Master MAS, parcours MNCHP

Méthodes numériques pour les écoulements incompressibles

AN312

Simulation numérique par éléments finis avancés

2019/2020

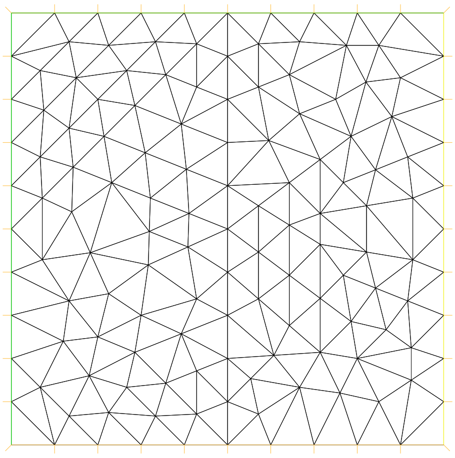
FreeFem++

— Page web : `http://www.freefem.org/ff++/`

— Documentation : `http://www.freefem.org/ff++/ftp/freefem++doc.pdf`

— Principe : FreeFem++ est un interpréteur de script (comme matlab, python, scilab...) dédié à la résolution approchée par éléments finis de problèmes mis sous forme variationnelle. C'est un idiome de C++.

— On écrit donc des fichiers contenant des commandes, par exemple `exple.edp`, que l'on exécute dans un terminal X en utilisant la commande suivante :
`...$ FreeFem++ exple.edp`
L'exemple fournit (fichier `exple.edp`) construit un maillage du carré $(0,1)\times(0,1)$ ayant 10 éléments par côté représenté ci-dessous.



— Quelques éditeurs de fichiers supportent une colorisation syntaxique pour FreeFem++ : atom, emacs, vi...
  - — Avec emacs : `https://github.com/holomorph/emacs-freefem` or `https://github.com/rrgalvan/freefem-mode`
  - — Avec Atom : `https://atom.io/packages/language-freefem`

— Il existe aussi un environnement de développement intégré (IDE) pour FreeFem++, voir `https://www.ljll.math.upmc.fr/lehyaric/ffcs/index.htm`.

Exercice 1 : Problème de Laplace

$$-\operatorname{div}(a(x)\nabla u) = f \quad \text{dans } \Omega, \quad u = g \quad \text{sur } \partial\Omega. \tag{1}$$

où $\xi^T a(x)\xi \geq a_0|\xi|^2$ (pour tout $\xi \in \mathbb{R}^2$) avec $a_0 > 0$, et $x \mapsto a(x)$ est une fonction mesurable et majorée.

Le fichier `laplace.edp` va nous servir de modèle. Il permet de faire un calcul d'erreur de convergence pour un problème du type (1) avec $a(x) = 1$, dont on connaît la solution exacte. Ici, on a choisit la fonction $u(x,y) = x(1-x) * y(1-y)$ qui est telle que $u(x,y) = 0$ sur $\partial\Omega$. Le script permet de répéter le calcul sur une famille de maillage du plus en plus fins, de telle sorte que l'on peut étudier la convergence et l'erreur commise par le schéma.

Prenez le temps de bien détailler et comprendre le fonctionnement de ce script. Exécutez-le, éventuellement en faisant des petites modifications (par exemple de l'élement P1-Lagrange choisit ici, de la finesse des maillages...).

Attention, il faut créer le répertoire `output` dans lequel le script écrit ses résultats avant d'exécuter le script : `$ mkdir output`, puis `$ Freefem++ laplace.edp`.

Le script gnuplot fournit (`plot_laplace.gp`) permet de tracer le graphe de l'erreur en norme L^2 sur la solution u (en exécutant `$ gnuplot plot_laplace.gp`).

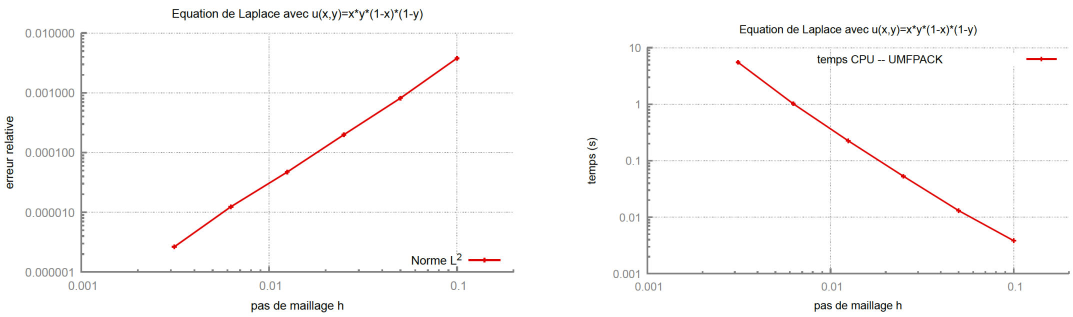


FIGURE 1 – Erreurs et temps CPU pour le problème de Laplace

1. Programmer le calcul de l'erreur en norme H^1, définie par $E_{H^1} = \left(\int_\Omega |\nabla u - \nabla u_h|^2 \, dx\right)^{1/2}$. Puis rajouter le graphe de cette erreur sur le graphique précédent (obtenir le graphique de la figure). À partir de vos connaissance sur les éléments finis, que pouvez vous dire de ces graphes de convergence ?

   Donner les tableaux de valeurs $\min(u_h(x))$, $\max(u_h(x))$, et $\min(u(x))$, $\max(u(x))$. Pour certaines applications, il est important de conserver ces min et max. Que se passe-t-il pour notre problème ?
2. Reproduire l'analyse pour la fonction solution $u(x, y) = x + y$ (attention, il faut modifier le second membre f et la valeur au bord g). Vérifier avec cette solution que les élements finis P1 sont exacts quel que soit le maillage utilisé.
3. Reproduire l'analyse pour la fonction solution $u(x, y) = \cos(2\pi x)y(1 - y)$ en calculant le second membre associé, et en utilisant les conditions aux limites mêlées : $u = 0$ sur $\{y = 0\}$ et $\{y = 1\}$, et $\nabla u \cdot n = 0$ sur $\{x = 0\}$ et $\{x = 1\}$.
4. On fixe le maillage le plus fin possible pour résoudre le système linéaire en un temps raisonable avec Umfpack. Pour ce maillage, évaluer l'erreur commise par la résolution par une des méthodes itératives CG et GMRES en variant la tolérance souhaitée de 10^{-1} à 10^{-13}. Comparer aussi le temps de calcul par rapport au temps mis pour la méthode LU de Umfpack.
5. On fixe maintenant la tolérance du solveur CG (puis GMRES) à 10^{-10}. Comparer les temps de calcul de ces deux méthodes itératives avec celle de la méthode directe pour la suite de maillage utilisée aux questions précédentes.
6. On prend maintenant un cas fortement anisotrope, $a(x) = \mathrm{diag}(1., 10^r)$, avec des conditions de Dirichlet homogène et le second membre $f := 4\pi^2(1 + 10^r)\sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$. Dans ce cas, la solution exacte est $u = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$. Étudier le schéma numérique pour ce cas test avec quelques valeurs de r, par exemple $r = 1, 3, 6$.