Analyse numérique pour le problème de Stokes

Thomas Philibert - Matthieu Nastorg - Clara-M. Alvinerie

Université de Bordeaux

23 janvier 2020

Sommaire

Mise en place du problème de Stokes

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et de classe $\mathcal{C}^1$. On cherche à résoudre le problème.
Déterminer $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$ et $p : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ solution de :

$$(S) \begin{cases} -\nu\Delta u + \nabla p = & f \text{ dans } \Omega \\ \mathrm{div}\,(u) = & 0 \text{ dans } \Omega \\ u = & g \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

On remarque que le problème possède une condition de Dirichlet non-homogène. On peut le transformer en un problème aux conditions limites homogènes en effectuant un changement de variable ainsi qu'un relèvement à divergence nulle.

Sommaire

Formulation Variationnelle

Soit $(v, q) \in V \times Q$. On suppose $f \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ et $(u, p) \in (\mathcal{C}^2(\bar{\Omega}) \times \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}))$.
On procède en intégrant les 2 premières équations. On obtient alors :

1. En utilisant la formule de Green dans la première équation et en choisissant $V = H_0^1(\Omega)^N$, on a :

$$\nu \int_\Omega \nabla u : \nabla v - \int_\Omega p \cdot \mathrm{div}\,(v)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f \cdot v\,\mathrm{d}x$$

2. De la seconde équation, on obtient

$$\int_\Omega \mathrm{div}\,(u) \cdot q = 0 \Longrightarrow Q = L_0^2(\Omega)$$

Formulation Variationnelle

D'où la formulation variationnelle :

$$(FV) \begin{cases} \text{Trouver } (u,p) \in (H_0^1(\Omega)^N \times L_0^2(\Omega)) \text{ tel que :} \\ \nu \int_\Omega \nabla u : \nabla v - \int_\Omega p \cdot \mathrm{div}\,(v)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f \cdot v\,\mathrm{d}x \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)^N \\ \int_\Omega \mathrm{div}\,(u) \cdot q = 0 \qquad \forall q \in L_0^2(\Omega) \end{cases}$$

On remarquera que l'on a pas besoin de définir $q \in L_0^2(\Omega)$ mais que $L^2(\Omega)$ suffit. Cela nous permet d'utiliser, pour la suite, la propriété suivante :

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$$

Interprétation

<u>But</u> : Retrouver la formulation forte à partir de la formulation faible.

Comme on sait que $\mathcal{D}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ on peut prendre $(v, q) \in (\mathcal{D}(\Omega)^N)^2$:

1. $\langle -\nu\Delta u + \nabla p, v\rangle = \langle f, v\rangle$

$$
\begin{aligned}
f \in L^2(\Omega), u \in H_0^1(\Omega) &\Longrightarrow \Delta u \in L^2(\Omega)\\
&\Longrightarrow u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\\
&\Longrightarrow p \in H^1(\Omega)
\end{aligned}
$$

2. $\langle div(u), q\rangle = 0 \Longrightarrow \mathrm{div}\,(u) = 0$ au sens de $\mathcal{D}'(\Omega)$

Théorème d'existence et d'unicité des problèmes mixtes

Soit V et Q deux espaces de Hilbert, soit a et b deux fonctions bilinéaires continues telles que $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ et $b : V \times Q \longrightarrow \mathbb{R}$
Etant donné $f \in V'$, on cherche $(u, p) \in V \times Q$ tel que :

$$\begin{cases} a(u, v) + b(p, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V \\ b(q, u) = 0 \quad \forall q \in Q \end{cases}$$

1. La forme a est V-elliptique : $\exists \alpha > 0$ tel que $a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2$
2. b satisfait la condition "inf-sup" :

$$\exists \beta > 0 \text{ t.q } \inf_q \sup_v \frac{b(v, q)}{\|v\| \, \|q\|} \geq \beta$$

Vérification

1. $H_0^1(\Omega)$ et $L_0^2(\Omega)$ sont des espaces de Hilbert.
2. $a(u,v) = \displaystyle\int_\Omega \nabla u : \nabla v \,\mathrm{d}x$ est une forme bilinéaire continue
3. $b(u,q) = \displaystyle\int_\Omega q \mathrm{div}\,(u)$ est une forme bilinéaire continue
4. a est coercive en utilisant le théorème de Poincaré
5. b vérifie bien la condition "inf-sup". Par utilisation d'un lemme bien pratique !

