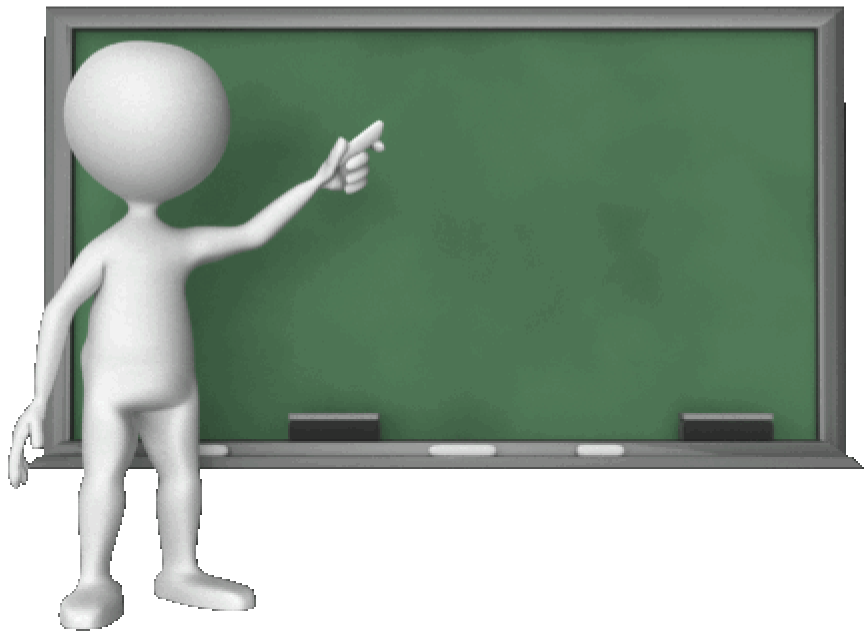
MEC6215

Automne 2021

Sébastien Leclaire/Marcelo Reggio

Génie Mécanique



Équations différentielles ordinaires

EDOs

Équations différentielles ordinaires

- Obtenir une fonction (la solution) à partir d'une équation définie par des dérivées de la fonction

- "Ordinaire": toutes les dérivées sont par rapport à une seule variable

M. Reggio

Deux catégories

PROBLÈMES AUX **CONDITIONS INITIALES**

PROBLÈMES AVEC **CONDITIONS AUX LIMITES**

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Problème aux valeurs initiales

Pour un problème aux **valeurs initiales**, les conditions sont spécifiées pour **une seule valeur** de la variable indépendante.

.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Problème aux valeurs aux frontières

Pour un problème aux valeurs aux frontières les conditions sont spécifiées pour **au moins deux valeurs** de la variable indépendante.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Nomenclature

Une équation différentielle de premier ordre ayant $\boldsymbol{y}$ par variable **dépendante** et $\boldsymbol{t}$ comme variable **indépendante** est écrite comme:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Formulation des PVI

La solution de $\dfrac{dy}{dt} = f(t, y)$ n'est pas unique

On doit spécifier des conditions initiales

$$y(t_0) = f(y_0)$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Exemple classique PVI

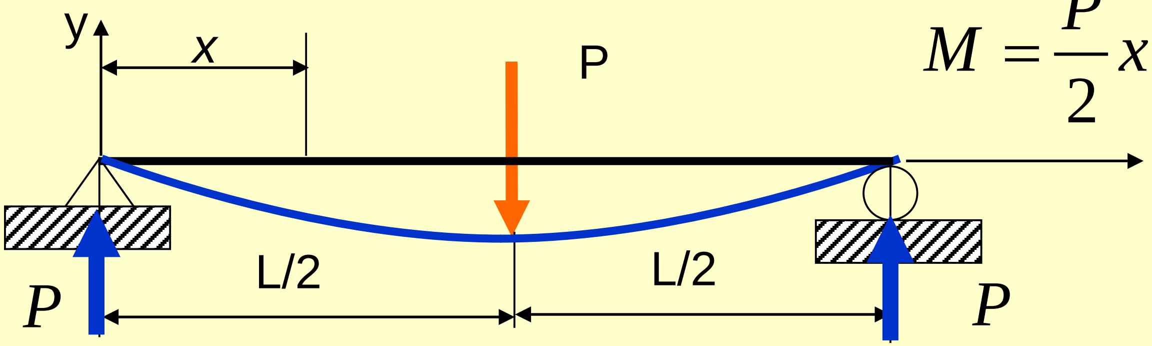
$$\frac{dy}{dt} = y \qquad y_0 = y(t_0)$$

$$\boxed{y(t_0) = y_0 e^{t}}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Exemple PVF



$$M = \frac{P}{2}x \qquad 0 < x < \frac{L}{2}$$

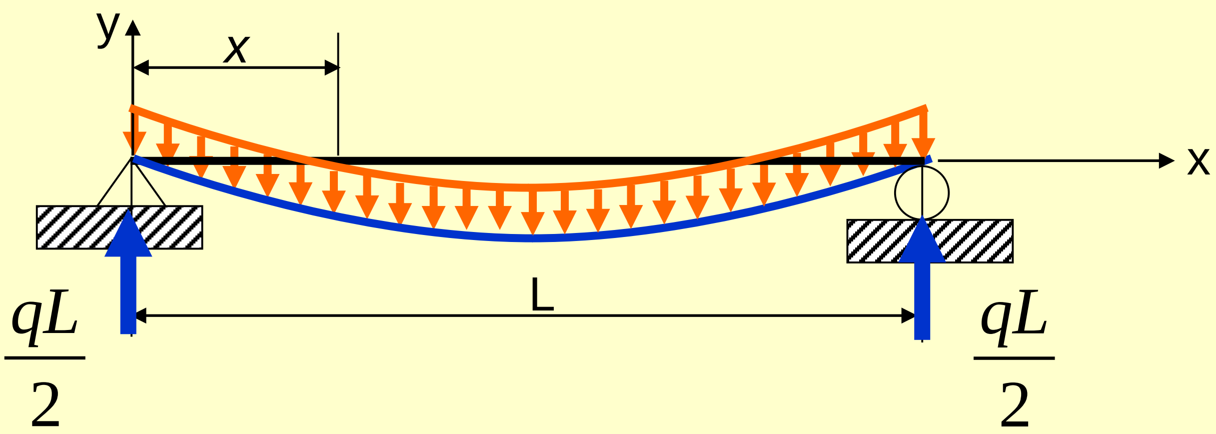
$$\frac{P}{2} \qquad \frac{P}{2}$$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = \boxed{\frac{P}{2}x}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

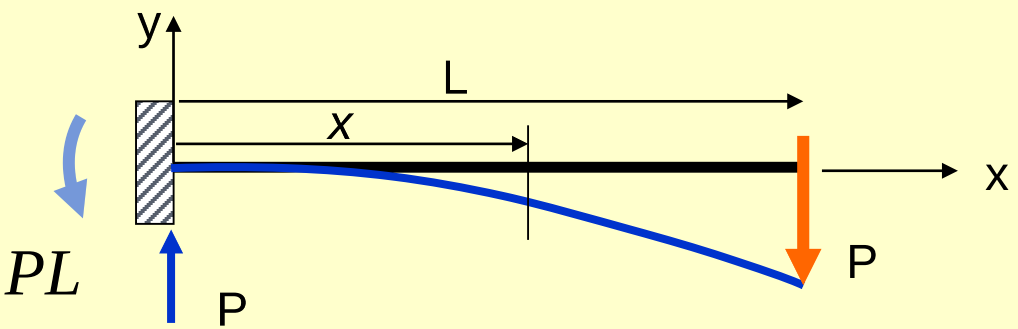
$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M$$



$$M = \frac{qL}{2}x - qx\frac{x}{2}$$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = \boxed{\frac{qx(L-x)}{2}}$$

Exemple PVF



$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=M$$

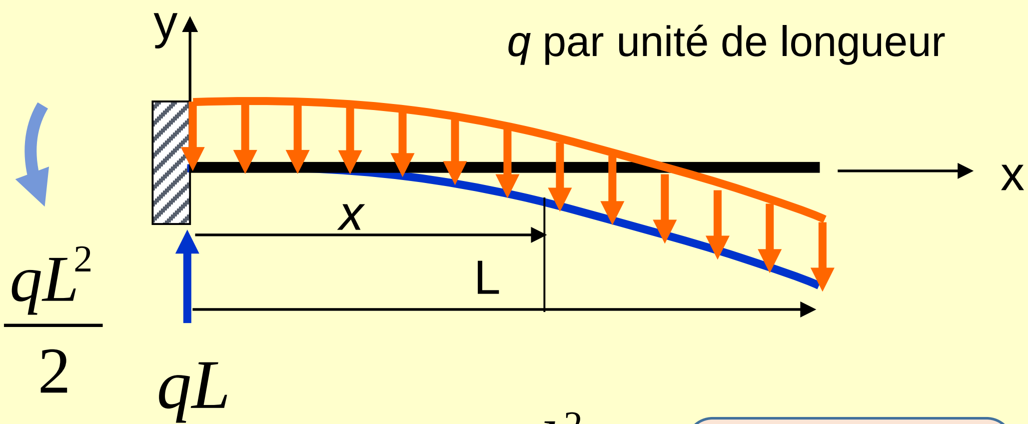
$$M=-PL+Px$$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=\boxed{-PL+Px}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M$$



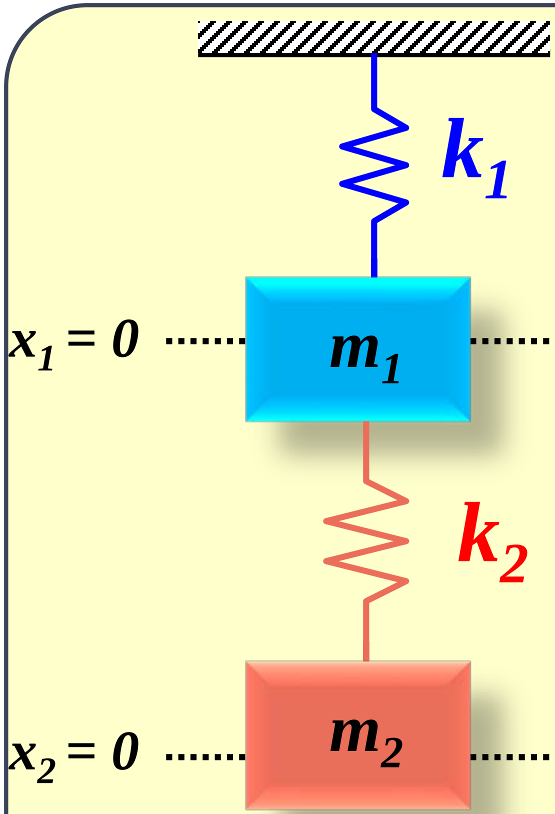
$$M = -\frac{q}{2}\left(L-x\right)^2$$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = \boxed{-\frac{q}{2}\left(L-x\right)^2}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Masses + ressorts



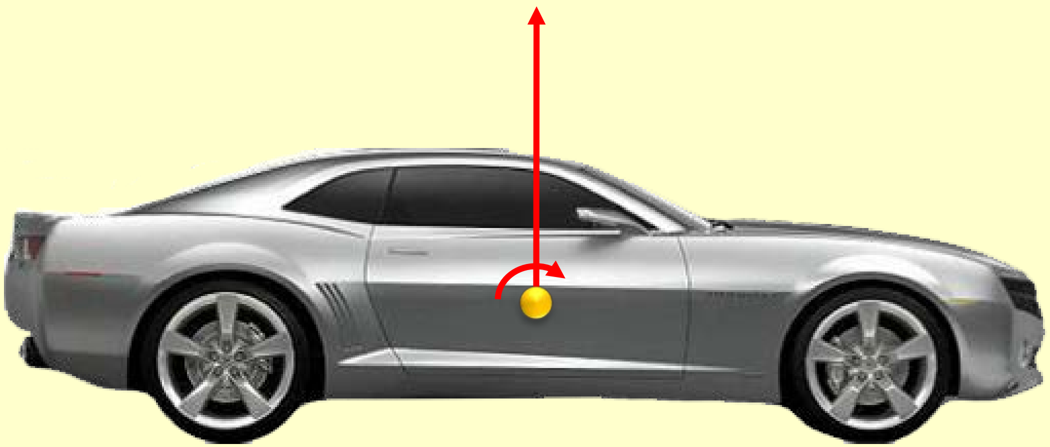
$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1)$$

$$m_2\ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1)$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

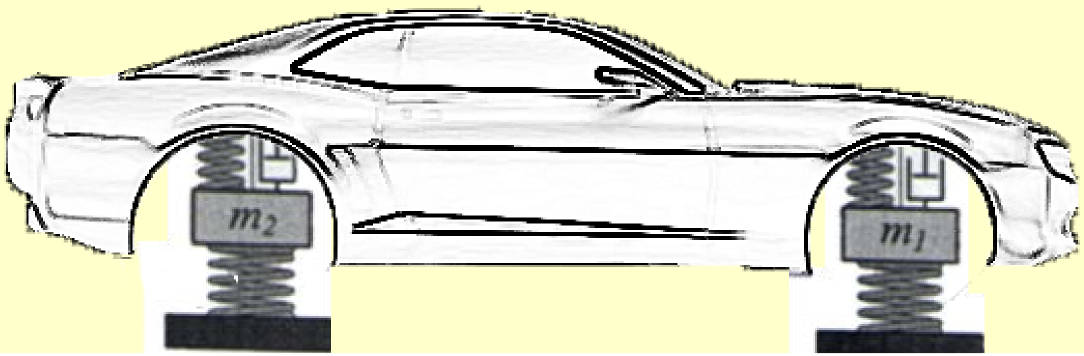
M. Reggio

Oscillation d'une voiture



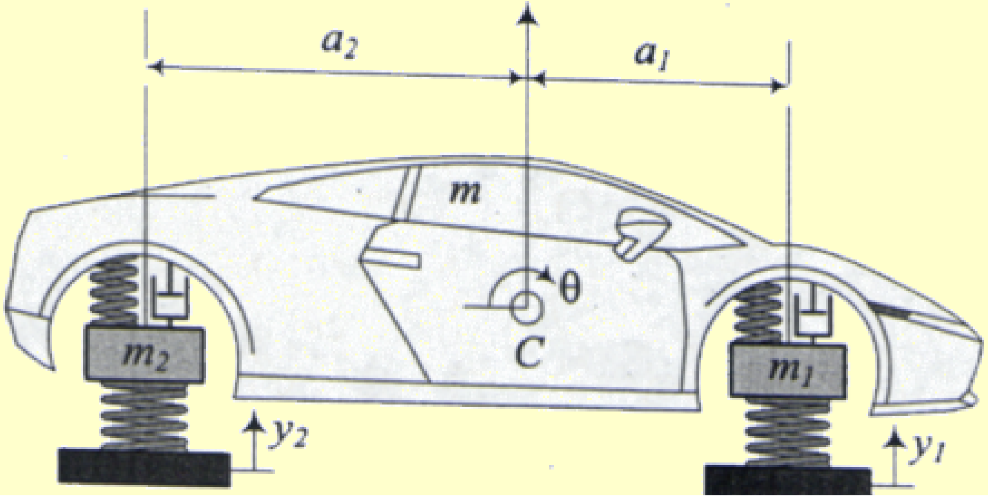
ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio



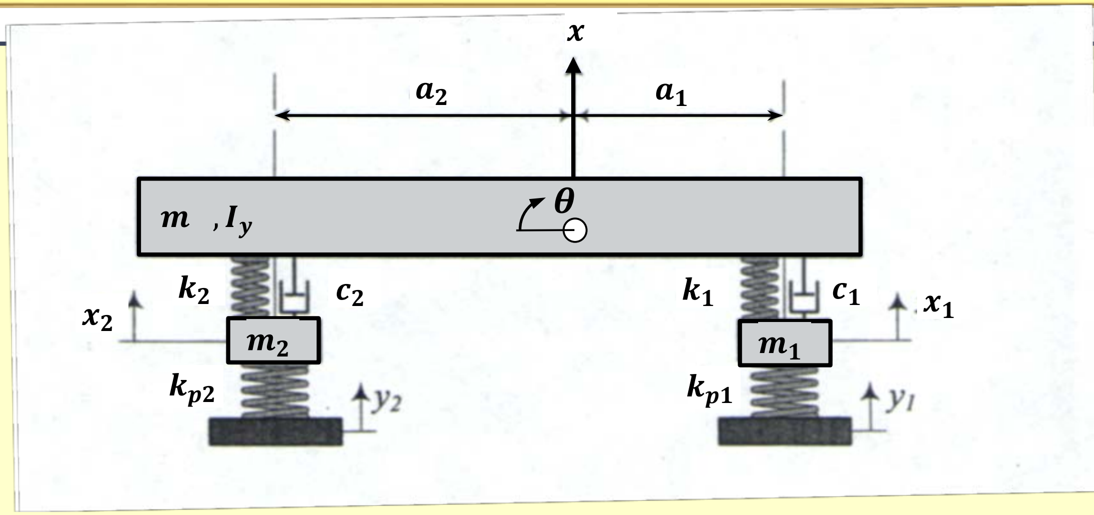
ÉCOLE
POLYTECHNIQUE
MONTRÉAL

M. Reggio



ÉCOLE
POLYTECHNIQUE
MONTRÉAL

M. Reggio

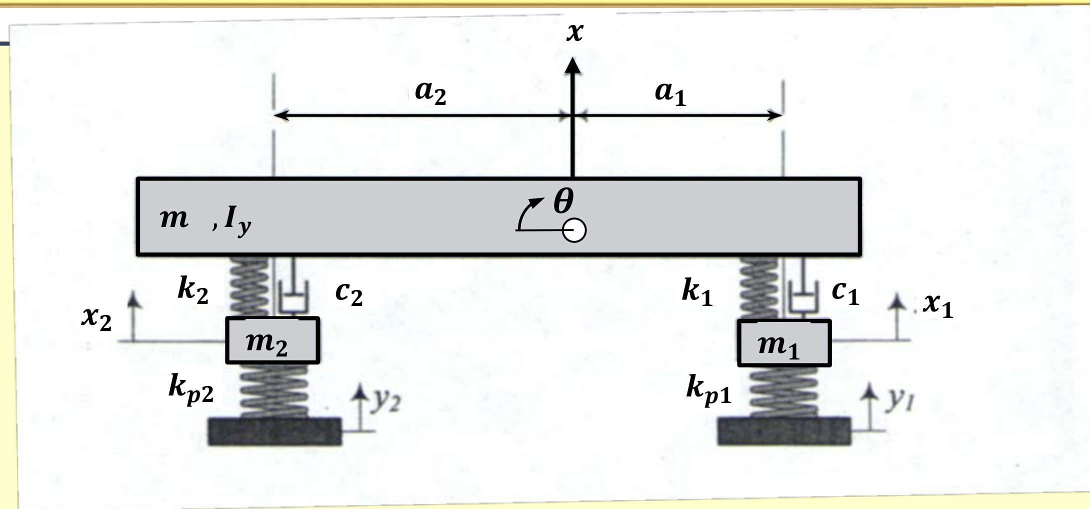


$$m\ddot{x}+c_1(\dot{x}-\dot{x}_1-a_1\dot{\theta})+c_2(\dot{x}-\dot{x}_2+a_2\dot{\theta})$$
$$+k_1(x-x_1-a_1\theta)+k_2(x-x_2+a_2\theta)=0$$

$$I_z\ddot{\theta}-a_1c_1(\dot{x}-\dot{x}_1-a_1\dot{\theta})+a_2c_2(\dot{x}-\dot{x}_2+a_2\dot{\theta})$$
$$-a_1k_1(x-x_1-a_1\theta)+a_2k_2(x-x_2+a_2\theta)=0$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio



$$m_1\ddot{x}_1 - c_1(\dot{x} - \dot{x}_1 - a_1\dot{\theta}) + k_{p1}(x_1 - y_1) - k_1(x - x_1 - a_1\theta) = 0$$

$$m_2\ddot{x}_2 - c_2(\dot{x} - \dot{x}_2 + a_2\dot{\theta}) + k_{p2}(x_2 - y_2) - k_1(x - x_2 + a_2\theta) = 0$$

$$m_1\ddot{x} + c_1(\dot{x} - \dot{x}_1 - a_1\dot{\theta}) + c_2(\dot{x} - \dot{x}_2 + a_2\dot{\theta})$$

$$+ k_1(x - x_1 - a_1\theta) + k_2(x - x_2 + a_2\theta) = 0 = 0$$

$$I_z\ddot{\theta} - a_1c_1(\dot{x} - \dot{x}_1 - a_1\dot{\theta}) + a_2c_2(\dot{x} - \dot{x}_2 + a_2\dot{\theta})$$

$$- a_1k_1(x - x_1 - a_1\theta) + a_2k_2(x - x_2 + a_2\theta) = 0$$

$$m_1\ddot{x}_1 - c_1(\dot{x} - \dot{x}_1 - a_1\dot{\theta}) + k_{p1}(x_1 - y_1) - k_1(x - x_1 - a_1\theta) = 0$$

$$m_2\ddot{x}_2 - c_2(\dot{x} - \dot{x}_2 + a_2\dot{\theta}) + k_{p2}(x_2 - y_2) - k_1(x - x_2 + a_2\theta) = 0$$

