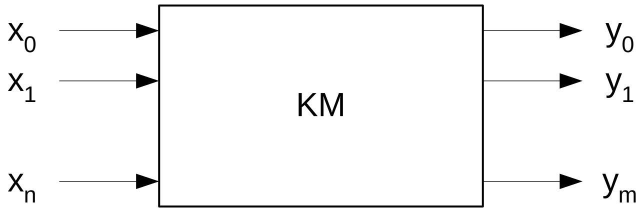
POGLAVLJE 1.
BULOVA ALGEBRA

Bulova algebra predstavlja teorijsku podlogu za projektovanje kombinacionih mreža. Ovo poglavlje prvo daje osnovnu definiciju Bulove algebre i Bulovih funkcija. Potom je izložen širok spektar zadataka iz ove važne oblasti projektovanja digitalnih sistema.

DEFINICIJA BULOVE ALGEBRE:

Kombinaciona mreža je takav sistem komponenti čije se ponašanje opisuje relacijama između dva skupa promenljivih. Prvi skup predstavljaju ulazne promenljive (x_i), dok drugi skup predstavljaju izlazne promenljive (y_i).



Slika 1.1: Kombinaciona mreža

Osnovna karakteristika kombinacionih mreža je da njihov izlaz zavisi od trenutnih vrednosti ulaza.

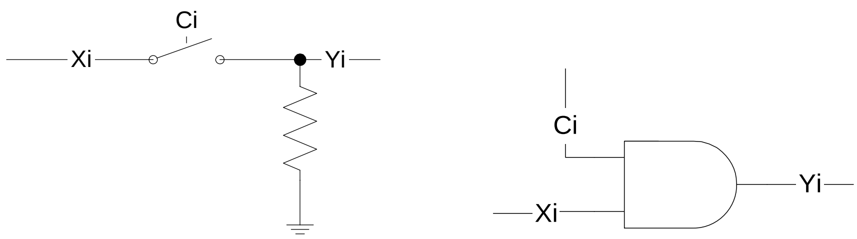
Kombinacione mreže su sačinjene od diskretnih komponenti tj. komponenti koje za date ulaze mogu da daju izlaz samo od dve moguće vrednosti, a to su

- Stanje višeg logičkog nivoa, logička jedinica, "1", +5V; +3,3V; +2,5V
- Stanje nižeg logičkog nivoa, logička nula, "0", 0V

Potrebno je napomenuti da su u realnim sistemima signali kontinualni, ali da digitalni sistem vidi samo idealne četvrtke. Isto tako, u realnim sistemima postoji logičko kašnjenje koje nije nezanemarivo.

Ponašanje kombinacionih mreža se, kao što je uobičajeno u tehnici, opisuje koristeći pogodan matematički metod (aparat, model). Tako se na primer izlazna funkcija kombinacione mreže može predstaviti jednačinom $y_i = f(x_0, x_1, \ldots, x_n); \quad i \in \{0, 1, \ldots, m\}$.

Claude Shannon je 1938 god. u radu "Simbolička analiza releja i prekidačkih kola" dao osnove matematičkog modela za opis izlazne funkcije kombinacione mreže zasnovan na Bulovoj algebri.



$$Y_i = X_i C_i; \qquad \begin{aligned} C_i = 0 &\Rightarrow Y_i = 0 \\ C_i = 1 &\Rightarrow Y_i = X_i \end{aligned}$$

Na osnovu ovog se često Bulova algebra naziva prekidačka algebra.

Prikazane matematičke metode u Shannon-ovom radu se koriste za analizu i projektovanje digitalnih sistema. Time Bulova algebra postaje pogodan alat za rešavanje problema iz dve oblasti:

– Analiza: Pomoću Bulove algebre se na jednostavan način mogu opisati funkcije digitalnih sistema
– Projektovanje: Na osnovu zadate funkcije pomoću Bulove algebre se može razviti ekvivalentna minimalna forma pogodna za implementaciju zadatog digitalnog sistema

Samu definiciju Bulove algebre je *George Boole* prikazao još 1854 godine kada je u svom delu "Uvod u zakon mišljenja" opisao formalni aparat kao metodu za simboličko izražavanje logičkih stavova koji su do tada izražavani TAČNO - NETAČNO.

Nad skupom S definišu se dve binarne operacije, koje se označavaju simbolima "o" i "Δ", tako da važe sledeće aksiome:

$P1^0$	(a o b) o c = a o (b o c)	Asocijativnost u odnosu na "o"
$P2^0$	(a o e) = a	Jedinstveni jedinični (neutralni) elemenat e u odnosu na "o"
$P3^0$	(a o b) = (b o a)	Komutativnost u odnosu na "o"
$P4^0$	a o a = a	Za operaciju "o" svaki elemenat je inverzan sam sebi
$P5^0$	(a Δ b) Δ c = a Δ (b Δ c)	Asocijativnost u odnosu na "Δ"
$P6^0$	(a Δ e) = e	e u odnosu na operaciju "Δ"
$P7^0$	a Δ (b o c) = (a Δ b) o (a Δ c)	Distributivnost "Δ" u odnosu na "o"
$P8^0$	a Δ b = b Δ a	Komutativnost u odnosu na "Δ"
$P9^0$	a Δ i = a	Jedinstven jedinični elementa u odnosu na operaciju "Δ"
$P10^0$	a Δ a = a	Za operaciju "Δ" svaki element je jedinični (ili neutralni) samom sebi

Matematički sistem definisan skupom S i operacijama "o" i "Δ" za koje važe gornje aksiome naziva se Bulova algebra.

