Министерство науки и высшего образования
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)”
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Отчёт
по учебной практике
за 1 семестр 2020—2021 гг.

Руководитель практики,
ст. преп. кафедры ФН1 ______________________ Кравченко О.В.
(подпись)

студент группы ФН1–11 ______________________ Мнацаканов Г.К.
(подпись)

Москва,
2020 г.

Содержание

1 Цели и задачи практики 3

1.1 Цели 3

1.2 Задачи 3

1.3 Индивидуальное задание 3

2 Отчёт 4

3 Индивидуальное задание 5

3.1 Пределы и непрерывность. 5

Список литературы 10

1 Цели и задачи практики

1.1 Цели

— развитие компетенций, способствующих успешному освоению материала бакалавриата и необходимых в будущей профессиональной деятельности.

1.2 Задачи

1. Знакомство с программными средствами, необходимыми в будущей профессиональной деятельности.

2. Развитие умения поиска необходимой информации в специальной литературе и других источниках.

3. Развитие навыков составления отчётов и презентации результатов.

1.3 Индивидуальное задание

1. Изучить способы отображения математической информации в системе вёртски LaTeX.

2. Изучить возможности системы контроля версий Git.

3. Научиться верстать математические тексты, содержащие формулы и графики в системе LaTeX. Для этого, выполнить установку свободно распространяемого дистрибутива TeXLive и оболочки TeXStudio.

4. Оформить в системе LaTeXтиповые расчёты по курсе математического анализа согласно своему варианту.

5. Создать аккаунт на онлайн ресурсе GitHub и загрузить исходные tex–файлы и результат компиляции в формате pdf.

2 Отчёт

Актуальность темы продиктована необходимостью владеть системой вёрстки LaTeXи средой вёрстки TeXStudio для отображения текста, формул и графиков. Полученные в ходе практики навыки могут быть применены при написании курсовых проектов и дипломной работы, а также в дальнейшей профессиональной деятельности.

Ситема вёрстки LaTeXсодержит большое количество инструментов (пакетов), упрощающих отображение информации в различных сферах инженерной и научной деятельности.

3 Индивидуальное задание

3.1 Пределы и непрерывность.

Задача № 1.

Условие: Дана последовательность $\{a_n\} = \dfrac{1-2n^2}{n^2+3}$ и число $c = -2$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c,$$

а именно, для каждого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найти наименьшее натуральное число $N = N(\varepsilon)$ такое, что $|a_n - c| < \varepsilon$ для всех номеров $n > N(\varepsilon)$. Заполнить таблицу

ε	0,1	0,01	0,001
$N(\varepsilon)$			

Решение. Найдем предел последовательности $a_n = \dfrac{1-2n^2}{n^2+3}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-2n^2}{n^2+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{n^2} - 2}{1 + \dfrac{3}{n^2}} = -2$$

Что и требовалось доказать.

Рассмотрим неравенство $|a_n - c| < \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$, учитывая выражение для a_n и значение c из условия варианта, получим

$$\left| \frac{1-2n^2}{n^2+3} + 2 \right| < \varepsilon$$

Неравенство запишем в виде двойного неравентсва и приведём выражение под знаком модуля к общему знаменателю, получим

$$-\varepsilon < \frac{7}{n^2+3} < \varepsilon$$

Заметим, что левое нераенство выполнено для любого номера $n \in \mathbb{N}$, поэтому будем рассматривать только правое неравенство

$$\frac{7}{n^2+3} < \varepsilon$$

Выполнив цепочку преобразований, перепишем неравенство относительно n^2, и учитывая, что $n \in \mathbb{N}$, получим

$$\frac{7}{n^2+3} < \varepsilon,$$

$$n^2 + 3 > \frac{7}{\varepsilon},$$

$$n^2 > \frac{7-3\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$n > \sqrt{\frac{7-3\varepsilon}{\varepsilon}},$$

$$N(\varepsilon) = \left[\sqrt{\frac{7-3\varepsilon}{\varepsilon}} \right],$$

где [ ] — целая часть числа.

$$N(0{,}1) = \left[\sqrt{\frac{7-0,3}{0,1}}\right] = 8;$$

$$\mathrm{N}(0,01) = \left[\sqrt{\frac{7-0,03}{0,01}}\right] = 26;$$

$$\mathrm{N}(0,001) = \left[\sqrt{\frac{7-0,003}{0,001}}\right] = 83;$$

Заполним таблицу:

ε	0,1	0,01	0,001
$N(\varepsilon)$	8	26	83

Проверка:

$$|a_9 - c| = \frac{7}{84} < 0{,}1,$$
$$|a_{27} - c| = \frac{7}{732} < 0{,}01,$$
$$|a_{84} - c| = \frac{7}{7059} < 0{,}001.$$

Задача № 2.

