

Université de Bordeaux

Master 2 : Modélisation Numérique et Calcul Haute Performance

PROJET DE MODÉLISATION
INTERPOLATION DE SOUS-ESPACES LINÉAIRES

Matthieu Nastorg

Table des matières

1	Introduction	3
2	Cinématique	4
2.1	Rotation dans le plan défini par deux vecteurs	4
2.2	Rotation dans le plan défini par plus de deux vecteurs	6
2.3	Application de la méthode	7
3	Interpolation entre sous-espaces linéaires	9
3.1	Théorie	9
3.1.1	Différentiation des sous-espaces étudiés	9
3.1.2	Vecteurs les mieux corrélés	10
3.2	Application de la méthode	11
3.2.1	Dimension 1	11
4	Géodésique	13
4.1	Théorie	13
4.1.1	Cadre de l'étude	13
4.1.2	Courbes géodésiques	14
4.1.3	Solution de l'équation de la géodésique pour C1 (4.1.2)	16
4.1.4	Solution de l'équation de la géodésique pour C2 (4.1.2)	17
4.2	Application de la méthode	18
5	Application à l'équation de DUFFING	20

Chapitre 1

Introduction

Ce rapport vise à reprendre, développer et programmer les diverses techniques apprises lors du cours de *Projet de Modélisation* dispensé à l'Université de Bordeaux.

Plus précisément, on s'intéresse à divers procédés pour l'interpolation de sous-espaces vectoriels. En effet, on sait que la plupart des simulations numériques peuvent être particulièrement coûteuses, à la fois en temps de calcul, mais aussi en capacité de stockage. L'intérêt des techniques que nous allons développer par la suite sera, par exemple, d'effectuer l'interpolation entre deux espaces de solution.

En particulier, on peut imaginer s'intéresser à un modèle dépendant d'un certain paramètre α pour lequel on connaît les solutions pour α_1 et α_2 . On cherche à déterminer la solution du système pour le paramètre $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$ sans recalculer l'intégralité du modèle. Une idée naturelle serait alors d'effectuer la moyenne entre les solutions pour α_1 et α_2 . En fait, on se rendra vite compte que cette idée donne de très mauvais résultats. Cet exposé a pour but de présenter certaines techniques pour une *bonne* interpolation entre sous-espaces de solutions.

Dans un premier temps, nous développerons la notion de *cinématique*, à savoir déterminer la matrice de rotation qui effectue le passage entre deux vecteurs dans le plan défini par ces deux vecteurs. Armés de cette technique, nous présenterons une technique d'interpolation entre sous-espaces vectoriels basée notamment sur la résolution d'un problème aux valeurs propres. Finalement, nous analyserons une méthode équivalente utilisant la notion de *géodésique*.

Ce rapport sera complété par un document **Jupyter Notebook**, reprenant une des méthodes développées, dans le cadre de l'interpolation entre solutions de *l'oscillateur de DUFFING*.

Bonne lecture,

Matthieu

Chapitre 2

Cinématique

2.1 Rotation dans le plan défini par deux vecteurs

Soit deux vecteurs $v \in \mathbb{R}^n$ et $w \in \mathbb{R}^n$. Le but est de déterminer la matrice de rotation qui effectue le passage de v à w dans le plan défini par v et w . Pour commencer, on rappelle la définition d'une matrice de rotation dans \mathbb{R}^2 .

Définition 2.1 (Matrice de rotation dans \mathbb{R}^2).

On appelle $O \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ la matrice de rotation d'angle θ dans le plan \mathbb{R}^2 définie comme :

$$O = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

On calcule naturellement l'angle de rotation θ entre v et w de la façon suivante

$$\cos(\theta) = \frac{v \cdot w}{\|v\| \|w\|} \implies \theta = \arccos\left(\frac{v \cdot w}{\|v\| \|w\|}\right)$$

Soit $Z \in \mathbb{R}^n$. On va essayer d'effectuer la rotation de Z dans la plan défini par v et w . L'idée sera, dans un premier temps, de se ramener en dimension 2 afin d'utiliser la matrice de rotation précédente, puis de se replacer ensuite dans la dimension initiale. Finalement la rotation de Z dans le plan défini par v et w sera la résultante entre la partie de Z qui est dans le plan définie par v et w et celle qui ne l'est pas.

Dans un premier temps, on orthonormalise nos deux vecteurs v et w . On considère

$$\hat{w} = \frac{w}{\|w\|} \quad \text{et} \quad \hat{v} = \frac{v - (v \cdot w)(\frac{w}{\|w\|^2})}{\left\| v - (v \cdot w)(\frac{w}{\|w\|^2}) \right\|}$$

Ainsi on a bien que

$$\hat{v} \cdot \hat{w} = 0 \quad \text{et} \quad \|\hat{v}\| = \|\hat{w}\| = 1$$

Puis, on considère la matrice $M \in \mathcal{M}_{2,n}(\mathbb{R})$ tel que

$$M = \begin{bmatrix} {}^t\hat{v} \\ {}^t\hat{w} \end{bmatrix}$$

Ainsi, on a $MZ \in \mathbb{R}^2$ qui sont les composantes de Z dans le plan défini par v et w .