Ovaj skup aksioma je preopširan za $P6^0$ pošto se ona može izvesti iz ostalih aksioma.

Sa inžinjerskog stanovišta Bulovu algebru je pogodnije izražavati pomoću jedne unarne i dve binarne operacije:

- Negacija "¯", NE, KOMPLEMENT
- Konjunkcija "∧", PUTA, I
- Disjunkcija, "∨", PLUS, ILI

Uvode se sledeće relacije između ove tri i ranije dve operacije:

I. $\overline{a} = i \circ a$

II. $a \circ b = (a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b)$

III. $a \Delta b = (a \wedge b)$

IV. $a \vee b = a \circ b \circ (a \Delta b)$

Uz pomoć ovih relacija se može izvesti takozvani “inženjerski skup aksioma”:

P1a	$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$	Asocijativnost operacije $\vee$
P2a	$a \vee e = a$	Neutralni element za operaciju $\vee$
P3a	$a \vee b = b \vee a$	Komutativnost operacije $\vee$
P4a	$a \vee \bar{a} = i$	Inverzni element za operaciju $\vee$
P5a	$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$	Distrubutivnost $\wedge$ u odnosu na $\vee$
P1b	$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$	Asocijativnost operacije $\wedge$
P2b	$a \wedge i = a$	Neutralni element za operaciju $\wedge$
P3b	$a \wedge b = b \wedge a$	Komutativnost operacije $\wedge$
P4b	$a \wedge \bar{a} = e$	Inverzni element za operaciju $\wedge$
P5b	$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$	Distributivnost $\vee$ u odnosu na $\wedge$

U ovakvom skupu aksioma se primećuje dualnost između e i i;

$\wedge \leftrightarrow \vee$

$i \leftrightarrow e$

U inženjerskoj praksi se koriste simboli za dve binarne operacije: "+", "·" i unarnu operaciju " ¯ ".

Ako se osvrnemo na početnu definiciju Bulove algebre imamo da su dve operacije:

$"\circ" \equiv "\oplus" \qquad "\Delta" \equiv "\wedge" \equiv "\cdot"$

$"\vee" \equiv "+" \qquad \text{NEGACIJA} \equiv "\bar{\ }" \equiv \bar{a} = 1 \oplus a$

Takođe se uzima da je e = 0 i i = 1.

"o"	e	i
e	e	i
i	i	e

"⊕"	0	1
0	0	1
1	1	0

"Δ"	e	i
e	e	e
i	e	i

"·"	0	1
0	0	0
1	0	1

BULOVE FUNKCIJE I IZRAZI

Bulova funkcija n promenljivih (n = 1, 2, 3,...) predstavlja preslikavanje skupa B^n u skup B (f: $B^n \to B$), gde je B skup čiji elementi imaju samo dve moguće vrednosti, tj. B={0, 1}. B^n označava skup od 2^n binarnih n-torki (n tipova/slogova).

Bulova funkcija kao i njeni argumenti uzimaju samo dve vrednosti (0 ili 1), znači to su binarne veličine. Prema tome može se reći da su Bulove funkcije binarne funkcije od n binarnih nezavisnih promenljivih.

Skup vrednosti argumenata se naziva **SLOG** i označava se sa (x_1, x_2, x_3, ... x_n), pri čemu je $x_i \in \{0,1\}$. Uobičajeno je da se pojedine vrednosti sloga označavaju numerički tj. svakom slogu se pridružuje indeks i, koji se dobija tako što se komponente n-torke sloga posmatraju kao cifre prirodno kodiranog binarnog broja

$$i = \sum_{j=1}^{n} x_j 2^{n-j} \qquad x_j \in \{0,1\}$$

Indeks sloga, tj. broj i se naziva binarnim indeksom ako je izražen binarnim kodom ili decimalni indeks ako je izražen decimalnim kodom.

Očigledno je da je **oblast definisnosti** konačna za svaku Bulovu funkciju. To omogućava da se svaka Bulova funkcija može predstaviti u obliku tablice njenih vrednosti za svaku vrednost argumenta

Svaka prekidačka funkcija od n nezavisno promenljivih definisana je na 2^n slogova.