Sommaire

Description des éléments finis

On définit les éléments finis suivants :

- P_0
  - $K = ((0,0);(1,0);(0,1))$
  - $\Sigma_K = \{l_1(p) = p(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})\}$
  - $P_K = Vect\,\{1\}$
- P_1
  - $K = ((0,0);(1,0);(0,1))$
  - $\Sigma_K = \{l_{1\leq m\leq 3}(p) = p(x_{1\leq m\leq 3})\}$
  - $P_K = Vect\,\{1, x, y\}$
- P_2
  - $K = ((0,0);(1,0);(0,1))$
  - $\Sigma_K = \{l_{1\leq m\leq 6}(p) = p(x_{1\leq m\leq 6})\}$
  - $P_K = Vect\,\{1, x, y, xy, x^2, y^2\}$

Unisolvance

L'ensemble Σ_K est P_K-unisolvant si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. $card(\Sigma_K) = dim(P_K)$
2. L'application suivante est bijective

$$
\begin{aligned}
L : P_K &\longrightarrow \Sigma_K \\
p &\longrightarrow l_{1\leq m\leq M}(p)
\end{aligned}
$$

Comme on est en dimension finie, on montre la première condition et la deuxième condition soit par l'injectivité soit par la surjectivité. Dans notre cas, on exprimera alors une base de P_K qui désignera les fonctions de forme locale.

Fonctions de forme

- P_0

  $\longrightarrow card(\Sigma_K) = 1 = dim(P_K)$

  $\longrightarrow$ Une base de P_0 est $\{\phi_0(x,y)\}$ où $\phi_0(x,y) = 1$

- P_1

  $\longrightarrow card(\Sigma_K) = 3 = dim(P_K)$

  $\longrightarrow$ Une base de P_1 est $\{\phi_{1 \leq i \leq 3}(x,y)\}$ où

  $\phi_1(x,y) = 1 - x - y + \lambda_1$, $\phi_2(x,y) = x = \lambda_2$ et $\phi_3(x,y) = y = \lambda_3$

- P_2

  $\longrightarrow card(\Sigma_K) = 6 = dim(P_K)$

  $\longrightarrow$ Une base de P_2 est $\{\phi_{1 \leq i \leq 6}(x,y)\}$ où $\phi_1(x,y) = \lambda_1(2\lambda_1 - 1)$,

  $\phi_2(x,y) = \lambda_2(2\lambda_2 - 1)$, $\phi_3(x,y) = \lambda_3(2\lambda_3 - 1)$, $\phi_4(x,y) = 4\lambda_1\lambda_2$,

  $\phi_5(x,y) = 4\lambda_2\lambda_3$ et $\phi_6(x,y) = 4\lambda_1\lambda_3$

Conformité

On cherche une approximation conforme de la formulation variationnelle :

$$(FV)\begin{cases} \text{Trouver } (u,p) \in V := (H_0^1(\Omega))^N \times Q := L_0^2(\Omega)) \text{ tel que :} \\ a(u,v) + b(v,p) = l(v) & \forall v \in V \\ b(u,q) = 0 & \forall q \in Q \end{cases}$$

On cherche à définir deux espaces d'approximation de dimension finie V_h et Q_h tel que $V_h \subset V$ et $Q_h \subset Q$.

Pour l'approximation conforme de V, on cherche un élément fini P_K tel que $V_h = \left\{ v_h \in (C^0(\overline{\Omega_h}))^N, v_{h|K} \in P_K, \forall K \in \tau_h, \gamma_0 v_h = 0 \right\}$

Pour l'approximation conforme de Q, on cherche un élément fini P_K tel que $Q_h = \left\{ q_h \in (L^2(\overline{\Omega_h}))^N, q_{h|K} \in P_K, \forall K \in \tau_h \right\} \cap L_0^2(\Omega_h)$, ce qui est le cas des éléments finis P_0,P_1 et P_2.

