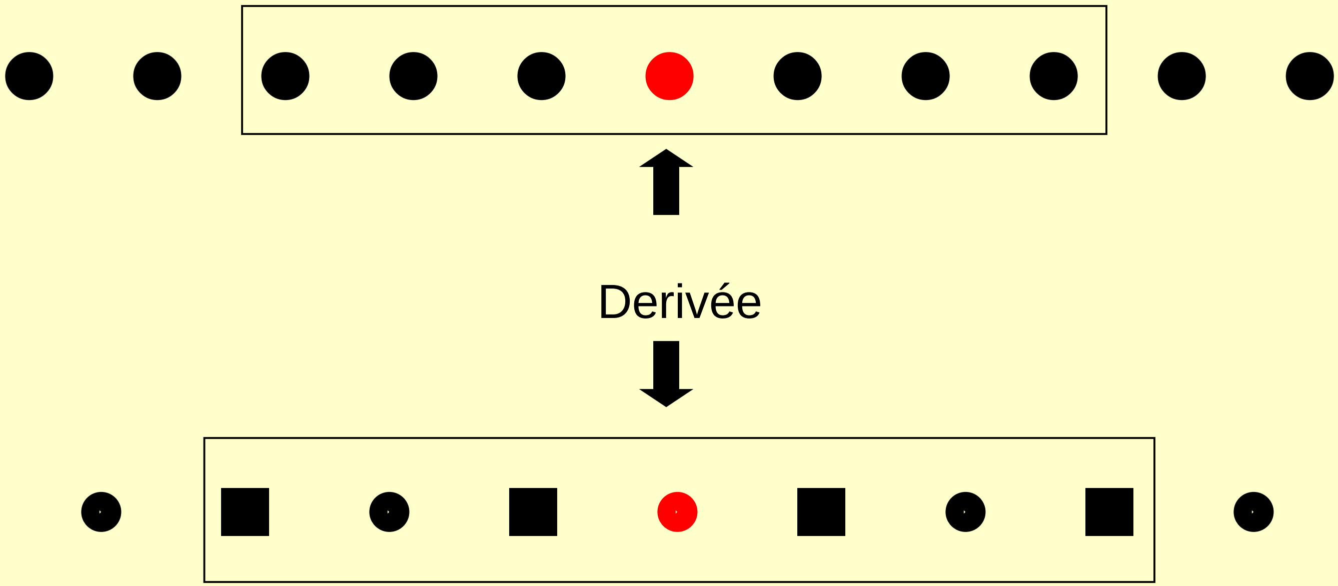
$$f_{i-1} = f_i - f_i^{'}h + \frac{f_i^{''}h^2}{2!} - \frac{f_i^{'''}h^3}{3!} + ...$$

L'addition des equations donne

$$\frac{f_{i+1} + f_{i-1} - 2f_i}{h^2} + \frac{f_i^{'''}h^2}{3!} + \frac{f_i^{'''''}h^4}{5!} - \ldots \; = \frac{f_{i+1} + f_{i-1} - 2f_i}{h^2} + O(h^2)$$

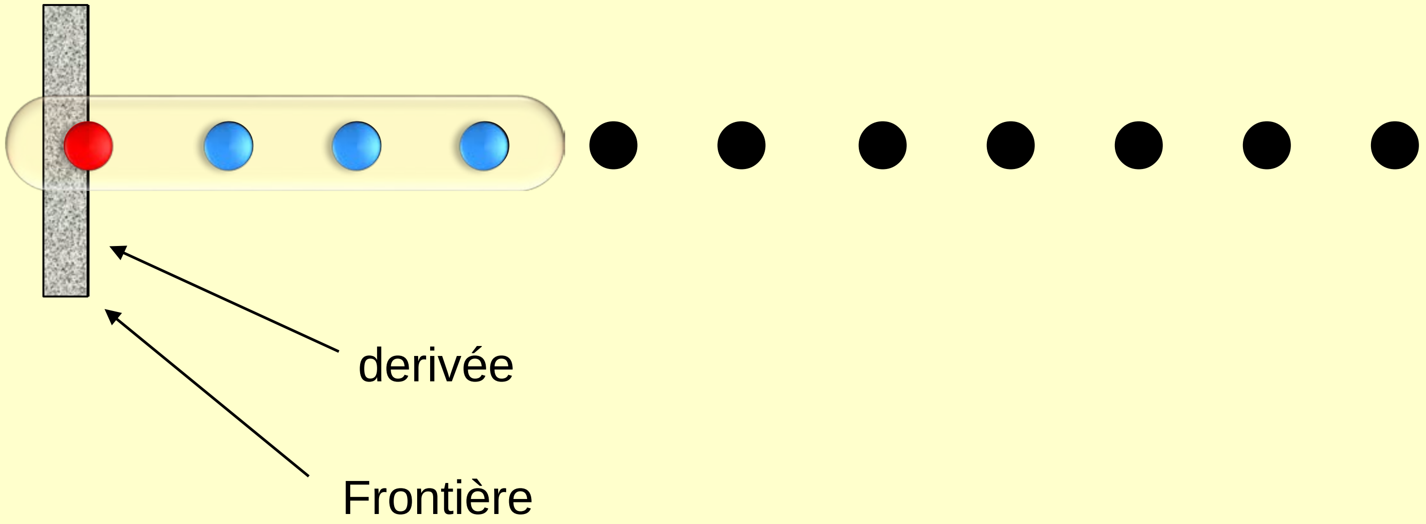
ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio



M. Reggio

Dérivée décentrée près d'une frontière



ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Autres développements

$$f_{i+k} = f_i + f_i^{'} kh + \boxed{\frac{f_i^{''}(kh)^2}{2!}} + \frac{f_i^{'''}(kh)^3}{3!} + \ldots\ldots$$

- k = 2

$$f_{i+2} = f_i + 2 f_i^{'} h + 4\frac{f_i^{''}h^2}{2!} + 8\frac{f_i^{'''}h^3}{3!} + \ldots\ldots$$

- k = -2

$$f_{i-2} = f_i - 2 f_i^{'} h + 4\frac{f_i^{''}h^2}{2!} - 8\frac{f_i^{'''}h^3}{3!} + \ldots\ldots$$

- k = 3

$$f_{i+3} = f_i + 3 f_i^{'} h + 9\frac{f_i^{''}h^2}{2!} + 27\frac{f_i^{'''}h^3}{3!} + \ldots\ldots$$

- k = -3

$$f_{i-3} = f_i - 3 f_i^{'} h + 9\frac{f_i^{''}h^2}{2!} - 27\frac{f_i^{'''}h^3}{3!} + \ldots\ldots$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Autres développements

$$f_{i+2} - 4 f_{i+1} = \left[f_i + 2 f_i' h + 4 f_i'' \frac{h^2}{2} + 8 f_i''' \frac{h^3}{6} + \ldots \right]$$

$$-4\left[f_i + f_i' h + f_i'' \frac{h^2}{2} + \quad f_i''' \frac{h^3}{6} + .. \right]$$

$$f_{i+2} - 4 f_{i+1} + 3 f_i = -2h f_i' + 4 f_i''' \frac{h^3}{6} + \ldots$$ Ordre 2

$$\boxed{f_i' = \frac{-f_{i+2} + 4 f_{i+1} - 3 f_i}{2h}} + f_i''' \frac{h^2}{3} + \ldots$$

