POGLAVLJE 2.
MINIMIZACIJA BULOVIH FUNKCIJA

Realizacija tražene kombinacione mreže sa minimalnim brojem logičkih kola je stalna potreba prilikom projektovanja kombinacionih mreža. Na početku ovog poglavlja su ilustrovani primeri minimizacije Bulovih funkcija analitičkim i grafičkim metodama. Nakon toga je glavni akcenat postavljen na zadatke minimizacije tabelarnom metodom *Quin-McCluskey*.

Zadatak minimizacije Bulovih funkcija se svodi na određivanje Bulove funkcije sa minimalnim brojem superpozicija unutar jednog funkcionalno potpunog sistema. Zbog nepostojanja dovoljno efikasnih rešenja tako postavljenog zadatka rešenje se traži u minimizaciji (traženju minimalnih formi) Bulove funkcije unutar konkretnog funkcionalno potpunog sistema. Najčešće se rešenje zadatka minimizacije Bulovih funkcija traži u okviru funkcionalno potpunog sistema koji obrazuju konjukcija, disjunkcija i negacija.

Postoje tri opšte metode minimizacije Bulovih funkcija. To su:

1. analitička metoda,
2. grafičke metode i
3. tabelarne metode.

Analitičke metode:

Analitički metod se zasniva na minimizaciji Bulove funkcije matematičkim transformacijama zasnovanim na aksiomima i teoremama Bulove algebre. Ovakva metoda je dugotrajna i veoma zamorna, pogotovo kod složenih prenosnih funkcija.

Grafičke metode:

Najčešće korišćena grafička metoda je minimizacija Bulovih funkcija pomoću Karnoovih karti. Ova metoda koristi modifikovanu kombinacionu tablicu sa brojem ćelija jednakim broju slogova Bulove funkcije. Da bi se Bulova funkcija unela u tablicu, uzima se onaj slog na kome je vrednost funkcije 1 i unosi se u ćeliju koja odgovara tom slogu. Uobičajeno je da se ćelije sa vrednošću funkcije 0 ostavljaju prazne, dok se ćelije na kojima je vrednost funkcije nedefinisana popune znakom $\times$.

Metod minimizacije proističe iz činjenice da kad se u dve logički susedne ćelije nalaze vrednost 1 (ili $\times$) funkcija može da se uprosti po promenljivoj po kojoj se razlikuju. Cilj minimizacije se sastoji u tome da se pronađe najmanji mogući broj pravilnih figura ranga r koji sadrže vrednosti 1 ili $\times$. Pravilna figura ranga r je skup od 2^r ćelija Karnoove karte u kome je svaka ćelija logički susedna sa r drugih ćelija skupa. Prvo se pronalaze pravilne figure najvećeg ranga i postupno se kreće ka pronalaženju pravilne figure najmanjeg ranga. Na kraju postupka svaka ćelija koja sadrži vrednosti 1 mora biti obuhvaćena sa najmanje jednom pravilnom figurom. To znači da neka ćelija može bit obuhvaćena sa više pravilnih figura, pod uslovom da se time dobija pravilna figura većeg ranga.

Ova metoda je pogodna za brzu minimizaciju Bulovih funkcija do 5 promenljivih. Postupak postaje nepregledan i podložan mogućnosti subjektivnih grešaka u određivanju minimalnih formi Bulovih funkcija sa više promenljivih.

Tabelarne metode:

Tabelarne metode minimizacije Bulovih funkcija, predstavlja potpuno formalizovane procedure koje iz koraka u korak dovode do jednoznačnog rezultata.

Zahvaljujući tome ove metode su veoma pogodne za programsku implementaciju. Za ilustraciju ovih metoda prikazaće se metoda *Quin-Mc Cluskey*.

Kod minimizacije Bulove funkcije ovom metodom uvek se polazi od funkcije napisane u SDNF. Procedura minimizacije se nadalje sastoji od dva koraka. U prvom se pronalazi potpun skup prostih implikanti a u drugom se izabira ne preopširan potpun sistem prostih implikanti koji daje izraz za minimalnu DNF.

Prvi korak je formiranje liste indeksa slogova na kojima funkcija ima vrednost 1. Lista se formira tako što se poređaju indeksi prema broju jedinica u binarnom reprezentu sloga sa datim indeksom, odnosno formiraju se grupe sa istim brojem jedinica. Redosled grupa sledi porast broja jedinica u indeksu sloga. Tako formirane grupe čine tzv. 0-kompleks. 0-kompleks se sastoji od grupa kod kojih se broj jedinica razlikuje za jedan, odnosno moguća su upoređivanja između susednih grupa. Upoređivanje se vrši sistematski između gornje i donje njoj susedne grupe.

Nakon toga sledi formiranje novih grupa koje čine 1-kompleks upoređivanjem elemenata susednih grupa. Novi element u 1-kompleksu čine elementi susednih grupa 0-komplesa koji se razlikuju za samo jednu jedinicu u binarnom reprezentu indeksa sloga. Ukoliko neki element ostane neudružen sa drugim elementima on ulazi u skup prostih implikanti, odnosno on je prosta implikanta. Sledi formiranje novih grupa (2-komples, 3-kompleks...) sve dok je moguće udruživanje elemenata susedih klasa.

Procedura upoređivanja slogova upoređenjem binarnih promenljivih može se uprostiti korišćenjem decimalnih vrednosti indeksa. U ovom slučaju se koristi okolnost da se upoređuju samo indeksi čija se razlika može izraziti u obliku stepena broja dva.

Označavanjem razlike dva decimalna indeksa u zagradi ukazuje se u kompleksu višeg ranga, koja dva broja iz susednih grupa mogu da se upoređuju. Pri tome se mora voditi računa da se mogu kombinovati dva kuba ako je prvi indeks gornje grupe manji po stepenu dva od prvog indeksa niže grupe.

Da bi se došlo do minimalnog skupa prostih implikanti, formira se tablica prostih implikanti. Simbolične oznake dobijenih prostih implikanti čine vrste ove tabele, dok su kolone sastavljene od decimalnih indeksa slogova na kojima funkcija ima vrednost 1.