Approximation conforme

On peut alors résoudre une approximation conforme de la forme :

$$(FV_h) \begin{cases} \text{Trouver } (u_h, p_h) \in V_h \times Q_h \text{ tel que :} & \\ a(u_h, v_h) + b(v_h, p_h) = l(v_h) & \forall v_h \in V_h \\ b(u_h, q_h) = 0 & \forall q_h \in Q_h \end{cases}$$

Sommaire

Passage à la forme matricielle

Soit $\{\phi_i, i = 1, ..., N_{Vh}\}$ une base de V_h et $\{\psi_t, t = 1, ..., N_{Qh}\}$ une base de V_{Qh}.

On peut alors écrire u_h et v_h sur leur base associée tel que :

- $u_h = \sum_{i=1}^{N_{Vh}} u_i \phi_i(x)$
- $p_h = \sum_{t=1}^{N_{Qh}} p_t \psi_t(x)$

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u_i, p_t) \in \mathbb{R}^2 \text{ pour i } \in \{1, ..., N_{Vh}\} \text{ et } t \in \{1, ..., N_{Qh}\} \text{ tel que :} \\ a(\sum_{i=1}^{N_{Vh}} u_i \phi_i(x), v_h) + b(v_h, \sum_{t=1}^{N_{Qh}} p_t \psi_t(x)) = l(v_h) \quad \forall v_h \in \{\phi_i, i = 1, ..., N_{Vh}\} \\ b(\sum_{i=1}^{N_{Vh}} u_i \phi_i(x), q_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h \end{cases}$$

Passage à la forme matricielle

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u_i, p_t) \in \mathbb{R}^2 \text{ pour i } \in \{1, ..., N_{Vh}\} \text{ et } t \in \{1, ..., N_{Qh}\} \text{ tel que :} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N_{Vh}} u_i(\phi_i(x), \phi_j(x)) + \sum_{t=1}^{N_{Qh}} p_t b(\phi_j(x), \psi_t(x)) = l(\phi_j(x)) \quad \forall \phi_j(x) \in \{\phi_i, i = 1, . \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N_{Vh}} u_i b(\phi_i(x), \psi_k(x)) = 0 \quad \forall \psi_k \in \{\psi_t, t = 1, ..., N_{Qh}\} \end{cases}$$

On introduit les notations suivantes :

- $A \in M_{N_{Vh}, N_{Qh}}$tel que$(A)_{i,j} = a(\phi_i, \phi_j)$
- $B \in M_{N_{Qh}, N_{Vh}}$tel que$(B)_{j,i} = b(\phi_i, \psi_j)$
- $U := (u_1, u_2, ...u_{N_{Vh}})^t$
- $V := (p_1, p_2, ...p_{N_{Qh}})^t$
- $F := ((f, \phi_1), (f, \phi_2), ...(f, \phi_{N_{Vh}}))^t := (l(\phi_1), l(\phi_2), ..., l(l\phi_{N_{Vh}}))^t$

Passage à la forme matricielle

On réécrit le système précédant à l'aide du produit scalaire et des notations introduites :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u_i, p_t) \in \mathbb{R}^2 \text{ pour i } \in \{1, \ldots, N_{Vh}\} \text{ et } t \in \{1, \ldots, N_{Qh}\} \text{ tel que :} \\ < C_{j,A}, U > + < C_{j,B}, P >= l(\phi_j(x)) \quad \forall \phi_j(x) \in \{\phi_i, i = 1, \ldots, N_{V_h}\} \\ < L_{k,B}, U >= 0 \quad \forall \psi_k \in \{\psi_t, t = 1, \ldots, N_{Qh}\} \end{cases}$$

On obtient, en faisant les changements nécessaires, le système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} A & B^t \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}$$

Système linéaire bien défini

- La matrice A est définie positive

  $a(u_h, u_h) = U^t A U$

  Par V_h ellipticité, $U^t A U > 0 \quad \forall U \neq 0$
- Le système est inversible.

  On montre que l'application linéaire l_M est injective c'est-à-dire que

  $kerM = \{0\}$

  Soit

$$\begin{pmatrix} A & B^t \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Ce calcul matriciel est équivalent au système :

$$\begin{cases} AX_1 + B^t X_2 = 0 \\ BX_1 = 0 \end{cases}$$

Système linéaire bien défini

En effectuant les changements nécessaires, on obtient pour la première équation : $< X_1, AX_1 >= 0$

Sachant que A définie positive,

$$< X_1, AX_1 >= 0 = {X_1}^t AX_1 \geq 0$$

Nécessairement, $X_1 = 0$.

