

Université de Bordeaux

Master 2 : Modélisation Numérique et Calcul Haute Performance

ANALYSE ET EXPÉRIENCES NUMÉRIQUES
POUR LE PROBLÈME DE L'ÉLASTICITÉ
LINÉAIRE

Clara-Marie Alvinerie - Thomas Philibert - Matthieu Nastorg

Table des matières

1	Introduction	4
1.1	Pré-requis	4
1.2	Système d'équations de l'élasticité linéaire	5
2	Formulation Variationnelle	7
2.1	Conditions limites de DIRICHLET homogènes	7
2.1.1	Recherche de la formulation variationnelle	7
2.1.2	Équivalence avec le problème aux limites	8
2.2	Conditions aux limites mixtes	9
2.2.1	Recherche de la formulation variationnelle	9
2.2.2	Équivalence avec le problème aux limites	10
3	Description et analyse des éléments finis locaux P0, P1 et P2	12
3.1	Étude des éléments finis	12
3.1.1	Aspects théoriques	12
3.1.2	Élément fini local P0	13
3.1.3	Élément fini local P1-sommet	14
3.1.4	Élément fini local P2	14
3.2	Construction d'une approximation conforme	16
3.2.1	Conformité de l'espace V_h pour l'élément fini P1	16
3.2.2	Conformité de l'espace V_h pour l'élément fini P2	17
3.2.3	Problème discret	17
4	Le problème de l'élasticité linéaire : un problème bien posé.	18
4.1	Preliminaires	18
4.1.1	Théorie de LAX-MILGRAM	18
4.1.2	Quelques théorèmes utiles	19
4.2	Conditions aux limites de DIRICHLET	20
4.3	Conditions aux limites mixtes	22
5	Estimations d'erreur et erreur d'interpolation	24
5.1	Estimations d'erreur sur la solution du problème de l'élasticité linéaire	24
5.2	Erreur d'interpolation	26

6	Programmation du problème de l'élasticité linéaire	28
6.1	Notre stratégie	28
6.2	Domaine et maillage	28
6.3	Créations de fonctions analytiques "tests"	29
6.4	Choix du meilleur solveur	30
6.4.1	Analyse du temps CPU	31
6.4.2	Analyse de la précision des méthodes itératives	31
6.4.3	Conclusion	33
6.5	Analyse des propriétés numériques	33
6.6	Un bel exemple!	36

Chapitre 1

Introduction

Dans le cadre de notre cours de *Simulation numérique par éléments finis avancés*, dispensé par Mme.WEYNANS de l'Université de Bordeaux, nous nous intéressons à la résolution des équations de l'élasticité linéaire par la méthode des éléments finis.

Ces équations, dont l'utilisation est très répandue dans de nombreux domaines, modélisent les déformations d'un matériau homogène isotrope sous l'hypothèse de petites déformations (d'où le terme "linéaire"). Nous proposons de développer une analyse à la fois théorique et pratique de ce problème. Ainsi, nous divisons notre travail en sept chapitres. Les cinq premiers développeront la théorie abstraite relative au problème étudié (formulation variationnelle, existence, unicité, description d'éléments finis utilisés...). Le dernier chapitre sera destiné à la résolution de ces équations, ainsi qu'à l'étude des propriétés numériques des approximations obtenues. Nous utiliserons comme outil de programmation le logiciel FREEFEM++ et plaçons notre étude en trois dimensions.

Nous commençons cet écrit en présentant des pré-requis nécessaires à l'introduction du système étudié, ainsi que pour la bonne compréhension des calculs à venir.

1.1 Pré-requis

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^3 , $f \in (L^2(\Omega))^3$ et u , une fonction de Ω dans \mathbb{R}^3 tels que Ω représente le solide soumis à la force f et u représente le vecteur de déplacement.

On note :

$$x = (x_1, x_2, x_3)$$

$$f = (f_1, f_2, f_3)$$

$$u = (u_1, u_2, u_3)$$

Nous allons avoir besoin des outils mathématiques suivants :

- Le tenseur des déformations ϵ : C'est un tenseur symétrique d'ordre 2 servant à décrire l'état de déformation local résultant d'efforts internes. Dans le cadre de petites déformations, on obtient :

$$\epsilon = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^t)$$

Ce qui nous donne dans \mathbb{R}^3 :

$$\epsilon(u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

- Le tenseur des contraintes σ : C'est un tenseur d'ordre 2 qui permet de caractériser les efforts mis en jeu entre les portions déformées du milieu. Dans \mathbb{R}^3 , on définit σ tel que :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

- La loi de HOOKE : Dans le cadre de petits déplacements, elle nous permet de relier σ et $\epsilon(u)$ tel que :

$$\sigma_{ij} = 2\mu\epsilon(u)_{ij} + \lambda\text{Tr}(\epsilon(u))\delta_{ij}$$

où λ et μ sont les coefficients de LAMÉ fournis par expériences sur les propriétés des matériaux et vérifiant :

$$\begin{aligned} \mu &> 0 \\ 2\mu + 3\lambda &> 0 \end{aligned}$$

- La loi d'équilibre : Bilan des forces dans le solide, elle nous donne l'équation :

$$-\text{div}(\sigma(u)) = f \quad \text{dans } \Omega \quad (\star)$$

De plus, on a :

$$(\text{div}(\sigma))_i = \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_{ij}} \right)_i \quad \text{pour } 1 \leq i \leq 3 \quad (\star\star)$$

1.2 Système d'équations de l'élasticité linéaire

On parle de système d'élasticité linéaire car on peut réécrire la formule $(\star\star)$ et le problème (\star) comme suit :

$$\begin{cases} -\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\sigma_{11} + \frac{\partial}{\partial x_2}\sigma_{12} + \frac{\partial}{\partial x_3}\sigma_{13}\right) = f_1 \\ -\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\sigma_{21} + \frac{\partial}{\partial x_2}\sigma_{22} + \frac{\partial}{\partial x_3}\sigma_{23}\right) = f_2 \\ -\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\sigma_{31} + \frac{\partial}{\partial x_2}\sigma_{32} + \frac{\partial}{\partial x_3}\sigma_{33}\right) = f_3 \end{cases} \quad \text{dans } \Omega$$

Si l'on réécrit la loi de HOOKE en remarquant que $\text{Tr}(\epsilon(u)) = \text{div}(u)$, on obtient le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -\text{div}(2\mu\epsilon(u) + \lambda\text{Tr}(\epsilon(u))Id) = f & \text{dans } \Omega \\ \text{C.L} & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

Nous laissons volontairement une certaine abstraction sur les conditions limites utilisées. En effet, nous verrons que, selon les conditions que nous considérerons, les arguments théoriques ne seront pas tout à fait les mêmes. C'est pourquoi nous essaierons, pour être aussi complet que possible, de couvrir les cas les plus généraux.

Chapitre 2

Formulation Variationnelle

2.1 Conditions limites de DIRICHLET homogènes

Dans cette partie nous nous intéressons au cas où $u = 0$ sur $\partial\Omega$. Cette condition s'interprète physiquement comme le fait que le solide est encastré et immobile sur son bord. En pratique, tout le bord n'est pas bloqué, c'est à dire qu'on laisse une partie libre de tout mouvement. Elles peuvent, par exemple, être soumises à des forces surfaciques modélisées par des conditions de NEUMANN : $\sigma \cdot n = g$ sur $\partial\Omega$ (ce cas sera traité dans la section (2.2)).

Dans cette partie, nous considérons donc le problème suivant, pour $1 \leq i \leq 3$:

$$(P1) \begin{cases} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \operatorname{div}(u) \delta_{ij} \right) = f_i & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

2.1.1 Recherche de la formulation variationnelle

Soit $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)^3$, $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)^3$ et $v \in V$ où V sera déduit plus tard. On multiplie les équations par v et on intègre.

Pour $1 \leq i \leq 3$, on a :

$$- \int_{\Omega} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \operatorname{div}(u) \delta_{ij} \right] v_i \, dx = \int_{\Omega} f_i v_i \, dx$$

En appliquant la formule de GREEN, on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sum_{j=1}^3 \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx - \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^3 \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) N_j v_i dS \\ & + \int_{\Omega} \sum_{j=1}^3 (\lambda \operatorname{div}(u) \delta_{ij}) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx - \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^3 (\lambda \operatorname{div}(u) \delta_{ij}) N_j v_i dS = \int_{\partial\Omega} f_i v_i dx \end{aligned}$$

De plus, on se munit de la topologie produit. On va sommer sur i les équations. On souhaite annuler les parties sur la frontière du domaine. Il est alors raisonnable de considérer $V = (H_0^1(\Omega))^3$. On obtient alors :

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \operatorname{div}(u) \delta_{ij} \right] \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 f_i v_i dx$$

Remarque 1 :

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \\ &= 2\epsilon(u) : \epsilon(v) \end{aligned}$$

où " $:$ " représente le double produit scalaire tensoriel des matrices symétriques, c'est à dire : $A : B = \sum_{i,j} A_{i,j} B_{i,j}$.

Remarque 2 :

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^3 \lambda \operatorname{div}(u) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \delta_{i,j} &= \sum_{i=1}^3 \lambda \operatorname{div}(u) \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \\ &= \lambda \operatorname{div}(u) \operatorname{div}(v) \end{aligned}$$

D'où on en déduit la formulation variationnelle :

$$(FV) \begin{cases} \text{Trouver } u \in (H_0^1(\Omega))^3 \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega} 2\mu \epsilon(u) : \epsilon(v) + \lambda \operatorname{div}(u) \operatorname{div}(v) dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx \\ \forall v \in (H_0^1(\Omega))^3 \end{cases}$$

2.1.2 Équivalence avec le problème aux limites

Comme nous l'expliquons dans (4.1), nous souhaitons l'équivalence entre le problème aux limites et le problème variationnel.