Si l'on regarde

$$OMZ \in \mathbb{R}^2$$

où O est la matrice précédemment définie, alors c'est que l'on s'intéresse à une rotation d'angle θ dans le plan défini par v et w .

La partie du vecteur Z qui est dans le plan défini par v et w et dont l'on a fait la rotation est ainsi noté

$${}^tMOMZ \in \mathbb{R}^n$$

Définition 2.2 (Projecteur).

$P = {}^tMM \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est un projecteur tel que, pour tout $Z \in \mathbb{R}^n$

$$P(PZ) = Z$$

Cela signifie que P projette Z sur le sous-espace défini par la matrice M .

En partant de ce principe, on peut définir le vecteur $(I - P)Z$ correspondant à la partie de Z qui n'est **PAS** dans le plan défini par v et w .

Finalement, le vecteur Z_θ , résultant de la rotation d'angle θ de Z dans le plan défini par les vecteurs v et w est défini comme :

$$Z_\theta = ((I - P) + {}^tMOM)Z$$

En général, nous pouvons exprimer la matrice

$$(I - P) + {}^tMOM = e^\Omega \quad \text{avec} \quad \Omega = -{}^t\Omega \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$$

En effet, si l'on écrit

$$R = (I - P) + {}^tMOM$$

et

$${}^tR = {}^t(I - P) + {}^tMOM = ({}^tI - P + {}^tM{}^tOM)$$

alors on obtient que

$$R{}^tR = I$$

De la même façon

$${}^t(e^\Omega)e^\Omega = e^{t\Omega}e^\Omega = e^{-\Omega}e^\Omega = e^0 = I$$

Pour résumer, si l'on écrit $R = e^\Omega$ où $\Omega = -{}^t\Omega$ alors $R^t R = I$ pour tout Ω .
En particulier, cela fonctionne pour

$$e^\Omega = I + \Omega + \frac{\Omega^2}{2} + \dots + \frac{\Omega^n}{n!}$$

Et si Ω est diagonalisable telle que $\Omega = R \Sigma L$ alors on a le cas particulier suivant

$$e^\Omega = I + R \Sigma L + \dots + R \frac{\Sigma^n}{n!} L$$

On cherche donc maintenant à calculer Ω .

On considère une paramétrisation de R tel que, pour $t \in [0, 1]$ on a :

$$R(t) = (I - P) + {}^t M \begin{bmatrix} \cos(\theta t) & -\sin(\theta t) \\ \sin(\theta t) & \cos(\theta t) \end{bmatrix} M$$

Si l'on s'intéresse à la dérivée de R par rapport à t on a

$$\dot{R} = \Omega e^{-\Omega}$$

et en regardant pour $t = 0$

$$\dot{R}(t = 0) = \Omega$$

ce qui implique que

$$\Omega = {}^t M \begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix} M$$

2.2 Rotation dans le plan défini par plus de deux vecteurs

On s'intéresse maintenant à la rotation dans le plan défini par v_i et w_i pour $1 \leq i \leq m$ avec $m < n$.

En particulier on les choisit tels que

$$w_i \cdot w_j = 0, \quad v_i \cdot v_j = 0, \quad v_i \cdot w_i = 0, \quad \forall 1 \leq i \neq j \leq m$$

On peut alors formuler les mêmes outils que pour la section précédente. On définit

$$M_i = \begin{bmatrix} {}^t \hat{v}_i \\ {}^t \hat{w}_i \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2,n}(\mathbb{R})$$

et le projecteur

$$P_i = {}^t M_i M_i$$

On peut alors recalculer

$$R_i(t) = (I - P_i) + {}^t M_i \begin{bmatrix} \cos(\theta t) & -\sin(\theta t) \\ \sin(\theta t) & \cos(\theta t) \end{bmatrix} M_i$$

et

$$\Omega_i = {}^t M_i \begin{bmatrix} 0 & -\theta t \\ \theta & 0 \end{bmatrix} M_i$$

L'intérêt de réécrire la théorie précédent pour plusieurs vecteurs réside en la remarque suivante.

Si

$$[\Omega_j, \Omega_i] = \Omega_j \Omega_i - \Omega_i \Omega_j = 0$$

C'est à dire si les Ω_i commutent alors, sous ces hypothèses, on peut écrire

$$e^{\sum_{i=1}^m \Omega_i} = \prod_{i=1}^n e^{\Omega_i}$$

ce qui s'interprète comme le fait que l'ordre des rotations est indifférent. Cette remarque est particulièrement intéressante, notamment pour l'application du chapitre prochain.