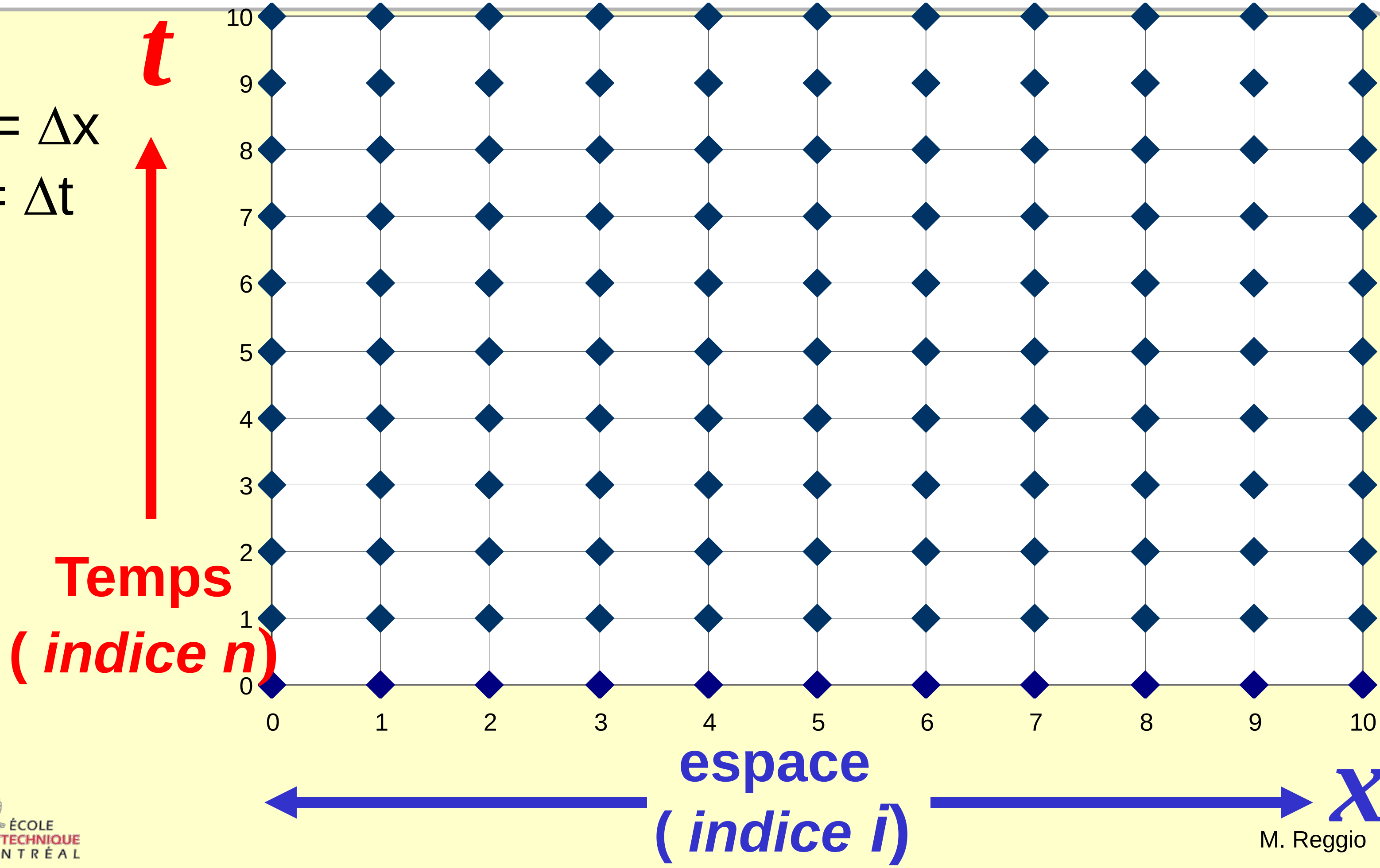
ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Discrétisation dans l'espace-temps

$h = \Delta x$

$k = \Delta t$

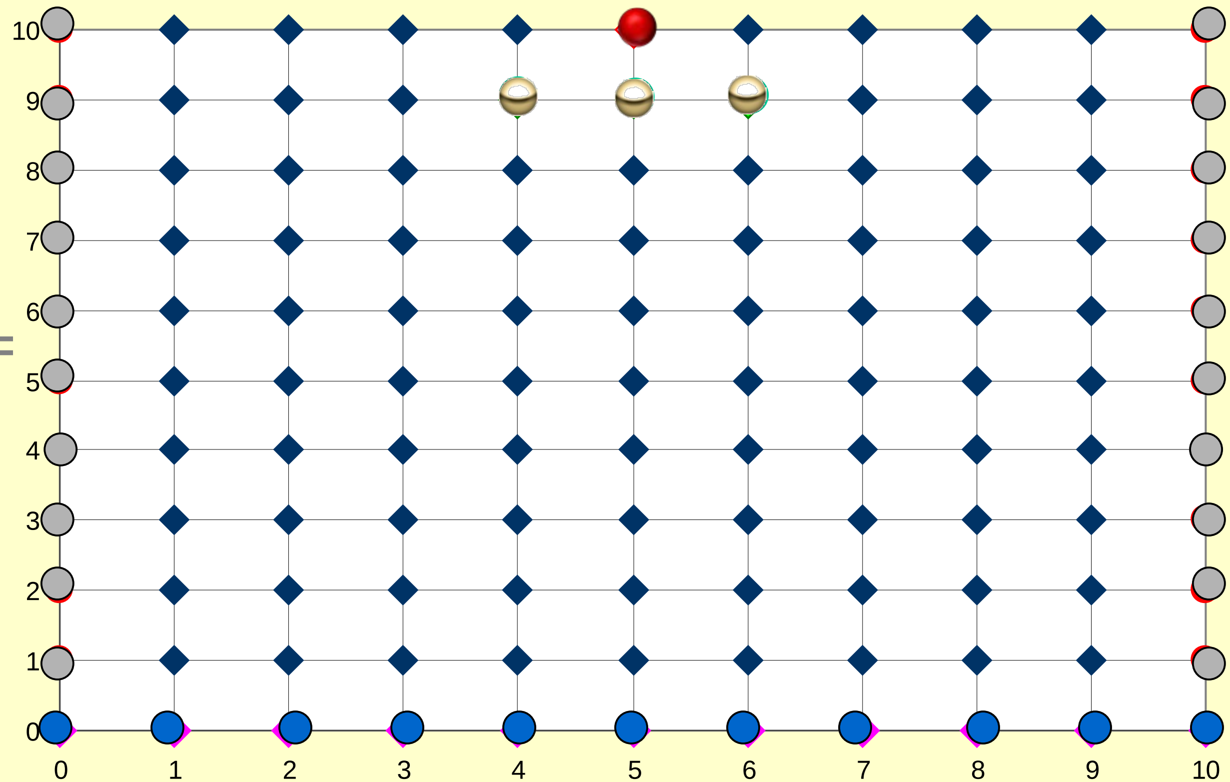


ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Méthode d'Euler Explicite

$u(0, t) = g_1(t)$



$u(a, t) = g_2(t)$

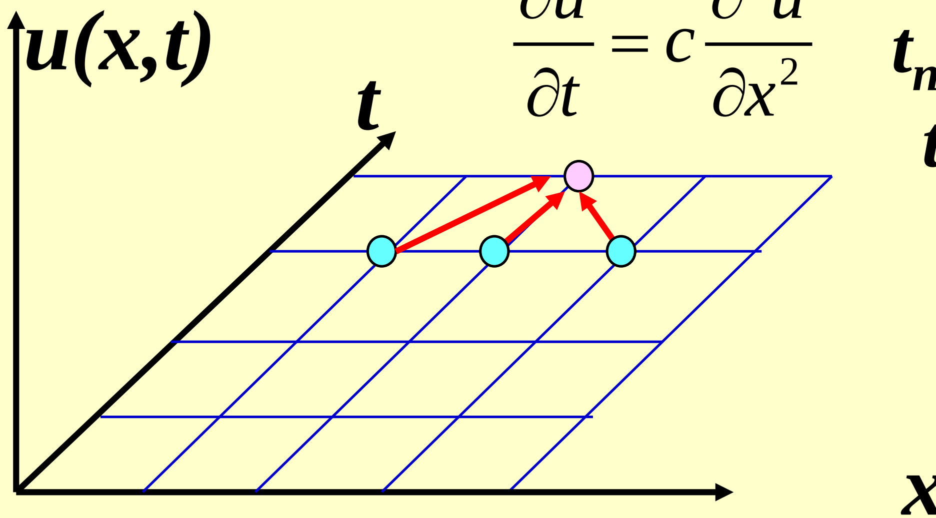
Conditions initiales : u(x,0) = f(x)