D'après la formulation variationnelle, on a :

$$\int_{\Omega} 2\mu \epsilon(u) : \epsilon(v) + \lambda \operatorname{div}(u) \operatorname{div}(v) = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx \quad \forall v \in (H_0^1(\Omega))^3$$

Or comme $D(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$, alors pour $\varphi \in (D(\Omega))^3$, on a, après quelques opérations dans les espaces de distributions et la suppression des termes de bord car $\varphi = 0$ sur $\partial\Omega$:

$$\int_{\Omega} -\operatorname{div}(2\mu \epsilon(u) + \lambda \operatorname{Tr}(\epsilon(u))I) \cdot \varphi \, dx = \int_{\Omega} f \cdot \varphi \, dx$$

De plus, $D(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, donc cette égalité est vraie pour $\varphi \in (L^2(\Omega))^3$. Par suite, il vient que :

$$-\operatorname{div}(2\mu \epsilon(u) + \lambda \operatorname{Tr}(\epsilon(u))I) = f \begin{cases} \text{Dans } (L^2(\Omega))^3 \\ \text{Presque partout dans } \Omega \end{cases}$$

Comme $u \in (H_0^1(\Omega))^3 \iff u = 0$ sur $\partial\Omega$ et on a bien retrouvé le problème (2.1). On a donc bien que la solution faible vérifie le problème aux limites.

2.2 Conditions aux limites mixtes

Nous considérons maintenant le problème suivant (plus réaliste que celui avec les conditions de DIRICHLET homogènes) :

On a alors le problème aux limites suivant :

$$(P2) \begin{cases} -\operatorname{div}(\sigma(u)) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ \sigma(u) \cdot N = h & \text{sur } \Gamma_N \end{cases}$$

Dans ce cas, nous pouvons considérer, par exemple, le cas d'une poutre accrochée à un mur via sa face Γ_1 et sur laquelle nous imposons des forces surfaciques sur les autres faces Γ_N tel que $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_N$.

2.2.1 Recherche de la formulation variationnelle

Soit $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)^3$, $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)^3$ et $V = \{v \in (H^1(\Omega))^3, v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}$.

On multiplie par $v \in V$, on intègre sur Ω et on somme directement toutes les équations :

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} \operatorname{div}(\sigma(u)) v \, dx &= \int_{\Omega} f \cdot v \, dx \\ \iff -\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(u) v_i \, dx &= \int_{\Omega} f \cdot v \, dx \end{aligned}$$

$\forall v \in V$, en utilisant la formule de GREEN, on a :

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij}(u) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx - \int_{\partial\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij} N_j v_i dS = \int_{\Omega} f \cdot v dx$$

Or comme $v \in V$, on peut écrire :

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij}(u) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx + \int_{\Gamma_N} \sigma_{ij} N_j v_j dS$$

D'après les conditions limites, $\sigma(u) \cdot N = h$ sur Γ_N , on a :

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij}(u) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx + \int_{\Gamma_N} h \cdot v dS$$

En reprenant le travail fait dans le chapitre précédent, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \left(\mu \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] + \lambda \text{Tr}(\epsilon(u) \delta_{ij}) \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= \int_{\Omega} f \cdot v dx + \int_{\Gamma_N} h \cdot v dS \\ \Rightarrow \int_{\Omega} 2\mu \epsilon(u) : \epsilon(v) + \lambda \text{div}(u) \text{div}(v) &= \int_{\Omega} f \cdot v dx + \int_{\Gamma_N} h \cdot v dS \end{aligned}$$

Finalement, on obtient la formulation variationnelle suivante :

$$(FV) \begin{cases} \text{Trouver } u \in V = \{u \in (H^1(\Omega))^3, u = 0 \text{ sur } \Gamma_1\} \text{ et tel que} \\ \int_{\Omega} 2\mu \epsilon(u) : \epsilon(v) + \lambda \text{div}(u) \text{div}(v) = \int_{\Omega} f \cdot v dx + \int_{\Gamma_N} h \cdot v dS \\ \forall v \in V \end{cases}$$

2.2.2 Équivalence avec le problème aux limites

Comme précédemment, nous allons vérifier que le problème variationnel est équivalent au problème aux limites.

Étant donné que $D(\Omega)$ est dense dans $H^1(\Omega)$, on prend $\varphi \in (D(\Omega))^3$:

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij}(u) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} f \cdot \varphi dx$$

En appliquant la formule de GREEN :

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\sigma_{ij}}{\partial x_j}(u) \varphi_i dx &= \int_{\Omega} f \cdot \varphi dx \\ \Leftrightarrow - \int_{\Omega} \text{div}(\sigma(u)) \varphi_i dx &= \int_{\Omega} f \cdot \varphi dx \end{aligned}$$

De plus, on sait que $D(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, ce qui donne que :

$$-\operatorname{div}(\sigma(u)) = f \text{ dans } (L^2(\Omega))^3 \text{ (i.e presque partout dans } \Omega)$$

Soit $v \in V$, d'après GREEN, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij}(u) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx &= \int_{\Omega} f \cdot v dx + \int_{\Gamma_N} h \cdot v dS \\ \Rightarrow - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} v_i dx + \int_{\partial\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij} N_j v_i dS &= \int_{\Omega} f \cdot v dx + \int_{\Gamma_N} h \cdot v dS \\ \Rightarrow - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\sigma(u)) v dx + \int_{\partial\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij} N_j v_i dS &= \int_{\Omega} f \cdot v dx + \int_{\Gamma_N} h \cdot v dS \end{aligned}$$

Comme $-\operatorname{div}(\sigma(u)) = f$ presque partout dans Ω , alors :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij} N_j v_i dS &= \int_{\Gamma_N} h \cdot v dS \\ \Rightarrow \int_{\Gamma_1} \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij} N_j v_i dS + \int_{\Gamma_N} \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij} N_j v_i dS &= \int_{\Gamma_N} h \cdot v dS \end{aligned}$$

Or comme $v \in V$, la première intégrale est nulle.

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_N} \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij} N_j v_i dS = \int_{\Gamma_N} h \cdot v dS$$

Ce qui implique que $\sigma(u) \cdot N = h$ presque partout sur Γ_N .

De plus comme $u \in V$, $u = 0$ sur Γ_1 et nous avons bien retrouvé notre problème aux limites.

Pour conclure, nous pouvons donner une interprétation mécanique importante des deux formulations obtenues. En effet, l'espace V représente l'espace des déplacements v cinématiquement admissibles. La formulation variationnelle exprime le principe des travaux virtuels. Si v est un déplacement virtuel cinématiquement admissible alors

$$a(u, v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \sigma_{i,j}(u) \epsilon_{i,j}(v)$$

représente le travail de déformation du solide élastique correspondant au déplacement virtuel v tandis que

$$\sum_{i=1}^n \left(\int_{\Omega} f_i v_i dx + \int_{\Gamma_1} g_i v_i ds \right)$$

représente le travail des forces extérieures. Le déplacement réel u est alors le déplacement cinématiquement admissible pour lequel ces deux travaux sont égaux et ceci pour tout déplacement virtuel v cinématiquement admissible.

Chapitre 3

Description et analyse des éléments finis locaux P0, P1 et P2

Dans ce chapitre, nous introduisons les éléments finis que nous utiliserons lors de notre approximation numérique. Il s'agit du type le plus "classique" : les éléments finis de LAGRANGE. Après une courte introduction sur les définitions théoriques nécessaires, nous décrivons les éléments finis locaux P0, P1-sommet et P2 (propriétés et fonctions de base). Nous concluons en montrant quels éléments permettent une approximation conforme de notre problème. Nous précisons que, par soucis de simplicité, nous effectuons cette analyse pour la dimension 2 (on utilise des triangles en 2D plutôt que des tétraèdres en 3D), la généralisation en dimension 3 se faisant suivant la même méthode.

3.1 Étude des éléments finis

3.1.1 Aspects théoriques

Définition 3.1 (Élément fini de LAGRANGE).

Un *élément fini de Lagrange* est un triplet (K, Σ_K, P_K) tel que :

- K est un élément géométrique de \mathbb{R}^n ($n = 1, 2$ ou 3), compact, connexe et d'intérieur non vide.
- $\Sigma_K = \{a_1, \dots, a_N\}$ est un ensemble fini de N points distincts de K (de N noeuds de K), on dit aussi que Σ_K est l'ensemble des degrés de liberté (d.d.l).
- P_K est un sous espace vectoriel de dimension finie de fonctions réelles définies (un espace de polynômes) sur K , et tel que Σ_K soit P_K -unisolvant

Définition 3.2 (P_K -unisolvance).

Soit $\Sigma_K = \{a_1, \dots, a_N\}$ un ensemble de N points distincts de \mathbb{R}^n . Soit P un espace vectoriel de dimension finie de fonctions de \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R} . On dit que Σ_K est P_K -*unisolvant* si et seule-

ment si, pour tout réel $\alpha_1, \dots, \alpha_N$, il existe un unique élément p de P_K tel que $p(a_i) = \alpha_i$, $\forall i = 1, \dots, N$.

Ceci revient à dire que la fonction suivante est bijective :

$$\begin{aligned} L : P &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ p &\longrightarrow p(a_1, \dots, a_n) \end{aligned}$$

En pratique, on montrera que Σ_K est P_K -unisolvant en vérifiant que $\dim(P_K) = \text{Card}(\Sigma_K)$, puis en montrant l'injectivité ou la surjectivité de L .

L'injectivité de L se démontre en établissant que la seule fonction de P s'annulant sur tous les points de Σ_K est la fonction nulle.

La surjectivité de L se démontre en exhibant une famille p_1, \dots, p_N d'éléments de P_K tels que $p_i(a_j) = \delta_{ij}$, c'est à dire un antécédent pour L de la base canonique de \mathbb{R}^N . En effet, étant donné des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_N$, la fonction $p = \sum_{i=1}^N \alpha_i p_i$ vérifie alors $p(a_j) = \alpha_j$, $\forall j = 1, \dots, N$.

Définition 3.3 (Fonctions de base locales).

Soit (K, Σ_K, P_K) un élément fini de LAGRANGE. On appelle *fonctions de base locales* de l'élément les N fonctions p_i ($i = 1, \dots, N$) de P telles que :

$$p_i(a_j) = \delta_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq N$$

On vérifie aisément que (p_1, \dots, p_N) ainsi définis forment bien une base de P_K .