M. Reggio

ÉCOLE
POLYTECHNIQUE
MONTRÉAL

M. Reggio

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} m & & & \\ & I_z & & \\ & & m_1 & \\ & & & m_2 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & a_2c_2 - a_1c_1 & -c_1 & -c_2 \\ a_2c_2 - a_1c_1 & c_1a_1^2 + c_2a_2^2 & a_1c_1 & -a_2c_2 \\ -c_1 & a_1c_1 & c_1 & 0 \\ -c_2 & -a_2c_2 & 0 & c_2 \end{bmatrix}$$

$$m\ddot{x} + c_1(\dot{x} - \dot{x}_1 - a_1\dot{\theta}) + c_2(\dot{x} - \dot{x}_2 + a_2\dot{\theta})$$
$$+ k_1(x - x_1 - a_1\theta) + k_2(x - x_2 +_2 \theta) = 0$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

$$x = \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & a_2 k_2 - a_1 k_1 & -k_1 & -k_2 \\ a_2 k_2 - a_1 k_1 & k_1 a_1^2 + k_2 a_2^2 & a_1 k_1 & -a_2 k_2 \\ -k_1 & a_1 k_1 & k_1 + k_{p1} & 0 \\ -k_2 & -a_2 k_2 & 0 & k_2 + k_{p2} \end{bmatrix}$$

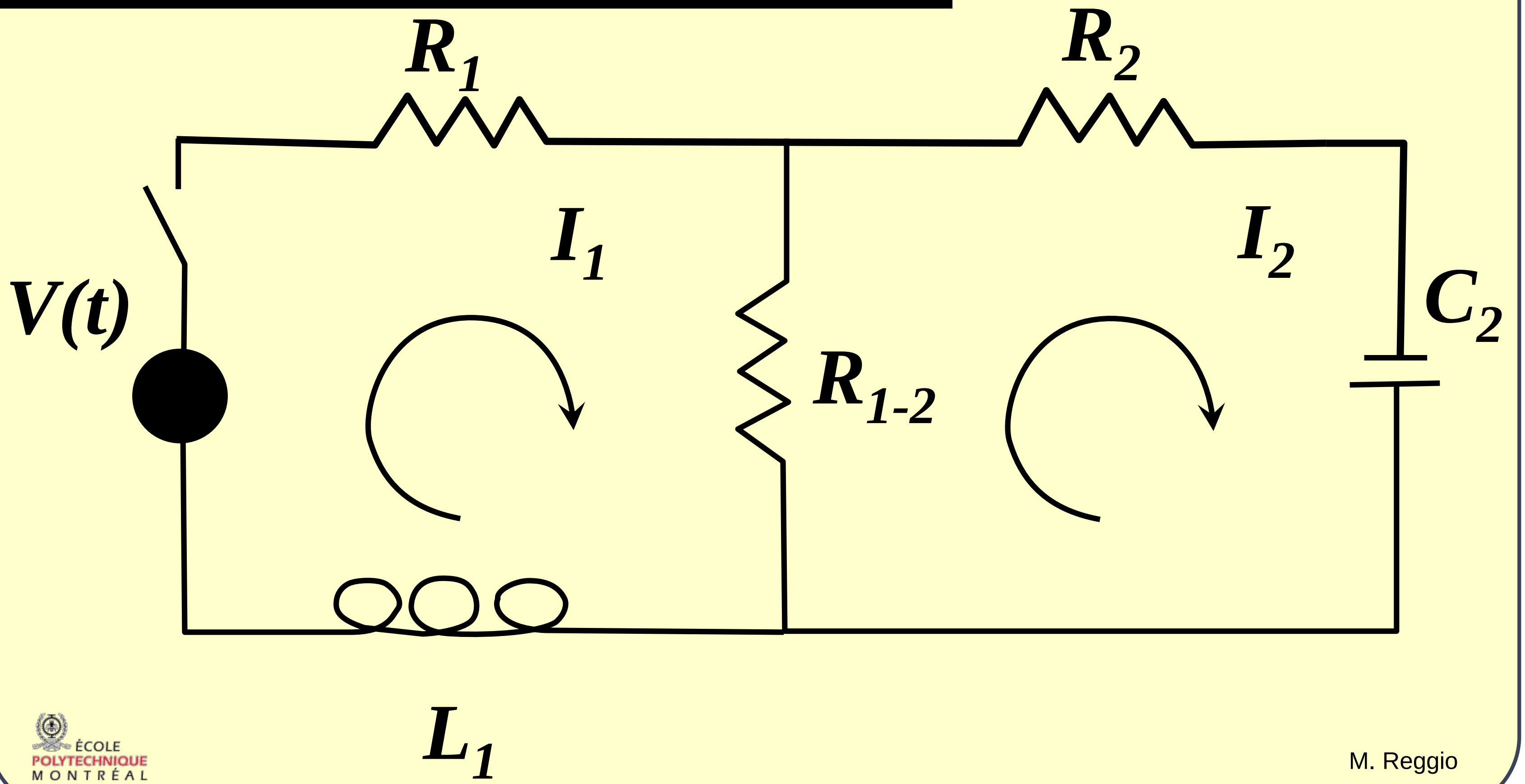
$$f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ y_1 k_{p1} \\ y_2 k_{p2} \end{bmatrix}$$

$$m\ddot{x} + c_1(\dot{x} - \dot{x}_{1} - a_1\dot{\theta}) + c_2(\dot{x} - \dot{x}_{2} + a_2\dot{\theta})$$
$$+ k_1(x - x_1 - a_1\theta) + k_2(x - x_2 +_2 \theta) = 0$$

$$L_1 \frac{dI_1}{dt} + R_1 I_1 + R_{1-2}\left(I_1 - I_2\right) = V(t)$$

$$R_{1-2}\left(I_2 - I_1\right) + R_2 I_2 + \frac{I_2}{C_2} = 0$$

Taylor

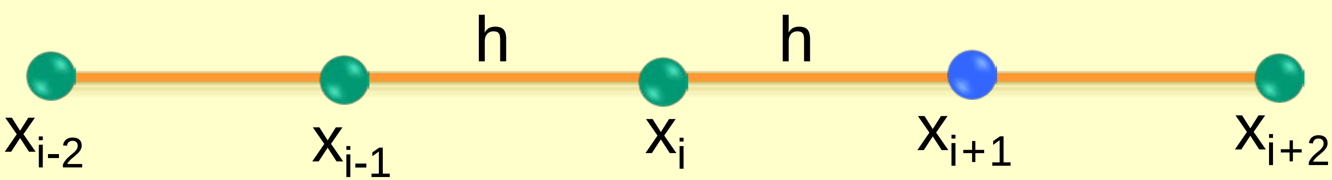


ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Développement de Taylor

$$y_{i+1} = y_i + \left.\frac{dy}{dx}\right|_i h + \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_i \frac{h^2}{2} + \ldots$$



Développement de Taylor

$$y(x+h) \approx y(x) + \frac{h}{1!}y'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) + \cdots$$

$$y(x+h) \approx \underbrace{y(x) + \frac{h}{1!}y'(x)}_{\text{Approximation d'ordre 1}} + \underbrace{O(h^2)}_{\text{Erreur d'ordre 2}}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

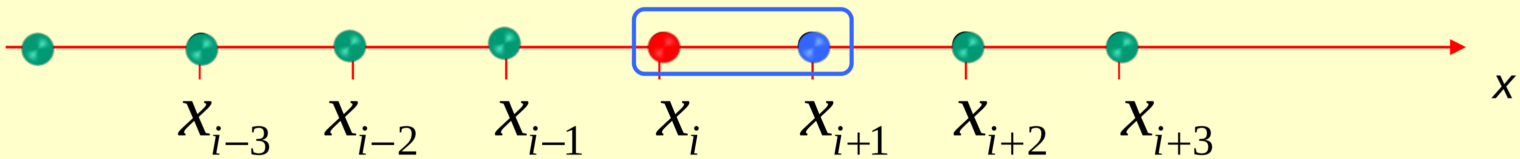
M. Reggio

Développement de Taylor

$$y_{i+1} = y_i + \left.\frac{dy}{dx}\right|_i (\Delta x) + \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_i \frac{(\Delta x)^2}{2} + \cdots + \left.\frac{d^ny}{dx^n}\right|_i \frac{(\Delta x)^n}{n!}$$

$$y_{i-1} = y_i - \left.\frac{dy}{dx}\right|_i (\Delta x) + \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_i \frac{(\Delta x)^2}{2} + \cdots + (-1)\left.\frac{d^ny}{dx^n}\right|_i \frac{(\Delta x)^n}{n!}$$

Différences en avant



$$y_{i+1} \approx y_i + \left.\frac{dy}{dx}\right|_i (\Delta x) + \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_i \frac{(\Delta x)^2}{2} + \cdots$$

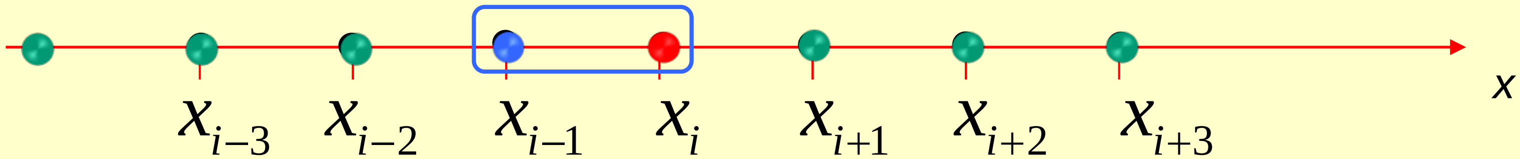
$$\Rightarrow \quad \left.\frac{dy}{dx}\right| \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{(\Delta x)} - \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_i \frac{(\Delta x)}{2} + O(\Delta x^2)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\left.\frac{dy}{dx}\right|_i \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{(\Delta x)} + O(\Delta x)} \qquad (\Delta x = x_{i+1} - x_i)$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Différences en arrière

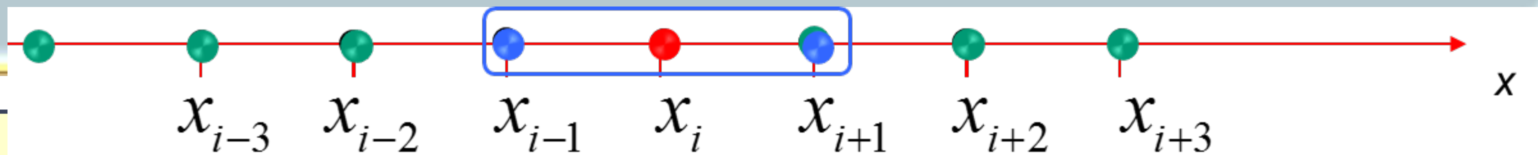


$$y_{i-1} \approx y_i + \left.\frac{dy}{dx}\right|_i (-\Delta x) + \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_i \frac{(\Delta x)^2}{2} + \cdots$$

$$\Rightarrow \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right|_i \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{(\Delta x)} + \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_i \frac{(\Delta x)}{2} + O(\Delta x)^2$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\left.\frac{dy}{dx}\right|_i \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{(\Delta x)} + O(\Delta x)}$$

Différences centrées



$$y_{i+1} \approx y_i + \left.\frac{dy}{dx}\right|_i (\Delta x) + \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_i \frac{(\Delta x)^2}{2} + \left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_i \frac{(\Delta x)^3}{6} + \cdots$$

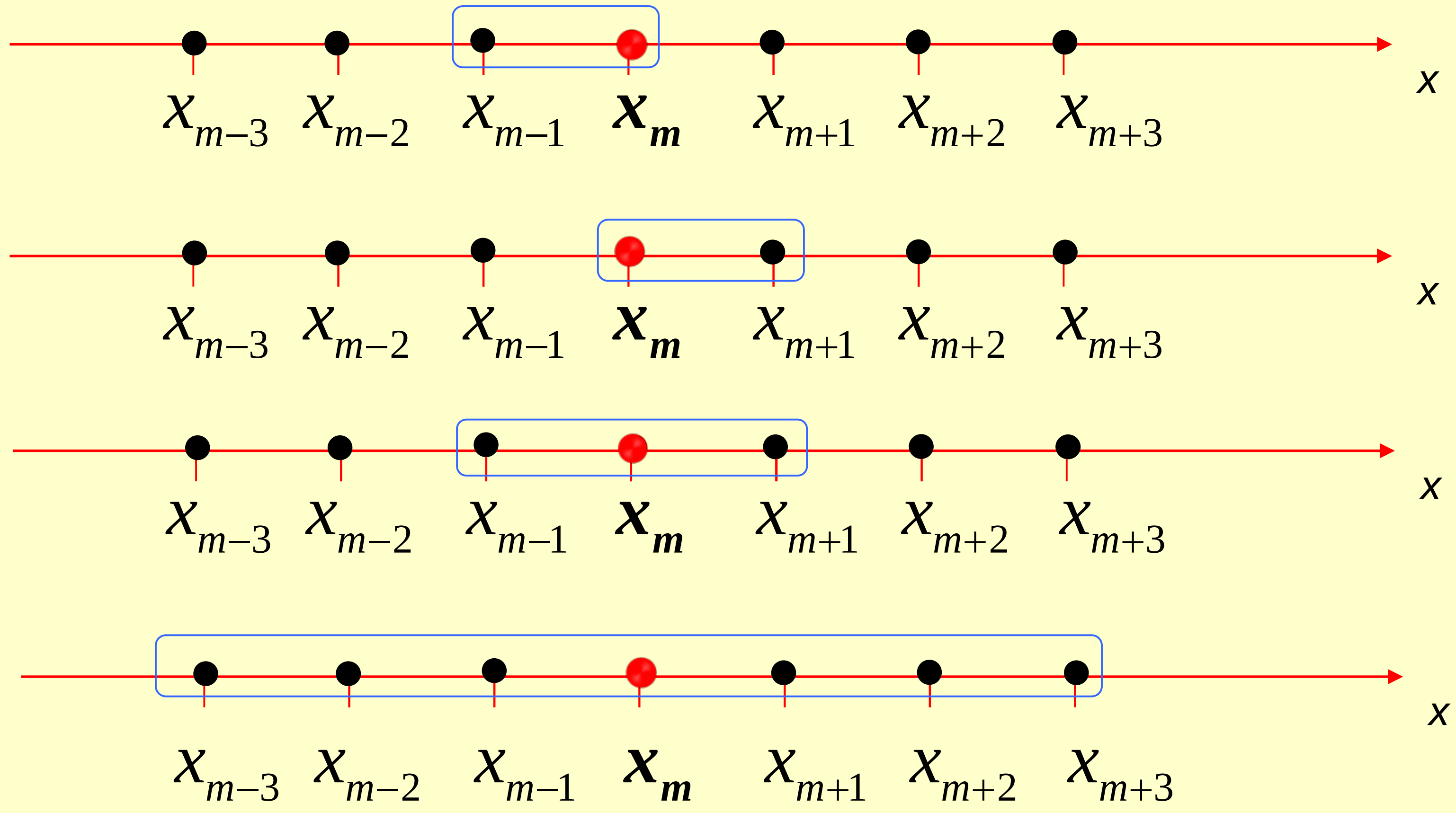
$$y_{i-1} \approx y_i - \left.\frac{dy}{dx}\right|_i (\Delta x) + \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_i \frac{(\Delta x)^2}{2} - \left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_i \frac{(\Delta x)^3}{6} + \cdots$$

$$\boldsymbol{y_{i+1} - y_{i-1}} \approx 2\left.\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}}\right|_i (\Delta x) + \left.\frac{\boldsymbol{d^3y}}{\boldsymbol{dx^3}}\right|_i \frac{(\Delta x)^3}{3} + \cdots$$

$$\boxed{\left.\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}}\right|_i \approx \frac{\boldsymbol{y_{i+1} - y_{i-1}}}{2(\Delta x)} + O(\Delta x)^2}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio



ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Formules

D$_-$ $$\frac{dy}{dx} = \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

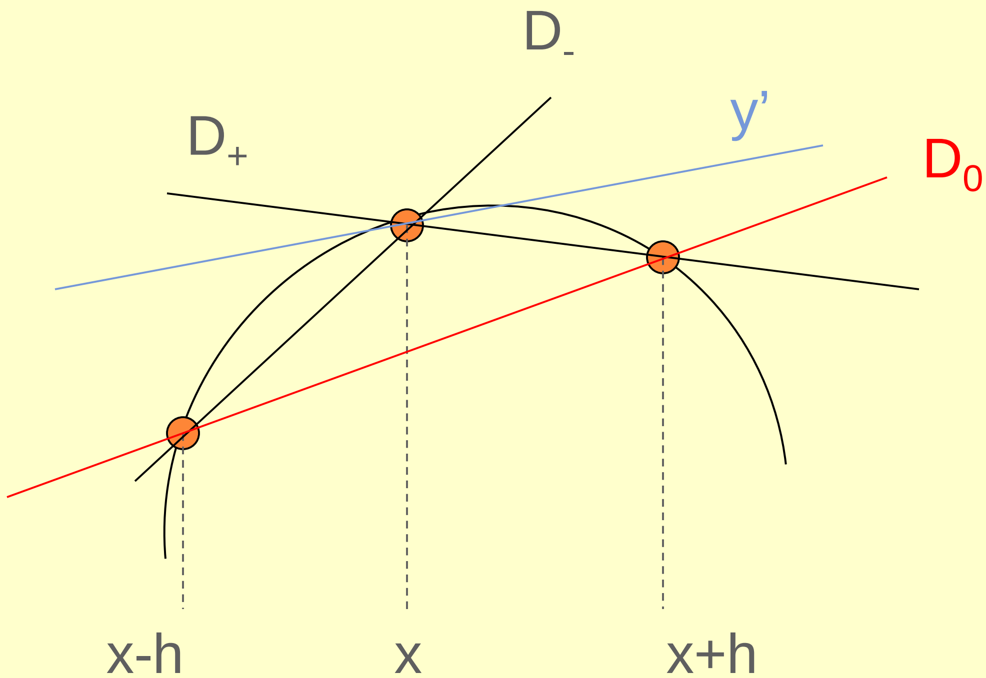
D$_+$ $$\frac{dy}{dx} = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

D$_0$ $$\frac{dy}{dx} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

D$_3$ $$\frac{dy}{dx} = \frac{-y_{i+2} + 8y_{i+!} - 8y_{i-1} + y_{i-2}}{12\Delta x} + O(\Delta x^4)$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio



ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

L’erreur et l’ordre

$$u(x) = \sin(x) \qquad x = 1$$

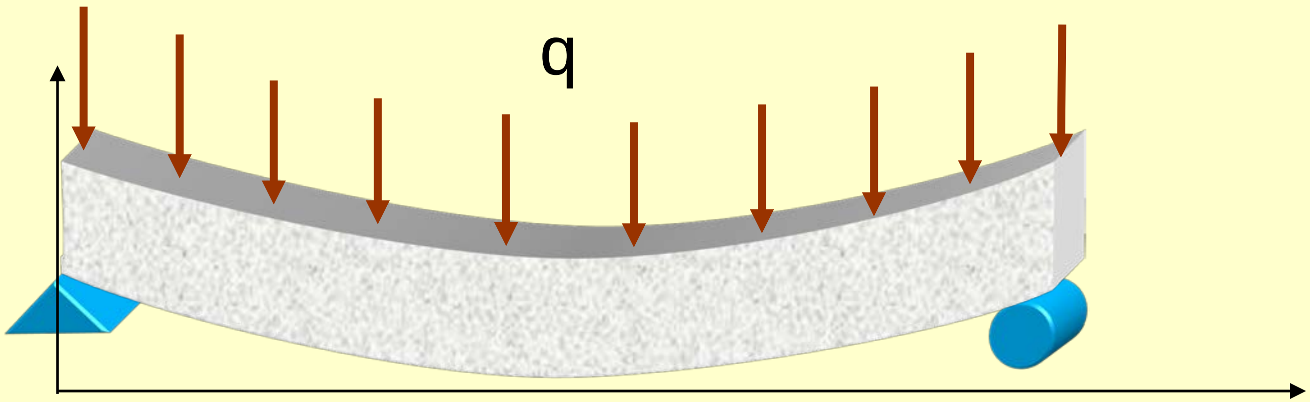
$$u'(1) = \cos(1)$$

1.0000e-01	4.2939e-02	-4.1138e-02	9.0005e-04	1.7989e-06
5.0000e-02	2.1257e-02	-2.0807e-02	2.2510e-04	1.1253e-07
2.5000e-02	1.0574e-02	-1.0462e-02	5.6280e-05	7.0347e-09
1.2500e-02	5.2732e-03	-5.2451e-03	1.4070e-05	4.3969e-10
	2	2	4	16

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Poutre appuyée sur deux extrémités