2.3 Application de la méthode

Dans cette section, nous allons simplement faire la rotation entre deux gaussiennes 2D redimensionnées en vecteurs 1D. On considère un domaine carré $[0, 1] \times [0, 1]$ avec un maillage cartésien de 50×50 . On effectue la rotation entre une première gaussienne $G1$ centrée en $(0.4, 0.4)$ et une seconde $G2$ centrée en $(0.6, 0.6)$. Les deux ont un écart-type de 0.01. Les figures suivantes représentent la rotation de $G1$ vers $G2$ pour diverses valeurs de $t \in [0, 1]$. On retrouve bien le fait que pour $t = 0$ on est sur $G1$ et pour $t = 1$ on est sur $G2$.

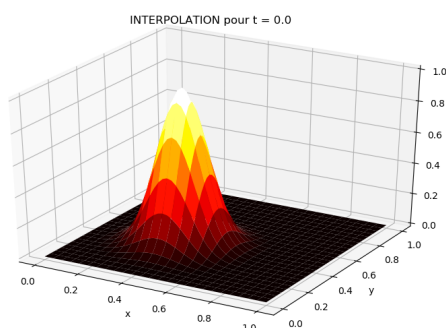


FIGURE 2.1 – Rotation pour $t = 0$

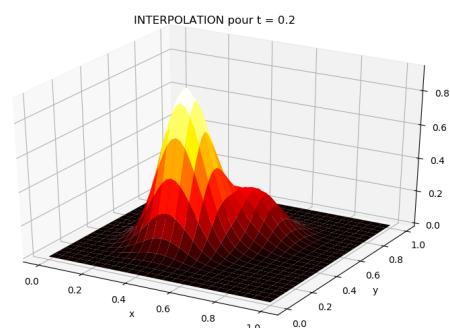


FIGURE 2.2 – Rotation pour $t = 0.2$

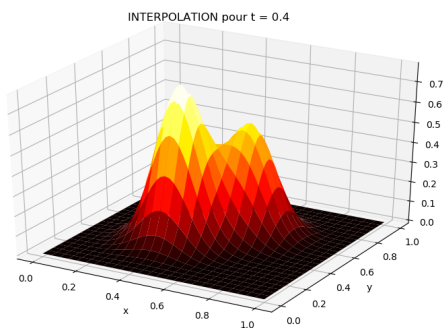


FIGURE 2.3 – Rotation pour $t = 0.4$

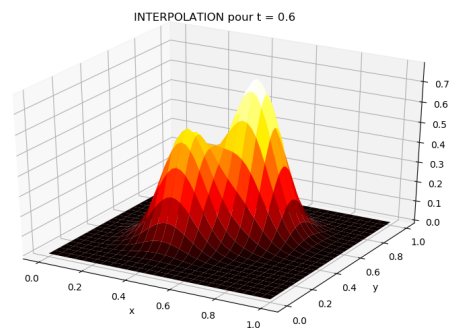


FIGURE 2.4 – Rotation pour $t = 0.6$

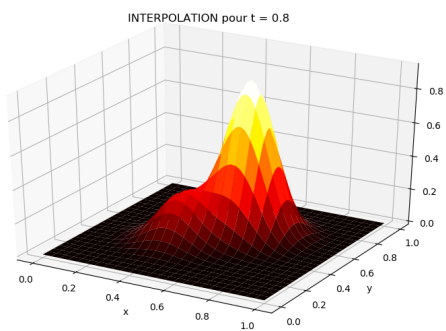


FIGURE 2.5 – Rotation pour $t = 0.8$

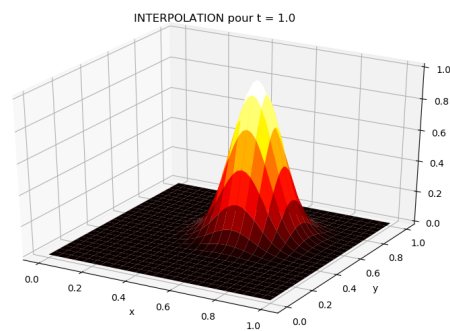


FIGURE 2.6 – Rotation pour $t = 1$

Chapitre 3

Interpolation entre sous-espaces linéaires

3.1 Théorie

On se donne un sous-espace linéaire de \mathbb{R}^n défini par les colonnes de la matrice $\Phi \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Cette matrice est de rang maximal $p \leq n$. Cela signifie que les colonnes de Φ forment une base du sous-espace de dimension p que l'on étudie. On considère également que ${}^t\Phi\Phi = I$. Cela peut s'interpréter comme le fait que les colonnes de Φ forment une base *orthonormale*.

On considère un second sous-espace linéaire de \mathbb{R}^n de dimension p défini par les colonnes de $\Psi \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. De la même façon que précédemment, on suppose ${}^t\Psi\Psi = I$.

Le but de ce chapitre est d'effectuer une interpolation entre les deux sous-espaces linéaires représentés par les colonnes de Φ et Ψ . Pour cela on s'assure, dans un premier temps, que les deux espaces sont différents. Puis, dans un second temps, on s'intéresse au problème de déterminer la combinaison linéaire des colonnes de Φ la **mieux corrélée** à une combinaison linéaire des vecteurs de Ψ . On ressortira alors des paires de vecteurs v, w les mieux corrélés. Finalement, il suffira d'effectuer les rotations entre ses vecteurs en suivant la méthode développée au chapitre précédent pour trouver une *bonne* interpolation.