3.1.2 Élément fini local P0

On se place dans l'élément fini de référence :

- On choisit le triangle K de sommets $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$.
- $\Sigma_K = a_1 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$
- $P_0 = \text{Vect}(\{1\})$ (espace des polynômes à valeurs constantes).

On vérifie que cet élément est bien un élément fini de LAGRANGE. Pour cela, on montre que Σ_K est P_K -unisolvant.

Soit $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ et $p \in P_0$. On suppose que $p(a_1) = \alpha_1$. La fonction p est de la forme $p(x, y) = a$ et on a donc $a = \alpha_1$. La connaissance de p au noeud a_1 détermine entièrement la fonction p .

Les fonctions de base locales sur l'élément fini de référence K sont définies par

$$p_i \in P_0, \quad p_i(a_j) = \delta_{ij}$$

Il est évident que, dans notre cas, la fonction de forme locale est

$$p(x, y) = 1$$

De plus, $\text{Card}(\Sigma_K) = 1 = \dim(\Sigma_K)$.

De ce fait, l'élément fini P_0 est bien unisolvant.

3.1.3 Élément fini local P1-sommet

On définit l'élément fini de référence :

- On choisit le triangle K de sommets $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$.
- $\Sigma_K = (a_i)_{i=1,2,3}$ avec :

$$a_1 = (0, 0)$$

$$a_2 = (1, 0)$$

$$a_3 = (0, 1)$$

- $P_1 = Vect(\{1, x, y\})$

On vérifie que cet élément est bien un élément fini de LAGRANGE. Pour cela, on montre que Σ_K est P_K -unisolvant.

Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ et $p \in P$. On suppose que $p(a_i) = \alpha_i$, $i = 1, 2, 3$.

La fonction p est de la forme $p(x, y) = a + bx + cy$ et on a donc :

$$\begin{cases} a &= \alpha_1 \\ a + b &= \alpha_2 \\ a + c &= \alpha_3 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} a &= \alpha_1 \\ b &= \alpha_2 - \alpha_1 \\ c &= \alpha_3 - \alpha_1 \end{cases}$$

La connaissance de p aux noeuds $(a_i)_{i=1,2,3}$ détermine donc entièrement la fonction p .

Les fonctions de base locales sur l'élément fini de référence K sont définies par

$$p_i \in \mathbb{P}, p_i(a_j) = \delta_{ij}$$

ce qui détermine les p de manière unique comme expliqué à l'instant. On a donc :

$$\begin{cases} p_1(x, y) &= 1 - x - y \\ p_2(x, y) &= x \\ p_3(x, y) &= y \end{cases}$$

Finalement, $\text{Card}(\Sigma_K) = 3 = \dim(\Sigma_K)$.

De ce fait, l'élément fini P_1 -sommet est bien unisolvant.

3.1.4 Élément fini local P2

On définit l'élément fini de référence :

- On choisit le triangle K de sommets $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(0, 1)$
- $\Sigma_K = (a_i)_{i=1,\dots,6}$ avec

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_1 & = & (0, 0) \\ a_2 & = & (1, 0) \\ a_3 & = & (0, 1) \\ a_4 & = & (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ a_5 & = & (0, \frac{1}{2}) \\ a_6 & = & (\frac{1}{2}, 0) \end{array} \right.$$

- $P_2 = Vect(\{1, x, y, xy, x^2, y^2\})$

Les fonctions de base locales peuvent être définies à partir des coordonnées barycentriques. On rappelle que les coordonnées barycentriques d'un point x du triangle K de sommets a_1, a_2 et a_3 sont les réels λ_1, λ_2 et λ_3 tels que :

$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$$

Dans le cas de notre triangle de référence, les coordonnées d'un point X de coordonnées cartésiennes (x, y) sont donc :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \lambda_1 & = & 1 - x - y \\ \lambda_2 & = & x \\ \lambda_3 & = & y \end{array} \right.$$

Nous retrouvons, sans surprises, les fonctions de formes locales pour l'élément P1-sommet. En effet, nous aurions pu déjà utiliser cette caractérisation dans la configuration précédente. Par définition des coordonnées barycentriques, on a :

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1 \quad \text{et} \quad \lambda_i \geq 0$$

On peut alors déterminer les fonctions de base de notre élément de référence K en fonction des coordonnées barycentriques des six noeuds. Les fonctions de base sont telles que

$$p_i \in P_2, p_i(a_j) = \delta_{ij} \quad \forall i = 1, \dots, 6$$

On commence par p_1 . On veut

$$p_1(a_1) = 1 \quad \text{et} \quad p_i(a_i) = 0 \quad \forall i = 2, \dots, 6$$

La fonction p_1 définie par

$$p_1(x, y) = 2\lambda_1(\lambda_1 - \frac{1}{2})$$

convient. Par symétrie, on définit

$$p_2(x, y) = 2\lambda_2(\lambda_2 - \frac{1}{2})$$

$$p_3(x, y) = 2\lambda_3(\lambda_3 - \frac{1}{2})$$

Les fonctions de base associées aux noeuds a_4, a_5, a_6 sont alors :

$$p_4(x, y) = 4\lambda_2\lambda_3$$

$$p_5(x, y) = 4\lambda_1\lambda_3$$

$$p_6(x, y) = 4\lambda_1\lambda_2$$

Il est facile de voir que ces fonctions forment une famille libre d'éléments de P_2 et comme $\text{Card}(\Sigma_K) = 6 = \dim(P_K)$, Σ_K est bien P_K -unisolvant. L'élément P2 est donc bien un élément fini.

3.2 Construction d'une approximation conforme

Nous cherchons maintenant à définir une approximation conforme pour la formulation variationnelle (2.1.1). La méthode des éléments finis nous permet de faire cela. On cherche alors à construire un triplet $(\Omega_h, \Sigma_h, V_h)$. On note Ω_h l'approximation de notre espace Ω par une triangulation \mathcal{T}_h . Σ_h est défini comme l'ensemble de nos degrés de liberté (déterminés lors de l'analyse des éléments finis ci-dessus). Finalement, il nous reste à construire l'espace V_h . Dans le cadre de la formulation variationnelle (2.1.1) que l'on rappelle :

$$(FV) \begin{cases} \text{Trouver } u \in (H_0^1(\Omega))^3 \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega} 2\mu \epsilon(u) : \epsilon(v) + \lambda \text{div}(u) \text{div}(v) dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx \\ \forall v \in (H_0^1(\Omega))^3 \end{cases}$$

On cherche alors un élément fini P_K tel que $V_h \subset V := (H_0^1(\Omega))^3$ et

$$V_h = \{v_h \in (L^2(\Omega_h))^3, v_h|_K \in P_K \forall K \in \mathcal{T}_h, \gamma_0(v_h) = 0\}$$

En utilisant le lemme de conformité suivant :

Lemme 3.2.1.

Si $v_h \in H^m(K)$, $\forall K \in \mathcal{T}_h$ et $v_h \in C^{m-1}(\overline{\Omega_h})$ alors $v_h \in H^m(\Omega_h)$

On remarque qu'il nous faut au minimum un élément fini H^1 conforme ce qui est le cas des éléments finis P1 et P2 mais pas P0. La conformité signifie qu'il existe une régularité entre les extrémités de chaque élément de la triangulation. Nous allons démontrer cette notion de continuité pour les éléments P1-sommet et P2. De plus, si nous précisons P1-sommet, c'est qu'il existe l'élément fini P1-milieu (on peut démontrer qu'il s'agit bien d'un élément fini). Cependant, cet élément ne nous intéresse pas car il ne valide pas cette notion de continuité et, par conséquent, n'est pas H^1 conforme.

3.2.1 Conformité de l'espace V_h pour l'élément fini P1

Soit deux triangles K_1 et K_2 et leur arête commune est notée A .

On définit également les polynômes suivants :

$$\begin{aligned} p_{1|A} &= q_1 \text{ un polynôme de degré 1 en } s \text{ où } s \text{ l'abscisse du côté} \\ p_{2|A} &= q_2 \text{ un polynôme de degré 1 en } s \text{ où } s \text{ l'abscisse du côté} \end{aligned}$$

Les polynômes q_1 et q_2 ont la même valeur à leurs deux extrémités, qui sont les sommets communs des deux triangles K_1 et K_2 . On a donc $q_1 = q_2$. Ceci implique que $v_h \in C^0(K_1 \cup K_2)$ et de proche en proche $v_h \in C^0(\overline{\Omega_h})$. D'après le lemme de conformité on a alors $V_h \subset H_0^1(\Omega)$.

De plus, sur $\partial\Omega_h$, si $v_h = 0$ aux deux extrémités d'un segment A alors $v_{h|A} = 0$. Donc, de proche en proche, $\gamma_0(v_h) = 0$ et alors $V_h \subset H_0^1(\Omega_h)$.

L'espace d'approximation conforme s'écrit donc :

$$V_h = \left\{ v_h \in (C^0(\overline{\Omega_h}))^3, v_{h|_K} \in P_1, \forall K \in \mathcal{T}_h, \gamma_0(v_h) = 0 \right\}$$

3.2.2 Conformité de l'espace V_h pour l'élément fini P_2

On utilise la même méthode que pour le cas P_1 . On définit les polynômes suivants :

$$\begin{aligned} p_{1|A} &= q_1 \text{ un polynôme de degré 2 en } s \text{ où } s \text{ l'abscisse du côté} \\ p_{2|A} &= q_2 \text{ un polynôme de degré 2 en } s \text{ où } s \text{ l'abscisse du côté} \end{aligned}$$

Les polynômes q_1 et q_2 ont la même valeur à leurs deux extrémités ainsi qu'en leur milieu, qui sont les sommets communs des deux triangles K_1 et K_2 et le milieu de l'arête A . On a donc $q_1 = q_2$. Ceci implique que $v_h \in C^0(K_1 \cup K_2)$ et de proche en proche $v_h \in C^0(\overline{\Omega_h})$. D'après le lemme de conformité, on a alors $V_h \subset H^1(\Omega_h)$.