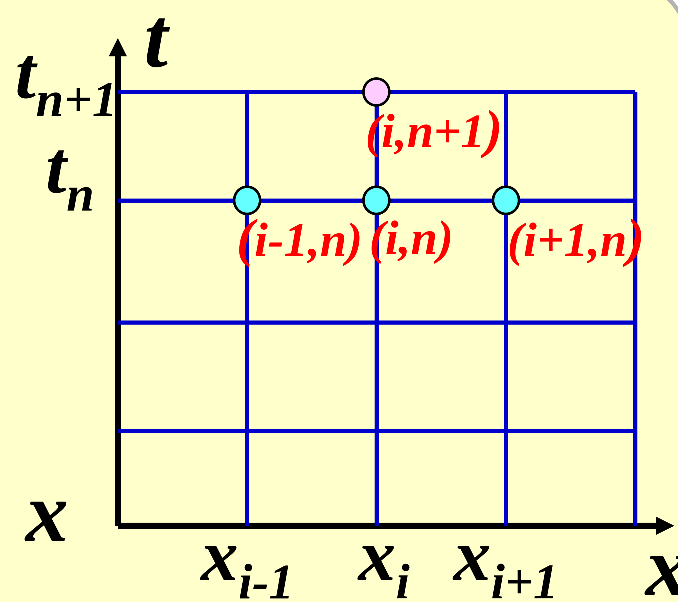
ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$





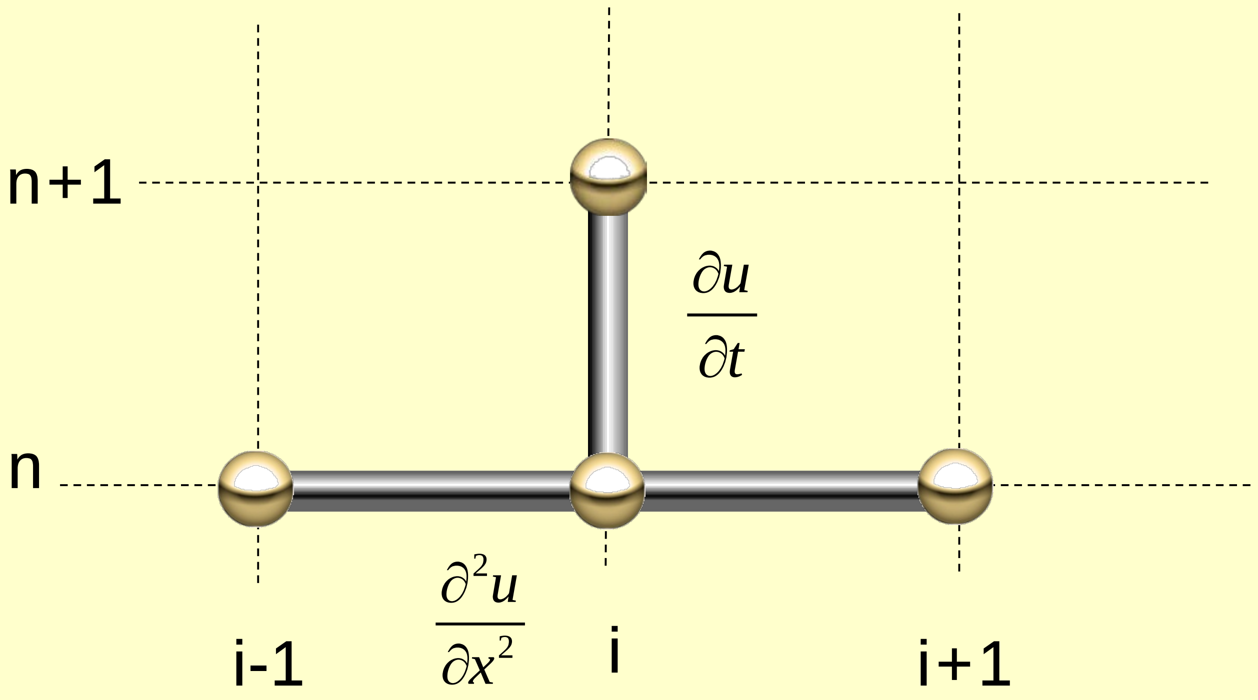
Décentré en avant $u_t = \frac{1}{\Delta t}(u_i^{n+1} - u_i^n)$

Centré au temps n $cu_{xx} = \frac{c}{\Delta x^2}(u_{i-1,j}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n)$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Décentré en avant



ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Méthode d'Euler Explicite

$$\Delta t = T / M \,,\ t_n = n\Delta t$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \Delta x = a / N,\ x_i = i\Delta x$$

$$u_t = cu_{xx} \Rightarrow \frac{1}{\Delta t}(u_i^{n+1} - u_i^n) = \frac{c}{\Delta x^2}(u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{c\Delta t}{\Delta x^2}(u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n)$$

$$r = \frac{c\Delta t}{\Delta x^2}$$

$$= ru_{i-1}^n + (1 - 2r)u_i^n + ru_{i+1}^n$$

$$\boxed{\textit{Stabilité} \quad 0 < r \le 0.5}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Stable
$$u_i^{n+1} = r u_{i-1}^n + (1-2r) u_i^n + r u_{i+1}^n$$

$$r = 0.01 \quad \Rightarrow \quad u_i^{n+1} = 0.01\, u_{i-1}^n + 0.98\, u_i^n + 0.01\, u_{i+1}^n$$

$$r = 0.1 \quad \Rightarrow \quad u_{i,j+1} = 0.1 + 0.8 u_i^n + 0.1 u_{i+1}^n$$

$$r = 0.4 \quad \Rightarrow \quad u_{i,j+1} = 0.4\, u_{i-1}^n + 0.2\, u_i^n + 0.4 u_{i+1}^n$$

$$r = 0.5 \quad \Rightarrow \quad u_{i,j+1} = 0.5\, u_{i-1}^n + 0.5 u_{i+1}^n$$

Instable coefficients (négatifs)

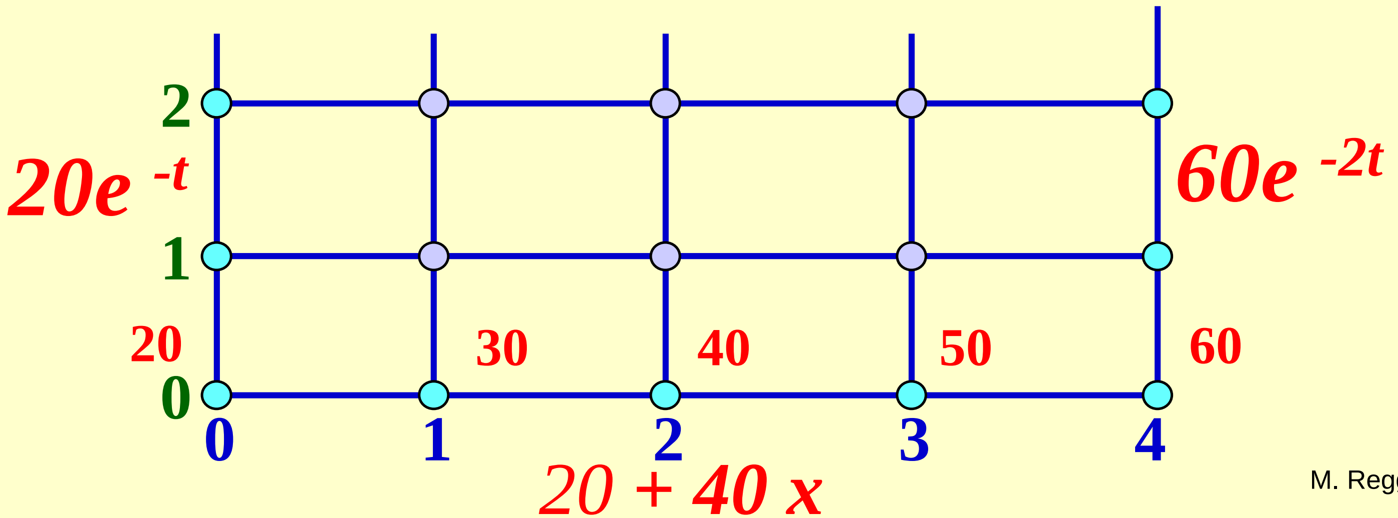
$$\begin{cases} r = 1 & \Rightarrow \quad u_i^{n+1} = \ u_{i-1}^n - \ u_i^n + \ u_{i+1}^n \\ r = 10 & \Rightarrow \quad u_i^{n+1} = 10\, u_{i-1}^n - 19\, u_i^n + 10\, u_{i+1}^n \\ r = 100 & \Rightarrow \quad u_i^{n+1} = 100 u_{i-1}^n - 199\, u_i^n + 100 u_{i+1}^n \end{cases}$$