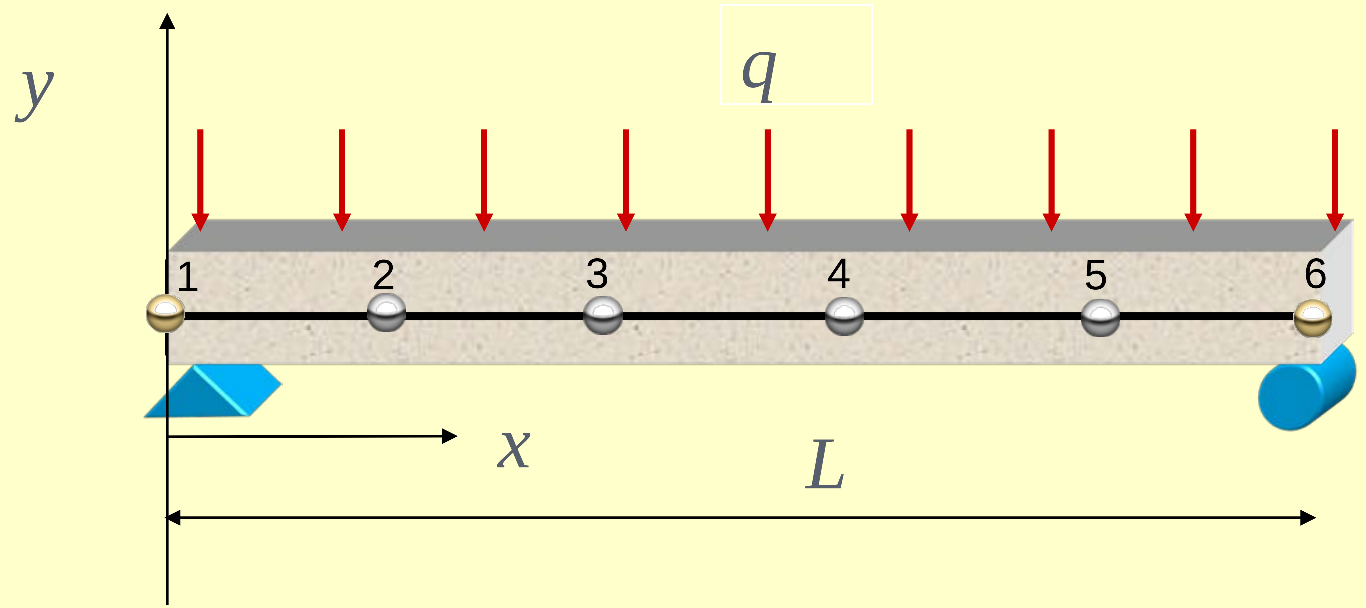
$\boldsymbol{y} = 0$ $\boldsymbol{y} = 0$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{qx}{2EI}(x - L)$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Poutre appuyée sur deux extrémités

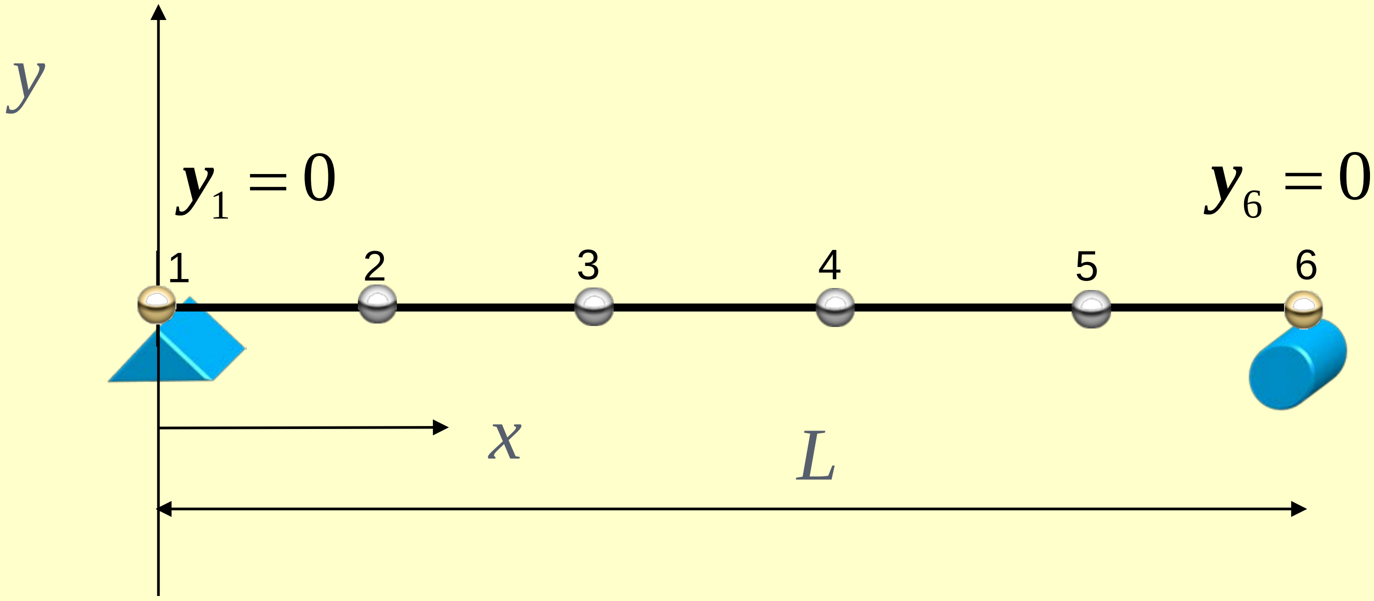


$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{qx}{2EI}(x - L)$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

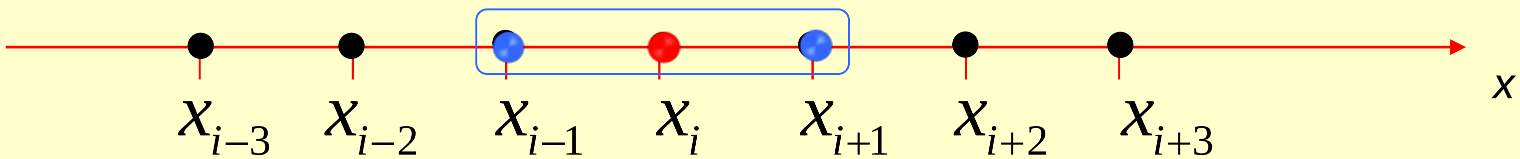
Poutre appuyée sur deux extrémités



ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Différence centrée



$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{qx}{2EI}(x - L)$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

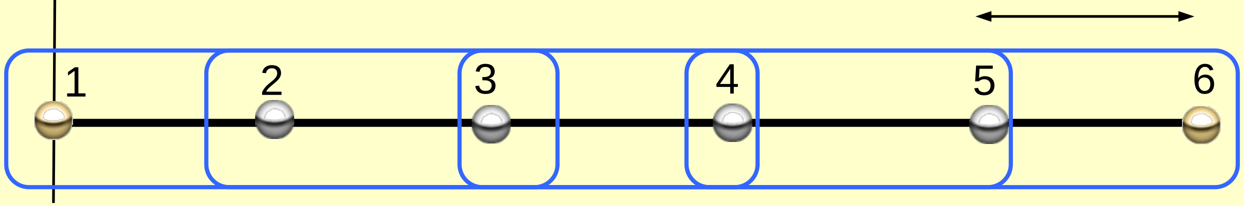
M. Reggio

Poutre appuyée sur deux extrémités

y

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_i = \frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

$\Delta x = 0.2L$



2 $$\frac{y_3 - 2y_2 + \cancel{y_1}}{(0.2L)^2} = \frac{q \times 0.2L}{2EI}(-0.8L)$$

3 $$\frac{y_4 - 2y_3 + y_2}{(0.2L)^2} = \frac{q \times 0.4L}{2EI}(-0.6L)$$

4 $$\frac{y_5 - 2y_4 + y_3}{(0.2L)^2} = \frac{q \times 0.6L}{2EI}(-0.4L)$$

5 $$\frac{\cancel{y_6} - 2y_5 + y_4}{(0.2L)^2} = \frac{q \times 0.8L}{2EI}(-0.2L)$$

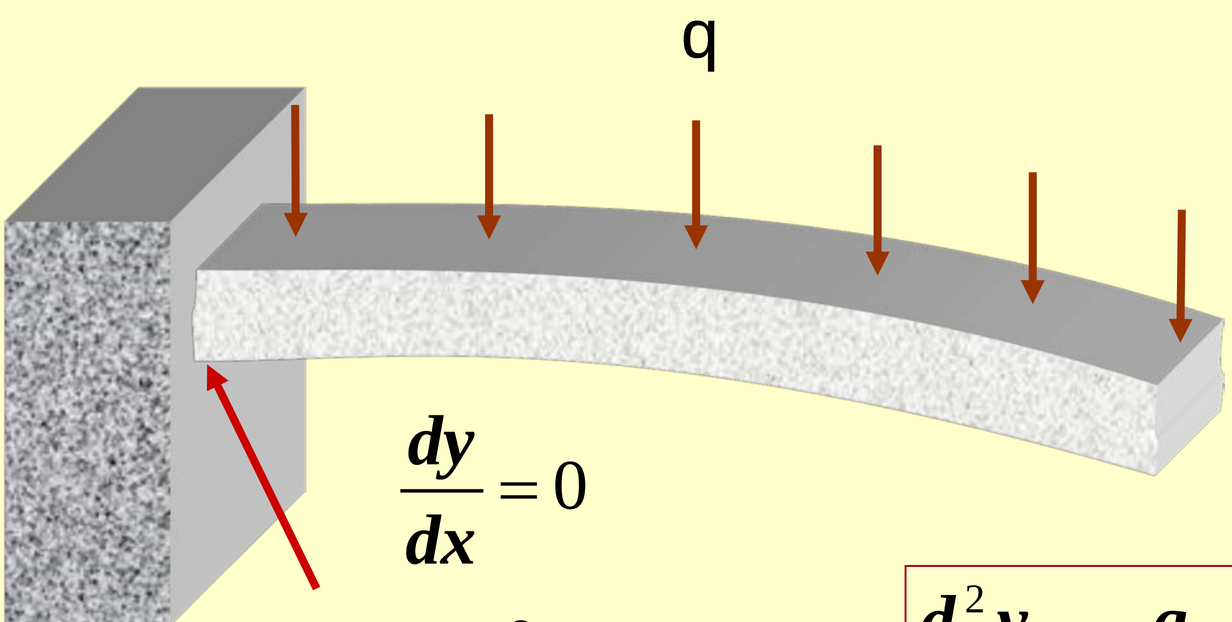
$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{qx}{2EI}(x-L)}$$

M. Reggio

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Poutre en porte-à-faux



$$\frac{dy}{dx} = 0$$

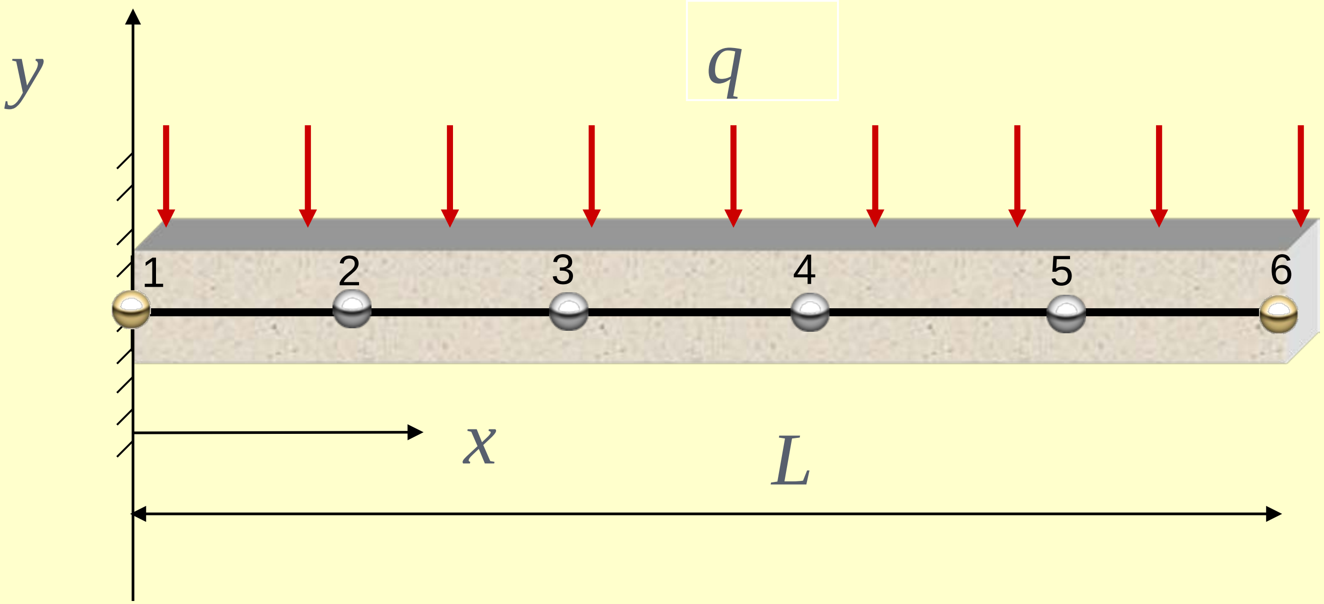
$$y = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{q}{2EI}\left(L - x\right)^2}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Poutre en porte-à-faux

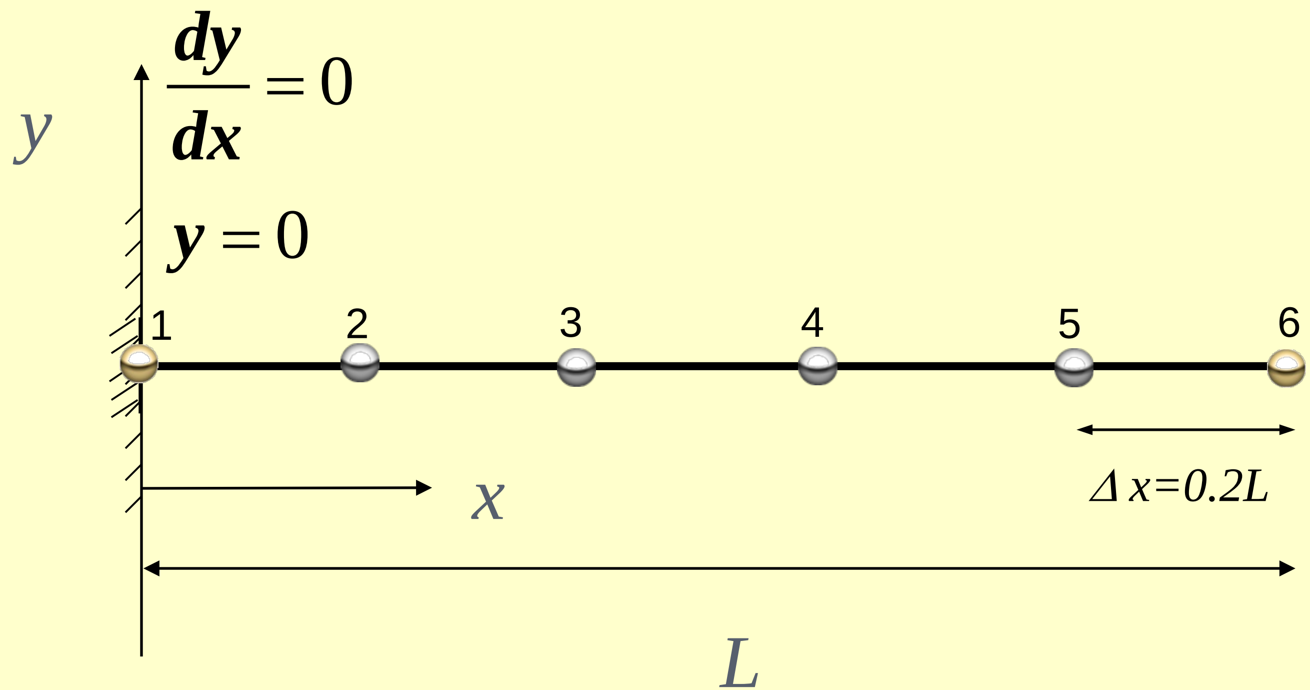


$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q}{2EI}(L - x)^2$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

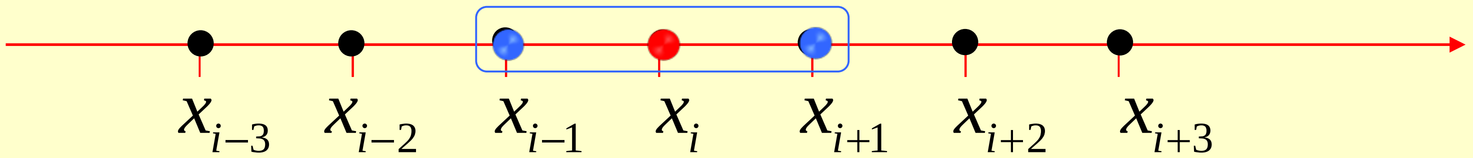
Poutre en porte-à-faux



ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Différences centrées



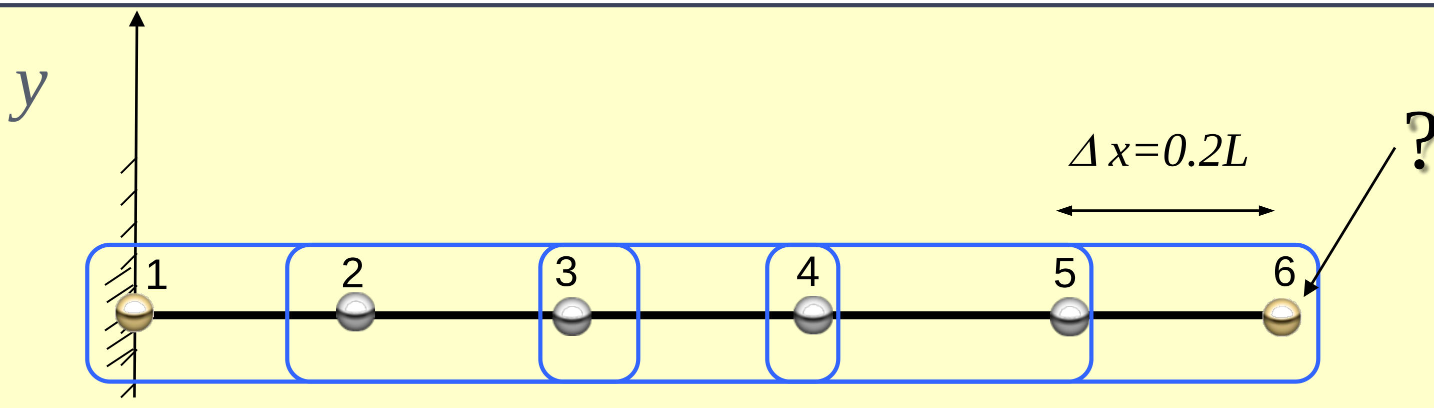
$$\boxed{\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)}$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q}{2EI}(L-x)^2}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Poutre en porte-à-faux



2 $$\frac{y_3 - 2y_2 + \cancel{y_1}}{(0.2L)^2} = \frac{q}{2EI}(0.8L)^2$$

3 $$\frac{y_4 - 2y_3 + y_2}{(0.2L)^2} = \frac{q}{2EI}(0.6L)^2$$

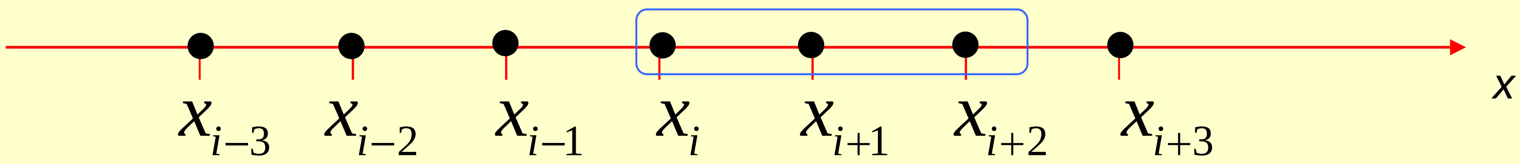
4 $$\frac{y_5 - 2y_4 + y_3}{(0.2L)^2} = \frac{q}{2EI}(0.4L)^2$$

5 $$\frac{y_6 - 2y_5 + y_4}{(0.2L)^2} = \frac{q}{2EI}(0.2L)^2$$

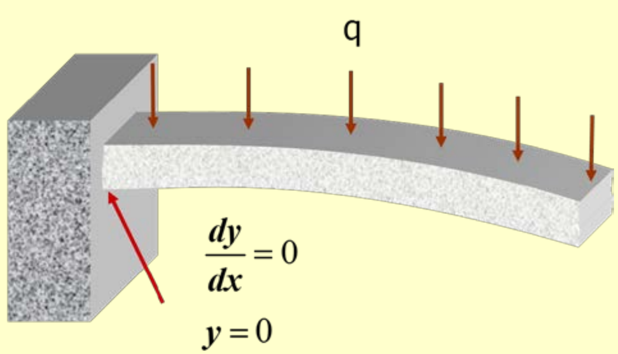
$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q}{2EI}(L - x)^2}$$