Условие: Вычислить пределы функций

(а): $$\lim_{x\to 3}\frac{3x^3-81}{x^2-5x+6}$$

(б): $$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x^4+3}-\sqrt[3]{x^6+1}}{x^2+100x},$$

(в): $$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+2}-1}{x^3+1},$$

(г): $$\lim_{x\to 3}\left(\frac{6-x}{3}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{6}},$$

(д): $$\lim_{x\to 0+}\left(\operatorname{arctg}\frac{x+1}{x^2+2x}\right)^{\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}},$$

(е): $$\lim_{x\to 2\pi}\frac{\sin 7x-\sin 3x}{e^{x^2}-e^{4\pi^2}}.$$

Решение.
(а):

$$\lim_{x\to 3}\frac{3x^3-81}{x^2-5x+6} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 3}\frac{3(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)(x-2)} = \lim_{x\to 3}\frac{3(x^2+3x+9)}{(x-2)} = \frac{3\cdot 27}{1} = 81.$$

(б):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x^4+3}-\sqrt[3]{x^6+1}}{x^2+100x}=\left[\frac{\infty-\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(\sqrt{9+\dfrac{3}{x^4}}-\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x^6}}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{100}{x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9+\dfrac{3}{x^4}}-\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x^6}}}{1+\dfrac{100}{x}}=\frac{3-1}{1}=2$$

(в):

$$\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x+2}-1}{x^3+1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{array}{l}t=x+1\\ t\to 0\\ x=t-1\end{array}\right|=\lim_{t\to0}\frac{\sqrt{t+1}-1}{(t-1)^3+1}=\left|\ (1-t)^{\frac12}\sim\tfrac12 t\ \right|=$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\frac12 t}{(t^3-3t^2+3t-1+1}=\lim_{t\to0}\frac{\frac12 t}{t(t^2-3t+3)}=\lim_{t\to0}\frac{1}{2(t^2-3t+3)}=\frac{1}{2\cdot3}=\frac16$$

(г):

$$\lim_{x\to3}\left(\frac{6-x}{3}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{6}}=\left[1^\infty\right]=\lim_{x\to3}e^{\ln\left(\dfrac{6-x}{3}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{6}}}=\lim_{x\to3}e^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{6}\cdot\ln\left(\frac{6-x}{3}\right)}=\left|\begin{array}{l}t=x-3\\ t\to0\\ x=t+3\end{array}\right|=$$

$$\lim_{t\to0}e^{-\operatorname{ctg}\dfrac{\pi t}{6}\cdot\ln\dfrac{3-t}{3}}=e^{\lim\limits_{t\to0}-\operatorname{ctg}\dfrac{\pi t}{6}\cdot\ln 1-\dfrac{t}{3}}=\left|\begin{array}{l}\ln\left(1-\dfrac{t}{3}\right)\sim-\dfrac{t}{3}\\ \operatorname{ctg}\dfrac{\pi t}{6}=\dfrac{1}{\operatorname{tg}\dfrac{\pi t}{6}}\sim\dfrac{1}{\dfrac{\pi t}{6}}=\dfrac{6}{\pi t}\end{array}\right|=$$

$$e^{\lim\limits_{t\to0}-\dfrac{6}{\pi t}\cdot\left(-\dfrac{t}{3}\right)}=e^{\dfrac{2}{\pi}}$$

(д):

$$\lim_{x\to0+}\left(\operatorname{arctg}\frac{x+1}{x^2+2x}\right)^{\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}}=\lim_{x\to0+}\left(\operatorname{arctg}\frac{1+\dfrac{1}{x}}{x+2}\right)^{\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}}=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\lim\limits_{x\to0+}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}}=\left|\ \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}\sim\frac13 x\ \right|=$$

$$=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\lim\limits_{x\to0+}\frac{\frac13 x}{x}}=\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}.$$