3.1.1 Différentiation des sous-espaces étudiés

Le premier point est de vérifier que les deux sous-espaces auxquels nous nous intéressons sont différents. Pour cela on considère un vecteur $V \in \mathbb{R}^n$ et on regarde les deux projecteurs associés aux deux sous-espaces que l'on étudie. On définit donc

$$\begin{aligned}P_\Phi &= \Phi {}^t\Phi \\P_\Psi &= \Psi {}^t\Psi\end{aligned}$$

En fait, on sait que P_Φ est invariant par rapport à une base arbitraire de l'espace engendré par

les colonnes de Φ . Cela signifie que si la projection de V sur Φ et Ψ est différent alors les deux sous-espaces sont biens différents. Cela s'interprète comme le test suivant

$$(P_\Phi - P_\Psi)V \neq 0$$

3.1.2 Vecteurs les mieux corrélés

Comme préciser en introduction de ce chapitre, on cherche à déterminer la combinaison linéaire des colonnes de Φ la mieux corrélée à une combinaison linéaire des colonnes de Ψ .

On note

$$\begin{aligned} x &\in \mathbb{R}^n, & v &= \Phi x \in \mathbb{R}^n \\ y &\in \mathbb{R}^n, & w &= \Psi y \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

On définit le Lagrangien du problème

$$\mathcal{L}(x, y, \mu, \nu) = {}^t y {}^t \Psi \Phi x - \frac{1}{2}(\mu(\|x\|^2 - 1) + \nu(\|y\|^2 - 1))$$

On se ramène ici à la résolution d'un problème de minimisation sous contraintes (on s'assure que x et y soient toujours de norme unitaire). On évalue donc le gradient du Lagrangien en 0 ce qui donne

$$\nabla L = 0 \iff \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 & \iff {}^t \Phi \Psi y - \mu x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 & \iff {}^t \Psi \Phi x - \nu y = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \mu} = 0 & \iff \|x\|^2 = 1 \\ \frac{\partial L}{\partial \nu} = 0 & \iff \|y\|^2 = 1 \end{cases}$$

Par suite on définit

$$Q = {}^t \Psi \Phi \in \mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{R})$$

Des deux premières équations obtenues par la résolution du Lagrangien on a que

$$\begin{aligned} Qx &= \nu y \\ {}^t Qy &= \mu x \end{aligned}$$

Par suite on a

$${}^t y Qx = \nu {}^t y y = \nu {}^t x {}^t Qy = \mu {}^t x x = \mu$$

Et donc comme ${}^t y Q x = {}^t x {}^t Q y$ alors il vient que $v = \mu$.

Posons maintenant $\lambda = v^2$.

On a

$${}^t Q Q x = v {}^t Q y = v \mu x = \lambda x$$

Ainsi, pour déterminer x et y il nous suffit de résoudre un système aux valeurs propres tel que

$${}^t Q Q x = \lambda x$$

$$Q {}^t Q y = \lambda y$$

Finalement

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \langle v, w \rangle \\ &= \langle \Phi x, \Psi y \rangle \\ &= \langle {}^t \Psi \Phi x, y \rangle \\ &= \langle Q x, y \rangle \\ &= \langle v y, y \rangle \\ &= v \|y\|^2 = v = \sqrt{\lambda} \end{aligned}$$

On remarque également que ${}^t Q Q$ et $Q {}^t Q$ sont des matrices symétriques semi-définies positives, ce qui assure que les valeurs propres du système sont réelles.

Finalement, les vecteurs les mieux corrélés sont les vecteurs $v = \Phi x$ et $w = \Psi y$ où x et y sont les vecteurs propres du systèmes précédents associés aux **plus grandes** valeurs propres.

3.2 Application de la méthode

3.2.1 Dimension 1

Pour appliquer la méthode suivante, on considère deux sous-espaces linéaires Φ et Ψ . Φ est une matrice dont les colonnes sont des gaussiennes centrées en 0.45 dont l'on fait varier l'écart type de manière aléatoire. On fait la même opération pour construire la matrice Ψ avec des gaussiennes centrées en 0.55. On s'intéresse à l'interpolation entre ces deux-sous espaces linéaires pour $t = 0.5$ (on utilise au préalable l'algorithme de GRAMM-SCHMIDT pour rester dans notre cadre de travail initial). Pour vérifier nos résultats, on sait que la gaussienne résultante sera centrée en 0.5. On propose alors d'évaluer l'erreur entre cette gaussienne et sa projection dans la base d'interpolation que nous avons construit. En d'autres termes, si on note G la gaussienne centrée en 0.5 et χ la base d'interpolation créée, on regarde la quantité

$$\|G - \chi {}^t \chi G\|_{L^2}$$

Dans le même temps, on s'intéressera à l'évolution de l'erreur pour le nombre de vecteur de la base que l'on considère. En effet, on se rend compte que, plus le nombre de vecteurs de la base (i.e le nombre de colonnes de Φ et Ψ) est proche de la dimension de l'espace (i.e le nombre de lignes de Φ et Ψ) alors plus l'erreur commise est petite. On regarde les résultats ci-après pour k vecteurs de dimension 50. L'extension à la dimension 2 se fait facilement. Un moyen serait, par exemple, de transformer des matrices de taille $n_1 \times n_2$ en des vecteurs de taille $n_1 n_2$ et d'effectuer les mêmes opérations que dans le cas 1D.