Exemple

$$u_t = cu_{xx}\,;\; 0 \le x \le 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \begin{cases} u(x,0) = 20 + 40\,x \\ u(0,t) = 20e^{-t},\; u(1,t) = 60e^{-2t} \end{cases}$$

$$c = 0.5, h = \Delta x = 0.25, k = \Delta t = 0.05$$



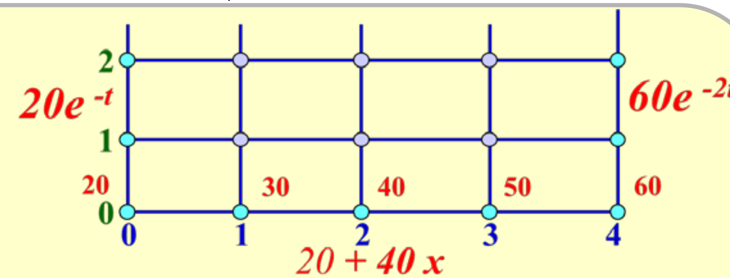
ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Exemple

$$u_i^{n+1} = ru_{i-1}^n + (1-2r)u_i^n + ru_{i+1}^n$$

$c = 0.5, h = \Delta x = 0.25, k = \Delta t = 0.05$



$$r = \frac{c\Delta t}{\Delta x^2} = \frac{(0.5)(0.05)}{(0.25)^2} = 0.4$$

$$u_i^{n+1} = ru_{i-1}^n + (1-2r)u_i^n + ru_{i+1}^n$$

$$= 0.4u_{i-1}^n + 0.2u_i^n + 0.4u_{i+1}^n$$

Premier pas: t = 0.05

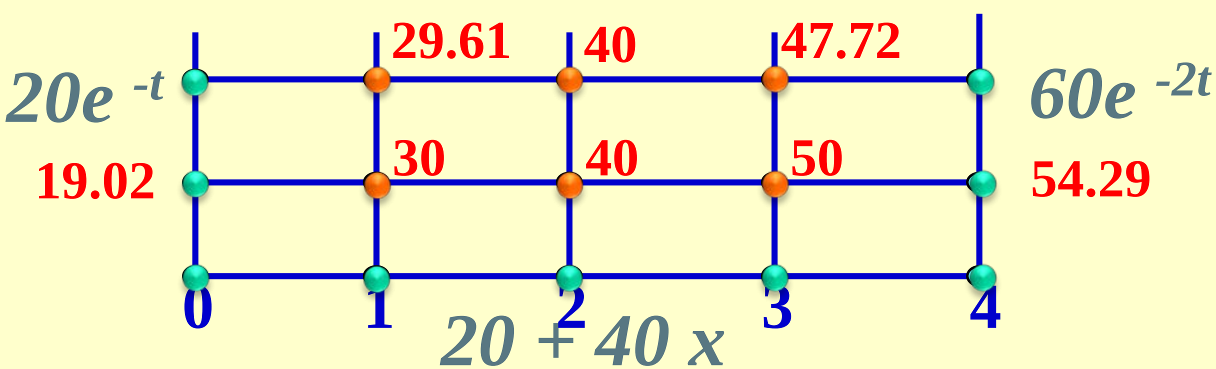
$$\begin{array}{ll} & \left\{ \begin{array}{l} u_0^1 = 20e^{-0.05} = 19.02458849 \\ \end{array} \right. \\ \mathbf{1} & u_1^1 = 0.4u_0^0 + 0.2u_1^0 + 0.4u_2^0 = 0.4(20) + 0.2(30) + 0.4(40) = 30 \\ \mathbf{2} & u_2^1 = 0.4u_1^0 + 0.2u_2^0 + 0.4u_3^0 = 0.4(30) + 0.2(40) + 0.4(50) = 40 \\ \mathbf{3} & u_3^1 = 0.4u_2^0 + 0.2u_3^0 + 0.4u_4^0 = 0.4(40) + 0.2(50) + 0.4(60) = 50 \\ & u_4^1 = 60e^{-0.10} = 54.29024508 \end{array}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

t = 0.10

$$
\begin{cases}
u_0^2 = 20e^{-0.10} = 18.09674836 \\
u_1^2 = 0.4u_0^1 + 0.2u_1^1 + 0.4u_2^1 \\
\quad = 0.4(19.02458849) + 0.2(30) + 0.4(40) = 29.6098354 \\
u_2^2 = 0.4u_1^1 + 0.2u_2^1 + 0.4u_3^1 = 0.4(30) + 0.2(40) + 0.4(50) = 40 \\
u_3^2 = 0.4u_2^1 + 0.2u_3^1 + 0.4u_4^1 \\
\quad = 0.4(40) + 0.2(50) + 0.4(54.2924508) = 47.71609803 \\
u_4^2 = 60e^{-0.20} = 49.12384518
\end{cases}
$$



ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Stabilité Numérique

On note qu'il y a une contrainte de stabilité

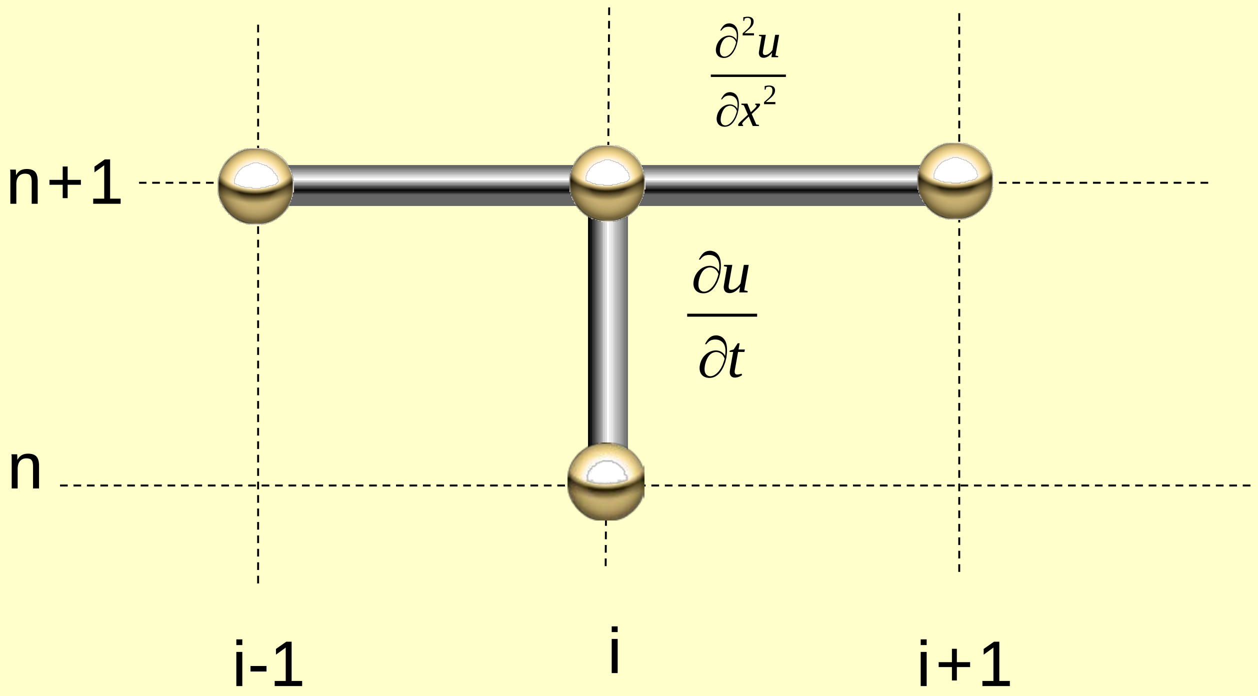
$$r \leq \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \Delta t \leq \frac{1}{2}\frac{\Delta x^2}{c}$$