M. Reggio

Différences décentrées



$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-y_{i+2} + 4y_{i+1} - 3y_i}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)}$$

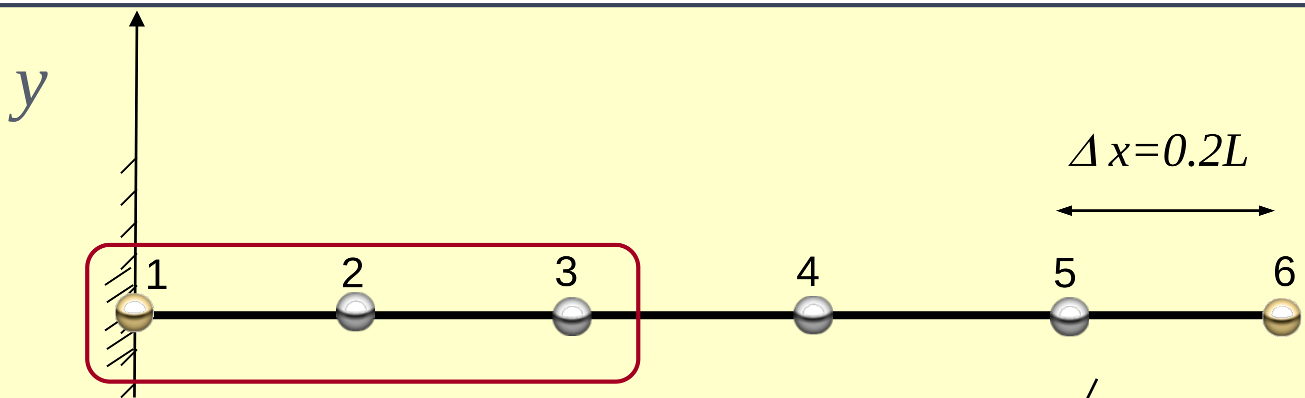


$$\boxed{\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Poutre en porte-à-faux



$$y_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{-y_3 + 4y_2 - 3\cancel{y_1}}{2\Delta x} = 0$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_1 = 0$$

$$\Downarrow$$

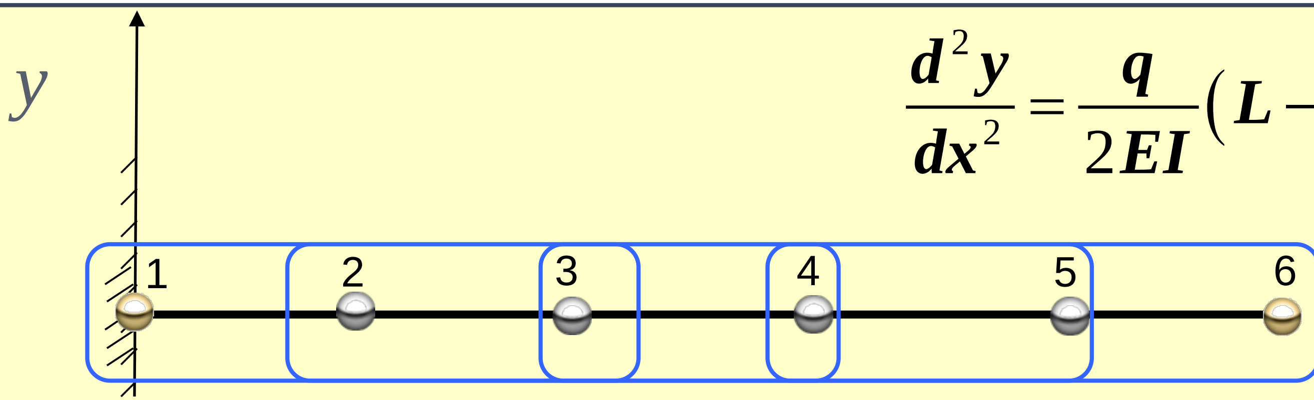
$$y_2 = \frac{y_3}{4}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Poutre en porte-à-faux

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q}{2EI}(L-x)^2$$



$$\frac{y_3 - 2y_2 + \cancel{y_1}}{(0.2L)^2} = \frac{q}{2EI}(0.8L)^2$$

$$y_2 = \frac{y_3}{4}$$

$$\frac{y_4 - 2y_3 + y_2}{(0.2L)^2} = \frac{q}{2EI}(0.6L)^2$$

$$\frac{y_5 - 2y_4 + y_3}{(0.2L)^2} = \frac{q}{2EI}(0.4L)^2$$

$$\frac{y_6 - 2y_5 + y_4}{(0.2L)^2} = \frac{q}{2EI}(0.2L)^2$$

Leonhard Euler 1707-1783

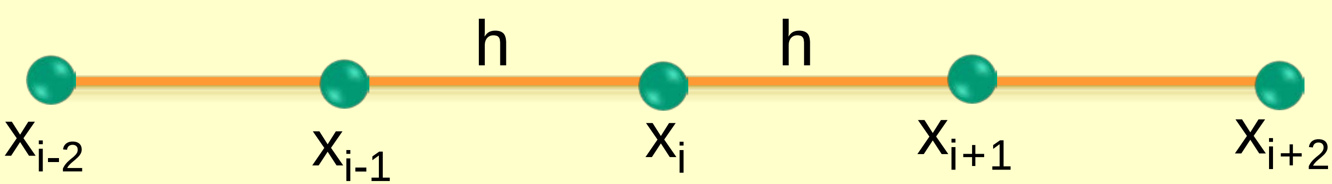
ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Méthode d'Euler PVI

S'appuie sur la série de ***Taylor***

$$y_{i+1} = y_i + \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{h^2}{2} + \ldots \Longrightarrow y_{i+1} = y_i + f_i h$$



ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Formule d'Euler

$$y_{i+1} = y_i + h \left.\frac{d\,y}{d\,x}\right|_i$$

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

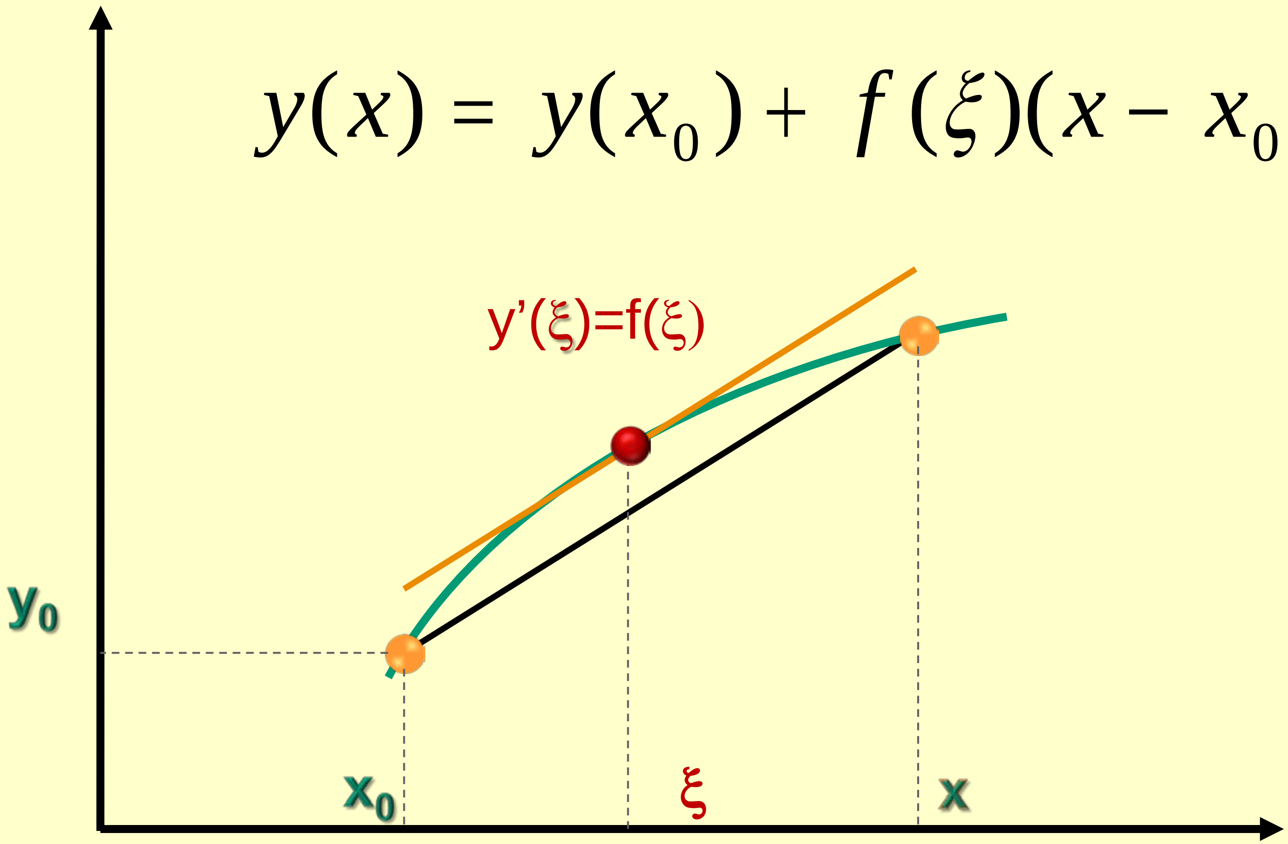
$$\boxed{y_{i+1} = y_i + f_i(x_i, y_i)h}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Expression exacte

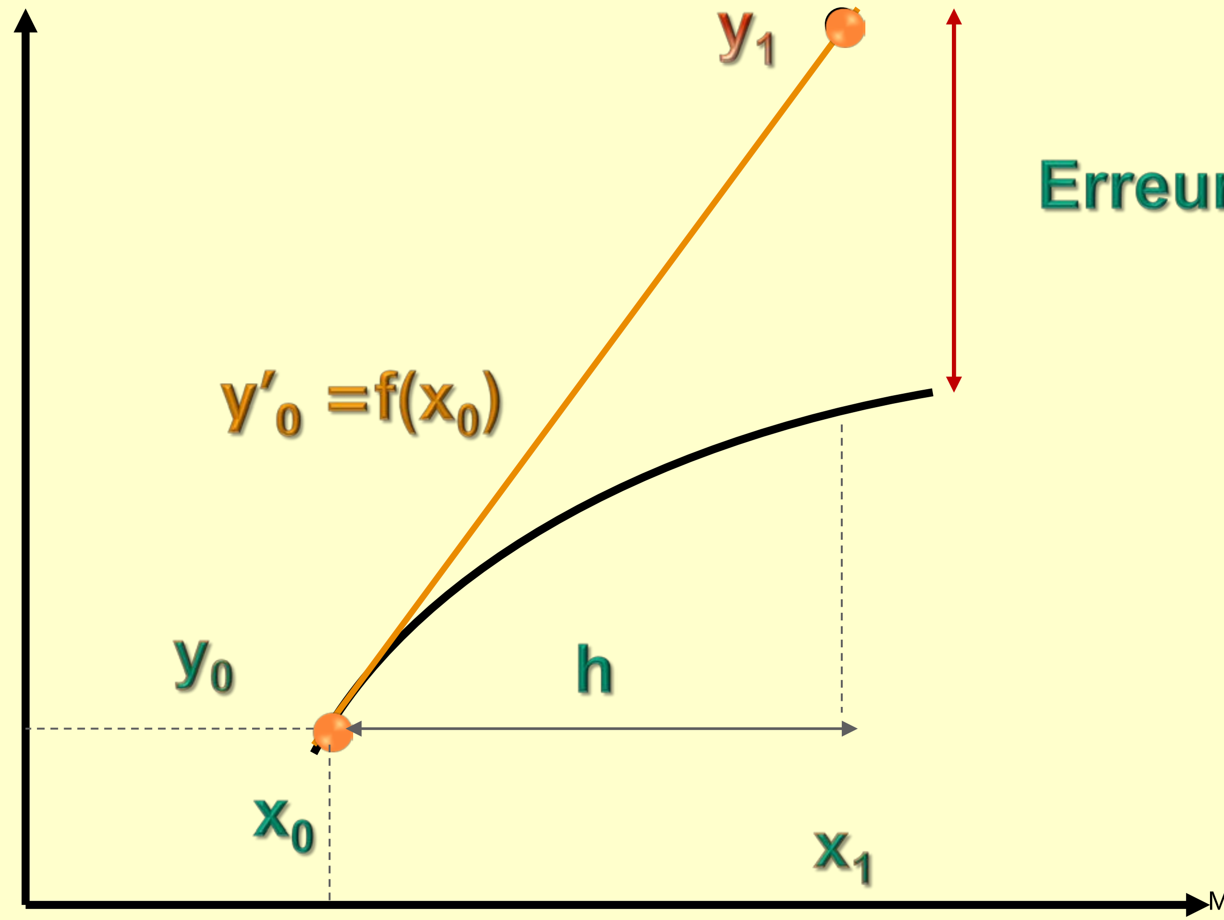
$$y(x) = y(x_0) + f(\xi)(x - x_0)$$



M. Reggio

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

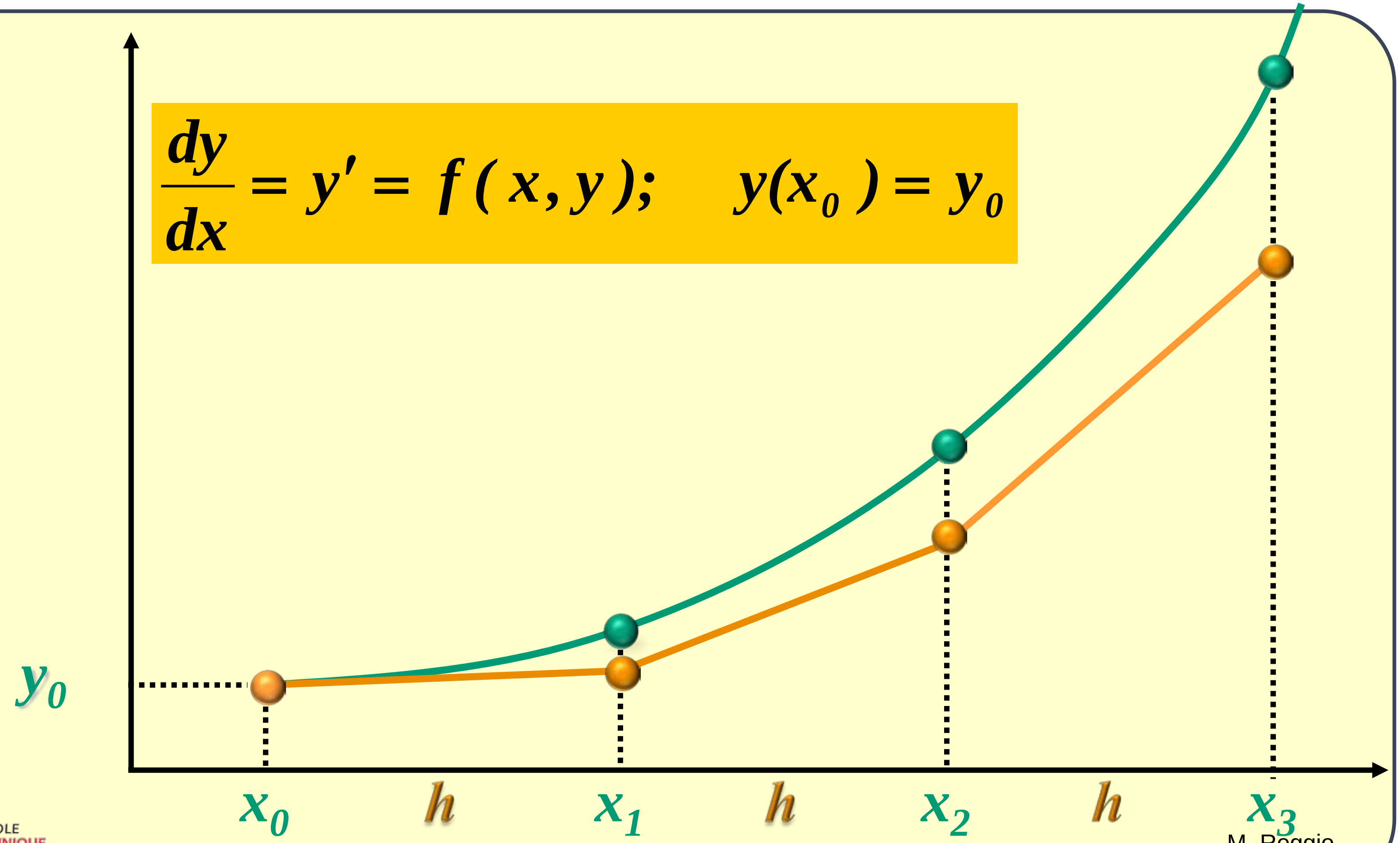
$$y_1 = y_0 + f(x_0)(x_1 - x_0)$$



ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

Évolution

$$\frac{dy}{dx} = y' = f(x, y); \qquad y(x_0) = y_0$$



M. Reggio

Interprétation Intégrale

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Interprétation Intégrale

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{dy}{dt} dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y) dt$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Interprétation Intégrale

$$y_{i+1} - y_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t,y)\,dt$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Interprétation Intégrale

$$y_{i+1} - y_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t_i, y_i)\,dt$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
M. Reggio

Interprétation Intégrale

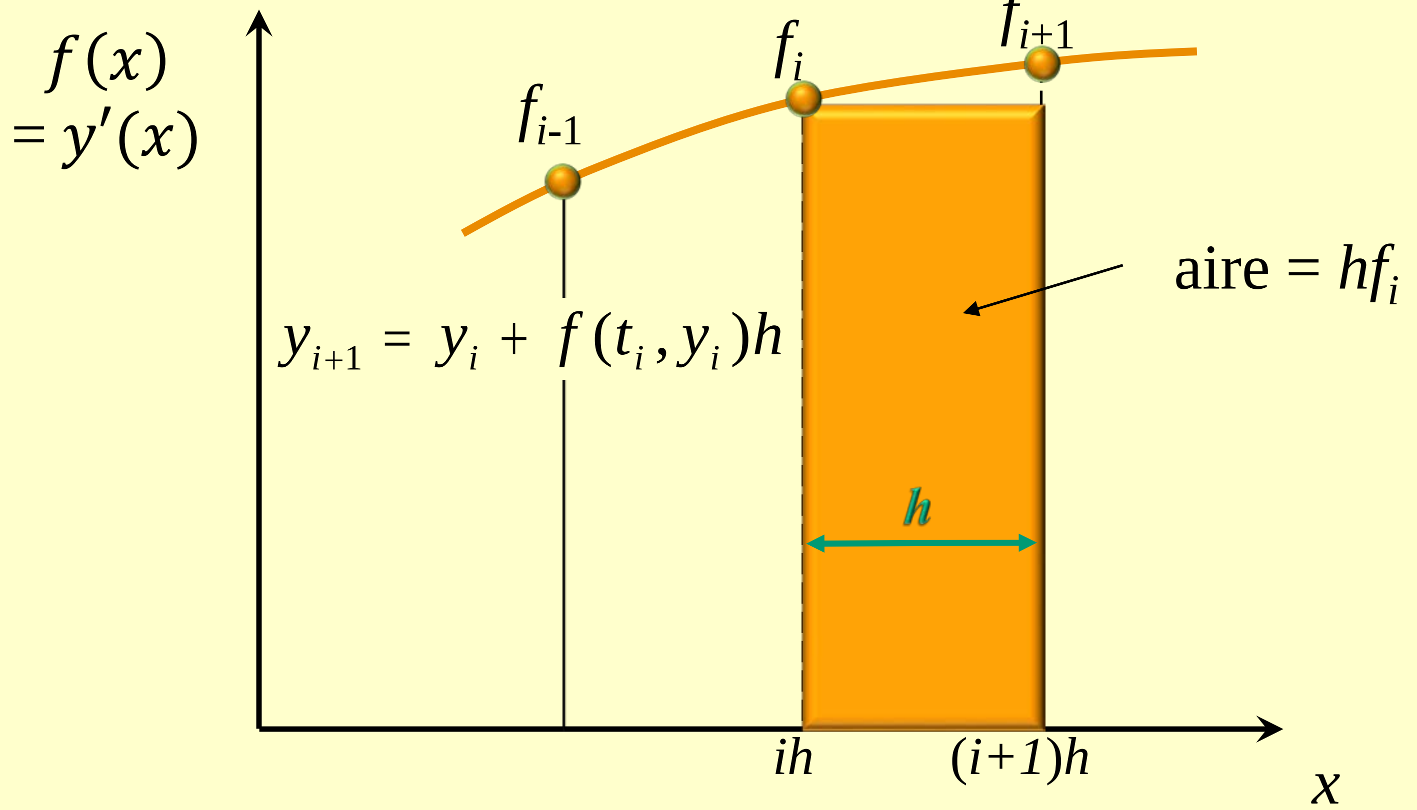
$$y_{i+1} - y_i = f(t_i, y_i)\Delta t$$

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i)h}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Integration d'Euler



ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

$$\frac{dy}{dx} = x\sqrt{y}, \quad y(0) = 1, \qquad 0 \le x \le 1$$

Solution analytique

$$y = (1 + x^2/4)^2$$

Méthode d'Euler

$$y_{i+1} = y_i + hf_i, \quad f = x\sqrt{y}$$

h = 0.50

x, y $\quad$ $x\sqrt{y}$

$$\begin{cases} y(0.5) = y(0) + hf(0,1.0) \\ \end{cases}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

$$y_{i+1} = y_i + h\, x_i \sqrt{y_i} \qquad y(0) = 1$$

h =0.25

$$x, y$$

$$y(0.25) = y(0) + hf(0, 1.0)$$

$$= 1 + (0.25)(0\sqrt{1}) = 1.0$$

$$y(0.5) = y(0.25) + hf(0.25, 1.0)$$

$$= 1.0 + (0.25)(0.25\sqrt{1.0}) = 1.0625$$

$$y(0.75) = y(0.5) + hf(0.5, 1.0625)$$

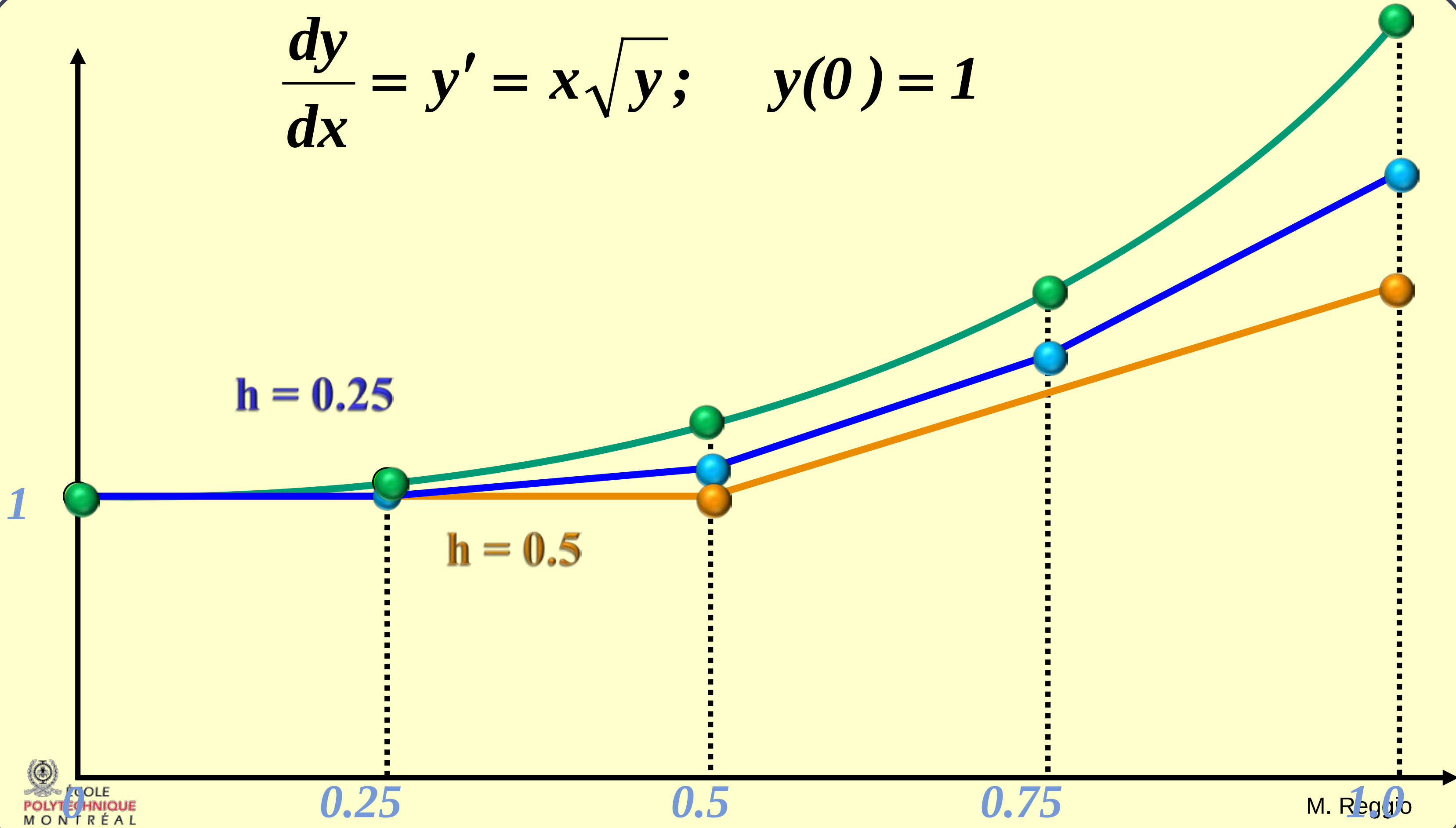
$$= 1.0625 + (0.25)(0.5\sqrt{1.0625}) = \mathbf{1.191347}$$

$$y(1.0) = y(0.75) + hf(0.75, 1.191347)$$

$$= 1.191347 + (0.25)(0.75\sqrt{1.191347}) = \mathbf{1.39600}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

Visualisation



Précision de la méthode d'Euler

$$y_{i+1} = y_i + h \left.\frac{d\,y}{d\,x}\right|_i$$

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + f_i(x_i, y_i)h}$$

Précise à l'ordre **h** (p=1), noté par O(h)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Précision de la méthode d'Euler

$$y(t_0+h) = y(t_0) + y'(t_0)h + \frac{h^2}{2} y''(t_0) + ..$$

$$y(t_0+h) = y(t_0) + y'(t_0)h + O(h^2)$$

La précision est proportionnelle à h

Pour obtenir une solution 100 fois plus précise on doit utiliser 100 fois plus de pas

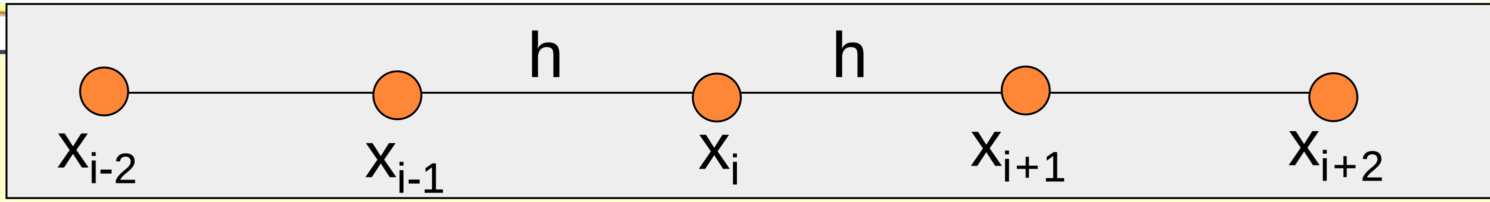
$$h \to h/2 \Rightarrow erreur \to (erreur/4)x(2\ fois\ le\ nombre\ de\ pas)$$

$$\to\ erreur/2$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Taylor et Euler



S'appuie sur la série de Taylor :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{h^2}{2} + \ldots \Rightarrow y_{i+1} = y_i + f_i h$$

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + f_i(x_i, y_i) h}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Au delà d'Euler

$$y_{i+1} = y_i + \frac{dy}{dx} h$$

Au delà d'Euler

$$y_{i+1} = y_i + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2 y}{d\,x^2}\frac{h^2}{2}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

$$y_{i+1} = y_i + \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2 y}{d x^2} \frac{h^2}{2}$$

$$Exemple : \begin{cases} y' = x^2 + xy, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$y_{i+1}=y_i+\frac{dy}{dx}h+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{2}$$

$$Exemple:\begin{cases} y' = x^2 + xy, \quad 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$y'' = \frac{d}{dx}(x^2 + xy) = 2x + y + x\frac{dy}{dx} = 2x + y + x(x^2 + xy)$$

$$y_{i+1} = y_i + h(x_i^2 + x_i y_i) + \frac{h^2}{2}(2x_i + y_i + x_i^3 + x_i^2 y_i)$$

Méthodes de Taylor

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2} y''(x) + O(h^3)$$

$$y'(x) = f(x, y)$$

$$y''(x) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Méthodes de Taylor

$$y'(x) = f$$

$$y''(x) = f_x + ff_y$$

$$y'''(x) = f_{xx} + 2ff_{xy} + f_x f_y + f_y f_x + f_{yy} f^2 + f_y f^2$$

$$y_{i+1} = y_i + \left.\frac{dy}{dx}\right|_{ï} h + \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_i \frac{h^2}{2} + \ldots \left.\frac{d^ny}{dx^n}\right|_{ï} \frac{h^n}{n!} +$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

$$dy/dx = 2y + x - 0.5$$

$$x_0 = 0.1 \qquad y(x_0) = y_0 = 1.1714$$

$$y' = 2y + x - 0.5$$
$$\therefore y'_o = 2(1.1714) + 0.1 - 0.5 = 1.9428$$

$$y'' = 2y' + 1$$
$$\therefore y''_o = 2(1.9428) + 1 = 4.8856$$

$$y''' = 2y''$$
$$\therefore y'''_o = 2(4.8856) = 9.7712$$

$$y^{iv} = 2y'''$$
$$\therefore y^{iv}_o = 2(9.7712) = 19.5424$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

eggio

$y_0 = 1.1714$ $\Delta x = 0.1$

y' $y''/2$

$$y(0.2) = 1.1714 + 1.9428(0.1) + 2.4428(0.1)^2 + 1.6285(0.1)^3 + 0.8143(0.1)^4 = 1.3918$$

$y'''\ /6$ $y^{iv}\ /24$

$\Delta x = 0.4$

$$y(0.5) = 1.1714 + 1.9428(0.4) + 2.4428(0.4)^2 + 1.6285(0.4)^3 + 0.8143(0.4)^4 = 2.4644$$

y(Euler=0.5) = 2.2827e+00

$$y(ex) = 2.4683$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Cauchemar

$$y' = \sin x + \cos y$$

$$y(0) = 0$$

$$y' = \sin x + \cos y$$

$$y'' = \cos x - y' \sin y \quad = \cos x - (\sin x + \cos y) \sin y$$

$$y'' = \cos x - \sin x \sin y - \sin y \cos y$$

$$y''' = -\sin x - y'' \sin y - (y')^2 \cos y$$

$$y^{iv} = -\cos x - y''' \sin y - y'' y' \cos y - 2 y' y'' \cos y + (y')^3 \sin y$$

$$\begin{aligned} y^{v} &= \sin x - y^{iv} \sin y - y''' y' \cos y - y''' y' \cos y - (y'')^2 \cos y + y'' (y')^2 \sin y \\ &\quad - 2 (y'')^2 \cos y - 2 y' y''' \cos y + 2 (y')^2 y'' \sin y + 3 (y')^2 y'' \sin y + (y')^4 \cos y \end{aligned}$$

$$y^{v} = \sin x - y^{iv}\sin y - 4y'''y'\cos y - 3(y'')^2\cos y + 6y''(y')^2\sin y + (y')^4\cos y$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}^{vi} = {} & \cos \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}^{v}\sin \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^{iv}\,\boldsymbol{y}'\cos \boldsymbol{y} - \mathbf{4}\boldsymbol{y}^{iv}\,\boldsymbol{y}'\cos \boldsymbol{y} - \mathbf{4}\boldsymbol{y}'''\boldsymbol{y}''\cos \boldsymbol{y} + \\ & + \mathbf{4}\boldsymbol{y}'''(\boldsymbol{y}')^{2}\sin \boldsymbol{y} - \mathbf{6}\boldsymbol{y}''\boldsymbol{y}'''\cos \boldsymbol{y} + \mathbf{3}(\boldsymbol{y}'')^{2}\boldsymbol{y}'\sin \boldsymbol{y} + \mathbf{12}\boldsymbol{y}'(\boldsymbol{y}'')^{2}\sin \boldsymbol{y} + \\ & + \mathbf{6}(\boldsymbol{y}')^{2}\boldsymbol{y}'''\sin \boldsymbol{y} + \mathbf{6}(\boldsymbol{y}')^{3}\boldsymbol{y}''\cos \boldsymbol{y} + \mathbf{4}(\boldsymbol{y}')^{3}\boldsymbol{y}''\cos \boldsymbol{y} - (\boldsymbol{y}')^{5}\sin \boldsymbol{y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}^{vi} = {} & \cos \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}^{v}\sin \boldsymbol{y} - \mathbf{5}\boldsymbol{y}^{iv}\,\boldsymbol{y}'\cos \boldsymbol{y} - \mathbf{10}\boldsymbol{y}'''\boldsymbol{y}''\cos \boldsymbol{y} + \\ & + \mathbf{10}\boldsymbol{y}'''(\boldsymbol{y}')^{2}\sin \boldsymbol{y} + \mathbf{15}(\boldsymbol{y}'')^{2}\boldsymbol{y}'\sin \boldsymbol{y} + \mathbf{6}(\boldsymbol{y}')^{3}\boldsymbol{y}''\cos \boldsymbol{y} + \\ & + \mathbf{10}(\boldsymbol{y}')^{3}\boldsymbol{y}''\cos \boldsymbol{y} - (\boldsymbol{y}')^{5}\sin \boldsymbol{y} \end{aligned}$$

Et après....

$$y'(0) = 1 \qquad y^{iv}(0) = -4$$
$$y''(0) = 1 \qquad y^{v}(0) = 2$$
$$y'''(0) = -1 \qquad y^{vi}(0) = 41$$

$$y(x) \cong x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} - \frac{4x^4}{4!} + \frac{2x^5}{5!} + \frac{41x^6}{6!}$$

$$\boxed{y(x) \cong x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{6} + \frac{x^5}{60} + \frac{41x^6}{720}}$$

Méthodes à pas unique

Toute méthode explicite à un pas peut être exprimée sous la forme abrégée

$$y_{i+1} = y_i + h\Phi(x_i, y_i, h)$$

$$y(0) = y_0$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Formule d'Euler

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = f(t, y)}$$

$$y_{i+1} = y_i + h \left.\frac{d\,y}{d\,x}\right|_i$$

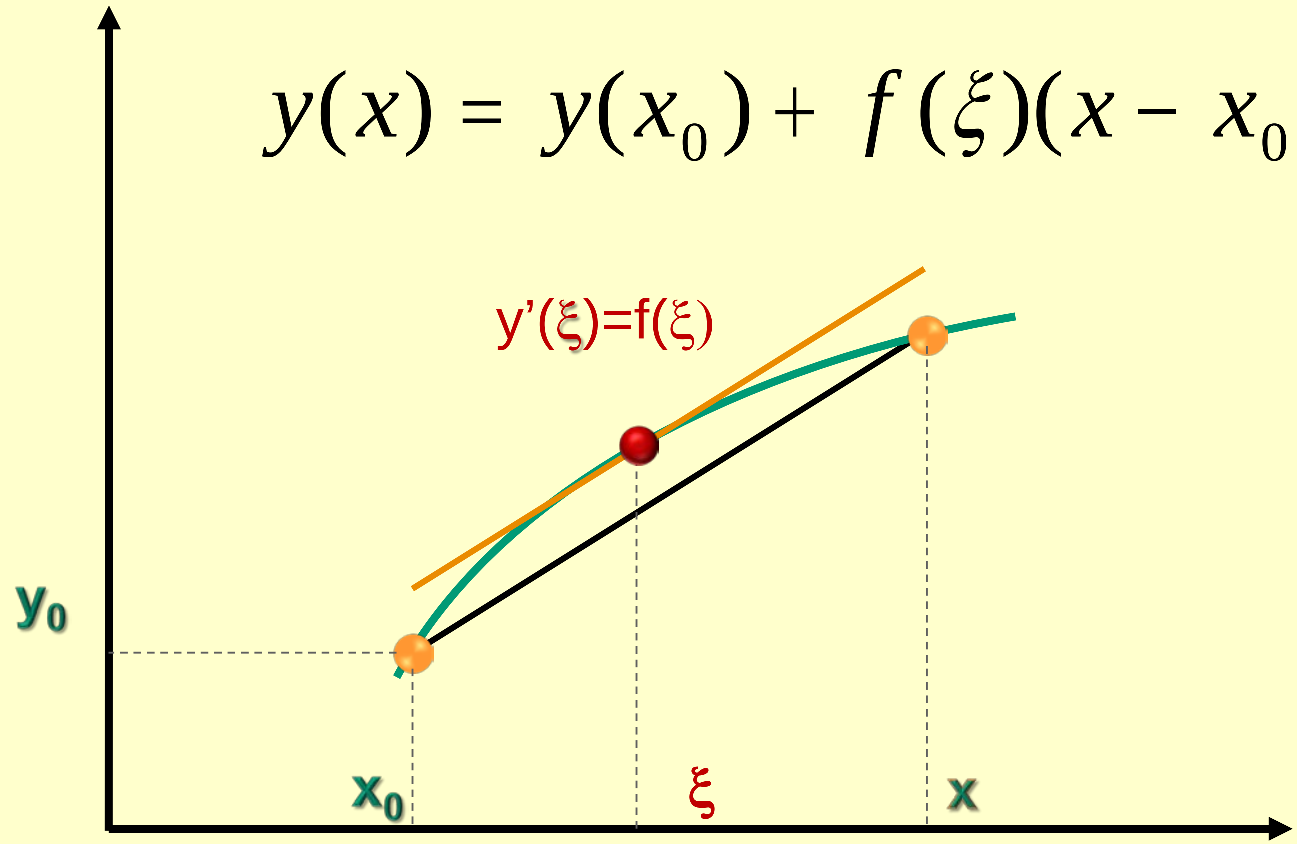
$$y_{i+1} = y_i + f_i(x_i, y_i)h$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Expression exacte

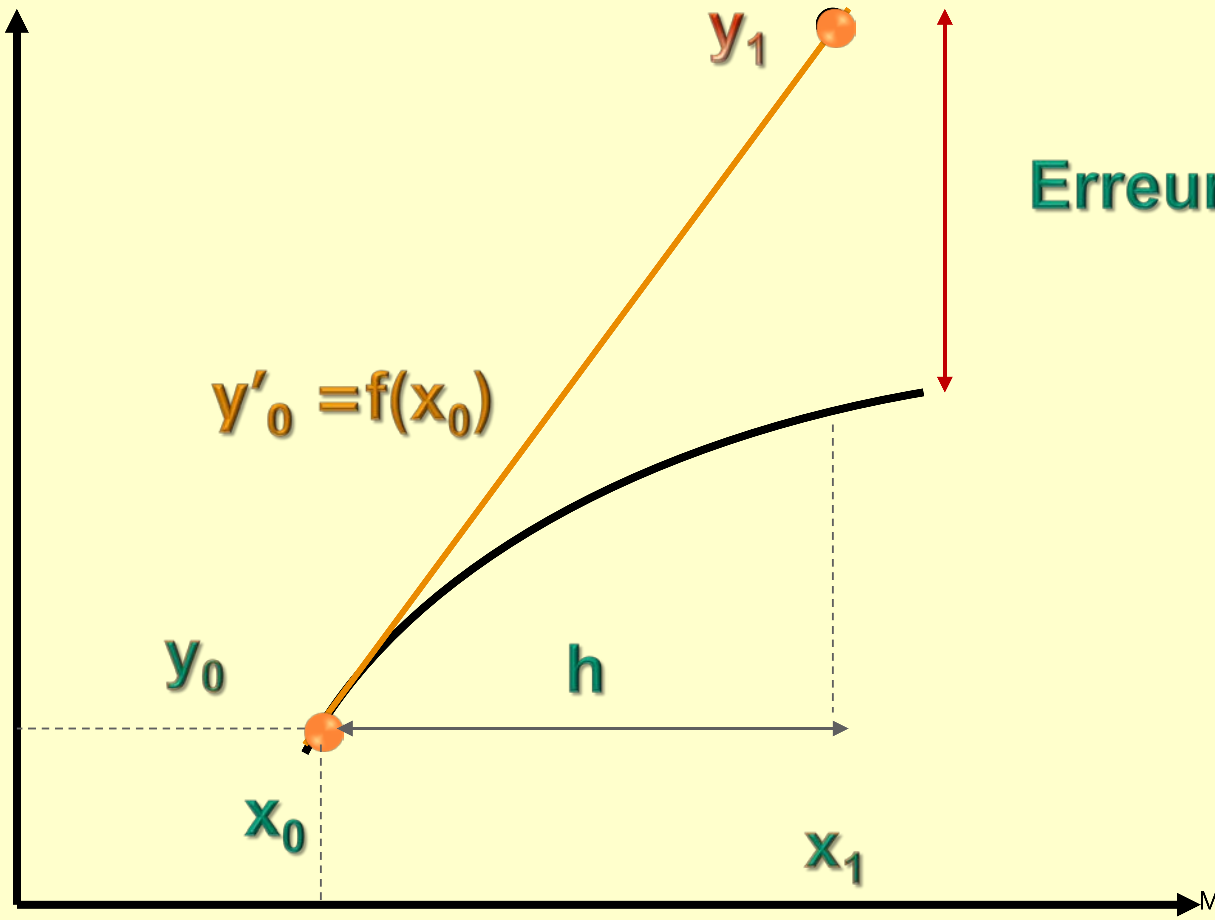
$$y(x) = y(x_0) + f(\xi)(x - x_0)$$



ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

$$y_1 = y_0 + f(x_0)(x_1 - x_0)$$



ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Méthodes à pas unique

- UNE MÉTHODE DITE À UN PAS EST DE LA FORME:

$$y_{i+1} = y_i + h\Phi(t_i, y_i)$$

- OU Φ EST UNE FONCTION QUELCONQUE.
- POUR LA MÉTHODE D' EULER $\boldsymbol{\Phi = f}$