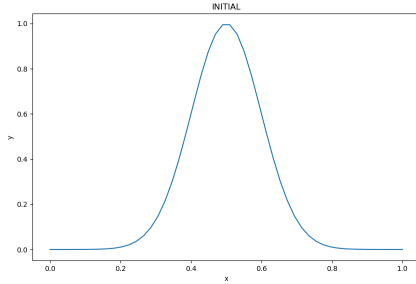


FIGURE 3.1 – Vecteur Initial

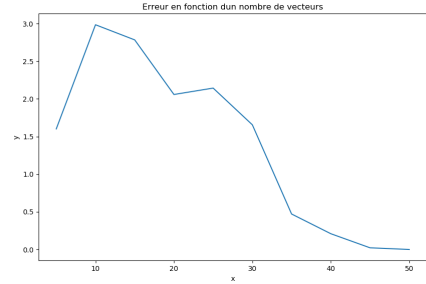


FIGURE 3.2 – Erreur/nb vecteurs base

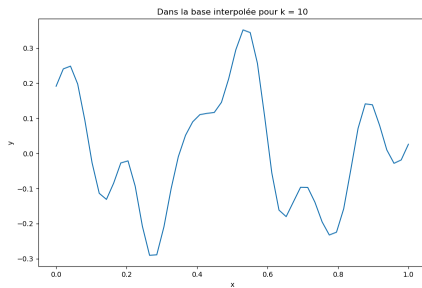


FIGURE 3.3 – Pour 10 vecteurs

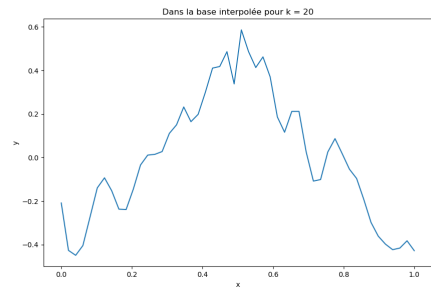


FIGURE 3.4 – pour 20 vecteurs

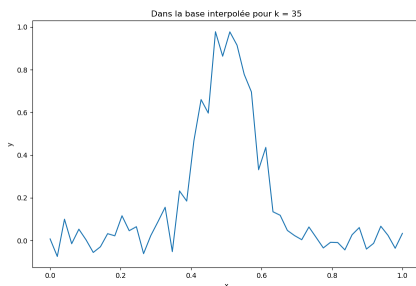


FIGURE 3.5 – Pour 35 vecteurs

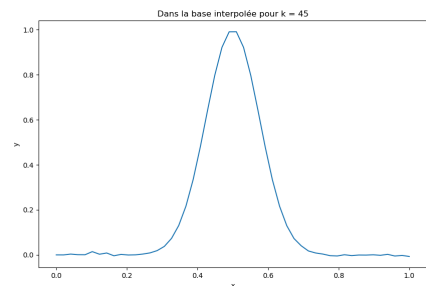


FIGURE 3.6 – pour 45 vecteurs

Chapitre 4

Géodésique

4.1 Théorie

Ce chapitre s'intéresse à l'interpolation entre sous-espaces linéaires via la notion de *géodésique*. Cette méthode est une alternative à celle présentée dans le chapitre précédent. Une géodésique est définie comme une courbe représentant le plus court chemin entre deux points sur une surface.

On se propose ici de décrire dans un premier temps le cadre dans lequel nous effectuons cette étude. Puis, nous définissons la notion de courbe et, finalement, celle de géodésique. En particulier, on cherche l'expression de la géodésique reliant deux sous-espaces linéaires (les espaces de solution d'un système par exemple). On pourra alors chercher l'interpolation entre nos deux solutions sur la géodésique calculée.

4.1.1 Cadre de l'étude

On place cette étude dans le cadre de la variété de STIEFEL. En fait, on va faire des hypothèses sur les sous-espaces initiaux auxquels on s'intéresse.

Définition 4.1 (Variété de STIEFEL).

$$\mathcal{S} = \{\Phi \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \quad {}^t\Phi\Phi = I\}$$

En fait, le sous-espace linéaire auquel on s'intéresse est défini par les colonnes de la matrice Φ . Si $\Phi \in \mathcal{S}$ alors ses colonnes forment une base orthonormale de notre sous-espace linéaire.

