VEKTOR & NILAI EIGEN

Fisika Matematika II - Sistem Persamaan Linier Homogen

Sistem persamaan linear homogen adalah sistem persamaan linear di mana semua persamaannya memiliki jumlah variabel yang sama dan jumlah konstan yang sama, serta persamaan tersebut memenuhi sifat homogenitas, yang berarti jika semua variabel dalam setiap persamaan diganti dengan beberapa kali lipat atau pengurangan dengan konstanta tertentu, maka persamaan tersebut tetap konsisten.

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0\\
&\vdots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0
\end{aligned}
$$

NUMERICAL METHODS

NILAI & VEKTOR EIGEN

Nilai eigen (eigenvalues) dan vektor eigen (eigenvectors) adalah konsep penting dalam aljabar linear (dan matriks) yang berperan kunci dalam berbagai aplikasi ilmu pengetahuan dan teknik

Matriks persegi

Pendefinisian Matriks A harus berukuran n x n atau persegi

Persamaan umum

Vektor tak nol x ∈ R^n disebut vektor eigen dari matriks A jika Ax merupakan perkalian skalar dari x

Ax = λx

Keterangan

Skalar λ disebut nilai eigen dari matriks A vektor x disebut vektor eigen yang berseuaian/berkorespondensi/berkarakteristik dengan λ

NUMERICAL METHODS

EXAMPLE

- Vektor $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ merupakan vektor eigen dari matriks:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Vektor x bersesuaian dengan nilai eigen 3 karena:

$$Ax = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3x$$

Padjadjaran University | 2024

SYARAT

berikut syarat yang harus dipenuhi untuk mencari nilai eigen dari sebuah persamaan matriks

Non-Invertible

dengan kata lain matriks tidak dapat/tidak memiliki invers dan determinan atau matriks $[A - \lambda I]$harus bernilai 0.

Singularity

Ax = λx

(A - λI) = 0

agar persamaan diatas berlaku matrik bukan nol (v), maka $[A - \lambda I]$ harus bersifat singular

Polynomial Degree

Determinan dari matriks $[A - \lambda I]$ merupakan deret polynomial derajat N dalam bentuk λ.

Trace

Determinan matriks persegi adalah hasil perkalian dari semua nilai eigen-nya, sementara trace adalah jumlah dari semua nilai eigen. Dengan demikian, nilai eigen memberikan informasi yang berguna tentang sifat-sifat matriks seperti perubahan volume dalam transformasi linear (determinan) dan jumlah elemen diagonal utama (trace).

NUMERICAL METHODS

POWER METHOD

Teknik iteratif untik mencari nilai eigen dominan/paling tinggi/maksimal dari suatu matrix dengan kata lain dicari nilai eigen yang bernilai mutlak terbesar. dan terbagi menjadi dua jenis yakni

Power Method

Mendapatkan nilai dan vektor eigen dominan /terbesar secara serentak

Inverse Power metohde

Mendapatkan nilai dan vektor eigen yang terkecil secara serentak dengan cara matriksnya di inversikan dan menggunakan metode pangkat untuk mendapatkan nilai eigennya

POWER METHOD

Asumsikan matriks A dengan orde n x n, memiliki n buah nilai eigen: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \ldots\ldots\ldots \lambda_n$. Nilai eigen menurun dari mulai: $|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|, |\lambda_4| \ldots\ldots\ldots |\lambda_n|$

$$Y_k = AX_k$$

$$\boxed{Y_k = Ax = \lambda x}$$

$$X_{k+1} = \frac{1}{c_{k+1}} Y_k$$

X_k adalah vektor sembarang sebagai nilai awal

Normalisasi

Dimana: $c_{k+1} = x_j^{(k)}$ dan $x_j^{(k)} = max\, [x_i^{(k)}]$

NUMERICAL METHODS

POWER METHOD

Masukkan nilai awal: matrik X0 sembarang / sesuai ukuran matriks A

Masukkan matrik A

Hitung : $Y_0 = A*X$

Ulangi untuk k = 1,2,3..n

$Y'_0=Y_0/max(Y_0)$; normalisasi

$A*Y'_0=Y_1$

$Y'_{k-1}=Y_{k-1}/max(Y_{k-1})$; normalisasi

$A*Y'_{k-1}=Y_k$

$Y'_k=Y_k/max(Y_k)$; normalisasi

Hampiran nilai eigen: $\lambda = max(Y_k)$ dan vektor eigen: $v = Y'_k$

NUMERICAL METHODS

POWER METHOD

Contoh: Cari nilai dan vektor eigen dari matrik A

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Asumsikan nilai vektor sembarang $x_0 = \{\ 1\ 1\ 1\}^T$

$A^*X_0=Y_0$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

NUMERICAL METHODS

POWER METHOD

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{Bmatrix} = 5 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.6 \\ -0.2 \end{Bmatrix}$$

Normalisasi hasil perkalian

$Y'_0 = Y_0 / \max(Y_0)$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.6 \\ -0.2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.6 \\ 1 \\ 0.2 \end{Bmatrix}$$