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Modification de la méthode d'Euler

Dans la méthode d'Euler, on considère que la dérivée au début de l'intervalle est ***constante*** *sur toute l' intervalle*

On regardera ***deux modifications*** *simples*

Plus tard, on verra que ces modifications appartiennent à la famille des méthodes de ***Runge-Kutta***.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Méthode de Heun

$$\frac{df}{d\,x} \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{h}$$

$$y_{i+1} = y_i + f_i h + \boxed{\frac{df}{d\,x}}\frac{h^2}{2} + \ \ldots$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Méthode de Heun

$$\frac{df}{d\,x} \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{h}$$

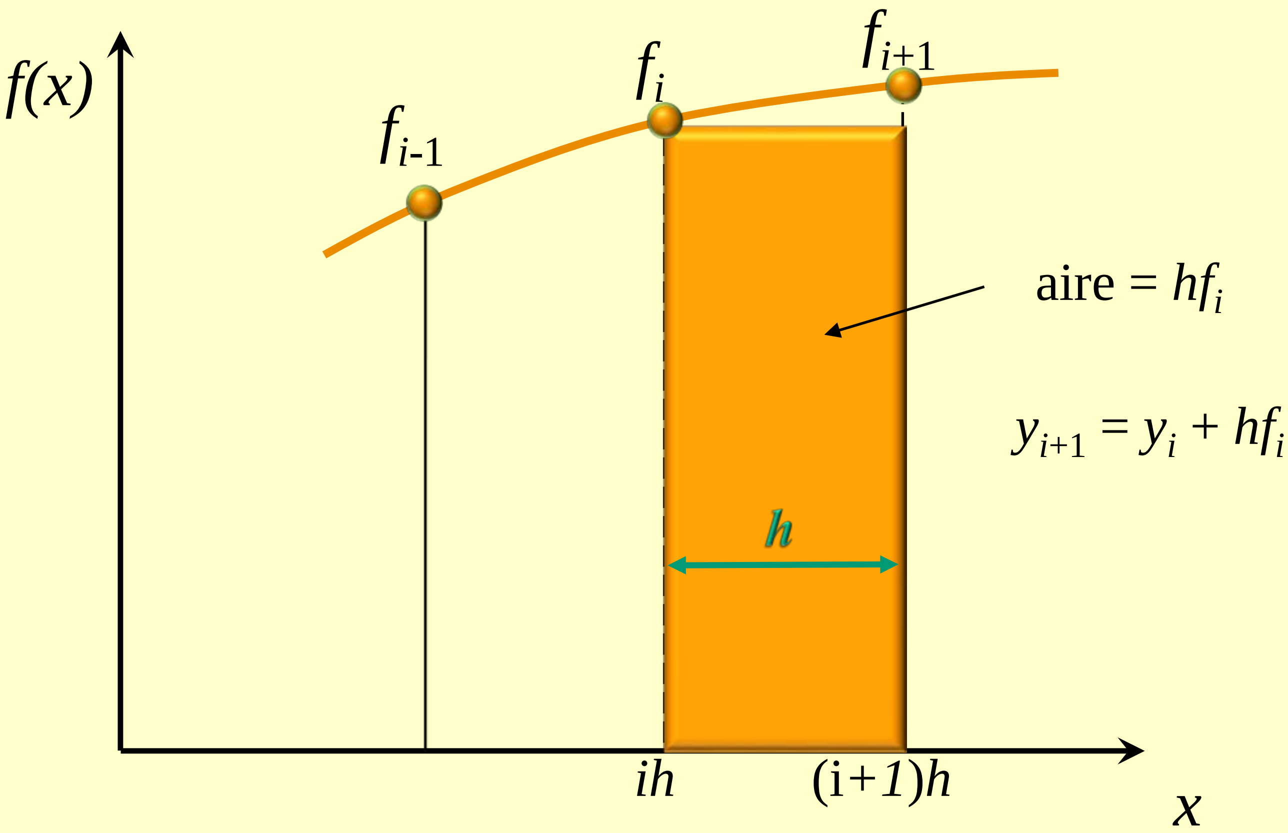
$$\Downarrow$$

$$y_{i+1} = y_i + h\left(\frac{f_i + f_{i+1}}{2}\right)..$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

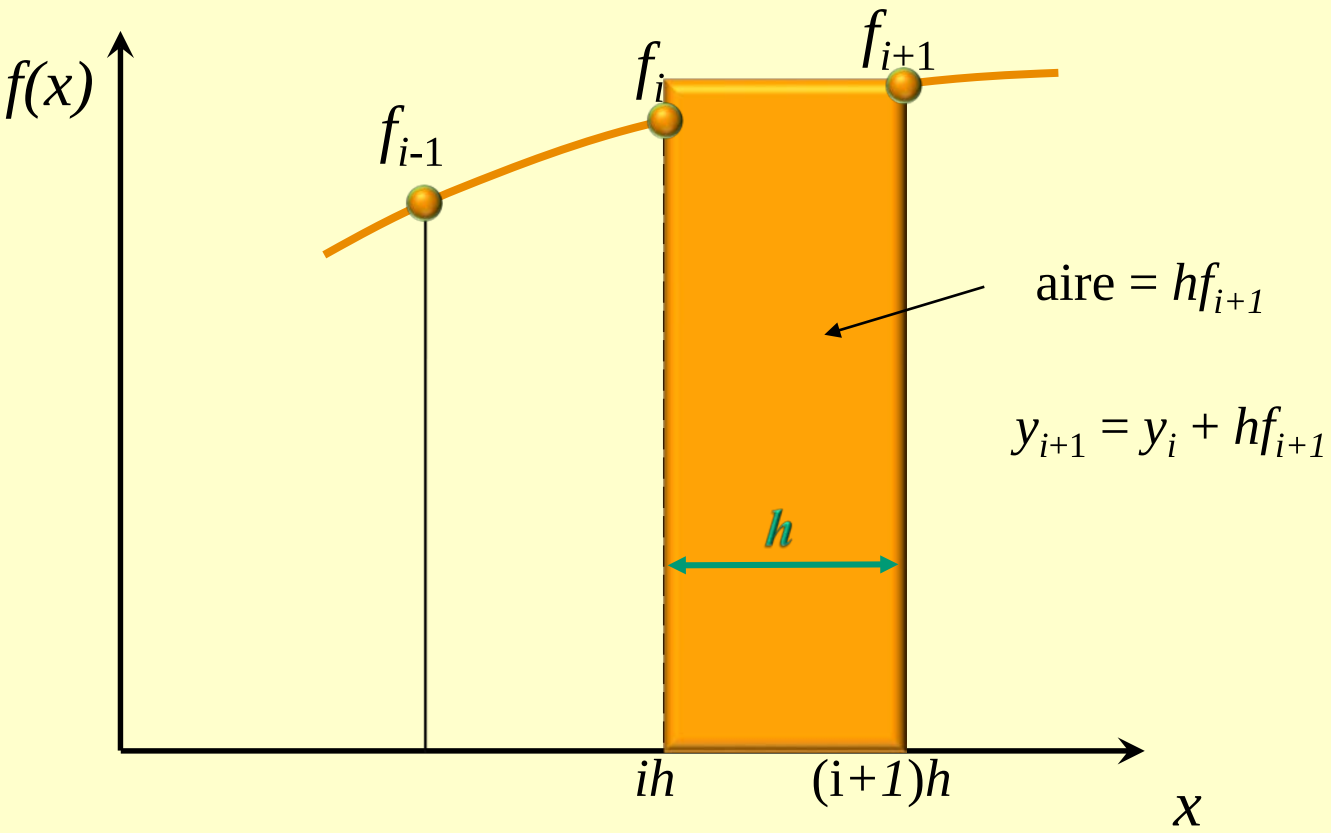
Integration d'Euler



ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

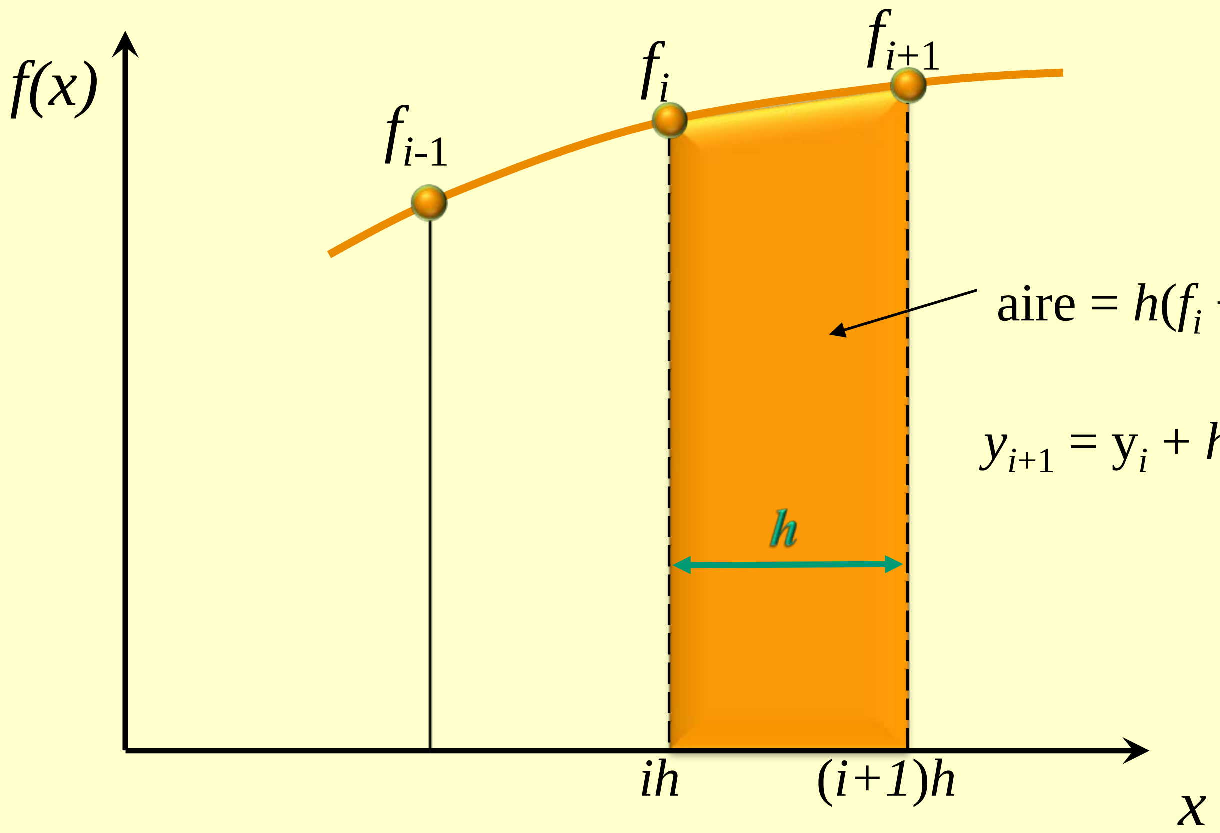
Integration d'Euler



ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Intégration Trapezoïdale



aire = $h(f_i + f_{i+1})/2$

$$y_{i+1} = y_i + h(f_i + f_{i+1})/2$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Mais...

Méthode implicite

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(f\left(t_i, y_i\right) + f\left(t_{i+1}, y_{i+1}\right)\right)$$

- On ne connaît pas y_{i+1}
- Pour éviter le problème, on peut remplacer y_{i+1} par une valeur estimée :

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + hf\left(t_i, y_i\right)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(f\left(t_i, y_i\right) + f\left(t_{i+1}\tilde{y}_{i+1}\right)\right)$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Processus itératif

$$y_0 = y(x_0)$$

Prediction: $y_{i+1}^0 = y_i + h\ f(x_i, y_i)$

Correction: $y_{i+1}^{k+1} = y_i + \dfrac{h}{2}\Big(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^k)\Big)$

k:indice d'itération

Erreur locale de troncature $O(h^3)$

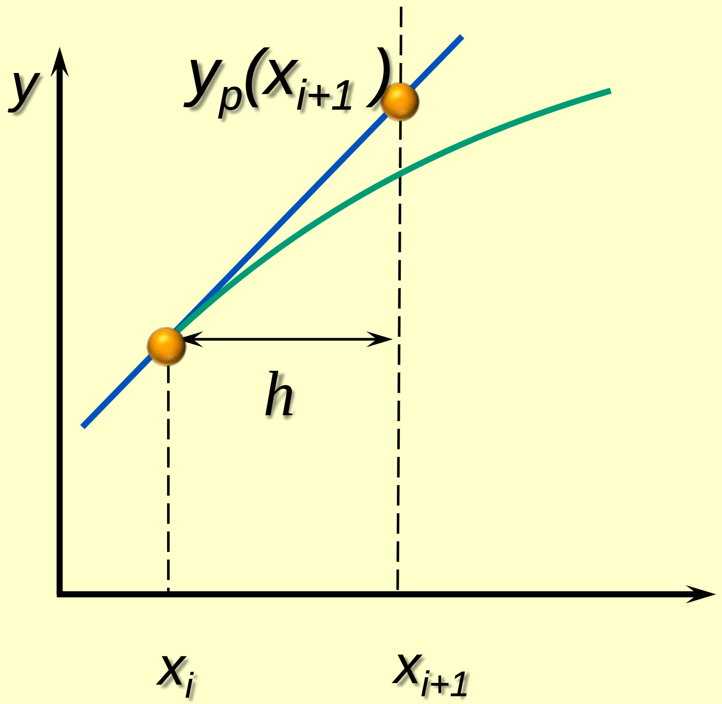
Erreur globale de troncature $O(h^2)$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Interprétation graphique

Avec la pente $f(x_i,y_i)$ *évaluée en* x_i *on prédit* $y_p(x_{i+1})$

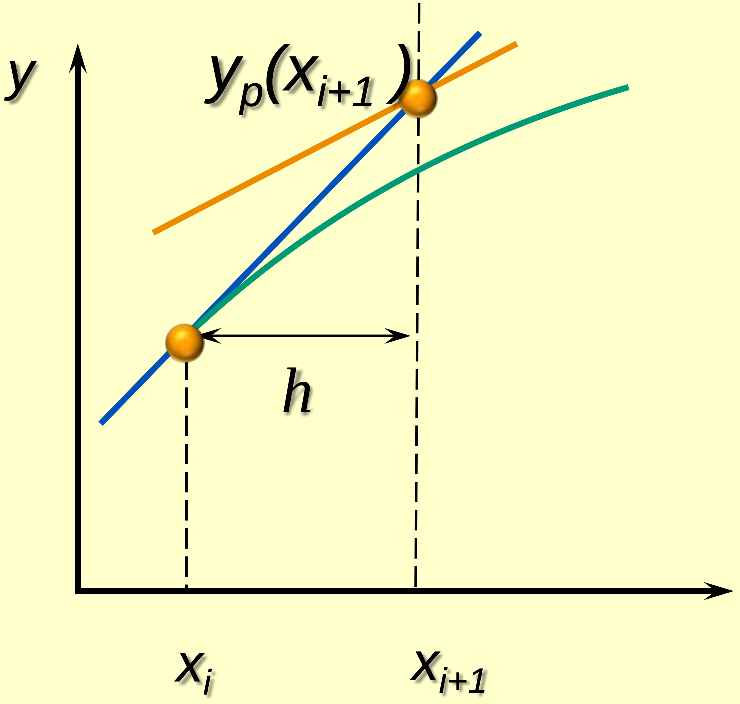


ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Méthode trapezoïdale

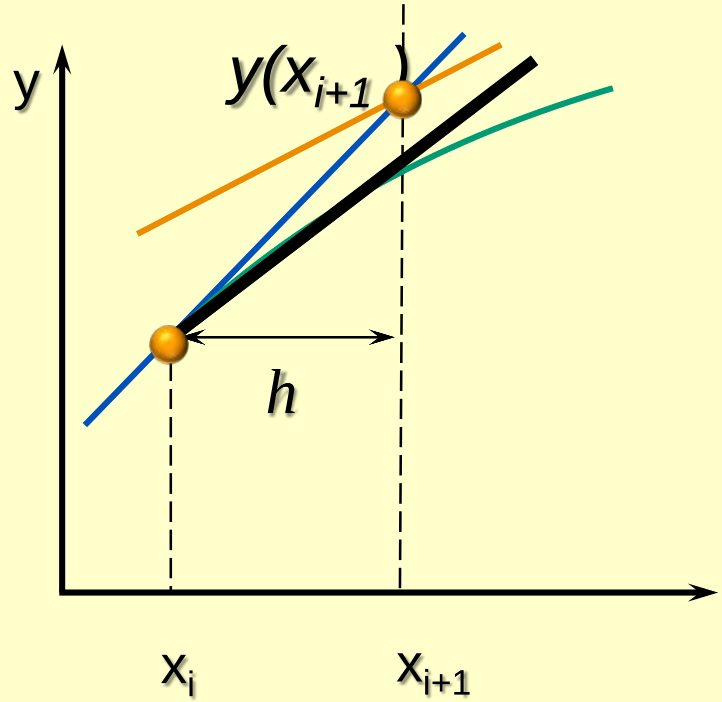
On utilise $y_p(x_{i+1})$ pour calculer la pente $f(x_{i+1},y_{i+1})$



ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

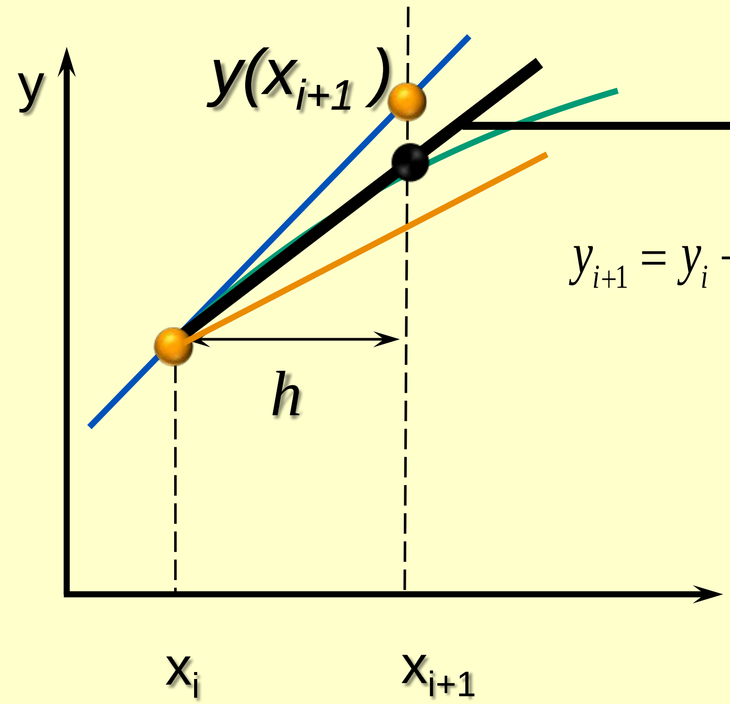
M. Reggio

On calcule alors la moyenne entre le pentes $f(x_i, y_i)$ et $f(x_{i+1}, y_{i+1})$