Na preseku vrste i kolone unosi se oznaka (*, √, i sl.) ako data prosta implikanta, navedena u vrsti, sadrži indeks čiji je indeks označen u koloni. Kada se unesu sve oznake u ćelije tablice, proces pronalaženja minimalnog potpunog skupa prostih implikanti svodi se na proceduru pretraživanja kolona, počev sa leva u desno. Traži se kolona koja sadrži samo jednu oznaku, što drugim rečima označava da se traži takva prosta implikanta koja jedino pokriva dati 0-kub. To znači da takva prosta implikanta obavezno mora biti uključena u minimalni skup prostih implikanti. Takva prosta implikanta se naziva esencijalnom prostom implikantom. Procedura se ponavlja pronalaženjem ostalih prostih implikanti, sve dok se u minimalnom skupu ne obuhvate svi indeksi slogova na kojima funkcija ima vrednost 1. U najboljem slučaju esencijalne proste implikante će pokrivati sve indekse i proces izbora minimalnog skupa prostih implikanti se time i završava. U tom slučaju preostaje da se esencijalne proste implikante napišu u obliku elementarnih proizvoda, a nepreopširna skraćena forma funkcije f odnosno minimalna DNF funkcije dobija se u obliku

$$f_{min} = \sum_{i=1}^{k} I_i$$

gde su sa I_i označene esencijalne proste implikante

Ukoliko prethodna procedura nije moguća, rešenje problema minimizacije skupa prostih implikanti nije jedinstveno. Stoga se odabira proizvoljna prosta implikanta koja ulazi u skup minimalnih prostih implikanti. Tako odabrana prosta implikanta time postaje esencijalna prosta implikanta. Nakon toga se formira redukovana tabela prostih implikanti, izostavljanjem vrste i kolona koje je zauzimala odabrana esencijalna prosta implikanta. U tako dobivenoj tabeli sledi pronalaženje esencijalne proste implikante. Ukoliko to nije moguće, formira se nova redukovana tabela prostih implikanti. Prilikom odabira esencijalne proste implikante treba vodita računa da se odabere takva prosta implikanta koja prekriva najviše kolona. To zapravo znači da je potrebno odabrati prostu implikantu čija vrsta dominira nad ostalim vrstama.

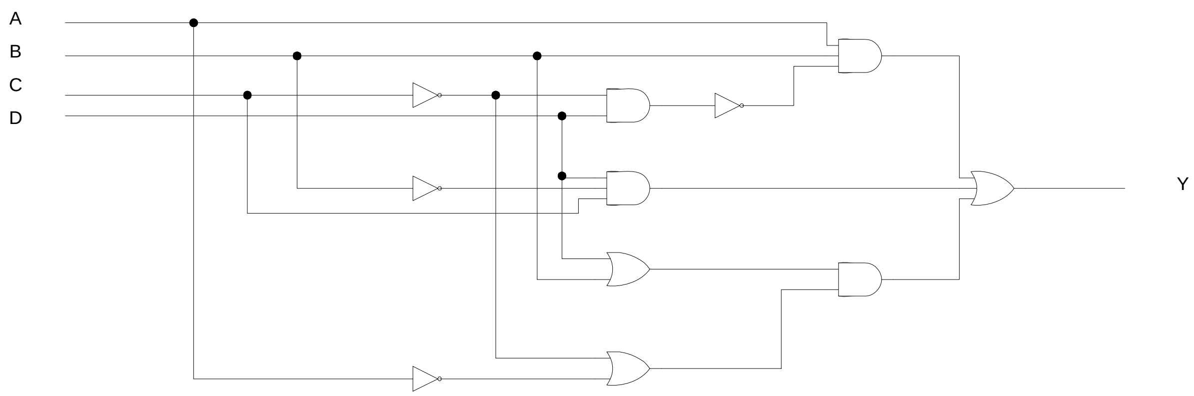
Po završetku procedure minimalna DNF se daje u obliku

$$f_{min} = \sum_{i=1}^{k_1} I^1 + \sum_{i=1}^{k_2} I^2$$

gde su sa I^1 označene esencijalne proste implikante, kojih ima ukupno k_1 ($k_1 \geq 0$), a sa I^2 sekundarne esencijalne proste implikante, kojih ima k_2 ($k_2 > 0$).

2.1 ZADATAK:

Uprostiti mrežu na slici:



REŠENJE:

Prvi korak je da se dobije prenosna funkcija mreže koja je prikazana na slici. Analizom se dobije sledeća jednačina:

$$Y = AB\overline{\overline{C}D} + D\overline{B}C + \left(\overline{A} + \overline{C}\right)\left(B + D\right).$$

Primenom matematičkih transformacija zasnovanih na aksiomima i teoremama Bulove algebre vrši se minimizacija dobijene prenosne funkcije. U nastavku je prikazana procedura minimizacije:

$$Y = AB\overline{\overline{C}D} + D\overline{B}C + \left(\overline{A} + \overline{C}\right)\left(B + D\right)$$

$$Y = ABC + AB\overline{D} + D\overline{B}C + \overline{A}B + \overline{A}D + \overline{C}B + \overline{C}D$$

$$Y = B\left(AC + \overline{C}\right) + B\left(A\overline{D} + \overline{A}\right) + D\left(\overline{B}C + \overline{C}\right) + \overline{A}D$$

$$Y = B\left(A + \overline{C}\right) + B\left(\overline{D} + \overline{A}\right) + D\left(\overline{B} + \overline{C}\right) + \overline{A}D$$

$$Y = B\left(A + \overline{C} + \overline{D} + \overline{A}\right) + D\overline{B} + D\overline{C} + \overline{A}D$$

$$Y = B + D\overline{B} + D\overline{C} + \overline{A}D = B + D + \overline{A}D$$

$$Y = B + D$$

Rezultat minimizacije pokazuje da je celokupna mreža sa slike ekvivalentna sa jednim ILI kolom na čijim se ulazima nalaze signali B i D.