De plus, sur $\partial\Omega_h$, si $v_h = 0$ aux deux extrémités d'un segment A alors $v_{h|A} = 0$. Donc, de proche en proche, $\gamma_0(v_h) = 0$ et alors $V_h \subset H_0^1(\Omega_h)$.

L'espace d'approximation conforme s'écrit donc :

$$V_h = \left\{ v_h \in (C^0(\overline{\Omega_h}))^3, v_{h|_K} \in P_2, \forall K \in \mathcal{T}_h, \gamma_0(v_h) = 0 \right\}$$

3.2.3 Problème discret

Grâce à la conformité des éléments finis, nous pouvons finalement poser le problème discret équivalent à notre formulation variationnelle. Nous pouvons également ajouter que la conformité démontrée ci-dessus fonctionne aussi pour le problème aux conditions mixtes. On a alors le problème approché conforme :

$$(FVh) \begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega} 2\mu \epsilon(u_h) : \epsilon(v_h) + \lambda \operatorname{div}(u_h) \operatorname{div}(v_h) dx = \int_{\Omega} f \cdot v_h dx \\ \forall v_h \in V_h \end{cases}$$

Chapitre 4

Le problème de l'élasticité linéaire : un problème bien posé.

4.1 Préliminaires

Le concept mathématique de problème bien posé provient d'une définition de HADAMARD qui pensait que les modèles mathématiques de phénomènes physiques devraient avoir les propriétés suivantes :

- Une solution existe.
- La solution est unique.
- Elle dépend de façon continue des données dans le cadre d'une topologie raisonnable.

Généralement, la solution classique (autrement appelée solution forte) d'un problème demande la manipulation d'espaces mathématiques trop restrictifs, ce qui pose un certain nombre de problèmes pour démontrer l'existence et l'unicité d'une solution. C'est pourquoi on remplace la formulation forte par une formulation équivalente, appelée faible ou variationnelle, beaucoup plus avantageuse. C'est ce que nous avons fait dans le (2.1.1) pour deux types de conditions limites. Par suite, ce chapitre propose de démontrer l'existence et l'unicité de la solution du problème de l'élasticité linéaire, en se basant sur le travail fait dans (2.1.1).

4.1.1 Théorie de LAX-MILGRAM

Nous décrivons, dans un premier temps, une introduction à la théorie de LAX-MILGRAM nous permettant d'obtenir l'existence et l'unicité de la solution d'un problème variationnel dans un espace de Hilbert V . On considère un problème variationnel du type :

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que } a(u, v) = L(v) \text{ pour toute fonction } v \in V \quad (\star)$$

Les hypothèses sur a et L sont les suivantes :

- $L(\cdot)$ est une forme linéaire continue sur V , c'est à dire que $v \longrightarrow L(v)$ est linéaire de V dans \mathbb{R} et il existe $C > 0$ tel que :

$$|L(v)| \leq C \|v\|_V \quad \forall v \in V$$

- $a(\cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire sur V , c'est à dire que $w \longrightarrow a(w, v)$ est une forme linéaire de V dans \mathbb{R} pour tout $v \in V$ et $v \longrightarrow a(w, v)$ est une forme linéaire de V dans \mathbb{R} pour tout $w \in V$.
- $a(\cdot, \cdot)$ est continue, c'est à dire qu'il existe $M > 0$ tel que :

$$|a(w, v)| \leq M \|w\|_V \|v\|_V \quad \forall w, v \in V$$

- $a(\cdot, \cdot)$ est coercive (ou elliptique) c'est à dire qu'il existe $\mu > 0$ tel que :

$$a(v, v) \geq \mu \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V$$

Nous remarquerons par la suite que l'hypothèse de coercivité est généralement l'étape la plus dure à démontrer. Cela nous mène à l'énoncé du théorème de LAX-MILGRAM.

Théorème 4.1.1 (Lax-Milgram).

Soit V un espace de Hilbert réel, $L(\cdot)$ une forme linéaire continue sur V , $a(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire coercive sur V . Alors la formulation variationnelle (\star) admet une unique solution. De plus, cette solution dépend continûment de la forme linéaire L .

Il est ainsi facile de déduire que nous allons essayer d'appliquer ce théorème sur nos problèmes variationnels pour montrer que le problème de l'élasticité linéaire est un problème bien posé.

4.1.2 Quelques théorèmes utiles

Dans cette partie, nous posons (sans démonstration) des théorèmes et lemmes particulièrement utiles pour la suite de notre étude.

Lemme 4.1.2 (Inégalité de KÖRN).

Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^1 de \mathbb{R}^n . Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $v \in (H^1(\Omega))^N$, on a

$$\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\epsilon(v)\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (4.1)$$

L'inégalité de KÖRN n'est pas une banalité. En effet, son membre de gauche contient toutes les dérivées partielles de v alors que son membre de droite fait intervenir seulement certaines combinaisons des dérivées partielles. L'interprétation mécanique de cette inégalité est la suivante. L'énergie élastique, proportionnelle à la norme du tenseur des déformations $\epsilon(u)$ dans $L^2(\Omega)$, contrôle la norme du déplacement u dans $H^1(\Omega)$, à l'addition près de la norme de u dans $L^2(\Omega)$. Si $v \in H_0^1(\Omega)$, nous avons une écriture simplifiée de cette inégalité, décrit ci-après.

Lemme 4.1.3 (Variante de KÖRN).

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N . Pour toute fonction $v \in (H_0^1(\Omega))^N$, on a :

$$\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{2} \|\epsilon(v)\|_{L^2(\Omega)} \quad (4.2)$$

Theorème 4.1.4 (Inégalité de Poincaré).

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N borné dans au moins une direction de l'espace. Il existe une constante $\alpha > 0$ telle que, pour toute fonction $v \in H_0^1(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \leq \alpha \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx \quad (4.3)$$

Theorème 4.1.5 (Théorème de RELICH).

Si Ω est un ouvert borné régulier de classe C^1 , alors de toute suite bornée de $H^1(\Omega)$ on peut extraire une sous-suite convergente dans $L^2(\Omega)$ (on dit que l'injection canonique de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte).

Lemme 4.1.6 (Mouvements Rigides).

Soit Ω un ouvert connexe de \mathbb{R}^N . Soit l'ensemble \mathcal{R} des "mouvements rigides" défini par :

$$\mathcal{R} = \{v(x) = a \wedge x + b \quad a, b \in \mathbb{R}^N\}$$

Si $v \in H^1(\Omega)^N$ vérifie $\epsilon(v) = 0$ dans Ω alors $v \in \mathcal{R}$

Nous sommes maintenant en mesure de prouver les résultats d'existence et d'unicité pour notre problème.

4.2 Conditions aux limites de DIRICHLET

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^3 et soit $f \in (L^2(\Omega))^3$, on considère le problème :

$$(P1) \begin{cases} -\operatorname{div}(\sigma(u)) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Dont la formulation variationnelle, démontrée en (2.1.1), est la suivante :

$$(FV1) \begin{cases} \text{Trouver } u \in (H_0^1(\Omega))^3 \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega} 2\mu \epsilon(u) : \epsilon(v) + \lambda \operatorname{div}(u) \operatorname{div}(v) dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx \\ \forall v \in (H_0^1(\Omega))^3 \end{cases}$$

Nous allons montrer qu'il existe un unique $u \in (H_0^1(\Omega))^3$, solution de ce problème. Pour cela, vérifions les conditions du théorème de LAX-MILGRAM.

On note :

- $a(u, v) = \int_{\Omega} 2\mu \epsilon(u) : \epsilon(v) + \lambda \operatorname{div}(u) \operatorname{div}(v) \, dx$
- $L(v) = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx$

On vérifie alors les hypothèses du théorème :

- H_0^1 est un espace de Hilbert.
- $L(v)$ est bien une forme linéaire continue sur $(H_0^1(\Omega))^3$.
- $a(u, v)$ est une forme bilinéaire continue sur $(H_0^1(\Omega))^3 \times (H_0^1(\Omega))^3$ ($a(u, v)$ forme un produit scalaire majorable par la norme de u et v).

Finalement, la véritable difficulté réside en la démonstration de la coercivité. On veut montrer qu'il existe $M > 0$ tel que :

$$a(u, u) \geq M \|u\|_{H^1}^2$$

Nous allons procéder en trois étapes :

1. On montre tout d'abord que :

$$\int_{\Omega} (2\mu |\epsilon(u)|^2 + \lambda |\operatorname{div}(u)|^2) \, dx \geq \nu \int_{\Omega} |e(u)|^2 \, dx$$

Notons que, comme $\epsilon(u)$ est une matrice symétrique, on peut la décomposer sous la forme :

$$\epsilon = \epsilon^d + \epsilon^h \text{ avec } \epsilon^d = \epsilon - \frac{1}{3} \operatorname{Tr}(\epsilon) \operatorname{Id} \text{ et } \epsilon^h = \frac{1}{3} \operatorname{Tr}(\epsilon) \operatorname{Id}$$

de telle manière que :

$$\epsilon^d : \epsilon^h = 0 \text{ et } |\epsilon|^2 = |\epsilon^d|^2 + |\epsilon^h|^2$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} 2\mu |\epsilon(u)|^2 + \lambda (\operatorname{Tr}(\epsilon(u)))^2 &= 2\mu (|\epsilon(u)^d|^2 + |\epsilon(u)^h|^2) + \lambda (\operatorname{Tr}(\epsilon(u)))^2 \\ &= 2\mu |\epsilon(u)^d|^2 + (2\mu + 3\lambda) |\epsilon(u)^h|^2 \\ &\geq \min(2\mu, 2\mu + 3\lambda) (|\epsilon(u)^d|^2 + |\epsilon(u)^h|^2) \\ &\geq \nu |\epsilon(u)|^2 \end{aligned}$$

avec $\nu = \min(2\mu, (2\mu + 3\lambda))$. La valeur de $\nu > 0$ n'est pas un hasard. En effet, on retrouve ici les conditions faites sur les propriétés des matériaux en introduction de ce rapport !