De plus, on suppose que l'on se place dans la variété de GRASSMANN. Cette dernière est une sous-variété de la variété de STIEFEL et est définie de la manière suivante :

Définition 4.2 (Variété de GRASSMANN).

$$\mathcal{G} = \{\forall \Phi_1 \in \mathcal{S}, \Phi_2 \in \mathcal{S} \quad \Phi_1 {}^t\Phi_1 \neq \Phi_2 {}^t\Phi_2\}$$

La condition d'appartenance à la variété de GRASSMANN nous indique que l'on ne considère que des sous-espaces linéaires qui sont différents (par le fait que les projecteurs associés à deux sous-espaces sont différents). En fait, notre cadre est exactement le même qu'en introduction du chapitre précédent, nous avons seulement mis un nom sur les hypothèses formulées, qui définissent un cadre théorique nécessaire pour la suite.

4.1.2 Courbes géodésiques

Soit $\Gamma \in \mathcal{G}$ un élément de la variété de GRASSMANN.

On définit un produit scalaire

$$\langle \Gamma_1, \Gamma_2 \rangle = \text{Tr}({}^t\Gamma_1 \Gamma_2) = \text{Tr}({}^t\Gamma_2 \Gamma_1)$$

On suppose maintenant que Γ est fonction d'un paramètre $t \in \mathbb{R}$. On a alors, par dérivation

$${}^t\Gamma(t)\Gamma(t) = I \implies {}^t\dot{\Gamma}(t)\Gamma(t) + {}^t\Gamma(t)\dot{\Gamma}(t) = 0$$

On dit que $\dot{\Gamma}$ est tangente à la variété de STIEFEL. Si on considère N normal à $\dot{\Gamma}$ alors on a

$$\text{Tr}({}^t\dot{\Gamma}N) = 0$$

En particulier, toutes les normales peuvent s'écrire $N = \Gamma S$ avec S une matrice symétrique telle que $S \in \mathcal{M}_{n,n}$. On a alors

$$\text{Tr}({}^t\dot{\Gamma}\Gamma S) = 0$$

On donne ensuite deux définitions :

Définition 4.3.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \text{sym}(A) &= \frac{A + {}^tA}{2} \\ \text{skew}(A) &= A - \text{sym}(A) \end{aligned}$$

Définition 4.4.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \Pi_N^\Gamma &= \Gamma \text{sym}({}^t\Gamma A) \\ \Pi_T^\Gamma &= \Gamma \text{skew}({}^t\Gamma A)\Gamma + (I - \Gamma {}^t\Gamma)A \end{aligned}$$

Ainsi, sur la variété de GRASSMANN, on a

$$\dot{\Gamma} = (I - \Gamma^t \Gamma) A$$

De plus on a

$${}^t \dot{\Gamma} \Gamma = {}^t A {}^t (I - \Gamma^t \Gamma) = {}^t A (I - \underbrace{{}^t \Gamma \Gamma}_{=I}) \Gamma = 0$$

Bilan : Sur la grassmanienne, une courbe paramétrée par $t \in \mathbb{R}$ satisfait

$${}^t \dot{\Gamma} \Gamma = 0 \implies {}^t \ddot{\Gamma} \Gamma + {}^t \dot{\Gamma} \dot{\Gamma} = 0$$

Définition 4.5 (Géodésique).

On dit que $\Gamma(t)$ est une géodésique si

$$\ddot{\Gamma} + \Gamma^t \dot{\Gamma} A = 0$$

On a que $\ddot{\Gamma} = -\Gamma S \implies {}^t \ddot{\Gamma} \Gamma = -S$ mais aussi ${}^t \ddot{\Gamma} \Gamma + {}^t \dot{\Gamma} \dot{\Gamma} = 0$ ce qui implique le fait que $S = {}^t \dot{\Gamma} \dot{\Gamma}$
Au final l'équation de la géodésique est

$$\ddot{\Gamma} + \Gamma^t \dot{\Gamma} \dot{\Gamma} = 0$$

avec comme conditions initiales

$$(C1) \begin{cases} \Gamma(0) = \Gamma_0 \\ \dot{\Gamma}(0) = \dot{\Gamma}_0 \end{cases}$$

ou bien

$$(C2) \begin{cases} \Gamma(0) = \Gamma_0 \\ \Gamma(1) = \Gamma_1 \end{cases}$$

Cette équation est, à première vue, **non-linéaire**. Cependant, grâce au calcul suivant, on montre qu'elle est **linéaire** en montrant que ${}^t \dot{\Gamma} \dot{\Gamma}$ est constant.

$$\begin{aligned} ({}^t \dot{\Gamma} \dot{\Gamma})' &= \ddot{(\Gamma)}^t \dot{\Gamma} + {}^t \dot{\Gamma} \ddot{\Gamma} \\ &= -{}^t \dot{\Gamma} \dot{\Gamma}^t \dot{\Gamma} - {}^t \dot{\Gamma} \Gamma^t \dot{\Gamma} \\ &= 0 \end{aligned}$$

L'équation de la géodésique peut donc se réécrire

$$\ddot{\Gamma} + \Gamma S = 0, \quad S = {}^t \dot{\Gamma}_0 \dot{\Gamma}_0 = \text{constante}$$