2.2 ZADATAK:

Zadata je funkcija f(A, B, C) kombinacionom tablicom. Napisati:

a) SDNF i SKNF
b) Fizičku implementaciju

A	B	C	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

REŠENJE:

a)

SDNF se dobija direktno iz zadate kombinacione tablice uključivanjem slogova na kojima funkcija ima vrednost jedan:

$$F=\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}BC+AB\overline{C}.$$

SKNF se takođe dobija direktno iz zadate kombinacione tablice, sa tom razlikom da se SKNF dobija uključivanjem slogova na kojima funkcija ima vrednost nula

$$F=(A+B+C)(A+B+\overline{C})(\overline{A}+B+C)(\overline{A}+B+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$$

b)

Pre same fizičke implementacije zadate funkcije potrebno je izvršiti minimizaciju prenosne funkcije sa ciljem uštede broja logičkih kola potrebnih za implementaciju. Minimizacija se vrši analitičkim putem i u ovom slučaju se kreće od prenosne funkcije u obliku SDNF. Postupak minimizacije je prikazan u nastavku.

$$F=\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}BC+AB\overline{C}$$

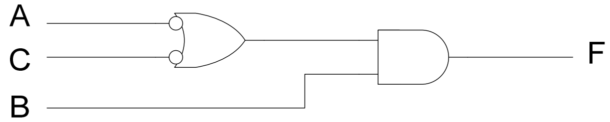
$$F=\overline{A}B(C+\overline{C})+AB\overline{C}$$

$$F=\overline{A}B+AB\overline{C}$$

$$F=B(\overline{A}+A\overline{C})=B(\overline{A}+\overline{C})=\overline{A}B+B\overline{C}$$

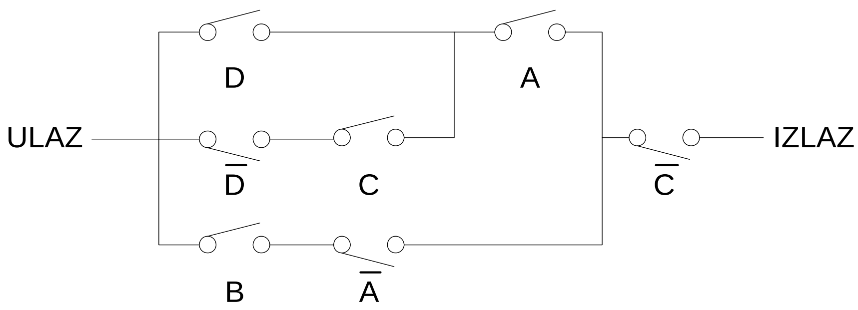
$$F=B(\overline{A}+\overline{C})$$

Fizička implentacija dobijene minimalne forme prenosne funkcije iz zadatka je prikazana na sledećoj slici:



2.3 ZADATAK:

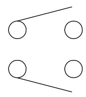
Zameniti kontaktnu mrežu na slici najjednostavnijom mrežom preko logičkih kola.



REŠENJE:

Na slici su prikazane dve vrste prekidača:

- prekidač u pozitivnoj logici
- prekidač u negativnoj logici



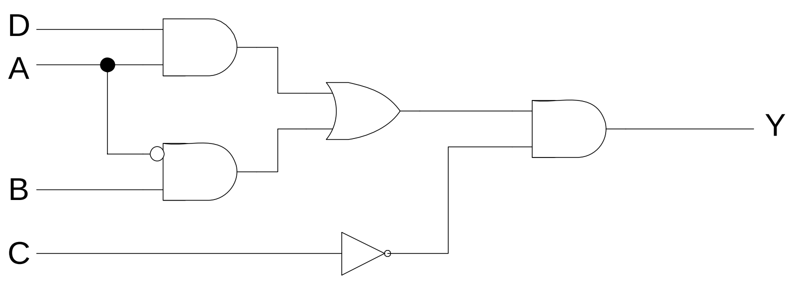
Analizom kontaktne mreže sa slike dobija se sledeća prenosna funkcija:

$$F=\bar{C}\left(A\left(D+\bar{D}C\right)+\bar{A}B\right)$$

Izvršavanjem osnovnih matematičkih transformacija radi minimizacije dobijenog izraza dolazi se do sledećeg izraza:

$$F=\bar{C}\left(A\left(D+\bar{D}C\right)+\bar{A}B\right)=\bar{C}\left(AD+A\bar{D}C+\bar{A}B\right)$$
$$F=AD\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}=\left(AD+\bar{A}B\right)\bar{C}$$

Fizička implementacija dobijenog izraza pomoću logičkih kola je prikazana na sledećoj slici:



2.4 ZADATAK:

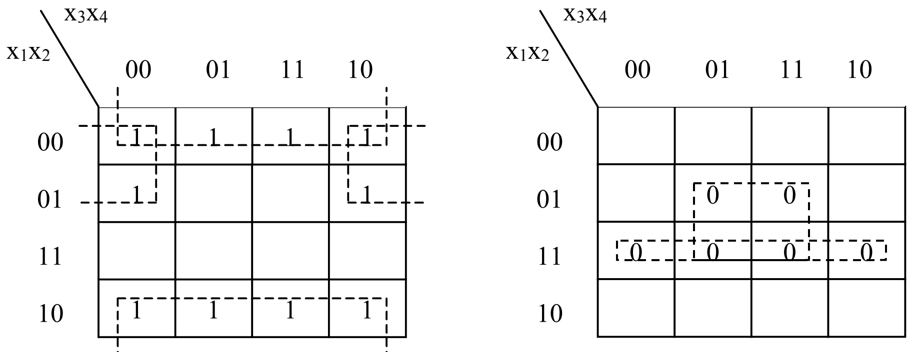
Naći minimalnu disjunktivnu i konjuktivnu formu prekidačke funkcije pomoću Karnoovih karti.

a) $f^{(1)} = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 11\}$
b) $f^{(1)} = \{0, 1, 5, 7, 8, 10, 14, 15\}$

REŠENJE:

a)

Funkcija je zadata skupom indeksa slogova na kojima je vrednost funkcije 1. Pošto je najveći indeks 11, zaključuje se da je to funkcija 4 logičke promenljive koje su označene sa (x_1, x_2, x_3, x_4). Karnoove karte za dobijanje minimalne disjunktivne i konjuktivne forme su prikazane na sledećoj slici:

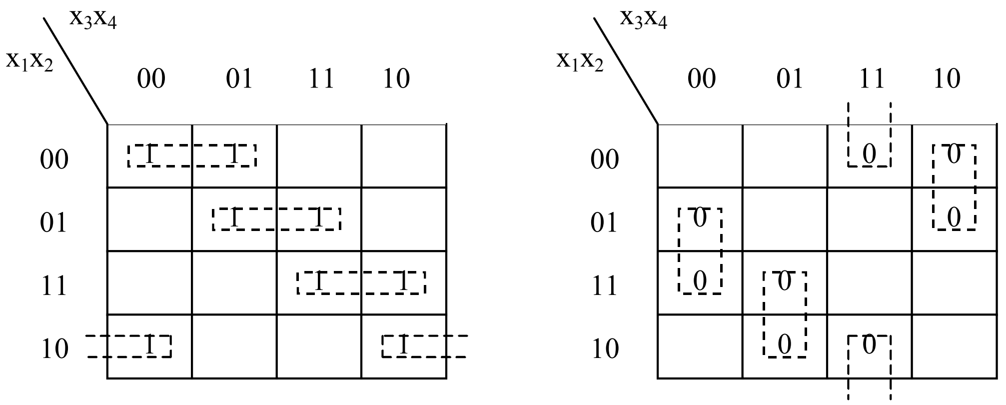


$$f = \overline{x}_2 + \overline{x}_1\overline{x}_4 \qquad f = (\overline{x}_1 + \overline{x}_2)(\overline{x}_2 + \overline{x}_4)$$