2. On utilise la variante de l'inégalité de KÖRN (4.1.3) telle qu'il existe $C > 0$:

$$\int_{\Omega} |\epsilon(u)|^2 \, dx \geq C \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx$$

3. Finalement en utilisant l'inégalité de POINCARÉ(4.1.4)(car nous sommes dans H_0^1 !) on montre que, pour $M > 0$:

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \|\nabla u\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2}^2 \geq M \|u\|_{H^1}$$

avec $M = \frac{\min(1, \alpha)}{2}$, où α est issu de l'inégalité de POINCARÉ.

En combinant ces trois inégalités on a :

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \int_{\Omega} (2\mu|\epsilon(u)|^2 + \lambda|\operatorname{div}(u)|^2) dx \\ &\geq \nu \int_{\Omega} |\epsilon(u)|^2 dx \\ &\geq C\nu \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \\ &\geq C\nu M \|u\|_{H^1} \end{aligned}$$

On a donc obtenu la coercivité, les hypothèses sont toutes vérifiées, nous pouvons appliquer le théorème de LAX-MILGRAM et conclure l'existence et l'unicité d'une solution $u \in (H_0^1(\Omega))^3$ de (4.2).

4.3 Conditions aux limites mixtes

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^3 , f et g deux fonctions de $(L^2(\Omega))^3$ et Γ_1, Γ_N deux parties de $\partial\Omega$ telle que $\Gamma_1 \cup \Gamma_N = \partial\Omega$. On considère le problème aux limites suivant :

$$(P2) \begin{cases} -\operatorname{div}(\sigma(u)) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ \sigma(u) \cdot N = h & \text{sur } \Gamma_N \end{cases}$$

Dont la formulation variationnelle, démontrée en (2.2), est la suivante :

$$(FV) \begin{cases} \text{Trouver } u \in V = \{u \in (H^1(\Omega))^3, u = 0 \text{ sur } \Gamma_1\} \text{ et tel que} \\ \int_{\Omega} 2\mu\epsilon(u) : \epsilon(v) + \lambda\operatorname{div}(u)\operatorname{div}(v) = \int_{\Omega} f \cdot v dx + \int_{\Gamma_N} h \cdot v dS \\ \forall v \in V \end{cases}$$

On va montrer qu'il existe une unique solution $u \in V$ de ce problème. Sans surprises, nous appliquons le théorème de LAX-MILGRAM.

On note :

- $a(u, v) = \int_{\Omega} 2\mu\epsilon(u) : \epsilon(v) + \lambda\operatorname{div}(u)\operatorname{div}(v) dx$

- $L(v) = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx + \int_{\Gamma_N} h \cdot v \, dS$

On vérifie alors les hypothèses du théorème :

- V est un espace de Hilbert car $V = \ker(\gamma_0)$ avec $\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma_1)$ linéaire et continue.
- $L(v)$ est bien une forme linéaire continue sur V .
- $a(u, v)$ est une forme bilinéaire continue sur $V \times V$

Finalement, la véritable difficulté réside encore en la démonstration de la coercivité. En reprenant l'étape (1) de la démonstration pour le cas limite de DIRICHLET, il nous reste à montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall v \in V \quad \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|\epsilon(u)\|_{L^2(\Omega)} \quad (4.4)$$

Pour cela, on procède en deux étapes :

1. On commence par montrer que $\|\epsilon(u)\|_{L^2(\Omega)}$ est une norme sur V . Le seul point important à relever est de montrer que $\|\epsilon(u)\|_{L^2(\Omega)} = 0 \implies u = 0$. On suppose donc que $\|\epsilon(u)\|_{L^2(\Omega)} = 0$. Le lemme (4.1.6) nous indique que u est un déplacement rigide, c'est à dire que

$$u(x) = a \wedge x + b \quad a, b \in R^3$$

u ne peut donc s'annuler que :

- sur une droite si $a \neq 0$
- nulle part si $a = 0$ et $b \neq 0$
- partout si $a = b = 0$

Comme u s'annule sur une partie du bord, de mesure positive, alors on est nécessairement dans la dernière situation, c'est à dire $u = 0$. Ce qui conclut cette première partie.

2. On démontre (4.4) par l'absurde. Ainsi, si (4.4) est faux, il existe une suite $(u_n) \in V$ telle que :

$$\|u_n\|_{H^1(\Omega)} = 1 > n \|\epsilon(u_n)\|_{L^2(\Omega)}$$

En particulier, la suite $\epsilon(u_n)$ tend vers 0 dans $L^2(\Omega)^3$. D'autre part, comme u_n est bornée dans $H_1(\Omega)^3$, par application du théorème de RELICH (4.1.5), il existe une sous-suite, notée elle-même u_n qui converge dans $L^2(\Omega)^3$. L'inégalité de KÖRN (4.1.2) implique que :

$$\|u_n - u_p\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \|u_n - u_p\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\epsilon(u_n) - \epsilon(u_p)\|_{L^2(\Omega)}^2 \longrightarrow 0$$

d'où l'on déduit que la suite u_n est de CAUCHY dans $H_0^1(\Omega)^3$ donc converge vers une limite L vérifiant $\|\epsilon(L)\|_{L^2(\Omega)} = 0$. Comme il s'agit d'une norme sur V , on en déduit que la limite est nulle ce qui est absurde car $\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} = 1$.

Chapitre 5

Estimations d'erreur et erreur d'interpolation

Dans cette ultime partie théorique, nous nous intéressons aux estimations d'erreur sur la solution du problème ainsi qu'aux erreurs d'interpolation.

5.1 Estimations d'erreur sur la solution du problème de l'élasticité linéaire

Nous avons vu précédemment que l'on pouvait écrire le problème de l'élasticité linéaire (que ce soit avec des conditions de DIRICHLET ou mixte) comme :

$$(FV1) \begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que :} \\ a(u, v) = l(v) \\ \forall v \in V \end{cases}$$

Grâce au théorème de LAX-MILGRAM et à l'inégalité de KORN, nous avons montré que ce problème était bien posé c'est à dire qu'il existe une solution unique. De plus, nous avons construit une approximation conforme pour les formulations variationnelles proposées qui nous ont mené à l'écriture du problème discret que nous allons résoudre. Ce dernier a été rédigé dans le chapitre deux dont la forme est la suivante :

$$(FV_h) \begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que :} \\ a(u_h, v) = l(v_h) \\ \forall v_h \in V_h \end{cases}$$

Par l'application du théorème de LAX-MILGRAM et puisque $V_h \subset V$, il est immédiat que le problème approché admet une solution unique u_h .

On peut donc faire une estimation d'erreur de cette solution. On cherche alors à estimer

$$e(u_h) = \|u - u_h\|$$

Nous énonçons ci-après le lemme de CEA. Ce dernier nous permet de montrer que l'erreur d'approximation est bornée par l'erreur d'interpolation. Nous démontrons ce lemme, ce qui va nous permettre, par la suite de focaliser notre étude sur les erreurs d'interpolation.

Lemme 5.1.1 (Lemme de Céa).

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$$

Où M et α sont les quantités du théorème de LAX-MILGRAM.

Preuve : Nous rappelons que :

$$a \text{ est coercive} \Rightarrow \alpha \|u - u_h\|_V^2 \leq a(u - u_h, u - u_h)$$

$$a \text{ est continue} \Rightarrow a(u - u_h, u - v_h) \leq M \|u - u_h\|_V \|u - v_h\|_V.$$

Pour tout $v_h \in V_h$, nous avons grâce à la coercivité de a :

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|^2 &\leq \frac{1}{\alpha} a(u - u_h, u - u_h) = \frac{1}{\alpha} a(u - u_h, u - v_h + v_h - u_h) \\ &= \frac{1}{\alpha} [a(u - u_h, u - v_h) + a(u - u_h, v_h - u_h)] \end{aligned}$$

Or $v_h - u_h \in V_h$ donc

$$a(u, v_h - u_h) = a(u_h, v_h - u_h) = l(v_h - u_h)$$

D'où

$$a(u - u_h, v_h - u_h) = 0$$

Donc par la continuité, nous avons :

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_V^2 &\leq \frac{1}{\alpha} a(u - u_h, u - v_h) \\ &\leq \frac{M}{\alpha} \|u - u_h\|_V \|u - v_h\|_V \\ \|u - u_h\|_V &\leq \frac{M}{\alpha} \|u - v_h\|_V \end{aligned}$$

Cette inégalité est vraie pour tout $v_h \in V_h$ donc en particulier

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$$

De plus il est aisé de voir que a est symétrique, cette forme bilinéaire définit donc un produit scalaire et une norme sur V appelée norme de l'énergie

$$\|u\|_e = \sqrt{a(u, u)}, \forall u \in V$$

Cette norme est équivalente à la norme usuelle sur V puisqu'en utilisant le fait que a est continue et coercive, nous obtenons

$$\sqrt{\alpha} \|u\|_V \leq \|u\|_e \leq \sqrt{M} \|u\|_V, \forall u \in V$$

Grâce à cette propriété, nous obtenons une meilleure estimation d'erreur,

$$\|u - u_h\|_V \leq \sqrt{\frac{M}{\alpha}} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$$

En effet,

$$a(u - u_h, u - u_h) = \|u - u_h\|_e^2 \leq \|u - v_h\|_e^2 = a(u - v_h, u - v_h), \forall v_h \in V_h$$

D'où,

$$\alpha \|u - u_h\|_V^2 \leq a(u - u_h, u - u_h) \leq a(u - v_h, u - v_h) \leq M \|u - v_h\|_V^2, \forall v_h \in V_h$$

Et ainsi, nous obtenons,

$$\|u - u_h\|_V \leq \sqrt{\frac{M}{\alpha}} \|u - v_h\|_V, \forall v_h \in V_h$$

Elle est vraie pour tout v_h dans V_h et donc tient en passant à la borne inférieure.

5.2 Erreur d'interpolation

On a vu précédemment que l'on avait la majoration suivante grâce au lemme de CÉA :

$$\|u - u_h\|_V \leq \sqrt{\frac{M}{\alpha}} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$$

En appliquant ce lemme à $v_h = \pi_h u$, on obtient :

$$\|u - u_h\|_V \leq \sqrt{\frac{M}{\alpha}} \|u - \pi_h u\|_V$$

Par suite, nous effectuons une décomposition en majoration locales sur chaque élément :

$$\|u - u_h\|_V^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|u - \pi_h u\|_{m,K}^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{l=0}^m |u - \pi_h u|_{l,K}^2$$

Nous passons ensuite à l'élément de référence grâce au théorème suivant :

Theorème 5.2.1.