De plus, la première équation devient $B^t X_2 = 0$

Comme $kerB^t = \{0\}$, on en déduit que $X_2 = 0$.

On a démontré que $kerM = \{0\}$ donc M inversible.

Élément mini ou élément P_1 bulle ($\mathrm{P}_1 b$)

- Idée : créer un élément proche du (P_1, P_1) en utilisant la fonction bulle
- Element le plus simple et de plus bas degré stable conformément à la condition inf-sup

Definition

On dit qu'une fonction $\widehat{b} : \widehat{K} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction bulle si :

1. $\widehat{b} \in H_0^1(\widehat{K})$
2. $0 \leq \widehat{b}(\widehat{x}) \leq 1 \quad \forall \widehat{x} \in \widehat{K}$
3. $\widehat{b}(\widehat{G}) = 1$ où $\widehat{G}$ est le barycentre de $\widehat{K}$

Exemples de fonction bulle

- $\widehat{b} = (d+1)^{d+1} \prod_{i=1}^{d} \widehat{\lambda}_i$ où $\widehat{\lambda}_i$ coordonnées barycentriques sur $\widehat{K}$
- Fonction construite à partir des $(d+1)$ simplexes de $\widehat{K}$ reliant le barycentre de $\widehat{K}$ aux $(d+1)$ sommets de $\widehat{K}$

On peut exprimer les coordonnées barycentriques sur tout triangle K tel que :

$$F\begin{pmatrix}\widehat{x}\\ \widehat{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_2 - x_1 & x_3 - x_1\\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widehat{x}\\ \widehat{y}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

Definition de l'élément bulle et condition inf-sup

On définit alors l'élément P_{1b} tel que :

$$P_{1b} = [\mathbb{P}_1 \oplus vect(\widehat{b})]^d \text{ où } \widehat{b} \text{ une fonction bulle définit sur } \widehat{K}$$

L'élément bulle doit vérifier la condition inf-sup.

Pour cela, on utilise le critère de Fortin.

Definition

Soient X et M deux espaces de Hilbert et $b \in L(X, M)$

Supposons qu'il existe $\beta > 0$ tel que $\inf\limits_{q \in M} \sup\limits_{v \in X} \frac{b(v,q)}{||v||_x ||q||_M}$

Alors il existe $\beta_h > 0$ tel que $\inf\limits_{q_h \in M_h} \sup\limits_{v_h \in X_h} \frac{b(v_h,q_h)}{||v_h||_x ||q_h||_M}$ ssi il existe $\gamma_h > 0$ tel que pour tout $v \in X$, il existe $\Pi_h(v) \in X_h$ tel que :

$$\forall q_h \in M_h, b(v, q_h) = b(\Pi_h(v), q_h) \text{ et } ||\Pi_h(v)||_X \leq \gamma_h ||v||_X$$

Sommaire

Méthode de Pénalisation

Afin de définir l'unicité du problème de Stokes, il a fallut ajouter la condition :

$$\int_\Omega p \,\mathrm{d}x = 0$$

Le problème est que cette contrainte n'apparaît pas dans le système linéaire.
Pour palier à ce problème, nous allons introduire $\epsilon \leq 0$ très petit et tel que :

$$\mathrm{div}\,(u) = \epsilon p$$

Méthode de pénalisation

Nous obtenons la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u,p) \in V \times Q \text{ tel que} \\ a(u,v) + b(v,p) = l(v),\ \forall v \in V \\ b(u,q) - \epsilon \displaystyle\int_\Omega pq \,\mathrm{d}x = 0,\ \forall q \in Q \end{cases}$$

La condition de la divergence nulle est la caractéristique d'un milieu incompressible. L'introduction de ce ϵ très petit, et par extension la non nullité de la divergence définit le lien entre la méthode de pénalisation avec la notion de fluide "quasi-incompressible".

Méthode de pénalisation

La formulation variationnelle précédente revient alors à la formulation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} A & M^t \\ B & -\epsilon I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}$$

Où I est la matrice identité de même taille que B.
Le système définis par cette méthode peut être résolu par différente méthode puisque la matrice est symétrique définie positive.
L'erreur introduite par ce terme de pénalité converge vers 0 lorsque ϵ tend vers 0.