M. Reggio

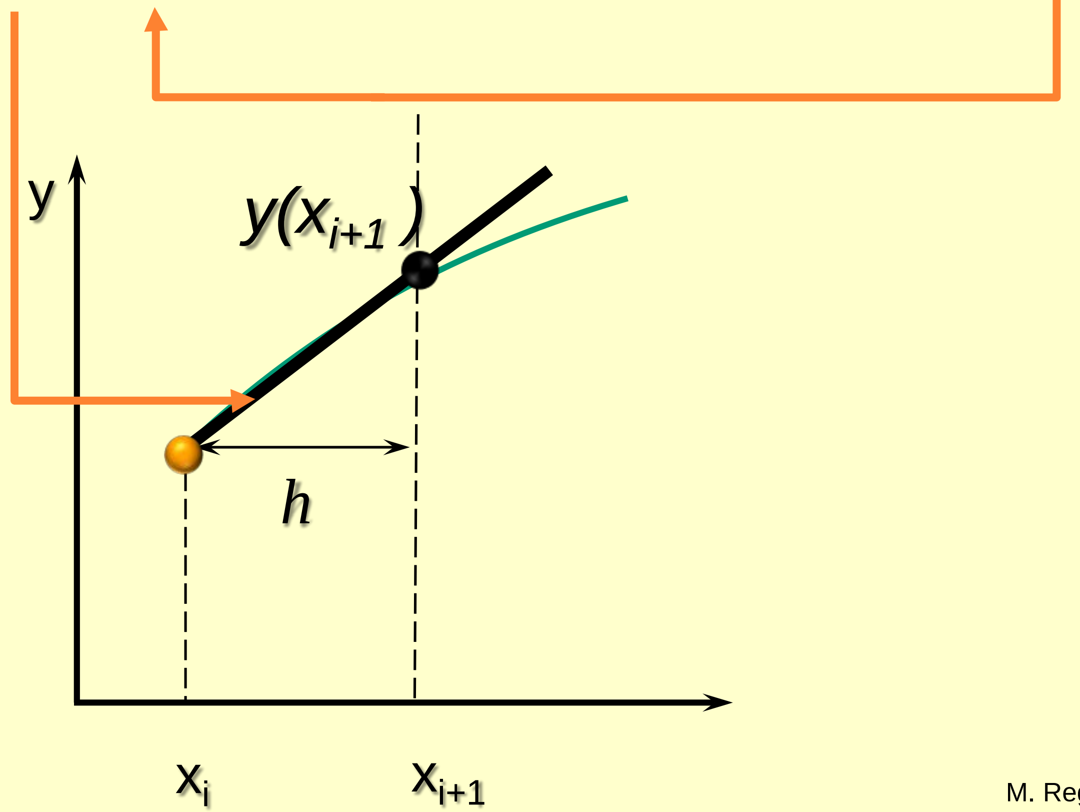
On utilise la pente moyenne pour recalculer y_{i+1}



$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\boxed{\left(f\left(x_i, y_i\right) + f\left(x_{i+1}, y_{i+1}\right)\right)}$$

Pente pondérée Φ

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\right) \qquad y_{i+1} = y_i + \Phi h$$



ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
M. Reggio

Méthode du point milieu

On utilise la méthode d' Euler pour prédire une valeur de $\boldsymbol{y}$ au point milieu de l'intervalle $i+1/2$

$$y_{i+1/2} = y_i + \frac{h}{2} f_i$$

Cette quantité est utilisée pour estimer la pente en ce point milieu

$$y'_{i+1/2} = f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}) = f_{i+1/2}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

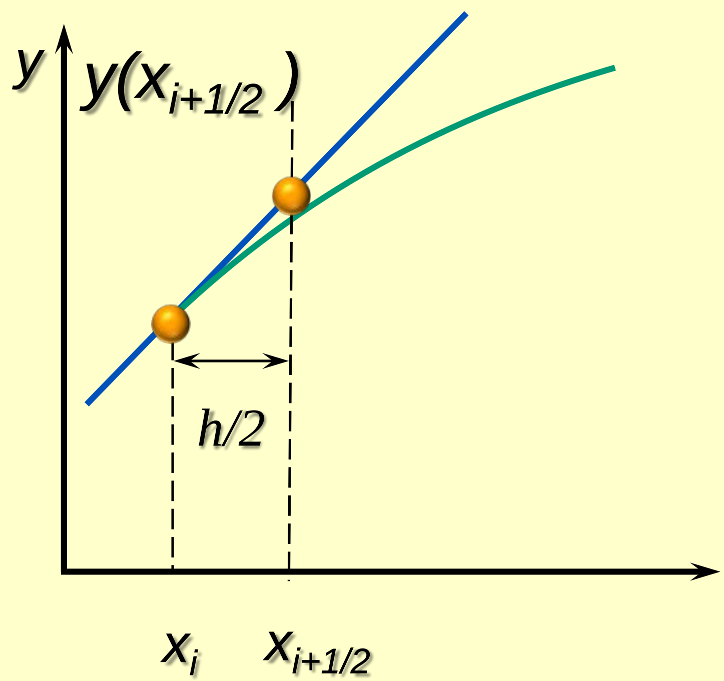
Méthode du point milieu

- On utilise cette pente et on applique la méthode d'Euler dans l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$

$$y_{i+1} = y_i + f_{i+1/2}h$$

Interprétation graphique

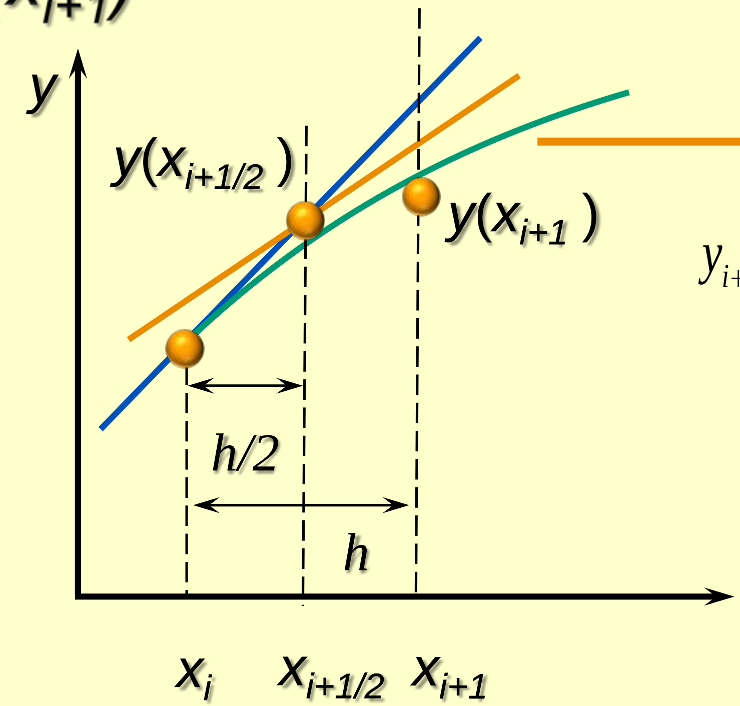
- *Avec la pente* $f(x_i, y_i)$ *évaluée en* x_i *et on prédit* $y(x_{i+1/2})$



ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

- On évalue la pente en $f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})$ pour ainsi calculer $y(x_{i+1})$



$$y_{i+1} = y_i + h\, \boxed{f\left(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}\right)}$$

M. Reggio

Méthodes de Runge-Kutta


Carl Runge


Martin Kutta

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

L'idée de Runge-Kutta

Obtenir des méthodes faciles, plus précises sans l' utilisation des série de Taylor:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{3!} + \dots$$

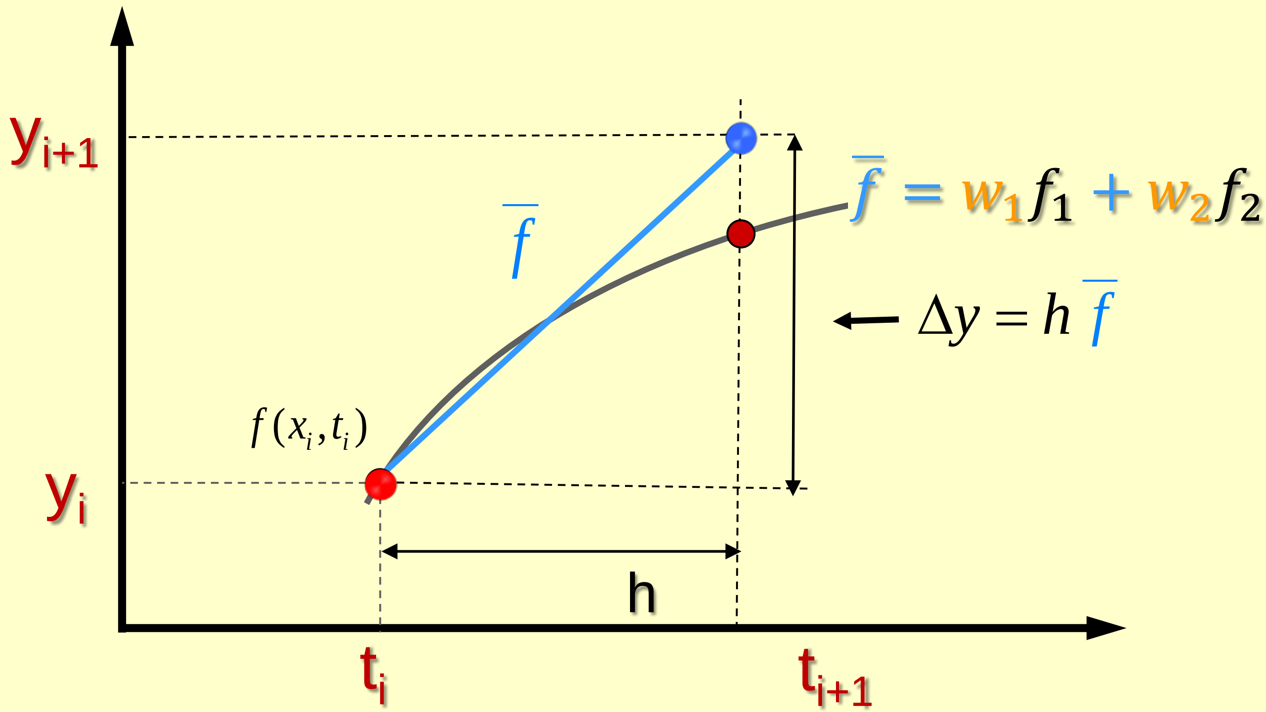
Comment?

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Une pente pondérée

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$



ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Runge-Kutta d'ordre 2

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y$$

$$k_1 = \Delta y_1 = hf(t_i, y_i)$$

$$k_2 = \Delta y_2 = hf(t_i + c_2 h, y_i + \underbrace{a_{21}k_1}_{\Delta y_{21} = a_{21}k_1})$$

$$y_{i+1} = y_i + h\bar{f}$$

$$\bar{f} = w_1 f_1 + w_2 f_2$$

$$f_1 = f(t_i, y_i)$$

$$f_2 = f(t_i + c_2 h, y_i + a_{21}k_1)$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Runge-Kutta d'ordre 2

$$w_1 \Delta y_1 + w_2 \Delta y_2 = \Delta y$$

$$y_{i+1} = y_i + \overbrace{w_1 k_1 + w_2 k_2}^{\Delta y}$$

$$k_1 = hf(t_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(t_i + c_2 h, y_i + a_{21} k_1)$$

***w_1* et *w_2* sont des poids**

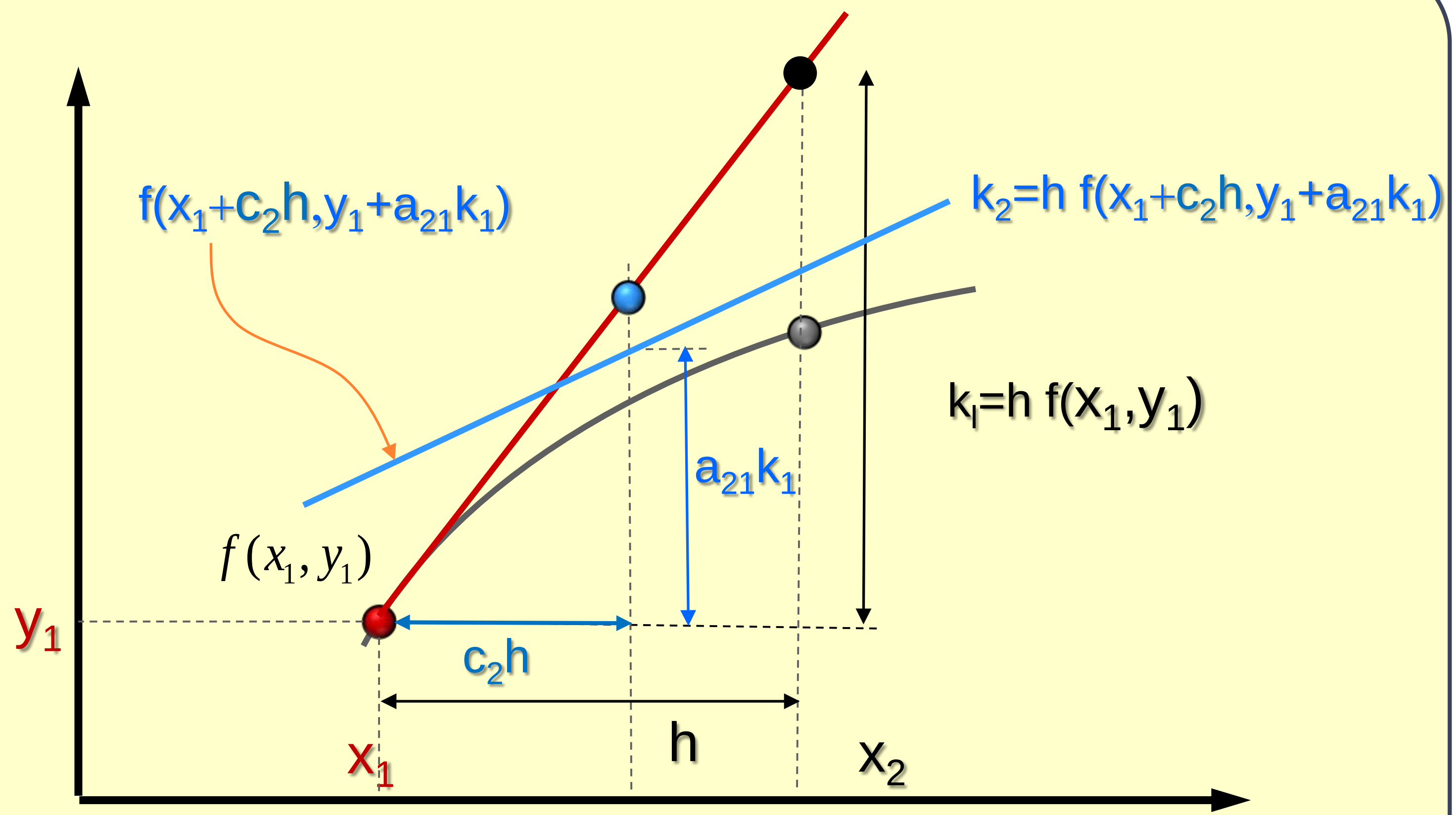
$f(t_i, y_i)$ et $f(t_i + c_2 h, y_i + a_{21} k_1)$ sont des ***pentes***

*Il faut déterminer **w_1, w_2, c_2** et **a_{21}***

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Runge-Kutta d'ordre 2



ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Comment?

Séries de Taylor

$$y_{i+1} = y_i + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{2} + ..$$

3 équations,
un paramètre est libre

$$y_{i+1} = y_i + fh + f'\frac{h^2}{2} + ..$$

$$\Updownarrow$$

$$y_{i+1} = y_i + w_1 k_1 + w_2 k_2$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} w_1 \\ w_2 \\ c_2 \\ a_{21} \end{array} \right.$$

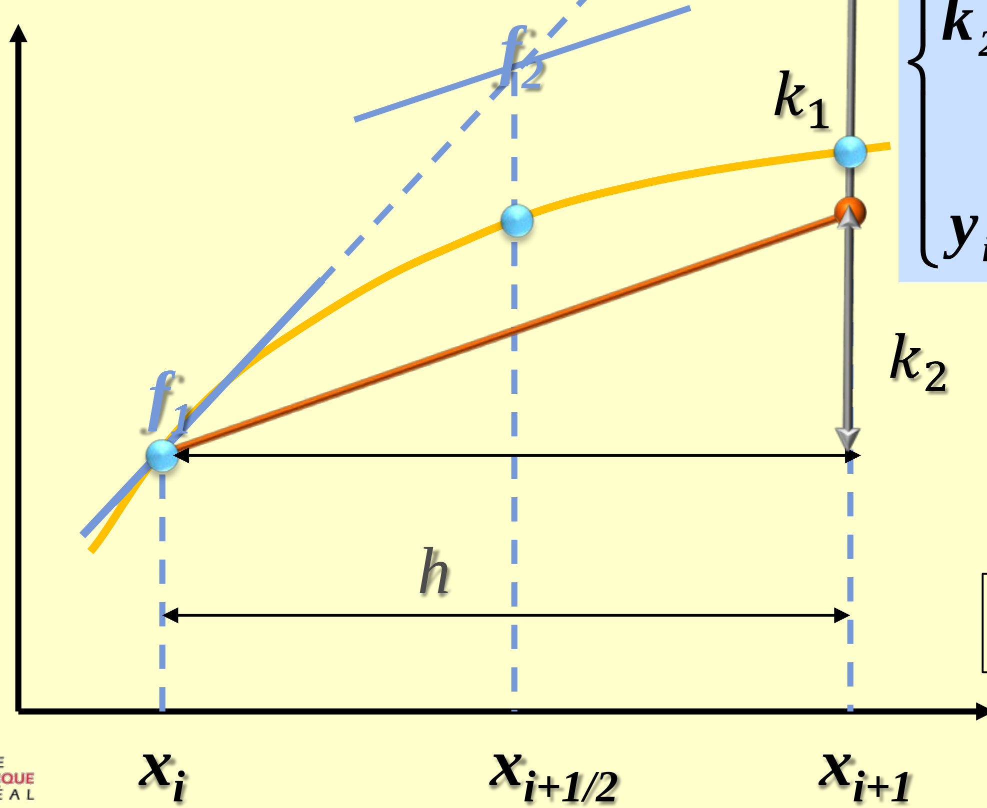
ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Méthode du point mileu

$$c_2 = 1/2, \quad a_{21} = 1/2, \quad k_1 = \Delta y_1, \quad w_1 = 0 \quad w_2 = 1$$

$$\begin{cases} k_1 = hf(x_i, y_i) = hf_1 \\ k_2 = hf\left(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{1}{2}k_1\right) \\ \quad = hf_2 \\ y_{i+1} = y_i + k_2 \end{cases}$$



$$k_1 = hf(x_i, y_i) \quad 1/2 \quad 1/2$$

$$k_2 = hf(x_i + \cancel{c_2} h, y_i + \cancel{a_{21}} k_1)$$

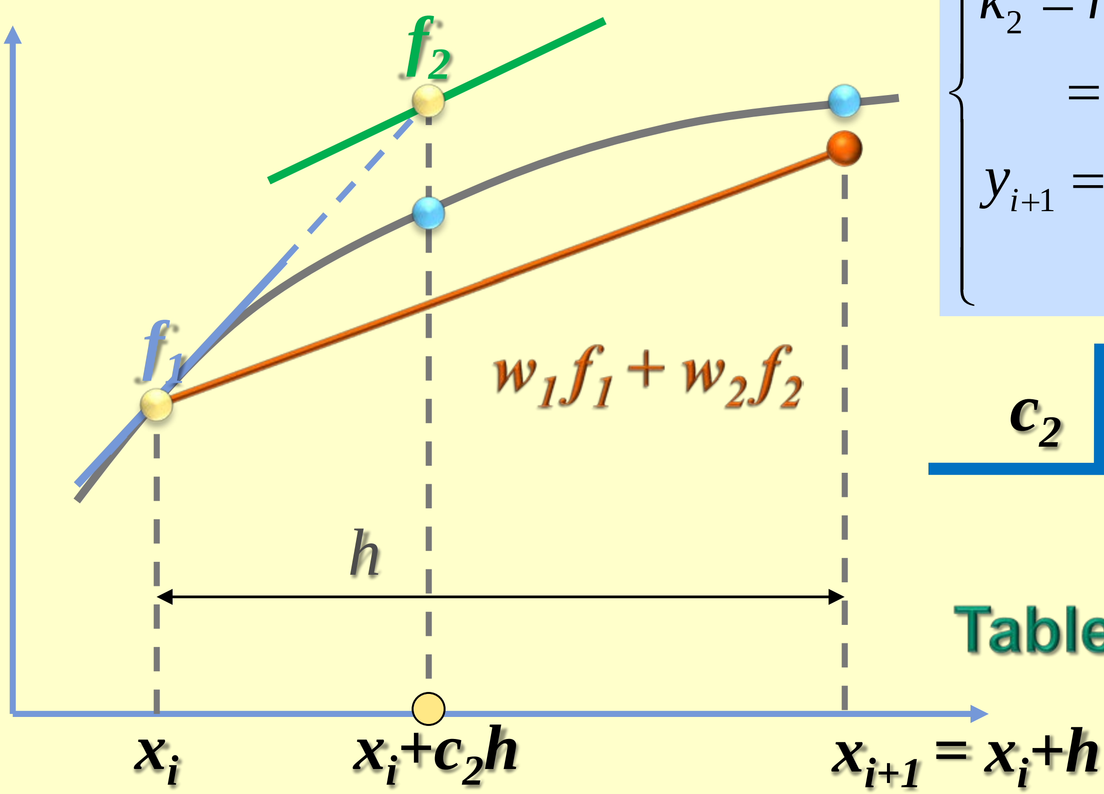
$$\boxed{y_{i+1} = y_i + \cancel{w_1} k_1 + \cancel{w_2} k_2}$$