Slika levo prikazuje minimalnu DNF, dok je minimalna KNF prikazana na slici desno.

b)

Funkcija je zadata skupom indeksa slogova na kojima je vrednost funkcije 1. Pošto je najveći indeks 15 zaključuje se da je to funkcija 4 logičke promenljive koje su označene sa (x_1, x_2, x_3, x_4). Karnoove karte za dobijanje minimalne disjunktivne i konjuktivne forme su prikazane na sledećoj slici:



$$f = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + \overline{x}_1 x_2 x_4 + x_1 x_2 x_3 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_4$$

$$f = (\overline{x}_2 + x_3 + x_4)(\overline{x}_1 + x_3 + \overline{x}_4)(x_2 + \overline{x}_3 + \overline{x}_4)(x_1 + \overline{x}_3 + x_4)$$

Slika levo prikazuje minimalnu DNF, dok je minimalna KNF prikazana na slici desno.

2.5 ZADATAK:

Naći minimalnu disjunktivnu i konjuktivnu formu prekidačke funkcije pomoću karnoovih karti.

$f^{(0)} = \{0, 4, 10, 12, 14\}$

$f^{(b)} = \{6, 7, 8, 9, 11, 15\}$

REŠENJE:

Funkcija je zadata skupom indeksa slogova na kojima je vrednost funkcije 1. Pošto je najveći indeks 15 zaključuje se da je to funkcija 4 logičke promenljive koje su označene sa (x_1, x_2, x_3, x_4). Karnoove karte za dobijanje minimalne disjunktivne i konjuktivne forme su prikazane na sledećoj slici:

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00		1	1	1
01		1	b	b
11		1	b	
10	b	b	b	

$$f = x_4 + \overline{x}_1 x_3$$

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	0			
01	0		b	b
11	0		b	0
10	b	b	b	0

$$f = (x_3 + x_4)(\overline{x}_1 + \overline{x}_3)$$

$$f = (x_3 + x_4)(\overline{x}_1 + x_4)$$

Slika levo prikazuje minimalnu DNF, dok je minimalna KNF prikazana na slici desno.

2.6 ZADATAK:

Naći proste implikante funkcije $f^{(1)} = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$ McClusky metodom.

REŠENJE:

Pošto je funkcija zadata skupom indeksa slogova na kojima je vrednost funkcije 1, prvi korak je formiranje liste indeksa slogova na kojima funkcija ima vrednost 1. Lista se formira tako što se poređaju indeksi prema broju jedinica u binarnom reprezentu sloga sa datim indeksom, odnosno formiraju se grupe sa istim brojem jedinica. Redosled grupa sledi porast broja jedinica u indeksu sloga.

Za zadatu funkciju u prvoj grupi se nalaze 3 elementa sa jednom jedinicom u binarnom reprezentu indeksa sloga. To su indeksi slogova 1, 2 i 4. U drugoj grupi se nalaze slogovi 3 i 6, dok treću grupu čini slog 7. Za binarnu predstavu indeksa slogova zadate funkcije potrebna su 3 (označeni sa x_1, x_2 i x_3) bita jer je najveći indeks 7.

i	x_1	x_2	x_3	
1	0	0	1	√
2	0	1	0	√
4	1	0	0	√
3	0	1	1	√
6	1	1	0	√
7	1	1	1	√

Nakon toga sledi formiranje novih grupa upoređivanjem elementa susednih grupa. Elementi novih grupa se formiraju od elemenata koji se razlikuju za samo jednu jedinicu u binarnom reprezentu indeksa sloga. Na mestu gde je vrednost različita stavlja se oznaka ×. Pri tome obavezno treba označiti elemente koji su udruženi. Ovde je to urađeno oznakom √.

i	x_1	x_2	x_3	
1, 3	0	×	1	A
2, 3	0	1	×	√
2, 6	×	1	0	√
4, 6	1	×	0	B
3, 7	×	1	1	√
6, 7	1	1	×	√

Sledi udruživanje elemenata preostale dve grupe po istim principima. Time se dobije sledeća lista:

i	x_1	x_2	x_3
2, 3, 6, 7	×	1	×
2, 6, 3, 7	×	1	×

Pošto oba elementa obuhvataju slogove sa istim indeksima može se izostaviti proizvoljan element:

i	x_1	x_2	x_3	
2, 3, 6, 7	×	1	×	C

Po završetku postupka sledi pronalaženje elemenata koji nisu udruženi ni sa jednim drugim elementom. Takvi elementi ulaze u skup prostih implikanti, i ovde su označeni sa oznakama A, B i C.

Prosta implikanta A obuhvata slogove sa indeksima 1 i 3. Pošto se oni razlikuju na mestu promenljive označene sa x_2, sledi da je $A=\overline{x_1}x_3$. Istom metodom se dobija da je $B=x_1\overline{x_3}$ i $C=x_2$.

Prema tome, prenosna funkcija zadate funkcije izražena preko minimalnog skupa prostih implikanti je sledeća:

$$f = A + B + C = \overline{x_1}x_3 + x_1\overline{x_3} + x_2$$

2.7 ZADATAK:

Naći proste implikante prekidačke funkcije $f^{(1)} = \{0, 1, 2, 3, 5, 7, 8, 10, 14\}$

REŠENJE:

Pošto je 14 slog sa najvećim indeksom, zaključuje se da je potrebno 4 logičke promenljive za binarno predstavljanje svih indeksa slogova.

Prvi korak je formiranje liste slogova na osnovu broja jedinica u binarnom reprezentu indeksa sloga. U ovom rešenju će se koristiti decimalni indeksi slogova radi jednostavnijeg upoređivanja.

0	√
1	√
2	√
8	√
3	√
5	√
10	√
7	√
14	√

Upoređivanjem elemenata susednih grupa formira se nova lista. Prilikom upoređivanja treba voditi računa da element gornje grupe treba da bude manji po stepenu dva od elementa donje grupe. Element nove liste se formira od elemenata čija sa razlika indeksa može izraziti u obliku stepena broja dva. Pored novog elementa se u zagradu piše razlika dva decimalna indeksa.