La méthode implicite élimine cette restriction

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

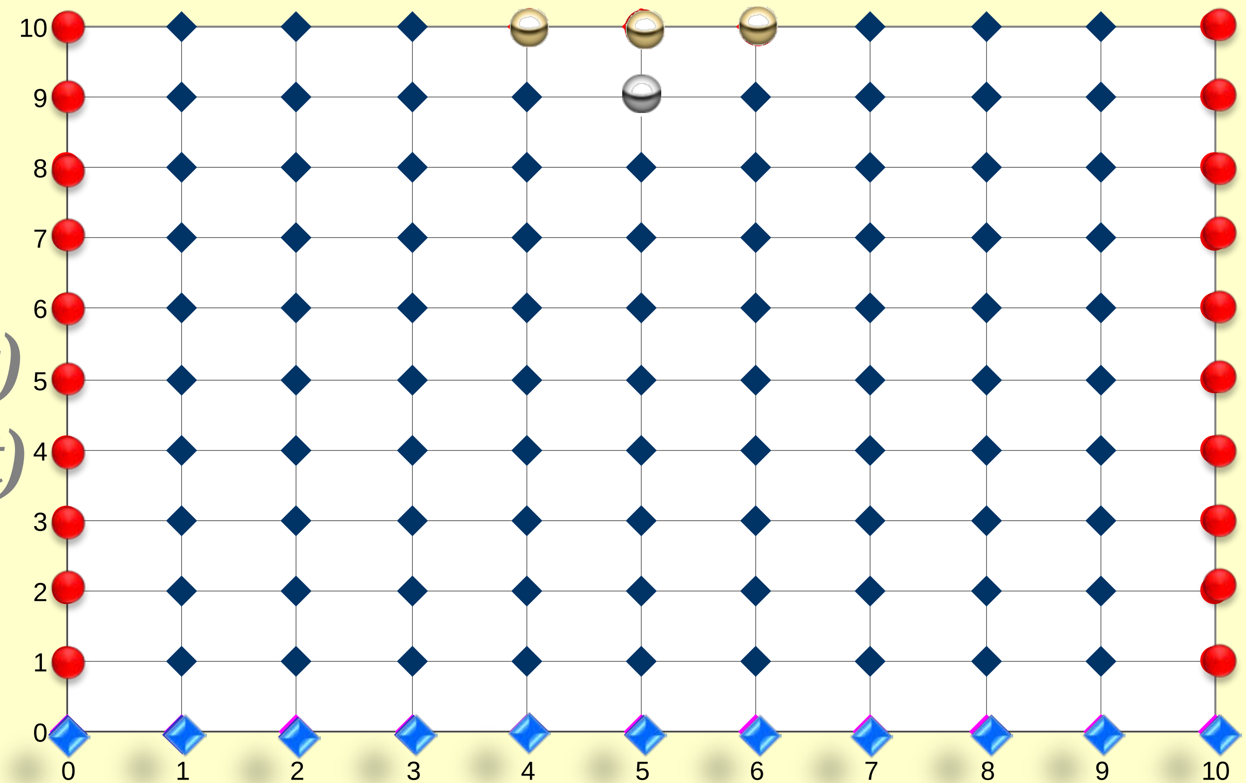
Décentré en arrière



ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Méthode d'Euler Implicite



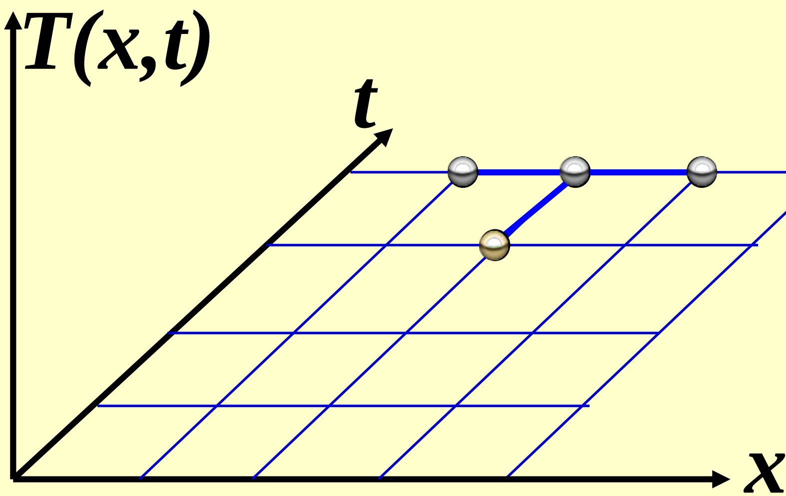
$u(0, t) = g_1(t)$

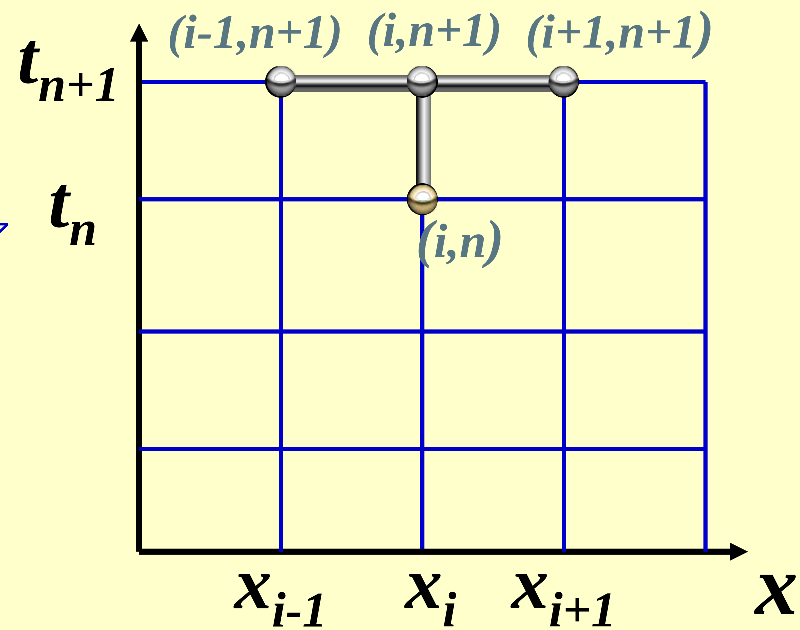
Conditions initiales : u(x,0) = f(x)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Méthode Implicite





Decentré en avant

$$u_t = \frac{1}{\Delta t}\left(u_i^{n+1} - u_i^{n}\right)$$

Centré au temps n+1

$$c u_{xx} = \frac{c}{\Delta x^2}\left(u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}\right)$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Méthode Implicite

$$\frac{1}{\Delta t}\left(u_i^{n+1}-u_i^{n}\right)=\frac{c}{\Delta x^2}\left(u_{i-1}^{n+1}-2u_i^{n+1}+u_{i+1}^{n+1}\right)$$

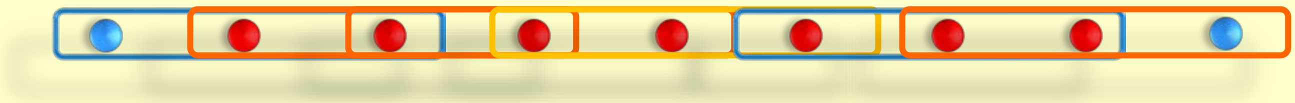
$$-r\,u_{i-1}^{n+1}+(1+2r)\,u_i^{n+1}-r\,u_{i+1}^{n+1}=u_i^{n}$$

Matrice Tridiagonale

$$\begin{bmatrix} 1+2r & -r & & & \\ -r & 1+2r & -r & & \\ & -r & 1+2r & -r & \\ & & \ddots & \ddots & -r \\ & & & -r & 1+2r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \\ \vdots \\ u_{m-1}^{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1^{n}+r u_0^{n+1} \\ u_2^{n} \\ u_3^{n} \\ \\ u_{m-1}^{n}+r_m^{n+1} \end{Bmatrix}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio



ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

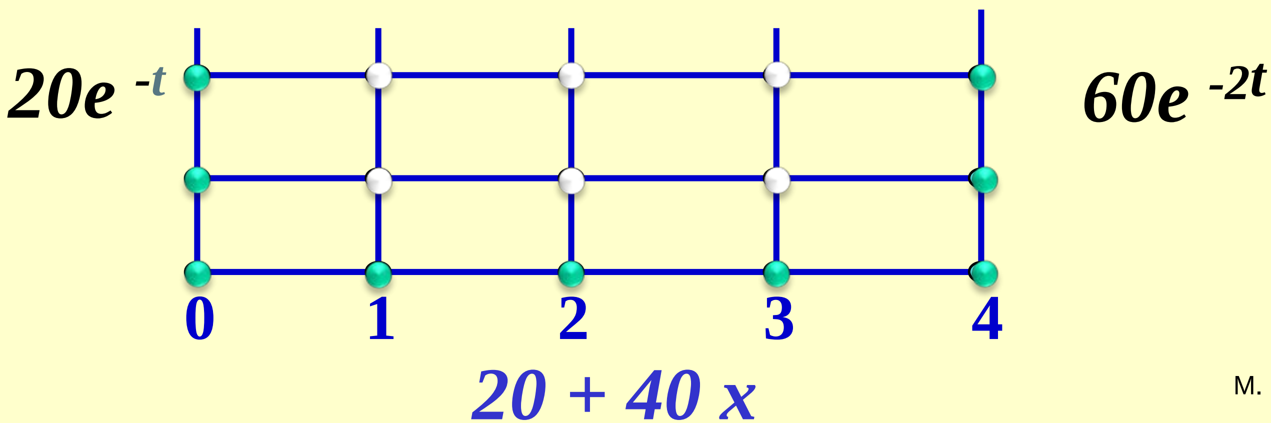
M. Reggio

Exemple

$$u_t = c u_{xx}\,;\;\; 0 \le x \le 1$$

$$\begin{cases} u(x,0) = 20 + 40\,x \\ u(0,t) = 20e^{-t},\;\; u(1,t) = 60e^{-2t} \end{cases}$$

$$c = 0.5,\; h = \Delta x = 0.25,\; k = \Delta t = 0.1$$



ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Exemple:Schéma implicite

$c = 0.5, h = \Delta x = 0.25, k = \Delta t = 0.1$

$$r = \frac{c\Delta t}{\Delta x^2} = \frac{(0.5)(0.10)}{(0.25)^2} = 0.8$$

$$-ru_{i-1}^{n+1} + (1+2r)u_i^{n+1} - ru_{i+1}^{n+1} = u_i^n$$

$$-0.8u_{i-1}^{n+1} + 2.6u_i^{n+1} - 0.8u_{i+1}^{n+1} = u_i^n$$

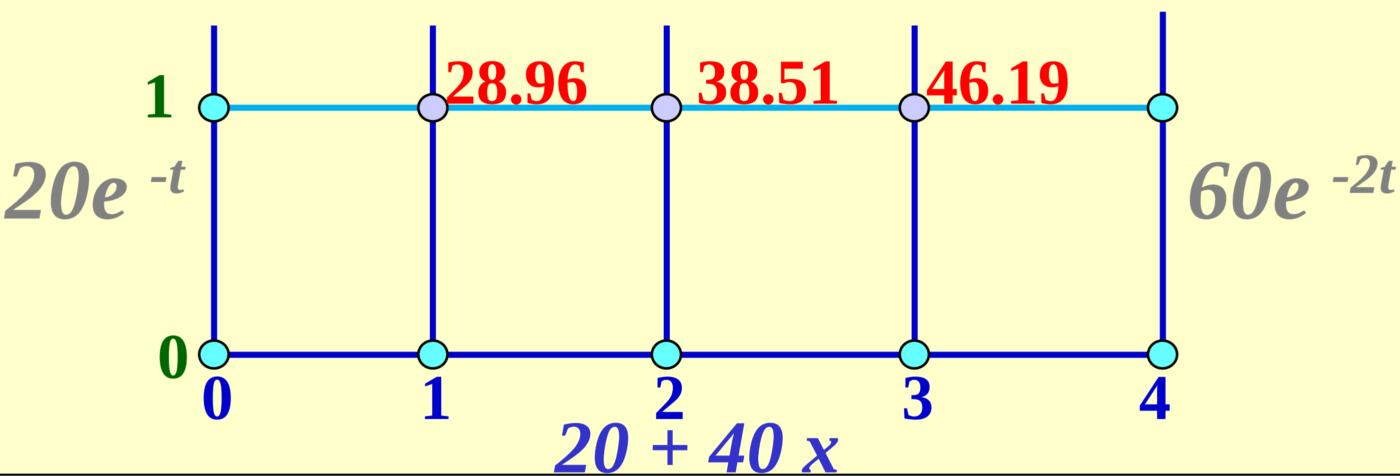
$$\begin{bmatrix} 1+2r & -r & 0 \\ -r & 1+2r & -r \\ 0 & -r & 1+2r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1^0 + ru_0^1 \\ u_2^0 \\ u_3^0 + ru_4^1 \end{Bmatrix}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

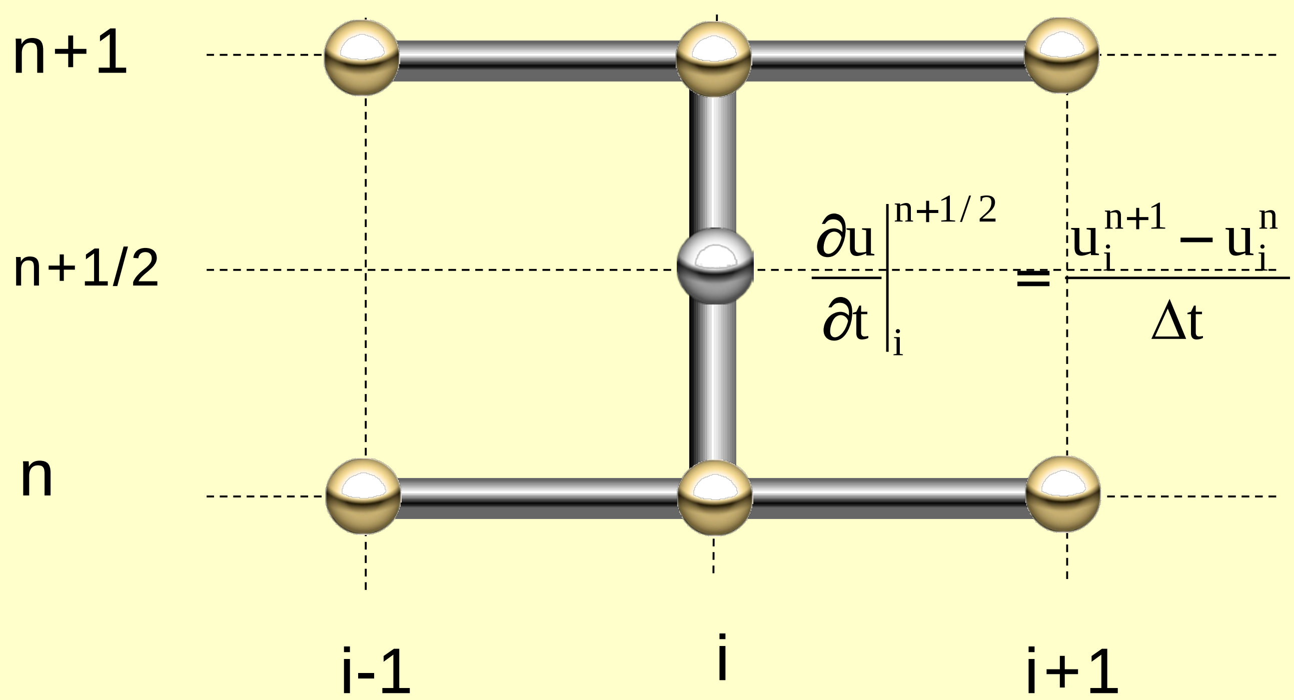
M. Reggio

$$\begin{bmatrix} 2.6 & -0.8 & 0 \\ -0.8 & 2.6 & -0.8 \\ 0 & -0.8 & 2.6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 30 + 0.8(20e^{-0.1}) \\ 40 \\ 50 + 0.8(60e^{-0.2}) \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 28.95515793 \\ 38.50751457 \\ 46.19426454 \end{Bmatrix}$$