Mendapatkan hampiran vektor eigen

$A * Y'_0 = Y_1$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} 4.6 \\ 1 \\ 0.2 \end{Bmatrix} = 4.6 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.217 \\ 0.0435 \end{Bmatrix}$$

$Y'_1 = Y_1 / \max(Y_1)$

Galat: E= (5-4.6) = 0.4

NUMERICAL METHODS

POWER METHOD

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.217 \\ 0.0435 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.2174 \\ 0.4783 \\ -0.0435 \end{Bmatrix}$$

Mendapatkan hampiran vektor eigen terbaru

$A*Y'_1=Y_2$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} 4.2174 \\ 0.4783 \\ -0.0435 \end{Bmatrix} = 4.2174 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.1134 \\ -0.0183 \end{Bmatrix}$$

$Y'_2=Y_2/\max(Y_2)$

Galat: E= (4.6-4.2) = 0.3826

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.1134 \\ -0.0183 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.1134 \\ 0.2165 \\ 0.0103 \end{Bmatrix}$$

Mendapatkan hampiran vektor eigen terbaru

$A*Y'_2=Y_3$

NUMERICAL METHODS

POWER METHOD

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} 4.1134 \\ 0.2165 \\ 0.0103 \end{Bmatrix} = 4.1134 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.0526 \\ 0.0025 \end{Bmatrix}$$

$Y'_3 = Y_3 / \max(Y_3)$

Galat: E= (4.2-4.1) = 0.104

Hampiran nilai eigen: $\lambda_1 = \max(Y_3) = 4.1134$

Hampiran vektor eigen: $v_1 = Y'_3 = [1, 0.0526 , 0.0025]^T$

Jika iterasinya dilanjutkan akan menghasilkan, $\lambda = 4$
dan vektor eigen $v=[1\ 0\ 0]^T$

NUMERICAL METHODS

INVERSE POWER METHOD

Metode Pangkat Inversi (inverse power method)

Metode pangkat inversi sama dengan metode pangkat, tetapi digunakan untuk mencari nilai eigen terkecil. Matriks A di inversikan dan gunakan metode pangkat untuk mendapatkan nilai eigennya.

$$\boxed{[A]\{x\} = \lambda\{x\} \qquad \Rightarrow [A]^{-1}[A]\{x\} = \lambda[A]^{-1}\{x\}}$$

$$\frac{1}{\lambda}\{x\} = [A]^{-1}\{x\} \qquad \Rightarrow \mu\{x\} = [B]\{x\}$$

$$\mu = \frac{1}{\lambda} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \frac{1}{\mu}$$

NUMERICAL METHODS

INVERSE POWER METHOD

Contoh: Cari nilai dan vektor eigen dari matrik A

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \\ 2 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.4875 & -0.2375 & 0.1375 \\ -0.2375 & -0.0125 & 0.1125 \\ 0.1375 & 0.1125 & -0.0125 \end{bmatrix}$$

Asumsikan nilai vektor sembarang $x_0 = \{\ 1\ 1\ 1\}^T$

NUMERICAL METHODS

INVERSE POWER METHOD

Contoh: Cari nilai dan vektor eigen dari matrik A

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \\ 2 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.4875 & -0.2375 & 0.1375 \\ -0.2375 & -0.0125 & 0.1125 \\ 0.1375 & 0.1125 & -0.0125 \end{bmatrix}$$

Asumsikan nilai vektor sembarang $x_0 = \{\ 1\ 1\ 1\}^T$

NUMERICAL METHODS

INVERSE POWER METHOD

$$\begin{bmatrix} 0.4875 & -0.2375 & 0.1375 \\ -0.2375 & -0.0125 & 0.1125 \\ 0.1375 & 0.1125 & -0.0125 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3875 \\ -0.1375 \\ 0.2375 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} 0.3875 \\ -0.1375 \\ 0.2375 \end{Bmatrix} = 0.3875 \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.3548 \\ 0.6129 \end{Bmatrix}$$

$$B\begin{Bmatrix} 1 \\ -0.3548 \\ 0.6129 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.656 \\ -0.164 \\ 0.0899 \end{Bmatrix}$$ **Dst.**

NUMERICAL METHODS

INVERSE POWER METHOD

$$B\begin{Bmatrix} 1 \\ -0.3596 \\ 0.1581 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.5946 \\ -0.2152 \\ 0.0951 \end{Bmatrix}$$

Nilai maksimumnya

Vektor Eigen

Nilai Eigen:
1/max(Y) = 1/0.5946
= 1.6818

NUMERICAL METHODS

CONCLUSION

Setelah penjelasan sebelumnya, perbedaan mendasar antara power method dan inverse power method

$$Y_k = AX_k$$

$$\boxed{Y k = A x = \lambda x}$$

$$X_{k+1} = \frac{1}{\quad} Y_k$$

X_k adalah vektor sembarang sebagai nilai awal

Normalisasi

Output nilai eigen **terbesar**

$$\boxed{[A]\{x\} = \lambda\{x\} \qquad \Rightarrow [A]^{-1}[A]\{x\} = \lambda[A]^{-1}\{x\}}$$

$$\frac{1}{\lambda}\{x\} = [A]^{-1}\{x\} \qquad \Rightarrow \mu\{x\} = [B]\{x\}$$

$$\mu = \frac{1}{\lambda} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \frac{1}{\mu}$$