Ako sa `a` i `b` označimo elemente gornje i donje klase respektivno, oni se mogu udružiti ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

- pripadaju susednim grupama (tj. razlikuju se samo za jednu jedinicu)
- element donje klase je veći od elementa gornje klase ($a < b$)
- njihova razlika se može izraziti nekim stepenom broja 2 ($a-b = 2^l$)

U slučaju zadovoljenja gore navedenih uslova formira se novi element: $a,b(2^l)$.

Rukovodeći se navedenim pravilima dobija se sledeća lista:

0, 1	(1)	√
0, 2	(2)	√
0, 8	(8)	√
1, 3	(2)	√
1, 5	(4)	√
2, 3	(1)	√
2, 10	(8)	√
8, 10	(2)	√
3, 7	(4)	√
5, 7	(2)	√
10, 14	(4)	A

Vrši se dalje upoređivanje elemenata susednih grupa i formiranje nove liste. Ukoliko sa $a_1, a_2(i)$ označimo element gornje grupe, a sa $b_1, b_2(j)$ element donje grupe, oni formiraju novi element ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

- $i = j$
- $b_1 > a_1$; $b_2 > a_2$
- $b_1 - a_1 = b_2 - a_2 = 2^l$

Novi element koji se formira na osnovu dva elementa koji zadovoljavaju navedene uslove se označava sa $a_1, a_2, b_1, b_2(i, 2^l)$.

0, 1, 2, 3	(1, 2)	B
0, 2, 1, 3	(2, 1)	
0, 2, 8, 10	(2, 8)	C
0, 8, 2, 10	(8, 2)	
1, 3, 5, 7	(2, 4)	D
1, 5, 3, 7	(4, 2)	

Sledi udruživanje elemenata iz preostale dve grupe. Elementi $a_1, a_2, a_3, a_4(i, j)$ i $b_1, b_2, b_3, b_4(k, l)$ se udružuju u slučaju ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

- $i = k$; $j = l$
- $b_i > a_i \quad i \in \{1, 2, 3, 4\}$
- $b_i - a_i = 2^m \quad i \in \{1, 2, 3, 4\}$

Novi element koji se formira na osnovu dva elementa koji zadovoljavaju navedene uslove se označava sa $a_1, a_2, a_1, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4(i, j, 2^m)$.

Pošto u ovom slučaju ne postoje dva elementa koji zadovoljavaju navedene uslove sledi pronalaženje elemenata koji nisu udruženi ni sa jednim drugim elementom. Ti elementi ulaze u skup prostih implikanti, i ovde su označeni sa oznakama A, B, C i D.

Prosta implikanta A obuhvata slogove sa indeksima 10 i 14, pri čemu je njihova razlika 4. Na osnovu razlike ($2^2=4$) sledi da prosta implikanta A ne sadrži logičku promenljivu koja se nalazi na poziciji sa težinom 4. Ako logičke promenljive označimo sa x_1, x_2, x_3, x_4, pri čemu sa x_1 označimo logičku promenljivu sa najvećom težinom ($2^3=8$), a sa x_4 označimo logičku promenljivu sa najmanjom težinom ($2^0=1$), sledi da prosta implikanta A ne sadrži logičku promenljivu x_2. To se može i ilustrovati na sledeći način:

$$\text{A (10, 14)(4)} \qquad \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \end{array} \quad \left.\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 x_3 \overline{x_4}$$

Istim postupkom se mogu dobiti i izrazi za proste implikante B, C i D:

$$\text{B (0, 1, 2, 3)(1, 2)} \qquad \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \quad \left.\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{x_1}\,\overline{x_2}$$

$$\text{C (0, 2, 8, 10)(2, 8)} \qquad \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \quad \left.\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{x_2}\,\overline{x_4}$$

$$\text{D (1, 3, 5, 7)(2, 4)} \qquad \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \quad \left.\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{x_1} x_4$$

Prema tome, prenosna funkcija zadate funkcije izražena preko minimalnog skupa prostih implikanti je sledeća:

$$f = A + B + C + D$$

Uz pomoć postupka prikazanog u sledećem zadatku dokazati da minimalna disjunktivna normalna forma ne obuhvata implikantu B.

2.8 ZADATAK:

Odrediti minimalnu disjunktivnu normalnu formu za funkciju datu skupom indeksa slogova:

$$f^{(1)}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \{0, 6, 8, 10, 12, 14, 17, 19, 20, 22, 25, 27, 28, 30\}$$

REŠENJE:

Prvi korak prilikom određivanja minimalne disjunktivne forme je određivanje skupa prostih implikanti. To se realizuje uz pomoć postupka koji je prikazan u prethodnom zadatku.

0	√
8	√
6	√
10	√
12	√
17	√
20	√
14	√
19	√
22	√
25	√
28	√
27	√
30	√

0, 8	(8)	F
8, 10	(2)	√
8, 12	(4)	√
6, 14	(8)	√
6, 22	(16)	√
10, 14	(4)	√
12, 14	(2)	√
12, 28	(16)	√
17, 19	(2)	√
17, 25	(8)	√
20, 22	(2)	√
20, 28	(8)	√
14, 30	(16)	√
19, 27	(8)	√
22, 30	(8)	√
25, 27	(2)	√
28, 30	(2)	√

8, 10, 12, 14	(2, 4)	A
6, 14, 22, 30	(8, 16)	B
12, 14, 28, 30	(2, 16)	C
17, 19, 25, 27	(2, 8)	D
20, 22, 28, 30	(2, 8)	E

Nakon dobijanja skupa prostih implikanti (implikante označene slovima A, B, C, D, E i F) sledi minimizacija broja elemenata dobivenog skupa. Da bi se došlo do minimalnog skupa prostih implikanti, formira se tablica prostih implikanti.

	0	6	8	10	12	14	17	19	20	22	25	27	28	30
A			*	*	*	*								
B		*				*				*				*
C					*	*							*	*
D							*	*			*	*		
E									*	*			*	*
F	*		*											

Na preseku vrste i kolone unosi se oznaka (*) ako data prosta implikanta, navedena u vrsti, sadrži indeks čiji je indeks označen u koloni. Kada se unesu sve oznake u ćelije tablice, vrši se pretraživanja kolona, počev sa leva u desno, sa ciljem pronalaska esencijalnih prostih implikanti. Traži se kolona koja sadrži samo jednu oznaku. U slučaju da se pronađe takva kolona, prosta implikanta koja obuhvata slog sa dobivenim indeksom postaje esencijalna prosta implikanta.