Soit K un élément quelconque de \mathcal{T}_h et \tilde{K} l'élément de référence. Soit F la transformation affine de $\tilde{K} \rightarrow K$ avec

$$F(\tilde{x}) = B\tilde{x} + b, \text{ B inversible}$$

$$\forall v \in H^l(K), |v|_{l,K} \leq c \|B\|_2^l |\det B|^{-\frac{1}{2}} |v|_{l,\tilde{K}}$$

Et les données génériques de référence : $\|B\| = \frac{h_k}{\rho}$

Nous faisons ensuite la majoration sur l'élément de référence. Soient l et k deux entiers tels que $0 \leq l \leq k+1$.

Si $\tilde{\pi}$ laisse $P_k(\tilde{K})$ invariant (i.e : $\forall \tilde{p} \in P_k(\tilde{K}), \tilde{\pi} \tilde{p} = \tilde{p}$) alors,

$$\exists c > 0, \forall \tilde{v} \in H^{k+1}(\tilde{K}), |\tilde{v} - \tilde{\pi} \tilde{v}|_{j,\tilde{K}} \leq c |\tilde{v}|_{k+1,\tilde{K}}$$

En reprenant ce qui précède on obtient,

$$|v - \pi v|_{l,K} \leq \tilde{c} \frac{h_K^{k+1}}{\rho_K^l} |v|_{k+1,K}$$

Nous faisons ensuite l'assemblage des majorations locales. On assemble le résultat précédent pour tous les éléments du maillage \mathcal{T}_h et pour toutes les valeurs de semi-normes.

$$|v - \pi v|_m \leq c h_K^{k+1-m} |v|_{k+1,K}$$

$$\|u - u_h\|_m \leq c h_K^{k+1-m} |v|_{k+1,K}$$

Ici, nous sommes dans $H^1(\Omega)$, donc :

$$\|u - u_h\|_1 \leq c h_K^k |v|_{k+1}$$

où k est le degré de P_k .

Ainsi nous avons montré les estimations d'erreurs sur la solution du problème de l'élasticité linéaire. Cela conclut la partie théorique de notre rapport. Le prochain chapitre concernera la résolution de ce problème via le logiciel FREEFEM++ ainsi qu'une étude attentive sur l'analyse des propriétés numériques des approximations obtenues.

Chapitre 6

Programmation du problème de l'élasticité linéaire

6.1 Notre stratégie

Ce chapitre s'intéresse à la programmation du problème d'élasticité linéaire en dimension 3 par la méthode des éléments finis. Nous utilisons le logiciel spécialisé `FREEFEM++`. Nous cherchons à étudier, à la fois les propriétés numériques des approximations obtenues, mais aussi à comparer les solveurs directs et itératifs mis à notre disposition par le logiciel.

Nous organisons notre étude de la manière suivante. On se propose pour commencer de décrire le domaine d'étude ainsi que de présenter la triangulation utilisée. Dans un second temps, nous montrerons comment créer des cas "tests" analytiques. Ces derniers nous permettront, via une étude sur l'erreur du déplacement, de sélectionner le solveur "optimal" (au niveau de la précision ainsi que du temps de calcul) pour la suite de notre étude. Dans une quatrième partie, nous étudierons les propriétés numériques des approximations via différents calculs d'erreurs (erreurs sur les déformations, contraintes ...). Finalement, après avoir validé nos approximations, nous conclurons par un exemple classique, à savoir la déformation d'une poutre dont l'une des faces est encastree dans un mur et inamovible.

6.2 Domaine et maillage

Nous considérons comme domaine d'étude un pavé de longueur L , de largeur et hauteur l . Ce pavé représentera dans notre dernière partie notre poutre. Pour l'analyse des propriétés numériques, nous allons avoir besoin de faire des boucles sur la finesse du maillage. Pour plus de facilités nous considérerons alors un cube $[0, 1]^3$. Le maillage est effectué automatiquement par le logiciel. On obtient alors pour le pavé et le cube les figures suivantes.

On remarque qu'une des faces du pavé est d'une couleur différente des autres. Cela provient du fait que nous avons mis un label différents sur cette partie. En effet, dans notre ultime section,

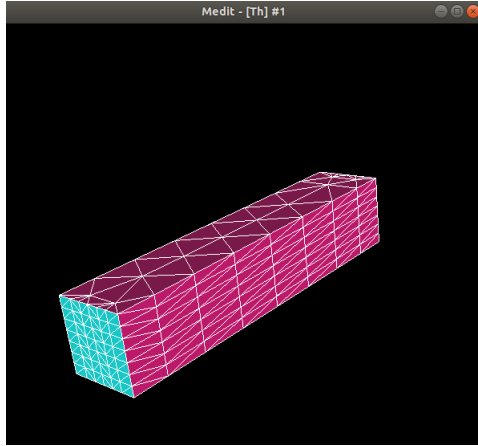


FIGURE 6.1 – Maillage du pavé

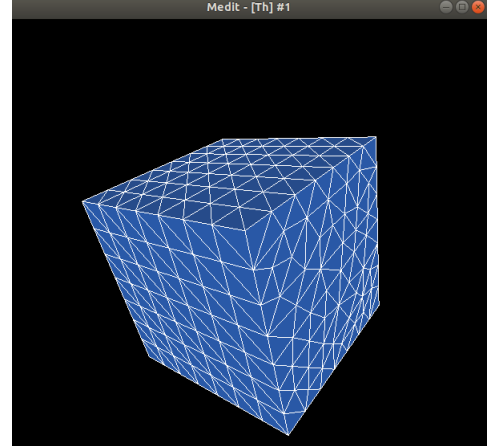


FIGURE 6.2 – Maillage du cube

nous voulons des conditions spécifiques sur cette face (être capable de l'empêcher de bouger i.e face sur laquelle nous allons poser les conditions de DIRICHLET).

6.3 Créations de fonctions analytiques "tests"

Afin de pouvoir effectuer des calculs d'erreur, nous devons créer des fonctions tests analytiques en appliquant une force volumique correspondant à une solution calculée à l'avance. Comme les calculs peuvent devenir très lourds, nous considérons des cas tests où seule une composante n'est pas nulle afin de justifier la qualité de notre approximation. Nous effectuerons à chaque fois 3 cas-tests, où nous ferons varier la composante non-nulle. Nous utiliserons pour notre approximation les éléments finis $P1$.

Pour cette dernière, nous prenons un polynôme s'annulant sur tous les bords du domaine. On rappelle que L représente la longueur du pavé et l la largeur. Comme l'analyse des propriétés numériques s'effectuent sur un cube, nous avons $L = l$.

Ainsi, on considère comme premier cas test,

$$(C1) \begin{cases} u1 = x_1 x_2 x_3 (x_1 - L)(x_2 - l)(x_3 - l) \\ u2 = 0 \\ u3 = 0 \end{cases}$$

Nous allons alors résoudre le problème de l'élasticité linéaire pour $1 \leq i \leq 3$

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \operatorname{div}(u) \delta_{i,j} \right) = -f_i$$

On a donc pour f_1 ,

$$\begin{aligned} -f_1 &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \lambda \operatorname{div}(u) \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \right) \\ -f_1 &= \mu \left(2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right) + \lambda \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \\ f_1 &= - \left((4\mu + 2\lambda) x_2 x_3 (x_2 - l) (x_3 - l) + 2\mu x_1 (x_1 - L) (x_3 (x_3 - l) + x_2 (x_2 - l)) \right) \end{aligned}$$

En opérant de la même façon, on obtient pour f_2 ,

$$f_2 = -(\lambda + \mu) ((2x_2 - l)(2x_1 - L)x_3(x_3 - l))$$

et pour f_3 ,

$$f_3 = -(\lambda + \mu) ((2x_3 - l)(2x_1 - L)x_2(x_2 - l))$$

Finalement, en changeant la composante non-nulle comme expliqué précédemment, on obtient les deux cas tests suivants :

$$(C2) \begin{cases} u1 = 0 \\ u2 = x_1 x_2 x_3 (x_1 - L) (x_2 - l) (x_3 - l) \\ u3 = 0 \end{cases}$$

pour lequel les solutions sont,

$$\begin{cases} f1 = -(\lambda + \mu) ((2x_2 - l)(2x_1 - L)x_3(x_3 - l)) \\ f2 = -((4\mu + 2\lambda) x_1 x_3 (x_1 - L) (x_3 - l) + 2\mu x_2 (x_2 - l) (x_1 (x_1 - L) + x_3 (x_3 - l))) \\ f3 = -(\lambda + \mu) ((2x_2 - l)(2x_3 - l)x_1(x_1 - L)) \end{cases}$$

et,

$$(C3) \begin{cases} u1 = 0 \\ u2 = 0 \\ u3 = x_1 x_2 x_3 (x_1 - L) (x_2 - l) (x_3 - l) \end{cases}$$

pour lequel les solutions sont,

$$\begin{cases} f1 = -(\lambda + \mu) ((2x_3 - l)(2x_1 - L)x_2(x_2 - l)) \\ f2 = -(\lambda + \mu) ((2x_2 - l)(2x_3 - L)x_1(x_1 - L)) \\ f3 = -((4\mu + 2\lambda) x_1 x_2 (x_1 - L) (x_2 - l) + 2\mu x_3 (x_3 - l) (x_1 (x_1 - L) + x_2 (x_2 - l))) \end{cases}$$

6.4 Choix du meilleur solveur

Armé des cas tests calculés dans la section précédente, nous sommes en mesure de comparer les différents solveurs directs et itératifs mis à notre disposition par le logiciel FREEFEM++.

Nous analyserons les propriétés numériques des solveurs UMFPACK, CG et GMRES. Le solveur UMFPACK utilise une méthode *directe* pour la résolution de grands systèmes linéaires sparses. A l'inverse, les solveurs CG et GMRES sont des méthodes de résolution *itératives*.