Méthode de Crank-Nicolson



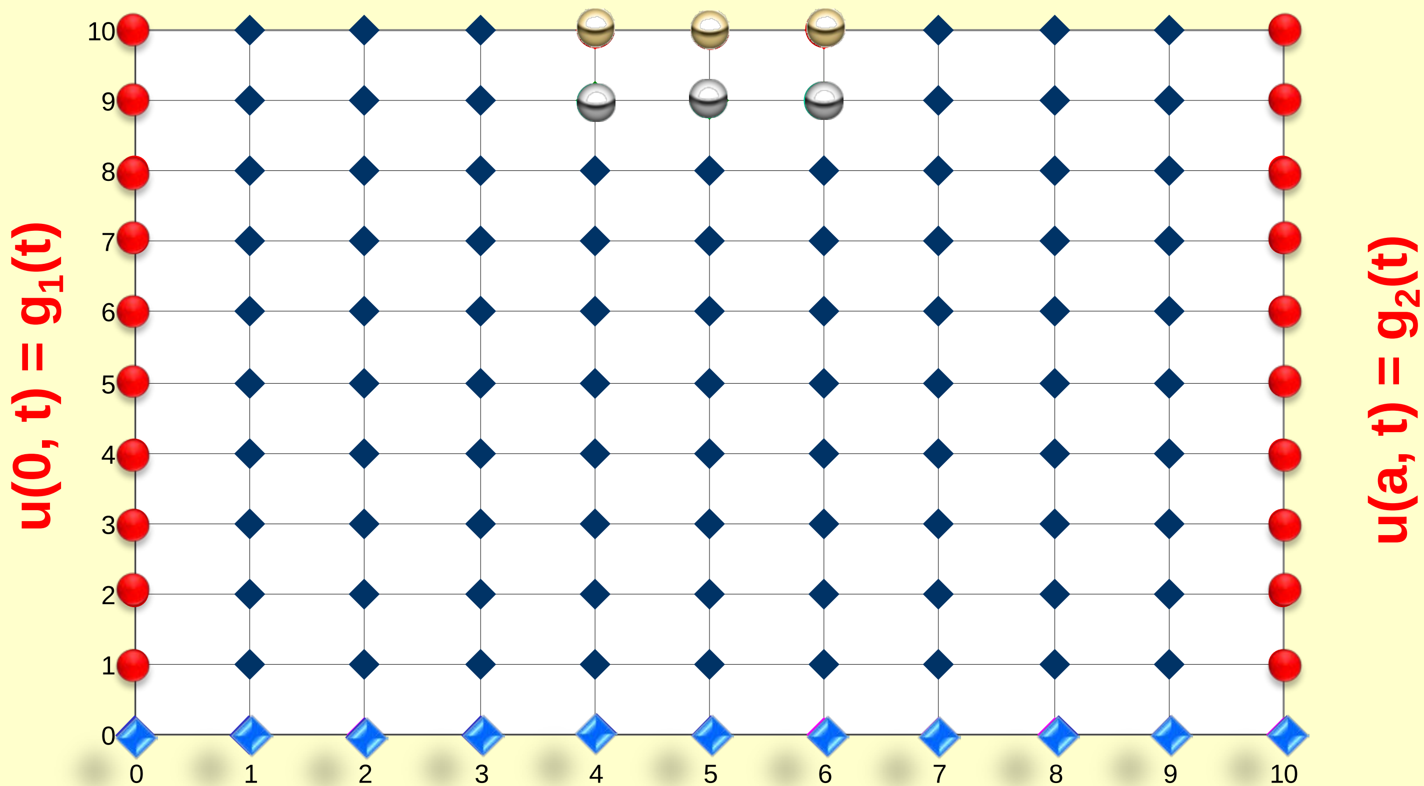
$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{i}^{n+1/2} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^{n}}{\Delta t} + O\left(\Delta t^2\right)$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Méthode de Crank-Nicolson

Deuxième ordre dans le temps



Conditions initiales : $u(x,0) = f(x)$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Méthode de Crank-Nicolson

$$\frac{1}{\Delta t}(u_i^{n+1}-u_i^n)=\frac{c}{2\Delta x^2}(u_{i-1}^n-2u_i^n+u_{i+1}^n)$$

$$+\frac{c}{2\Delta x^2}(u_{i-1}^{n+1}-2u_i^{n+1}+u_{i+1}^{n+1})$$

Matrice tridiagonale

$$-\frac{r}{2}u_{i-1}^{n+1}+(1+r)u_i^{n+1}-\frac{r}{2}u_{i+1}^{n+1}=\frac{r}{2}u_{i-1}^n+(1-r)u_i^n+\frac{r}{2}u_{i+1}^n$$

Inconditionellement stable (stabilité neutre)

On peut retrouver des oscillations

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Méthode générale à deux niveaux

Moyenne pondérée des dérivées entre les niveaux n et n+1

$$\frac{1}{\Delta t}(u_i^{n+1} - u_i^n) = \frac{c\theta}{\Delta x^2}(u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n) + \frac{c(1-\theta)}{\Delta x^2}(u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1})$$

$$\begin{cases} \theta = 0: & \textit{schéma d'Euler implicite} \\ \theta = 1: & \textit{schéma d' Euler explicite} \\ \theta = 1/2: & \textit{schéma de Crank-Nicolson} \end{cases}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

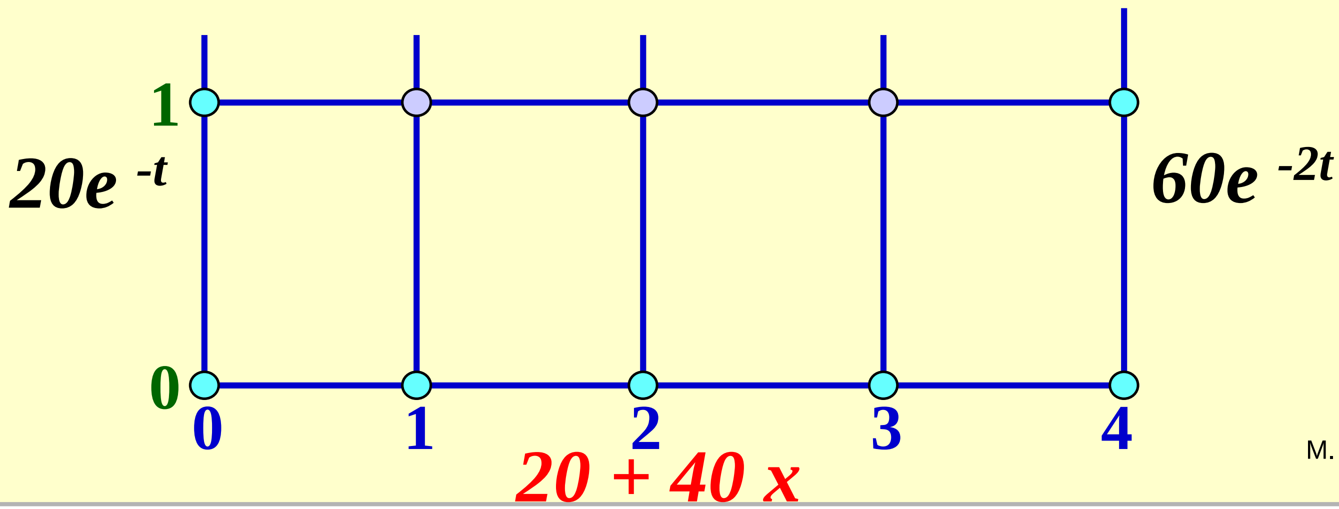
M. Reggio

Exemple:Crank-Nicolson

$$u_t = cu_{xx}\,;\ 0 \le x \le 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \begin{cases} u(x,0) = 20 + 40\,x \\ u(0,t) = 20e^{-t},\ u(1,t) = 60e^{-2t} \end{cases}$$