(е):

$$\lim_{x\to2\pi}\frac{\sin7x-\sin3x}{e^{x^2}-e^{4\pi^2}}=\left|\begin{array}{l}t=x-2\pi\\ t\to0\\ x=t+2\pi\end{array}\right|=\lim_{t\to0}\frac{\sin\left(7(t+2\pi)\right)-\sin\left(3(t+2\pi)\right)}{e^{(t+2\pi)^2}-e^{4\pi^2}}=$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin7t-\sin3t}{e^{4\pi^2}\cdot(e^{t^2+4t\pi}-1)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{t\to0}\frac{2\cdot\sin2t\cdot\cos5t}{e^{4\pi^2}\cdot(e^{t^2+4t\pi}-1)}=\left|\begin{array}{l}e^{t^2+4t\pi}-1\sim t^2+4t\pi\\ \sin(2t)\sim2t\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{2\cdot2t}{e^{4\pi^2}\cdot t\cdot(t+4\pi)}=\frac{2\cdot2}{e^{4\pi^2}\cdot4\pi}=\frac{1}{\pi}\cdot e^{4\pi^2}$$

Ответ:

$$\textbf{а)}\ 81;\quad \textbf{б)}\ 2;\quad \textbf{в)}\ \frac{1}{6};\quad \textbf{в)}\ e^{\frac{2}{\pi}};\quad \textbf{д)}\ \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}};\quad \textbf{е)}\ \frac{1}{\pi}\cdot e^{4\pi^2}.$$

Задача № 3.

Условие:
(а): Показать, что данные функции $f(x)$ и $g(x)$ являются бесконечно малыми или бесконечно большими при указанном стремлении аргумента.
(б): Для каждой функции $f(x)$ и $g(x)$ записать главную часть (эквивалентную ей функцию) вида $C(x-x_0)^\alpha$ при $x \to x_0$ или Cx^α при $x \to \infty$, указать их порядки малости (роста).
(в): Сравнить функции $f(x)$ и $g(x)$ при указанном стремлении.

№ варианта	функции $f(x)$ и $g(x)$	стремление
13	$f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}},\ g(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}}{e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}-1}$	$x \to +\infty$

Решение.
(а): Покажем, что $f(x)$ и $g(x)$ бесконечно большие функции,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\sqrt{x+\sqrt{x}} = \infty \implies f(x) - \text{Б/б при } x \to +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x}}{e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}-1} = \left| e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}-1 \sim \frac{1}{\sqrt{x}} \right| = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt[6]{x^5} = \infty \implies$$

$$\implies g(x) - \text{Б/б при } x \to +\infty$$

(б): Так как $f(x)$ и $g(x)$ бесконечно большие функции, то эквивалентными им будут функции вида Cx^α при $x \to +\infty$.
Найдём эквивалентную для $f(x)$ из условия

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^\alpha} = C,$$

где C — некоторая константа. Рассмотрим предел

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}}{x^\alpha}.$$

При $\alpha = \dfrac{1}{2}$ последний предел равен 1, отсюда $C = 1$ и

$$f(x) \sim \sqrt{x} \text{ при } x \to +\infty.$$

Порядок роста функции $f(x)$ равен $\dfrac{1}{2}$

Аналогично, рассмотрим предел

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x^{\alpha}}=\lim_{x+\infty}\frac{\sqrt[3]{x}}{x^{\alpha}(e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}-1)}=\left|e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}-1\sim\frac{1}{\sqrt{x}}\right|=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x}}{x^{\alpha}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[6]{x^5}}{x^{\alpha}}.$$

При $\alpha=\dfrac{5}{6}$ последний предел равен 1, отсюда $C=1$ и

$$g(x)\sim\sqrt[6]{x^5}\text{ при }x\to+\infty.$$

Порядок роста функции $g(x)$ равен $\dfrac{5}{6}$

(в): Для сравнения функций $f(x)$ и $g(x)$ рассмотрим предел их отношения при указанном стремлении

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

Заменим исходные функции на эквивалентные, определенные в пункте (б), получим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x^5}}=\lim_{x+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=0.$$

Отсюда, $f(x)=o(g(x))$, то есть функия $f(x)$ бесконечно малая относительно функции $g(x)$ при $x\to+\infty$.

Список литературы

[1] Львовский С.М. Набор и вёрстка в системе LaTeX, 2003.

[2] Котельников И.А., Чеботаев П.З LaTeXпо - русски, Изд-во «Сибирский Хронограф», 2004.