Le but de cette section est de déterminer le solveur mêlant à la fois rapidité et précision afin de l'utiliser, dans la section suivante, pour l'analyse des propriétés numériques de nos approximations. Pour le calcul des approximations, nous utiliserons le cas test 1 (6.3).

6.4.1 Analyse du temps CPU

Dans un premier temps, nous affichons le temps de calcul de la solution par rapport au pas de maillage. On considère une boucle allant de 5 à 21 points de maillage *par bord* (pour plus de 21 points l'ordinateur est trop lent pour la méthode UMFPACK).

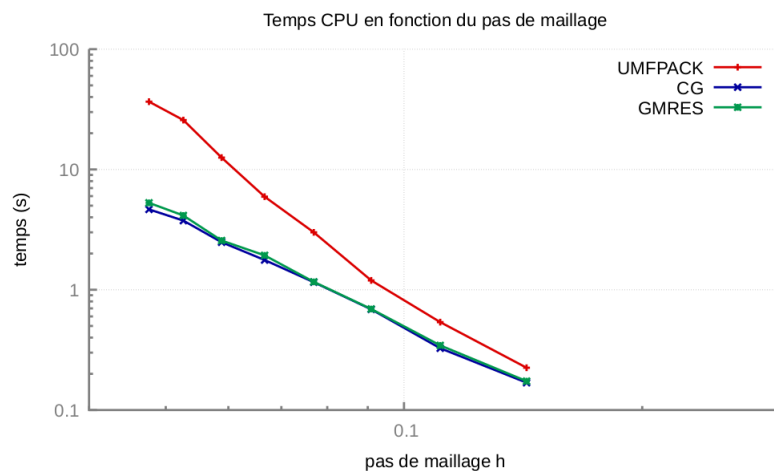


FIGURE 6.3 – Temps CPU / Pas de maillage

Nous remarquons que, en fonction de la finesse du maillage, le solveur direct UMFPACK est beaucoup plus lent que les deux solveurs itératifs. Ainsi, il semble raisonnable de penser utiliser une méthode itérative pour la suite. Cependant, nous pouvons nous poser les questions suivantes :

- Les solveurs itératifs arrivent-ils à la même précision que le solveur direct?
- Quel est le solveur itératif le plus rapide?

6.4.2 Analyse de la précision des méthodes itératives

Pour répondre à ces questions, nous fixons notre pas de maillage à une valeur que notre ordinateur peut supporter. Dans notre cas, on fixe 15 points de maillage *par côté*, ce qui nous donne 536 triangles, 299 arêtes et 4784 noeuds. Nous allons alors regarder l'évolution de l'erreur relative en fonction de la précision de la méthode (que l'on fait varier de 0.5 à 10^{-5}). On obtient le graphique suivant.

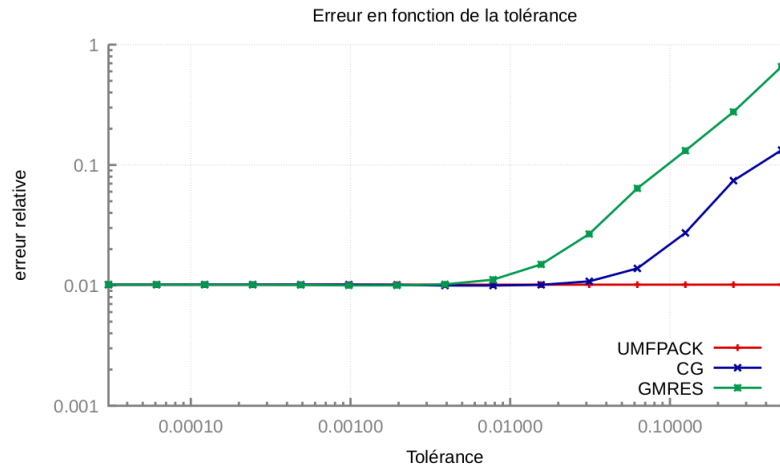


FIGURE 6.4 – Convergence solveur / Précision méthode

On observe que la méthode du gradient conjugué (CG) converge beaucoup plus vite que la méthode GMRES (la référence étant la précision du solveur direct UMFPACK). Cela signifie que, pour une précision de l'ordre 10^{-2} , la méthode CG atteint la précision UMFPACK, contrairement à la méthode GMRES qui doit avoir une précision à 10^{-3} .

Finalement, nous allons afficher le temps de calcul CPU par rapport à la précision donnée sur nos méthodes. Pour cela, nous reprenons les mêmes données que précédemment. Ainsi, on obtient le graphique. Nous remarquerons que, globalement, la méthode CG est plus rapide que GMRES.

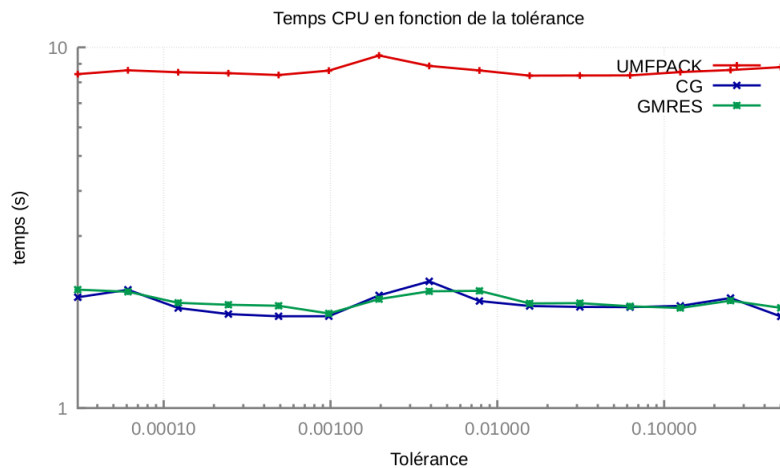


FIGURE 6.5 – Temps CPU / Précision méthode

6.4.3 Conclusion

Pour conclure cette partie, la méthode CG semble être le solveur idéal pour la suite de notre étude. En effet, il regroupe, pour une précision bien choisie (10^{-3} suffit) rapidité et précision par rapport à ses deux principaux concurrents. Nous utiliserons donc, pour toute la suite de ce rapport, la méthode de résolution CG avec une précision de l'ordre de 10^{-3} .

6.5 Analyse des propriétés numériques

On propose de détailler, dans cette section, une analyse des propriétés numériques obtenues. En particulier, on s'intéresse à la convergence des erreurs d'approximations de nos méthodes. La particularité du système que nous étudions est que l'on peut faire diverses analyses d'erreur.

On portera ainsi un oeil attentif aux erreurs sur :

- Le déplacement

$$e_h = \|u_h - u\|_{L^2}$$

- Le tenseur des déformations

$$e_h = \|\epsilon(u_h) - \epsilon(u)\|_{L^2}$$

- Le tenseur des contraintes

$$e_h = \|\sigma(u_h) - \sigma(u)\|_{L^2}$$

- Le critère de plasticité de VON MISES

$$e_h = \|\sigma_{VM}(u_h) - \sigma_{VM}(u)\|_{L^2}$$

$$\text{où } \sigma_{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} ((\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)).$$

D'un point de vue physique, le critère de VON MISES est un critère de plasticité. Il permet de savoir, sous des sollicitations données, si une pièce se déforme plastiquement ou bien si elle reste dans le domaine élastique. Par exemple, en résistance des matériaux, on désire parfois rester dans le domaine élastique, c'est ce qu'on appelle un critère de résistance.

Le tenseur des déformations, quant à lui, décrit l'état de déformation local résultat des contraintes (exprimées par le tenseur des contraintes). Tous les critères que nous observons sont donc des outils d'analyse très utilisés dans les études de matériaux. C'est pour cela qu'on s'intéresse également à leur approximation et que l'on souhaite valide pour notre méthode.

Nous affichons les erreurs pour les trois cas tests présentés en (6.3). On boucle sur un maillage prenant en compte de 5 à 21 points par *côté* (comme pour l'étude des solveurs). On affiche les résultats en sachant que nous effectuons notre analyse pour les éléments finis *P1*.

L'erreur sur le déplacement nous donne :

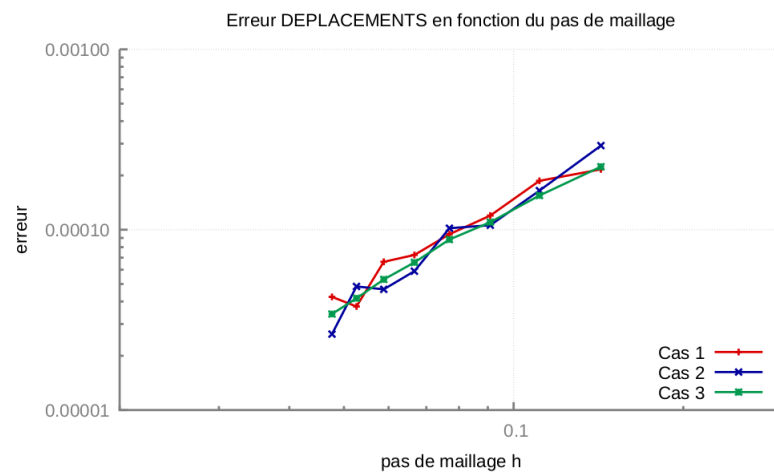


FIGURE 6.6 – Erreur déplacement

L'erreur sur le tenseur des déformations :