4.1.3 Solution de l'équation de la géodésique pour C1 (4.1.2)

Soit l'équation de la géodésique décrite plus tôt

$$\ddot{\Gamma} + \Gamma S = 0, \quad S = {}^t\dot{\Gamma}_0 \dot{\Gamma}_0 = \text{constante}$$

On va montrer que si l'on considère les conditions initiales

$$(C1) \begin{cases} \Gamma(0) = \Gamma_0 \\ \dot{\Gamma}(0) = \dot{\Gamma}_0 \end{cases}$$

La solution exacte de cette équation est

$$\Gamma(t) = \Gamma_0 V \cos(\Sigma t) + U \sin(\Sigma t)$$

où $\dot{\Gamma}(t=0) = \dot{\Gamma}_0 = U \Sigma^t V$ (Reduced Singular Value Decomposition)

En effet, soit

$$S = {}^t\dot{\Gamma}_0 \dot{\Gamma}_0 = V^t \Sigma^t U U \Sigma^t V = V \Sigma^2 {}^t V$$

alors on peut réécrire l'équation de la géodésique comme

$$\begin{aligned} \ddot{\Gamma} + \Gamma S &= \ddot{\Gamma} + \Gamma V \Sigma^2 {}^t V \\ &= \ddot{\Gamma} V + \Gamma V \Sigma^2 = 0 \end{aligned}$$

On pose le changement de variable suivant

$$\begin{cases} Y = \Gamma V \\ \ddot{Y} = \ddot{\Gamma} V \end{cases}$$

De telle manière, on obtient une équation différentielle ordinaire d'ordre deux

$$\ddot{Y} + Y \Sigma^2 = 0$$

L'étude de l'équation caractéristique donne

$$\Delta = -4\Sigma^2 < 0$$

d'où les solutions sont de la forme

$$\begin{cases} u + iv = \frac{i\sqrt{4\Sigma^2}}{2} = i\Sigma \\ u_i v = \frac{-i\sqrt{4\Sigma^2}}{2} = -i\Sigma \end{cases}$$

De plus

$$\begin{cases} Y(0) = A \implies A = \Gamma_0 V \\ \dot{Y}(0) = B \Sigma \implies U \Sigma^t V V = B \Sigma \implies U = B \end{cases}$$

Finalement, la solution exacte, après retour aux variables initiales est

$$Y(t) = A \cos(\Sigma t) {}^tV + B \sin(\Sigma t) {}^tV$$

Où on peut retirer le terme tV car il projette dans le même espace, et donc on obtient

$$\Gamma(t) = A \cos(\Sigma t) + B \sin(\Sigma t)$$

4.1.4 Solution de l'équation de la géodésique pour C2 (4.1.2)

Pour conclure, on montre dans cette méthode que la solution de l'équation de la géodésique pour les conditions initiales

$$(C2) \begin{cases} \Gamma(0) = \Gamma_0 \\ \Gamma(1) = \Gamma_1 \end{cases}$$

demeure la même que précédemment

$$\Gamma(t) = A \cos(\Sigma t) + B \sin(\Sigma t)$$

SAUF que la SVD à considérer dans ce cas est

$$U \tan(\Sigma) V = (I - \Gamma_0 {}^t\Gamma_0) \Gamma_1 ({}^t\Gamma_0 \Gamma_1)^{-1}$$

Nous allons démontrer cela dans un cadre général.

Soit $O \in \mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale, c'est à dire vérifiant ${}^tOO = O{}^tO = I$.

On considère par la suite $\tilde{\Gamma}_1 = \Gamma_1 O$. On vérifie bien que

$${}^t\tilde{\Gamma}_1 \tilde{\Gamma}_1 = {}^tO {}^t\Gamma_1 \tilde{\Gamma}_1 = I$$

On est bien dans le cadre défini en début de chapitre. D'autre part on a

$$\tilde{\Gamma}_1 = \Gamma_1 O = \Gamma_0 V \cos \Sigma + U \sin \Sigma$$

De plus, comme on est sur la grassmanienne on a

$${}^t\Gamma_0 \dot{\Gamma}_0 \implies {}^t\Gamma_0 U \Sigma {}^tV = 0$$

Comme $\Sigma {}^tV \neq 0$ on en conclut que

$${}^t\Gamma_0 U = 0$$

En outre, si l'on applique ${}^t\Gamma_0$ à $\tilde{\Gamma}_1$ on a

$${}^t\Gamma_0 \tilde{\Gamma}_1 = {}^t\Gamma_0 \Gamma_1 O = {}^t\Gamma_0 \Gamma_0 V \cos(\Sigma) + {}^t\Gamma_0 U \sin(\Sigma) = V \cos(\Sigma)$$