$$c = 0.5,\, h = \Delta x = 0.25,\, k = \Delta t = 0.1$$



$$r = \frac{c\Delta t}{\Delta x^2} = \frac{(0.5)(0.10)}{(0.25)^2} = 0.8$$

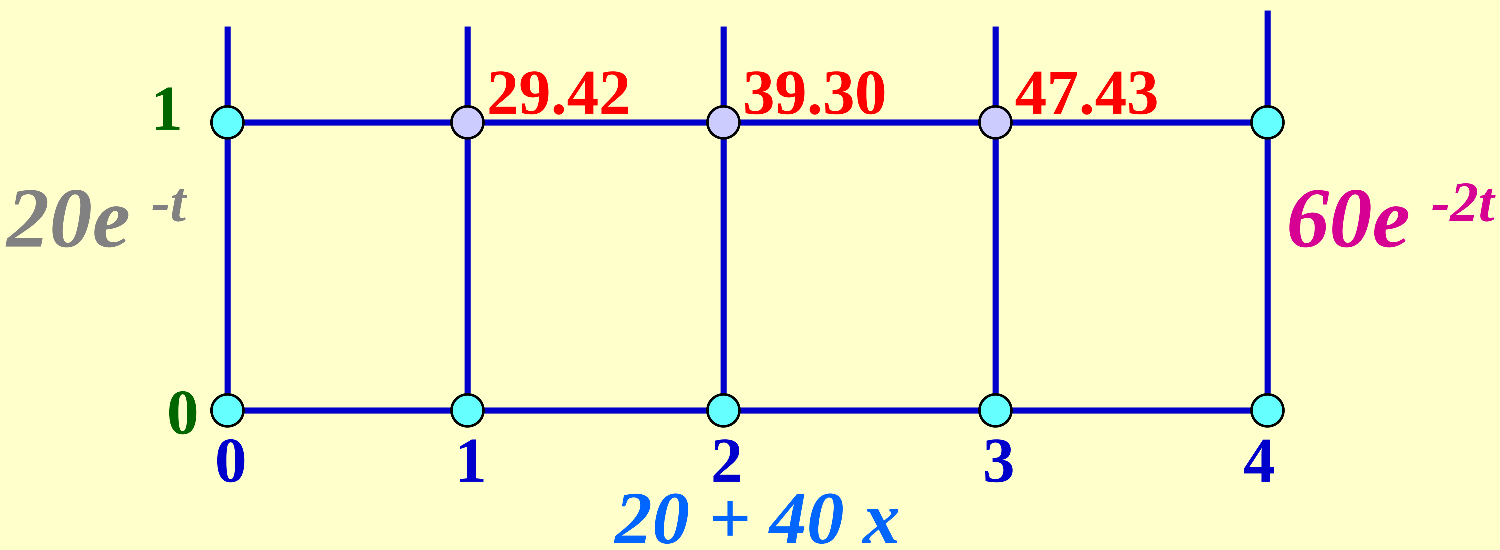
$$-\frac{\mathrm{r}}{2}\mathrm{u}_{i-1}^{n+1} + (1+\mathrm{r})\mathrm{u}_{i}^{n+1} - \frac{\mathrm{r}}{2}\mathrm{u}_{i+1}^{n+1} = \frac{\mathrm{r}}{2}\mathrm{u}_{i-1}^{n} + (1-\mathrm{r})\mathrm{u}_{i}^{n} + \frac{\mathrm{r}}{2}\mathrm{u}_{i+1}^{n}$$

$$-0.4\mathrm{u}_{i-1}^{n+1} + 1.8\mathrm{u}_{i}^{n+1} - 0.4\mathrm{u}_{i+1}^{n+1} = 0.4\mathrm{u}_{i-1}^{n} + 0.2\mathrm{u}_{i}^{n} + 0.4\mathrm{u}_{i+1}^{n}$$

$$\begin{bmatrix} 1+\mathrm{r} & -\frac{\mathrm{r}}{2} & 0 \\ -\frac{\mathrm{r}}{2} & 1+\mathrm{r} & -\frac{\mathrm{r}}{2} \\ 0 & -\frac{\mathrm{r}}{2} & 1+\mathrm{r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\mathrm{r}}{2}u_0^0 + (1-r)u_1^0 + \frac{r}{2}u_2^0 + \frac{r}{2}u_0^1 \\ \frac{\mathrm{r}}{2}u_1^0 + (1-r)u_2^0 + \frac{r}{2}u_3^0 \\ \frac{\mathrm{r}}{2}u_2^0 + (1-r)u_3^0 + \frac{r}{2}u_4^0 + \frac{r}{2}u_4^1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1.8 & -0.4 & \cancel{0} \\ -0.4 & 1.8 & -0.4 \\ \cancel{0} & -0.4 & 1.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.4(20) + 0.2(30) + 0.4(40) + 0.4(20e^{-0.1}) \\ 0.4(30) + 0.2(40) + 0.4(50) \\ 0.4(40) + 0.2(50) + 0.4(60) + 0.4(60e^{-0.2}) \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 37.23869934 \\ 40 \\ 69.64953807 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 29.42144598 \\ 39.29975855 \\ 47.42746748 \end{Bmatrix}$$



Barre isolée aux extrémités

$x = 0$ $\qquad\qquad$ $x = a$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 \qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial x}(a,t) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2};\ 0 < x < a,\ 0 \le t \le T$$

$$u(x,0) = f(x), \qquad 0 < x < a$$

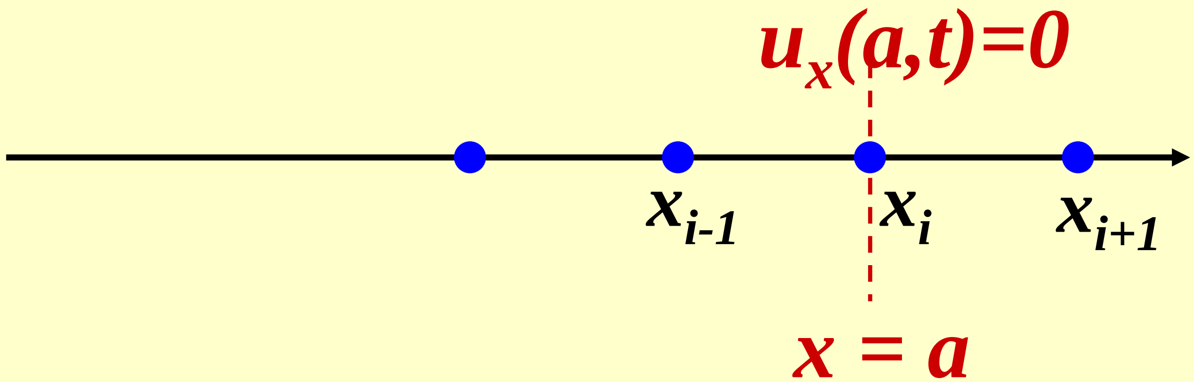
$$\begin{cases} u_x(0,t) = 0 \\ u_x(a,t) = 0 \end{cases}, \qquad 0 \le t \le T$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Extrémité isolée

$$u_x(a,t) = \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{i+1} = u_{i-1}$$



$$u_i^{n+1} = ru_{i-1}^n + (1-2r)u_i^n + ru_{i+1}^n$$

$$= \boxed{2ru_{i-1}^n + (1-2r)u_i^n}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Schéma de Richardson

$$\frac{1}{2\Delta t}(u_i^{n+1} - u_i^{n-1}) = \frac{c}{\Delta x^2}(u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n)$$

Instable!

Schéma de Dufort-Frankel

$$u_i^n = \frac{1}{2}(u_i^{n-1} + u_i^{n+1})$$

$$\frac{1}{2\Delta t}(u_i^{n+1} - u_i^{n-1}) = \frac{c}{\Delta x^2}(u_{i-1}^n - (u_i^{n-1} + u_i^{n+1}) + u_{i+1}^n)$$

Stable!, mais…

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

FIN.........................

M. Reggio