Procedura se ponavlja pronalaženjem ostalih prostih implikanti, sve dok minimalni skup ne bude sadržao proste implikante koje obuhvataju sve indekse slogova na kojima funkcija ima vrednost 1. U ovom slučaju esencijalne proste implikante pokrivaju sve indekse i proces izbora minimalnog skupa prostih implikanti se time i završava.

Nakon pretraživanja tablice prostih implikanti dobija se da prosta implikata sa oznakom C ne ulazi u minimalni skup prostih implikanti, jer su slogovi koje ona obuhvata prekriveni sa drugim esencijalnim prostim implikantama.

Prema tome, minimalna DNF zadate funkcije dobija se u obliku:

$$f = A + B + D + E + F$$

Pri tome su izrazi za esencijalne proste implikante sledeći:

A (8, 10, 12, 14) (2, 4)

$A = \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_5$

x_1 … x_5
01000
01010
01100
01110

B (6, 14, 22, 30)(8, 16)

$B = x_3 x_4 \overline{x}_5$

x_1 … x_5
00110
01110
10110
11110

D (17, 19, 25, 27)(2, 8)

$D = x_1 \overline{x}_3 x_5$

10001
10011
11001
11011

E (20, 22, 28, 30)(2, 8)

$E = x_1 x_3 \overline{x}_5$

10100
10110
11100
11110

F (0, 8)(8)

$F = \overline{x}_1 \overline{x}_3 \overline{x}_4 \overline{x}_5$

00000
01000

Potpuni izraz za minimalnu DNF zadate funkcije je sledeći:

$$f = \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_5 + x_3 x_4 \overline{x}_5 + x_1 \overline{x}_3 x_5 + x_1 x_3 \overline{x}_5 + \overline{x}_1 \overline{x}_3 \overline{x}_4 \overline{x}_5$$

2.9 ZADATAK:

Naći minimalnu disjunktivnu formu prekidačke funkcije:

$f^{(0)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \{4, 6, 9, 14\}$.

REŠENJE:

Minimizacija Bulove funkcije McCluski metodom uvek se polazi od funkcije napisane u SDNF. Zbog toga se mora zadata funkcija izraziti skupom indeksa slogova gde funkcija ima vrednost jedan. To se jednostavno realizuje, zahvaljujući konačnom domenu vrednosti Bulovih funkcija, tako što se izostave indeksi gde funkcija ima vrednost 0 i u skup indeksa slogova gde funkcija ima vrednost 1 se upišu ostali indeksi zadate Bulove funkcije od 4 promenljive:

$$f^{(1)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \{0, 1, 2, 3, 5, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 15\}$$

Prvi korak prilikom određivanja minimalne disjunktivne forme je određivanje skupa prostih implikanti, uz pomoć procedure opisane u ranijim zadacima.

0	√
1	√
2	√
8	√
3	√
5	√
10	√
12	√
7	√
11	√
13	√
15	√

Nakon dobijanja skupa prostih implikanti (implikante označene slovima A, B, C, D, E, F, G i H) sledi minimizacija broja elemenata dobivenog skupa pomoću tablice prostih implikanti.

0, 1	(1)	√
0, 2	(2)	√
0, 8	(8)	√
1, 3	(2)	√
1, 5	(4)	√
2, 3	(1)	√
2, 10	(8)	√
8, 10	(2)	√
8, 12	(4)	A
3, 7	(4)	√
3, 11	(8)	√
5, 7	(2)	√
5, 13	(8)	√
10, 11	(1)	√
12, 13	(1)	B
7, 15	(8)	√
11, 15	(4)	√
13, 15	(2)	√

0, 1, 2, 3	(1, 2)	C
0, 2, 8, 10	(2, 8)	D
1, 3, 5, 7	(2, 4)	E
2, 3, 10, 11	(1, 8)	F
3, 7, 11, 15	(4, 8)	G
5, 7, 13, 15	(2, 8)	H

	0	1	2	3	5	7	8	10	11	12	13	15
A							*			*		
B										*	*	
C	*	*	*	*								
D	*		*				*	*				
E		*		*	*	*						
F			*	*				*	*			
G				*		*			*			*
H					*	*					*	*

Pretragom kolona, počev sa leva u desno, uočava se da ne postoji nijedna esencijalna prosta implikanta (nema nijedne kolone sa samo jednom zvezdicom). Zbog toga rešenje problema minimizacije date funkcije McCluskey metodom nije jedinstveno. Stoga se odabira proizvoljna prosta implikanta koja ulazi u skup minimalnih prostih implikanti. U ovom slučaju odabrana je implikanta E. Tako odabrana prosta implikanta time postaje esencijalna prosta implikanta. Nakon toga se formira redukovana tabela prostih implikanti, izostavljanjem vrste i kolona koje je zauzimala odabrana esencijalna prosta implikanta.

	0	2	8	10	11	12	13	15
A			*			*		
B						*	*	
~~C~~	*	*						
D	*	*	*	*				
F		*		*	*			
G					*			*
H							*	*

U tako dobivenoj tabeli sledi pronalaženje esencijalne proste implikante. Pošto i u ovom slučaju to nije moguće, formira se nova redukovana tabela prostih implikanti. Prilikom odabira esencijalne proste implikante odabira se takva prosta implikanta koja prekriva najviše kolona. To zapravo znači da je potrebno odabrati prostu implikantu čija vrsta dominira nad ostalim vrstama. Pretragom prethodne tabele vidi se da je to prosta implikanta D, i ona se odabira za esencijalnu prostu implikantu. Uočava se da proste implikante D i E u potpunosti prekrivaju prostu implikantu C, tako da prosta implikanta C ne ulazi u skup prostih implikanti koje formiraju minimalnu DNF zadate funkcije.

	11	12	13	15
A		*		
B		*	*	
~~F~~	*			
G	*			*
H			*	*

Ponavljanjem prethodne procedure uočava se da je potrebno formirati novu redukovanu tabelu prostih implikanti. Za esencijalnu prostu implikanti se odabira prosta implikanta G, čime iz minimalnog skupa nestaje prosta implikanta F.

	12	13
~~A~~	*	
B	*	*
~~H~~		*

U novodobivenoj redukovanoj tabeli prostih implikanti uočava se da prosta implikanta B dominira nad prostim implikantama A i H. Time se odabira prosta implikanta B za esencijalnu prostu implikantu, čime se iz minimlanog skupa prostih implikanti eliminišu proste implikante A i H.