On considère en dernier point, en retenant que V est une matrice orthogonale

$$\begin{aligned} {}^tO({}^t\Gamma_0\Gamma_1)^{-1} &= ({}^t\Gamma_0\Gamma_1 O)^{-1} \\ &= (V \cos(\Sigma))^{-1} \\ &= \cos(\Sigma)^{-1} {}^tV \end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned} \Gamma_1 O - \Gamma_0 {}^t\Gamma_0 \Gamma_1 O &= U \sin(\Sigma) \\ \Rightarrow (I - \Gamma_0 {}^t\Gamma_0) \Gamma_1 O &= U \sin(\Sigma) \\ \Rightarrow (I - \Gamma_0 {}^t\Gamma_0) \Gamma_1 O {}^tO({}^t\Gamma_0\Gamma_1)^{-1} &= U \sin(\Sigma) \cos(\Sigma)^{-1} {}^tV \\ \Rightarrow {}^t\Gamma_0 \Gamma_1 ({}^t\Gamma_0\Gamma_1)^{-1} &= U \tan(\Sigma) {}^tV \end{aligned}$$

4.2 Application de la méthode

Nous allons appliquer la méthode de la géodésique pour le cas de la dimension 2. On ne s'intéresse qu'à la solution de la géodésique avec les conditions initiales $\Gamma_0(0)$ et $\Gamma_1(1)$. Les matrices Γ_0 et Γ_1 auront pour colonne des gaussiennes $2D$ de taille 20×20 converties en vecteurs de taille 400. Les gaussiennes dans Γ_0 sont centrées en $(0.45, 0.45)$ et celle de Γ_1 en $(0.55, 0.55)$. Les écart-types varient de manière aléatoire entre 0.005 et 0.015. Pour observer la pertinence de l'interpolation au point $t = 0.5$, on s'intéressera à l'erreur entre la solution exacte que l'on connaît (une gaussienne centrée en $(0.5, 0.5)$ d'écart-type qu'on choisira à 0.01) et sa solution dans la base interpolée exactement de la même façon que le chapitre précédent. De même on regardera l'erreur en fonction du nombre de vecteurs dans la base.

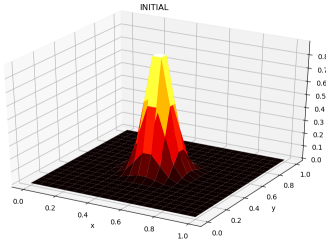


FIGURE 4.1 – Gaussienne référence

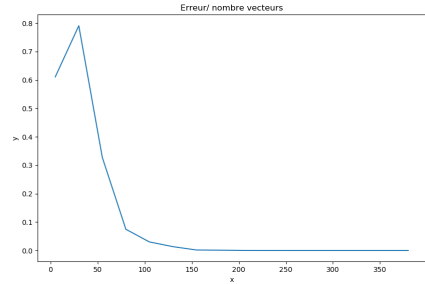


FIGURE 4.2 – Erreur/nb vecteurs base

On peut faire les mêmes conclusions que pour la méthode développée dans le chapitre précédent. Cependant, il semblerait, à première vue, que la méthode de la géodésique soit plus précise. C'est pourquoi, pour le travail sur l'oscillateur de DUFFING, j'opterai plutôt pour la méthode utilisant la notion de *géodésique*.

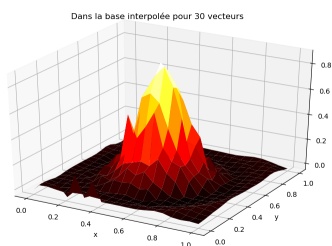


FIGURE 4.3 – Pour 30 vecteurs

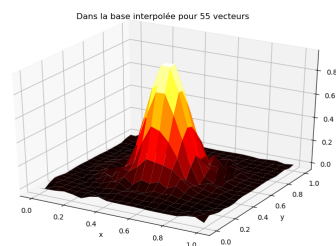


FIGURE 4.4 – pour 55 vecteurs

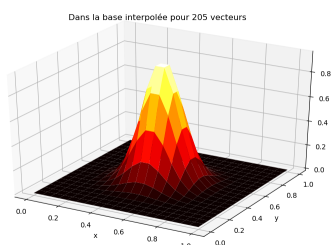


FIGURE 4.5 – Pour 205 vecteurs

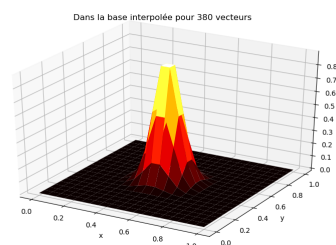


FIGURE 4.6 – pour 380 vecteurs

Chapitre 5

Application à l'équation de DUFFING

On appliquera une des méthodes développées pour la recherche d'interpolation entre deux solutions de l'équation de DUFFING. Comme cela regroupe principalement du code, ce chapitre est présenté sous la forme d'un **Jupyter Notebook** visible sur le Github lié à ce rapport. D'un point de vue esthétique, il est préférable de lire ce document directement sur le site de git. Cependant, si cela ne fonctionnait pas, un PDF sera disponible pour le télécharger. On observera que l'idée "intuitive" (prendre une moyenne entre deux espaces de solution par exemple) n'est généralement pas la bonne méthode. C'est pourquoi nous avons développé divers outils à travers cette étude pour effectuer une *bonne* interpolation entre sous-espaces de solutions. Lors de l'application nous avons choisi la méthode utilisant la notion de *géodésique*.