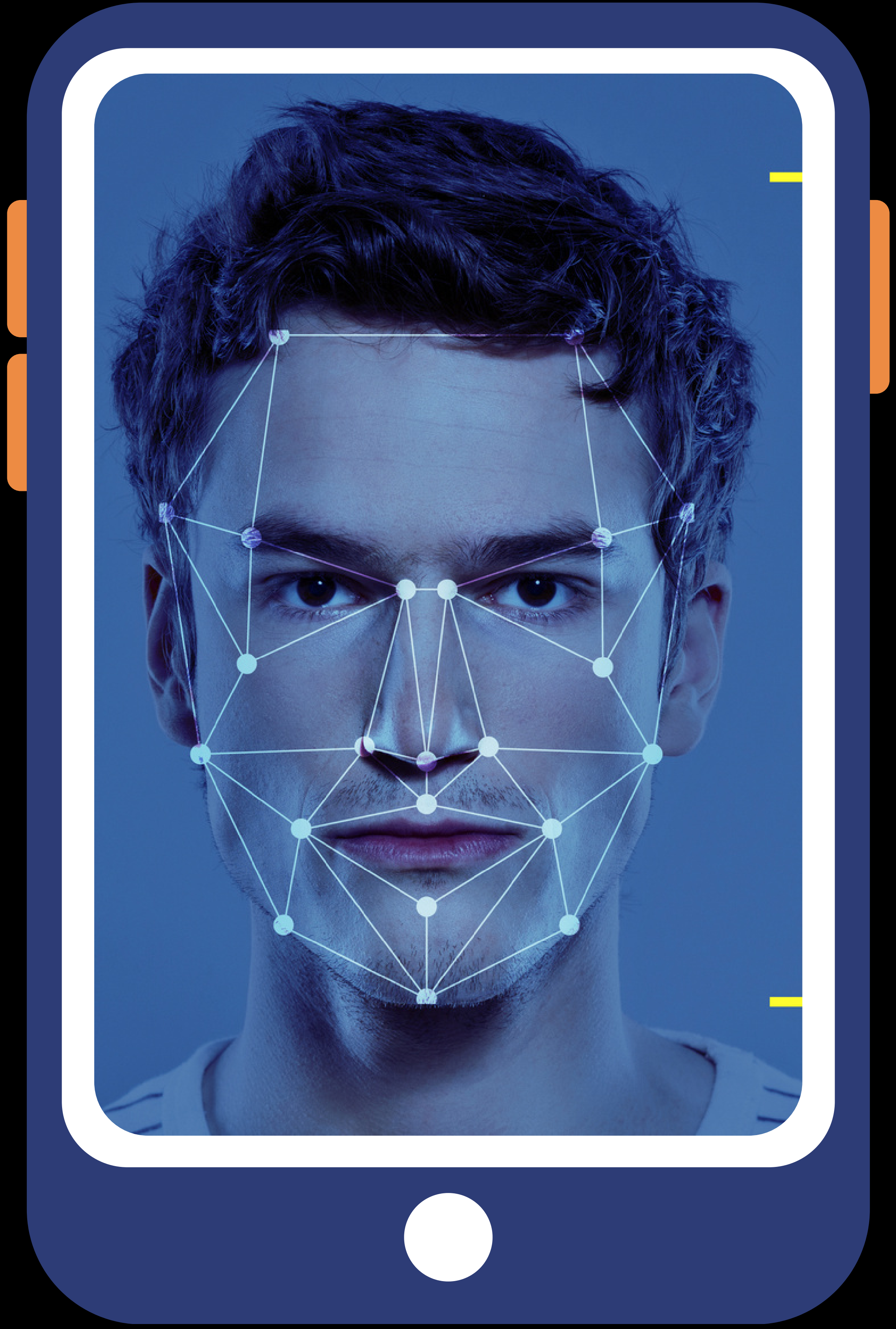
Output nilai eigen **terkecil**

PENGAPLIKASIAN

BIDANG FISIKA

Dalam mekanika kuantum, nilai eigen dan vektor eigen digunakan untuk menganalisis operator dan status kuantum. Mereka juga digunakan dalam pemodelan dinamika fluida, akustik, dan elektromagnetik.

PENGAPLIKASIAN



Dalam bidang pengolahan citra dan pengenalan pola, metode numerik seperti PCA (Principal Component Analysis) sering digunakan untuk mengekstrak fitur yang paling penting dari dataset citra. Dengan menggunakan nilai dan vektor eigen dari matriks kovariansi fitur-fitur, sistem dapat mengurangi dimensi dataset citra sambil mempertahankan sebagian besar informasi yang relevan. Hal ini memungkinkan untuk pengenalan pola dan pengenalan wajah yang lebih efisien dan andal.

BIDANG PENGOLAHAN CITRA