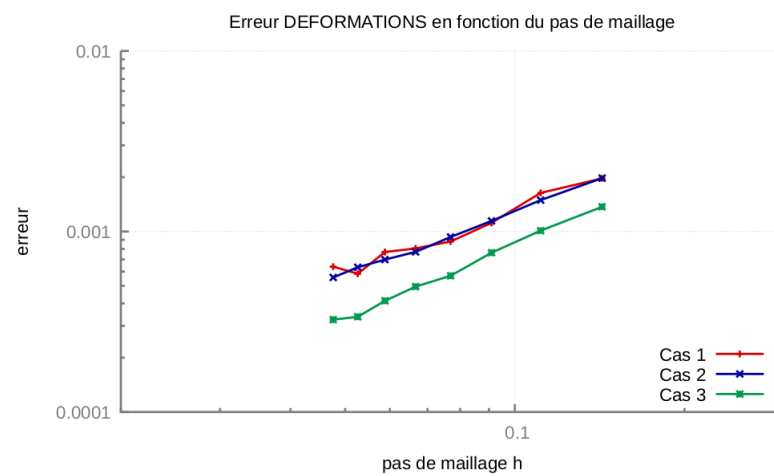


FIGURE 6.7 – Erreur tenseur des déformations

L'erreur sur le tenseur des contraintes :

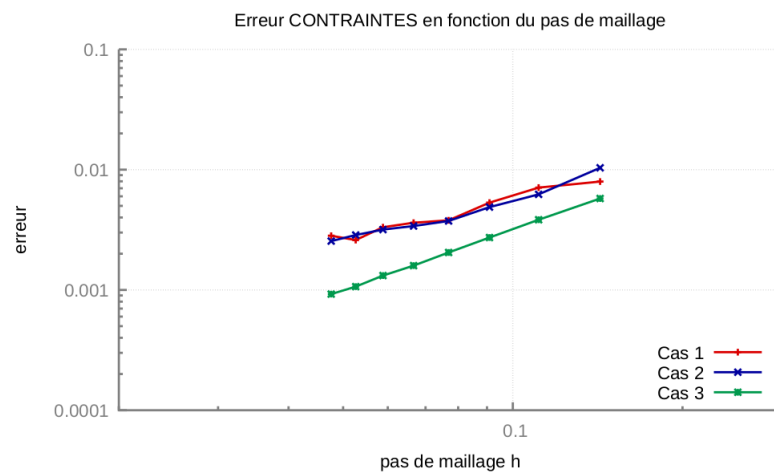


FIGURE 6.8 – Erreur tenseur des contraintes

L'erreur sur le critère de VON MISES :

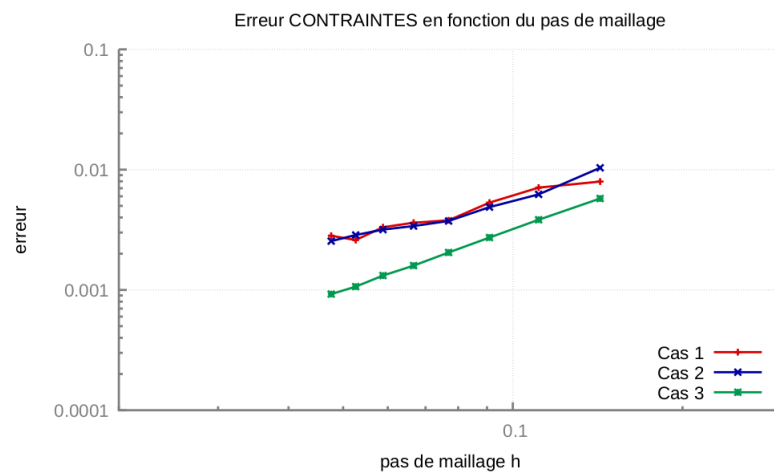


FIGURE 6.9 – Erreur tenseur des contraintes

Finalement, nous avons bien la convergence de notre méthode, ce qui valide notre approximation.

6.6 Un bel exemple!

Nous avons montré dans les parties précédentes que notre approximation était juste. Nous allons pouvoir maintenant l'appliquer à un cas concret.

Nous allons détailler notre méthode pour simuler la déformation d'une plaque de plexiglas dont un des côtés est fixé à un mur. Nous considérons comme longueur $L = 10$ et $l = 2$ et un maillage de 20 points par côté. On obtient alors le domaine initial maillé suivant.

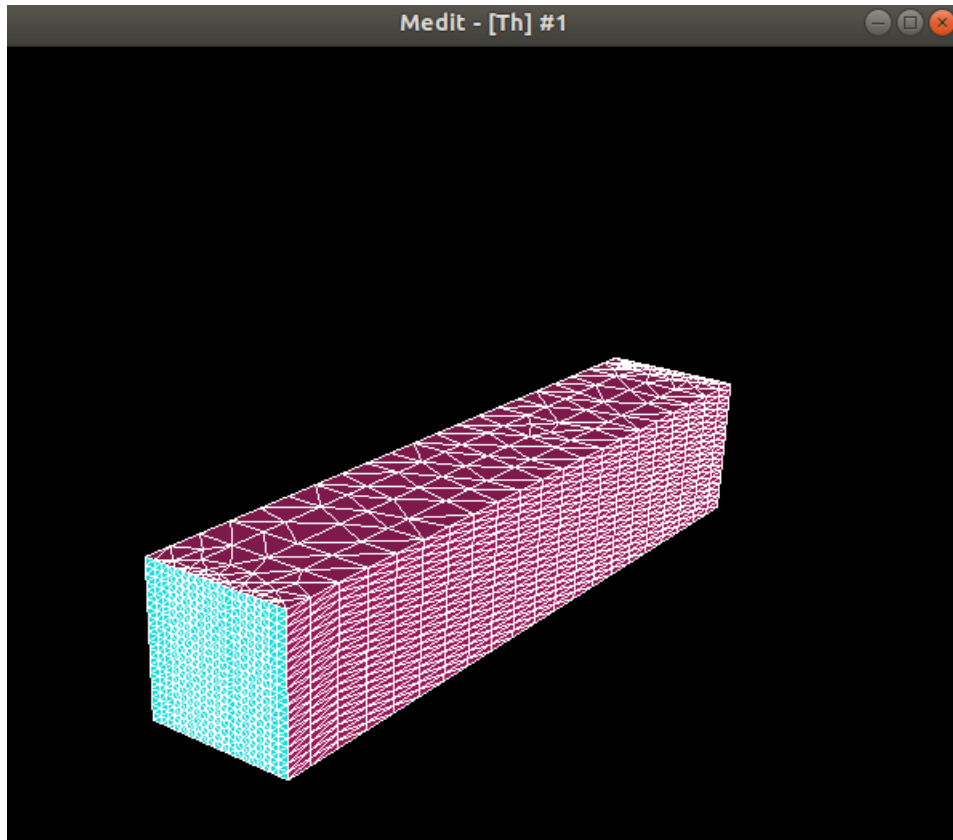


FIGURE 6.10 – Poutre initiale maillée

On utilise les coefficients de LAMÉ du plexiglas dont le module de YOUNG est de 2.38 et celui de POISSON est 0.415. Ensuite, on remarque que notre poutre a un label différent sur une face. En fait, nous allons appliquer des conditions de DIRICHLET sur cette face car on souhaite qu'elle soit inamovible.

Nous utilisons les éléments finis de type P1 pour notre résolution. Nous appliquons une force de -1 sur f_3 afin de n'obtenir qu'une déformation de la poutre vers le bas.

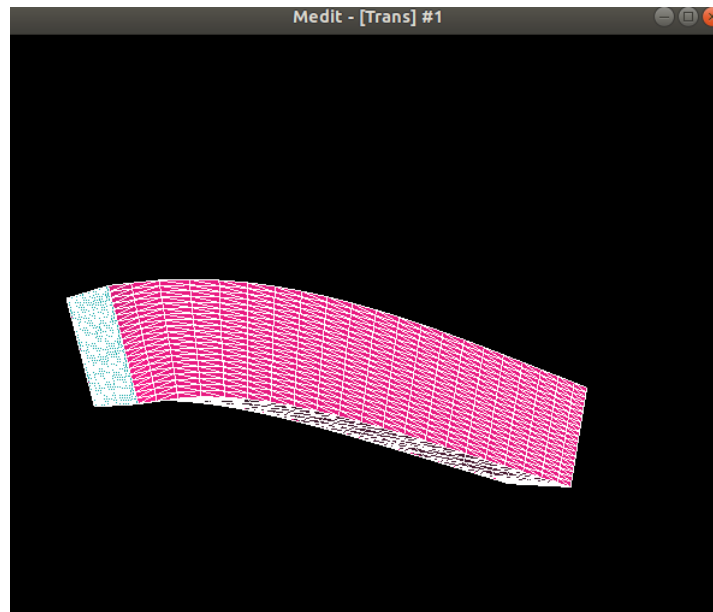


FIGURE 6.11 – Poutre après déformation

On peut également observer les fonctions de déplacements que nous avons obtenues :

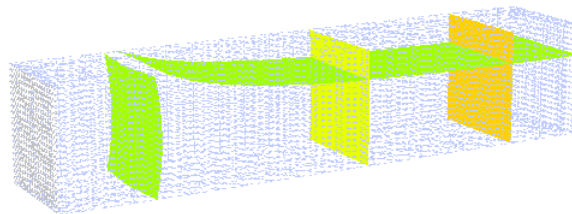
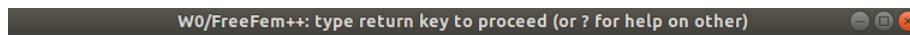


FIGURE 6.12 – Champs de déplacements

Dans cette figure, on peut voir le déplacement subit par la face supérieur ainsi que 3 plans intérieurs. On peut observer différentes couleurs. Ces dernières nous donnent une indication sur le déplacement subit par ces zones. Ainsi, on a en vert un faible déplacement et en orange un déplacement plus important.

Ainsi que le champ de contrainte associé au critère de VON MISES :

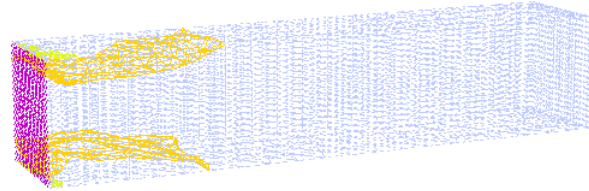
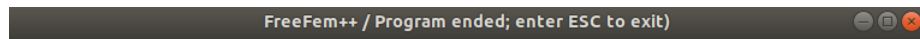


FIGURE 6.13 – Champ de contrainte de VonMises

Ici comme évoqué précédemment, on voit les zones (en orange) sollicitées par la déformation.