0 1

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

2 pentes pondérées



$$
\begin{cases}
k_1 = hf(x_i, y_i) = hf_1 \\
k_2 = hf(x_i + c_2 h, y_i + a_{21} k_1) \\
\qquad = hf_2 \\
y_{i+1} = y_i + w_1 k_1 + w_2 k_2 \\
\qquad = y_i + h(w_1 f_1 + w_2 f_2)
\end{cases}
$$

$$
\begin{array}{c|cc}
c_2 & a_{21} & \\
\hline
 & w_1 & w_2
\end{array}
$$

Tableau de Butcher

Méthode d'Euler modifiée(Heun)

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + c_2 h, y_i + a_{21} k_1)$$

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + w_1 k_1 + w_2 k_2}$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}) \right)$$

$$k_1 = hf(x_i, y_i) \qquad = hf_1$$

$$k_2 = hf(x_i + h, y_i + k_1) = hf_2$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2} k_2 + \frac{1}{2} k_2$$

$$\begin{array}{c|cc} c_2 & a_{21} & \\ \hline & w_1 & w_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

École Polytechnique Montréal

M. Reggio

Méthode 1/4 – 3/4

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + c_2 h, y_i + a_{21} k_1)$$

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + w_1 k_1 + w_2 k_2}$$

$$k_1 = hf(x_i, y_i) \qquad = hf_1$$

$$k_2 = hf\left(x_i + \frac{2}{3}h, y_i + \frac{2}{3}k_1\right) = hf_2$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{4}k_1 + \frac{3}{4}k_2$$

c_2	a_{21}	
	w_1	w_2

2/3	2/3	
	1/4	3/4

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Méthode du point mileu

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + c_2 h, y_i + a_{21} k_1)$$

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + w_1 k_1 + w_2 k_2}$$

$$\begin{cases} k_1 = hf(x_i, y_i) = hf_1 \\ k_2 = hf\left(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{1}{2} k_1\right) \\ \quad = hf_2 \\ y_{i+1} = y_i + k_2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|cc} c_2 & a_{21} & \\ \hline & w_1 & w_2 \end{array}$$

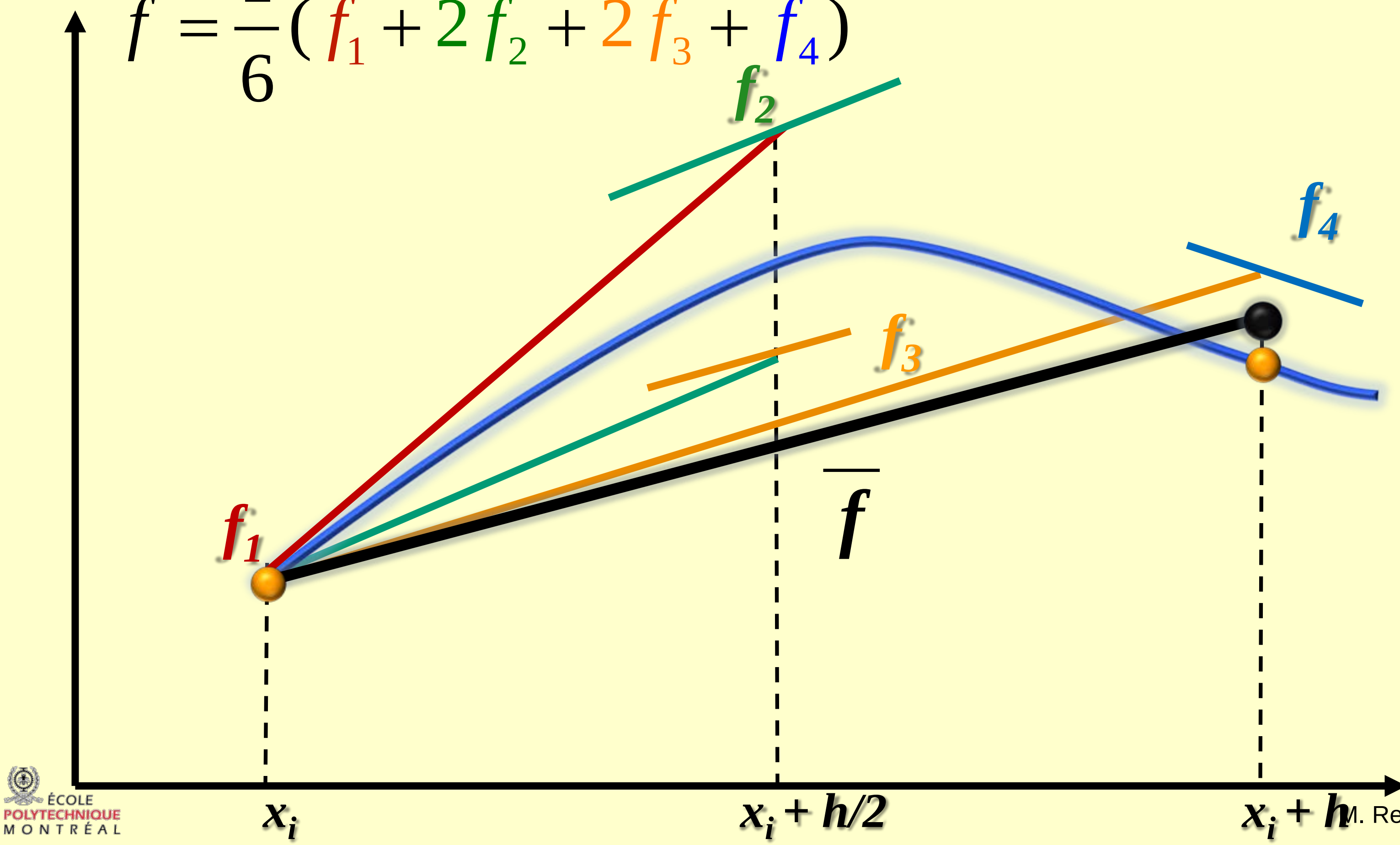
$$\begin{array}{c|cc} 1/2 & 1/2 & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

La méthode de R-K classique

$$\overline{f} = \frac{1}{6}\left(f_1 + 2 f_2 + 2 f_3 + f_4 \right)$$



ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Runge-Kutta d'ordre 4

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f\left(t_n, y_n\right)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f\left(t_n + h, y_n + hk_3\right)$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Exemple R-K-4

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t-y}{2}$$

$$y(0) = 1$$

$$k_1 = hf(t_n, y_n)$$

$$k_2 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = \mathrm{h}f(t_n + h, y_n + hk_3)$$

Avec Δt=h=0.25, on a

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t-y}{2}$$
$$y(0) = 1$$

$$k_1 = hf(t_n, y_n)$$
$$k_2 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right)$$
$$k_3 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right)$$
$$k_4 = hf(t_n + h, y_n + hk_3)$$

h=0.25

$$f(0,1) = \frac{0-1}{2} = -0.5 \qquad k_1 = \underbrace{hf_1 = 0.25(-0.5)}_{\Delta y_1}$$

$$t_n + h/2 = 0 + \frac{0.25}{2} = 0.125 \qquad y_n + k_1/2 = 1 + 1/2(0.25(-0.5)) = 0.9375$$

$$f_2 = \frac{0.125 - 0.9375}{2} = -0.40625 \qquad k_2 = \underbrace{hf_2 = 0.25(-0.40625)}_{\Delta y_2}$$

$$t_n + h/2 = 0 + \frac{0.25}{2} = 0.125 \qquad y_n + k_2/2 = 1 + 1/2(0.25(-0.40625)) = 0.94921875$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t-y}{2}$$
$$y(0) = 1$$

$$k_1 = hf(t_n, y_n)$$
$$k_2 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right)$$
$$k_3 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right)$$
$$k_4 = \mathrm{h}f(t_n + h, y_n + hk_3)$$

$$t_n + h/2 = 0 + \frac{0.25}{2} = 0.125 \qquad y_n + k_2/2 = 1 + 1/2(0.25(-0.4625) = 0.94921875$$

$$f_3 = \frac{0.125 - 0.94921875}{2} = -0.4121094 \qquad \underbrace{k_3 = hf_3 = 0.25(-0.4121094)}_{\Delta y_3}$$

$$t_n + h = 0 + 0.25 = 0.25 \qquad y_n + k_3 = 1 + 0.25(-0.4121094) = 0.89697265$$

$$f_4 = \frac{0.25 - 0.89697265}{2} = -0.3234863 \qquad \underbrace{k_4 = hf_4 = 0.25(-0.3234863)}_{\Delta y_4}$$

$$\boxed{y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0.8984375}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

$$\frac{dy}{dx} = x\sqrt{y}, \quad y(0) = 1, \qquad 0 \le x \le 1$$

h =0.5 **y=(1+x²/4)² -->1.12890625**

$$\begin{cases} k_1 = hf(x_0, y_0) \;\; = (0.5)(0\sqrt{1.0}) = 0 \\ k_2 = hf(x_0 + 0.5h, y_0 + 0.5k_1) \quad = hf(0.25,\ 1.0) = (0.50)(0.25\sqrt{1}) = 0.125 \\ k_3 = hf(x_0 + 0.5h, y_0 + 0.5k_2) \quad = hf(0.25,\ 1.0625) = (0.5)(0.25\sqrt{1.0625}) = 0.128847 \\ k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3) \quad = hf(0.5,\ 1.128847) = (0.5)(0.5\sqrt{1.128847}) = 0.265618 \end{cases}$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1 + \frac{1}{6}\left[0 + 2(0.125) + 2(0.128847) + 0.265618\right]$$

$$= 1.128885 \qquad (\varepsilon_t = 0.0018\%)$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

```matlab
function [x, y] = RK4(f, tspan, y0, n)
% function [x, y] = RK4(f, y0, a, b, n)
% y' = f(x,y)
% condition initiale y(a) = y0
% on effectue n pas de la méthode de Runge-Kutta d’ordre 4;
a = tspan(1); b = tspan(2); h = (b-a) / n;
x=(a+h : h: b);
k1 = h*feval(f,a,y0) ;
k2 = h*feval(f, a + h/2, y0 + k1/2);
k3 = h*feval(f, a + h/2, y0 + k2/2);
k4 = h*feval(f, a + h, y0 + k3);
y(1) = y0 + k1/6 + k2/3 + k3/3 + k4/6;
for i = 1 : n-1
    k1 = h*feval(f, x(i), y(i));
    k2 = h*feval(f, x(i) + h/2, y(i) + k1/2);
    k3 = h*feval(f, x(i) + h/2, y(i) + k2/2);
    k4 = h*feval(f, x(i) + h, y(i) + k3);
    y(i+1) = y(i) + k1/6 + k2/3 + k3/3 + k4/6;
end
x = [ a   x ];
y = [ y0  y ];
```

$$\frac{dy}{dx} = -2x - y, \quad y(0) = -1$$

	Erreur en x=0.4			Rapport d'erreur		
h	Euler	Euler Modifiée	Runge-Kutta 4	Euler	Euler Modifiée	Runge-Kutta 4
0.4000	2.11E-02	2.90E-02	2.40E-04			
0.2000	9.10E-01	6.42E-03	1.27E-05	3.3	4.5	18.9
0.1000	4.27E-01	1.44E-03	7.29E-07	2.1	4.5	17.4
0.0500	2.07E-01	3.48E-04	4.37E-08	2.1	4.1	16.7
0.0250	1.02E-01	8.54E-05	2.76E-09	2.0	4.1	15.8
0.0125	5.06E-01	2.11E-05	1.65E-10	2.0	4.0	16.7

Erreur

Runge-Kutta d'ordre 4

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f\left(t_n, y_n\right)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f\left(t_n + h, y_n + hk_3\right)$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Tableau de Butcher R-K-4

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & & a_{ij} & & \\
\hline
 & & & & \\
1/2 & 1/2 & & & \\
c_j \quad 1/2 & 0 & 1/2 & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \\
 & & w_i & &
\end{array}
$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Famille des R-K-4

$$k_1 = hf(x_i, y_i) \qquad = hf_1$$

$$k_2 = hf(x_i + c_2 h, y_i + a_{21} k_1) \qquad = hf_2$$

$$k_3 = hf(x_i + c_3 h, y_i + a_{31} k_1 + a_{32} k_2) \qquad = hf_3$$

$$k_4 = hf(x_i + c_4 h, y_i + a_{41} k_1 + a_{42} k_2 + a_{43} k_3) \qquad = hf_4$$

$$\Delta x_m = c_m h, \qquad \Delta y_{mn} = a_{mn} k_n$$

$$y_{i+1} = y_i + w_1 k_1 + w_2 k_2 + w_3 k_3 + w_4 k_4$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Tableau pour la famille R-K-4

$$
\begin{array}{ll|llll}
k_1 & & & & & \\
k_2 & c_2 & a_{21} & & & \\
k_3 & c_3 & a_{31} & a_{32} & & \\
k_4 & c_4 & a_{41} & a_{42} & a_{43} & \\
\hline
 & & w_1 & w_2 & w_3 & w_4
\end{array}
$$

$\mathbf{0 < c_m < 1}$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

La méthode R-K-4 classique

Quelques coefficients a_{ij} sont nuls

$$k_1 = hf(x_i, y_i) = hf_1$$

$$k_2 = hf(x_i + \cancelto{1/2}{c_2} h, y_i + \cancelto{1/2}{a_{21}} k_1) = hf_2$$

$$k_3 = hf(x_i + \cancelto{1/2}{c_3} h, y_i \underset{0}{\boxed{\phantom{+a_{31}k_1}}} + \cancelto{1/2}{a_{32}} k_2) = hf_3$$

$$k_4 = hf(x_i + \cancelto{1}{c_4} h, y_i \underset{0}{\boxed{\phantom{+a_{41}k_1}}} \underset{0}{\boxed{\phantom{+a_{42}k_2}}} + \cancelto{1}{a_{43}} k_3) = hf_4$$

$$y_{i+1} = y_i + \underset{1/6}{w_1} k_1 + \underset{2/6}{w_2} k_2 + \underset{2/6}{w_3} k_3 + \underset{1/6}{w_4} k_4$$

Méthodes R-K d'ordre n

$$k_1 = hf(x_i, y_i) \qquad = hf_1$$

$$k_2 = hf(x_i + c_2 h, y_i + a_{21}k_1) \qquad = hf_2$$

$$k_3 = hf(x_i + c_3 h, y_i + a_{31}k_1 + a_{32}k_2) \qquad = hf_3$$

$$k_4 = hf(x_i + c_4 h, y_i + a_{41}k_1 + a_{42}k_2 + a_{43}k_3) \qquad = hf_4$$

$$\vdots$$

$$k_m = hf(x_i + c_m h, y_i + \overbrace{a_{m1}k_1 + \cdots + a_{m,m-1}k_{m-1}}^{\Delta y_{\text{interne}}}) \qquad = hf_m$$

$$y_{i+1} = y_i + w_1 k_1 + w_2 k_2 + \cdots + w_m k_m$$

$$= y_i + \underbrace{h(w_1 f_1 + w_2 f_2 + \cdots + w_m f_m)}_{\Delta y_{\text{finale}}}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Tableau de Butcher

$$
\begin{array}{c|cccccc}
c_2 & a_{21} & & & & & \\
c_3 & a_{31} & a_{32} & & & & \\
c_4 & a_{41} & a_{42} & a_{43} & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\
c_m & a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{m,m-1} & \\
\hline
 & w_1 & w_2 & w_3 & \cdots & w_{m-1} & w_m
\end{array}
$$

$0 < c_m < 1$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Méthodes d'ordre > 4

Lawson d'ordre 5

1/2	1/2					
1/4	3/16	1/16				
1/2	0	0	1/2			
3/4	0	-3/16	6/16	9/16		
1	1/7	4/7	6/7	-12/7	8/7	
	7/90	0	32/90	12/90	32/90	7/90

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Méthodes d’ordre > 4

Butcher d’ordre 6

1/3	1/3						
2/3	0	2/3					
1/3	1/12	1/3	-1/12				
1/2	-1/16	9/8	-3/16	-3/8			
1/2	0	9/8	-3/8	-3/4	1/2		
1	9/44	-9/11	63/44	18/11	0	-16/11	
	11/120	0	27/40	27/40	-4/15	-4/15	11/120

p	1	2	3	4	5	6	7	8	≥ 9
s_p	1	2	3	4	6	7	9	11	$\geq p+3$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

$$\frac{dy}{dt} + 0.6\,y = 10e^{-(t-2)^2/[2(0.075)^2]} \;\; ; \;\; y(0) = 0.5$$

(b) Petit pas

jio

Méthodes R-K emboîtés

Méthodes permettant le contrôle du pas h en fonction de l'erreur

La première méthode a été présentée par Fehlberg en 1978

Elle utilise simultanément des méthodes d'ordre 4 et d'ordre 5

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Contrôle du pas

On voudrait **estimer l'erreur** au fur et à mesure que les calculs progressent et ainsi modifier la grandeur du pas **h**

Une possibilité est d'effectuer les calculs deux fois. Une première fois avec un pas **h** et une seconde fois avec un pas **2h**

Une autre possibilité est d'effectuer les calculs deux fois avec deux méthodes d'ordre successif (4 et 5 par exemple).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Contrôle du pas

Valeur exacte

$$y(x+h) = y_{RK4} + O(h^5)$$

Valeur exacte

$$y(x+h) = y_{RK5} + O(h^6)$$

$$0 = y_{RK4} - y_{RK5} + O(h^5) - O(h^6)$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Contrôle du pas

$$y_{RK5} - y_{RK4} \approx O(h^5) - O(h^6)$$

$$O(h^6) << O(h^5)$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Runge-Kutta-Fehlberg

Ordre 4

$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$				
$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{9}{32}$			
$\frac{12}{13}$	$\frac{1932}{2197}$	$\frac{-7200}{2197}$	$\frac{7296}{2197}$		
1	$\frac{439}{216}$	-8	$\frac{3680}{513}$	$\frac{-845}{4104}$	
	$\frac{25}{126}$	0	$\frac{1408}{2565}$	$\frac{2197}{41047}$	$-\frac{1}{5}$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Runge-Kutta-Fehlberg

Ordre 5

$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$					
$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{9}{32}$				
$\frac{12}{13}$	$\frac{1932}{2197}$	$\frac{-7200}{2197}$	$\frac{7296}{2197}$			
1	$\frac{439}{216}$	-8	$\frac{3680}{513}$	$\frac{-845}{4104}$		
$\frac{1}{2}$	$\frac{-8}{27}$	2	$\frac{-3544}{2565}$	$\frac{1859}{4104}$	$\frac{-11}{40}$	
	$\frac{16}{135}$	0	$\frac{6656}{12825}$	$\frac{28561}{56430}$	$\frac{-9}{50}$	$\frac{2}{55}$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Runge-Kutta-Fehlberg

Mêmes coefficients (*k_1, k_2, k_3, k_4, k_5*) pour l'ordre 4 et 5

Plus économique

Estimation d'erreur – solution à pas de temps adaptatif (variable)

$$Erreur = \left(\frac{16}{135} - \frac{25}{216}\right) k_1 + \left(0 - 0\right) k_2 + \left(\frac{6656}{12825} - \frac{1408}{2565}\right) k_3$$

$$+ \left(\frac{28561}{56430} - \frac{2197}{4104}\right) k_4 + \left(\frac{-9}{50} - 5\right) k_5 + \frac{2}{55} k_6$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Étapes de la méthode R-K-F

Calcul de y_{i+1} avec une méthode R-K-F de 4ième ordre $\Rightarrow$ $(y_1)_{4ieme}$

Calcul de y_{i+1} avec une méthode R-K-F de 5ième ordre $\Rightarrow$ $(y_2)_{5ieme}$

Calcul de l'erreur estimée $E_e \sim (y_2)_{5ieme} - (y_1)_{4ieme}$

Ajustement du pas en fonction de l' E_e

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

Bogacki–Shampine (ode23)

c_j	a_{ij}			
1/2	1/2			
3/4	0	3/4		
w_i	2/9	1/3	4/9	0
w^*_i	7/24	1/4	1/3	1/8

$$Erreur = h\sum_{i=1}^{s}\left(w_i - w_i^*\right)\, k_i$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

R-K Dormand–Prince (ode 45)

c_j	a_{ij}						
1/5	1/5						
3/10	3/40	9/40					
4/5	44/45	−56/15	32/9				
8/9	19372/6561	−25360/2187	64448/6561	−212/729			
1	9017/3168	−355/33	46732/5247	49/176	−5103/18656		
1	35/384	0	500/1113	125/192	−2187/6784	11/84	
W	5179/57600	0	7571/16695	393/640	−92097/339200	187/2100	1/40
W^*	35/384	0	500/1113	125/192	−2187/6784	11/84	0

$$Erreur = h\sum_{i=1}^{s}\left(w_i - w_i^*\right)\, k_i$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

MATLAB

Méthodes Runge-Kutta d'ordre 2 et 3

$$[\, x, y \,] = \text{ode23}\,(\text{'F'}, \text{tspan}, y_0)$$

Méthodes Runge-Kutta d'ordre 4 et 5

$$[\, x, y \,] = \text{ode45}\,(\text{'F'}, \text{tspan}, y_0)$$

Contrôle du pas

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

M. Reggio

FIN