Méthode d'UZAWA

D'après ce qui a été fait précédemment, on peut extraire du système linéaire du problème discret le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} AU + B^t P = F \\ BU = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} AU = F - B^t P \\ BU = 0 \end{cases}$$

Comme A est symétrique définie positive, elle est donc inversible.
Ce qui nous donne :

$$U = A^{-1}\left(F - B^t P\right)$$

En utilisant $BU = 0$, il vient que :

$$B(A^{-1}(F - B^t P)) = 0 \Longrightarrow BA^{-1}B^t P = BA^{-1}F$$

Méthode d'OZAWA

On se retrouve avec une nouvelle forme pour notre problème :

$$\begin{cases} \text{Trouver } U \in V_h \text{ et } P \in Q_h \text{ tel que :} \\ AU = F - B^t P \\ BA^{-1}B^t P = BA^{-1}F \end{cases}$$

Pour résoudre ce problème, nous allons utiliser les propriétés de symétrie et de définie positivité de A.

De plus, pour une donnée initiale p_0 et u_0, on cherche à calculer P et U tel que le résidu soit minimal afin de satisfaire le critère d'incompressibilité : $BU = 0$

Sommaire

Convergence sur l'approximation de la vitesse

Nous avons deux résultats intéressants :
On suppose pour ces deux majorations que $V_h \subset V$ et $Q_h \subset Q$ et tels que la conditions inf-sup est vérifiée.

1. $\exists C > 0$, indépendant de h, tel que :
   $\|u - u_h\|_V \leq C(\inf_{v_h \in Y_h} \|u - v_h\|_V + \inf_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\|_Q)$

2. $\exists C > 0$, indépendant de h, tel que :
   $\inf_{v_h \in Y_h} \|u - v_h\|_V \leq C \inf_{w_h \in V_h} \|u - w_h\|_V$

Convergence sur l'approximation de la pression

On suppose que $V_h \subset V$ et $Q_h \subset Q$ et tels que la conditions inf-sup est vérifiée alors :

$\exists C > 0$ indépendante de h telle que :

$$\|p - p_h\|_Q \leq C \left(\|u - u_h\|_V + \inf_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\|_V \right)$$

Estimation sur la méthode

Soit $W_h \subset \left(H^1(\Omega)\right)^2$ un sous espace de dimension finie. Les hypothèses sur V_h et Q_h précédente tiennent toujours :

1. Hypothèse sur V_h : $\exists \pi_h \in L\left(\left[H^2(\Omega)\right]^2 \cap \left[H_0^1(\Omega)\right]^2, V_h\right)$ tel que :

$$\|v - \pi_h(v)\|_{[H^1(\Omega)]^2} \leq C_1 h \|v\|_{[H^2(\Omega)]^2}, \forall v \in \left[H^2(\Omega)\right]^2$$

2. Hypothèse sur Q_h : $\exists s_h \in L\left(\left[H^1(\Omega)\right] \cap \left[L_0^2(\Omega)\right], Q_h\right)$ tel que :

$$\|v - s_h(v)\|_{[L^2(\Omega)]^2} \leq C_2 h \|v\|_{[H^1(\Omega)]^2}, \forall v \in \left[H^1(\Omega)\right]$$

Estimation de l'erreur abstraite

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine borné, polygonal et convexe.

Admettons que les deux hypothèses précédentes sont vérifiées ainsi que la condition inf-sup.

Si de plus la solution (u,p) du problème de Stokes appartient à :

$$\left(\left[H^2(\Omega)\right]^2 \cap \left[H_0^1(\Omega)\right]^2 \times \left[H^1(\Omega)\right] \cap \left[L_0^2(\Omega)\right] \right)$$

Alors on obtient les majorations suivantes :

$$\|u - u_h\|_{H^2(\Omega)^2} + \|p - p_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C_3 h \left(\|u\|_{H^2(\Omega)^2} + \|p\|_{H^1(\Omega)} \right)$$

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)^2} \leq C_4 h^2 \left(\|u\|_{H^2(\Omega)^2} + \|p\|_{H^1(\Omega} \right)$$

Merci de votre attention