Ovim se završava procedura minimizacije skupa prostih implikanti. Za esencijalne proste implikante su redom izabrane proste implikante E, D, G i B. Prema tome, minimalna DNF zadate funkcije dobija se u obliku:

$$f = B + D + G + E$$

Pri tome su izrazi za esencijalne proste implikante sledeći:

	$x_1 \quad x_4$		$x_1 \quad x_4$
B = (12, 13)(1)	1100	D = (0, 2, 8, 10)(2, 8)	0000
$B = x_1 x_2 \overline{x_3}$	1101	$D = \overline{x_2}\,\overline{x_4}$	0010
			1000
			1010

E = (1, 3, 5, 7)(2, 4)	0001	G = (3, 7, 11, 15)(4, 8)	0011
$E = \overline{x_1} x_4$	0011	$G = x_3 x_4$	0111
	0101		1011
	0111		1111

Potpuni izraz za minimalnu DNF zadate funkcije je sledeći:

$$f = x_1 x_2 \overline{x_3} + \overline{x_2}\,\overline{x_4} + \overline{x_1} x_4 + x_3 x_4$$

2.10 ZADATAK:

Za sistem funkcija četiri promenljive dat skupovima indeksa gde su funkcije jednake jedinici, izvršiti optimalnu sintezu uz pomoć NI kola.

$f_1^{(1)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \{11, 12, 13, 14, 15\}$

$f_2^{(1)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \{3, 7, 11, 12, 13, 14, 15\}$

$f_3^{(1)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \{3, 7, 12, 13, 14, 15\}$

REŠENJE:

Minimizacija skupa Bulovih funkcija je analogna minimizaciji jedne Bulove funkcije, sa tom razlikom da se postupak izvršava za sve funkcije iz skupa istovremeno. Prvi korak je formiranje liste slogova na osnovu broja jedinica u binarnom reprezentu indeksa sloga.

Upoređivanjem elemenata susednih grupa formira se nova lista. Formiranje elemenata nove liste se izvršava po istim pravilima kao i kod minimizacije jedne Bulove funkcije. Pri tome treba voditi računa da dva elementa formiraju novi element samo za zajedničke funkcije (zatamnjene ćelije u tabeli). Pri tome se označavaju elementi koji su udruženi samo za sve funkcije iz skupa koje imaju vrednost 1 na slogu sa datim indeksom.

	f_1	f_2	f_3	
3		*	*	√
12	*	*	*	√
7		*	*	√
11	*	*		√
13	*	*	*	√
14	*	*	*	√
15	*	*	*	√

		f_1	f_2	f_3	
3, 7	(4)		*	*	A
3, 11	(8)		*		√
12, 13	(1)	*	*	*	√
12, 14	(2)	*	*	*	√
7, 15	(8)		*	*	B
11, 15	(4)	*	*		C
13, 15	(2)	*	*	*	√
14, 15	(1)	*	*	*	√

		f_1	f_2	f_3	
3, 7, 11, 15	(4, 8)		*		D
12, 13 ,14 , 15	(1, 2)	*	*	*	E

Nakon dobijanja skupa prostih implikanti (implikante označene slovima A, B, C, D i E) sledi minimizacija broja elemenata dobivenog skupa. Da bi se došlo do minimalnog skupa prostih implikanti, formira se jedinstvena tablica prostih implikanti za sve funkcije iz zadatog skupa Bulovih funkcija.

Proces pretraživanja tablice prostih implikanti je istovetan kao i kod jedne Bulove funkcije. Vrši se pretraživanja kolona, počev sa leva u desno, sa ciljem pronalaska esencijalnih prostih implikanti. Ukoliko se pronađe takva prosta implikanta, ona ulazi u skup esencijalnih prostih implikanti za sve funkcije iz skupa koje sadrže datu prostu implikantu. Ovim postupkom se iz tabele prostih implikanti dobijaju sledeće minimalne DNF za funkcije iz zadatog sistema funkcija.

	11	12	13	14	15	3	7	11	12	13	14	15	3	7	12	13	14	15
A						*	*						*	*				
B							*					*		*				*
C	*				*			*				*						
D						*	*	*				*						
E		*	*	*	*				*	*	*	*			*	*	*	*

$f_1 = C + E$ $f_2 = A + C + E$ $f_3 = A + E$

U slučaju potrebe, što u ovom zadatku nije slučaj, formira se redukovana tablica prostih implikanti. Pri tome se prvo izabira prosta implikanta koja ulazi u svaku funkciju.

Pri tome su izrazi za esencijalne proste implikante sledeći:

A (3, 7) (4)	0x11	$A=\overline{x_1}x_3x_4$
C (11, 15) (4)	1x11	$C=x_1x_3x_4$
E (12, 13, 14, 15) (1, 2)	11xx	$E=x_1x_2$

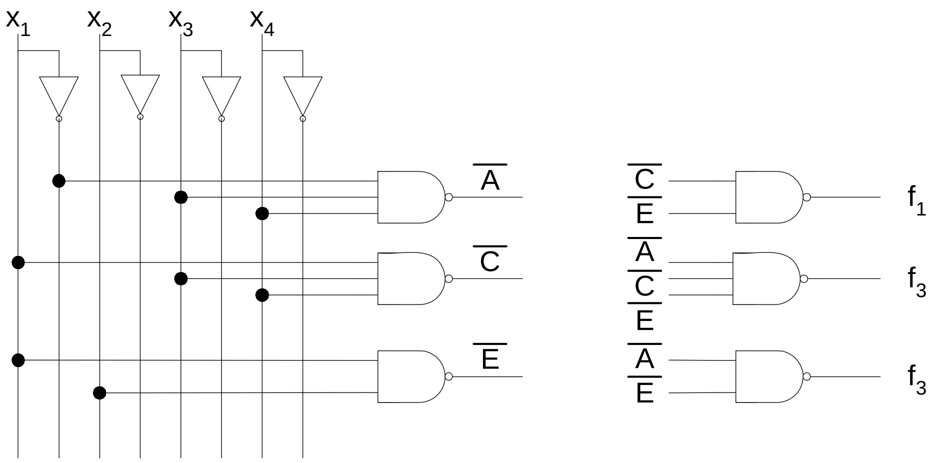
Potpuni izraz za minimalne DNF zadatog sistema funkcija je sledeći:

$$f_1 = C+E = \overline{\overline{C+E}} = \overline{\overline{C}\cdot\overline{E}}$$

$$f_2 = A+C+E = \overline{\overline{A+C+E}} = \overline{\overline{A}\cdot\overline{C}\cdot\overline{E}}$$

$$f_3 = A+E = \overline{\overline{A+E}} = \overline{\overline{A}\cdot\overline{E}}$$

Na osnovu ovih jednačina, koje su primenom DeMorganove teoreme transformisane u oblik pogodan za realizaciju pomoći Ni logičkih kola, se formira fizička realizacija pomoću NI logičkih kola koja je prikazana na sledećoj slici.



2.11 ZADATAK:

Komisija od 4 člana bira kandidata. Da bi kandidat bio izabran mora dobiti više od 50% glasova. Formirati prekidačku mrežu koja pali lampu u slučaju izbora kandidata.

REŠENJE:

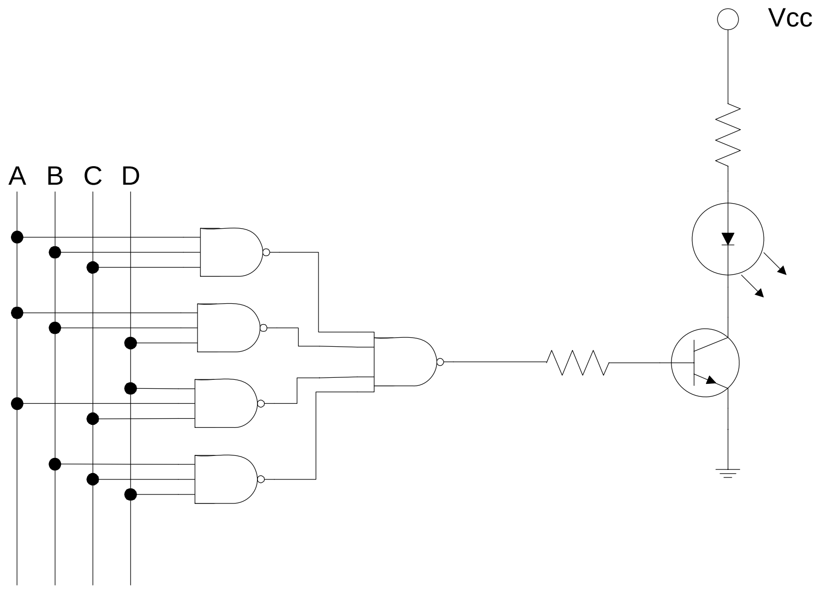
Na osnovu zadatka prvo je potrebno formirati kombinacionu tablicu koja predstavlja funkcionisanje tražene prekidačke mreže. Nakon toga je potrebno izvršiti minimizaciju dobivene prenosne funkcije. Pošto tražena prenosna funkcija zavisi od 4 logičke promenljive minimizacija će se izvršiti Karnoovim kartama.

	A	B	C	D	F
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	1

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01			1	
11		1	1	1
10			1	

ACD + BCD + ABC + ABD

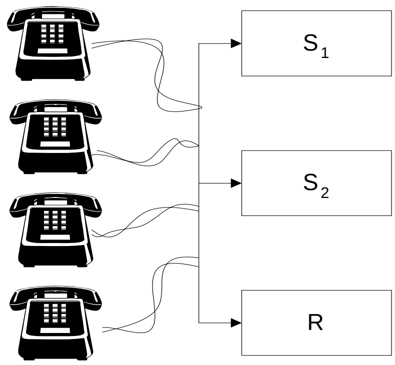
Na osnovu dobijene prenosne funkcije formira se prekidačka mreža pomoću standardnih NI logičkih kola. Prekidačka mreža je prikazana na sledećoj slici.



U slučaju da je kandidat izabran, izlaz iz prekidačke mreže postavlja tranzistor u radni režim čime se propušta struja kroz LED diodu koja tada emituje svetlost. Otpornici služe za ograničenje struje radi zaštite komponenti od pregorevanja.

2.12 ZADATAK:

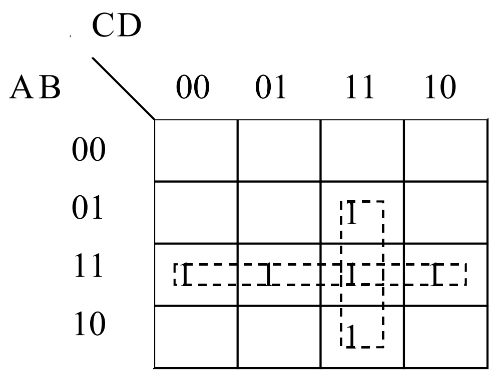
Četiri telefona A, B, C i D mogu da pozivaju dve centrale S1 i S2. Svaka centrala može da odgovori na bilo koji poziv, ali telefoni A i B ne žele usluge centrale S1. Odrediti funkciju mreže koja aktivira rezervnu centralu u slučaju kad prve dve nisu u mogućnosti da odgovore na pozive.



REŠENJE:

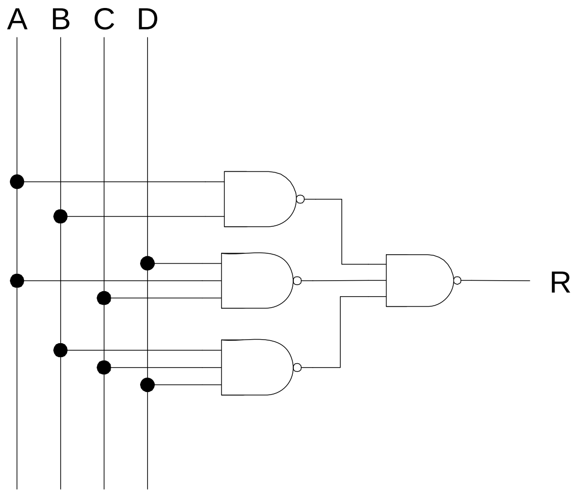
Na osnovu zadatka prvo je potrebno formirati kombinacionu tablicu koja predstavlja funkcionisanje tražene prekidačke mreže. Nakon toga je potrebno izvršiti minimizaciju dobivene prenosne funkcije. Pošto tražena prenosna funkcija zavisi od 4 logičke promenljive minimizacija će se izvršiti karnoovim kartama.

	A	B	C	D	F
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	1



$$R = AB + BCD + ACD$$

Na osnovu dobijene prenosne funkcije formira se prekidačka mreža pomoću standardnih NI logičkih kola. Prekidačka mreža je prikazana na sledećoj slici.


A
B
C
D
R