Broj varijacija od 2 elementa (0/1) klase n (n-torka tj. y = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)) sa ponavljanjem $\overline{V}_2^{(n)} = 2^n$

Tablično predstavljanje Bulove funkcije od n nezavisnih promenljivih se realizuje pomoću tablice sa n+2 kolone i 2^n+1 vrstom. U prvoj koloni se navodi indeks sloga, dok poslednja kolona sadrži vrednost funkcije nad tim slogom. U preostalih n kolona navode se vrednosti argumenata. Prva vrsta sadži oznake za indeks sloga (i), oznake argumenata funkcije (x_i) i oznaku za vrednost funkcije (f). Sledi izgled tablice za predstavljanje Bulove funkcije od n nezavisnih promenljivih.

i	x_1	x_2	....	x_n	f
0	0	0		0	0/1
1	0	0		1	0/1
2	0	0		0	0/1
.	.			.	0/1
.	.			.	0/1
2^n-1	1	1		1	0/1

Broj različitih funkcija od n argumenata je 2^{2^n}, jer je za n nezavisno promenljivih bilo 2^n slogova a na svakom slogu funkcija može imati dve vrednosti - broj varijacija od 2 elementa klase 2^n sa ponavljanjem $\overline{V}_2^{(2^n)} = 2^{2^n}$.

Dakle, kombinaciona tablica je određena redosledom n-torki $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ i kombinacionim vektorom funkcije $K_f = \{f_0, f_1, \ldots, f_{2^n-1}\}$.

Pored tabličnog načina definisanja Bulove funkcije se mogu prikazati na sledeće načine:

- analitički,
- fizičkim modelom i
- numerički (brojnim indeksom (skupom indeksa) slogova na kojima funkcija ima vrednost 0/1)

Umesto kombinacionog vektora pogodno je koristiti **BROJNI INDEKS** funkcije N_f koji predstavlja broj kodiran binarnim kodom pomoću komponenti vektora K_f:

$$N_f = \sum_{i=0}^{2^n-1} f_i \cdot 2^i$$

Funkcija koja je identički jednaka nuli nad proizvoljnim slogom naziva se **KONSTANTA NULA**. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$.

Funkcija koja je identički jednaka jedinici za sve vrednosti argumenata naziva se **KONSTANTA JEDINICA**. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$.

Prekidačka funkcija koja dobija vrednost jedan samo na jednom slogu naziva se **KONSTITUENTA JEDINICE**. Konstituente jedinice se predstavljaju u obliku proizvoda svih argumenata s time da u proizvod promenljiva ulazi sa znakom komplementa ili bez njega.

Prekidačka funkcija koja dobija vrednost nula samo na jednom slogu naziva se **KONSTITUENTA NULE**. Konstituente nule se predstavljaju u obliku zbira svih argumenata s time da u zbir promenljiva ulazi sa znakom komplementa ili bez njega.

SAVRŠENA DISJUNKTIVNA NORMALNA FORMA (SDNF) predstavlja disjunkciju (sumu) konstituenti jedinice, odnosno disjunkciju potpunih proizvoda onih slogova na kojima funkcija ima vrednost jedan:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=0}^{2^n-1} f_i K_i^1 = f_0 K_0^1 + f_1 K_1^1 + ... + f_{2^n-1} K_{2^n-1}^1$$

gde je f_i – vrednost funkcije na slogu i K_i^1 – konstituenta jedinice na datom slogu.

SAVRŠENA KONJUKTIVNA NORMALNA FORMA (SKNF) predstavlja konjukciju (proizvod) konstituenti nula (potpunih suma), koje su jednake nuli na istim slogovima na kojima i zadata funkcija:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \Pi_{i=0}^{2^n-1}(f_i + K_i^0) = (f_o + K_0^0)(f_1 + K_1^0)...(f_{2^n-1} + K_{2^n-1}^0)$$

1.1 ZADATAK:

Polazeći od osnovnog skupa aksioma (P1 – P10) i uvedenih relacija (I – IV) dokazati da postulati P1a – P5b slede iz polaznog skupa aksioma

REŠENJE:

P1a - Obe strane ćemo razviti uz pomoć IV, P8, P7 i P3 te na kraju svesti na identitet.

$$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$$

$$\mathrm{IV} \Rightarrow a \vee (b \circ c \circ (b \Delta c)) = (a \circ b \circ (a \Delta b)) \vee c$$

$$\mathrm{IV} \Rightarrow a \circ b \circ c \circ (b \Delta c) \circ (a \Delta (b \circ c \circ (b \Delta c))) = \\ a \circ b \circ (a \Delta b) \circ c \circ (a \circ b \circ (a \Delta b) \Delta c)$$

$$\mathrm{P3} \Rightarrow a \circ b \circ c \circ (b \Delta c) \circ (a \Delta (b \circ c \circ (b \Delta c))) = \\ a \circ b \circ c \circ (a \Delta b) \circ (a \circ b \circ (a \Delta b) \Delta c)$$

$$\mathrm{P7} \Rightarrow a \circ b \circ c \circ (b \Delta c) \circ (a \Delta b) \circ (a \Delta (c \circ (b \Delta c))) = \\ a \circ b \circ c \circ (a \Delta b) \circ ((a \circ b) \Delta c) \circ (a \Delta b \Delta c)$$

$$\mathrm{P8}, \mathrm{P7} \Rightarrow a \circ b \circ c \circ (b \Delta c) \circ (a \Delta b) \circ ((a \Delta c) \circ (a \Delta b \Delta c)) = \\ a \circ b \circ c \circ (a \Delta b) \circ ((a \circ b) \Delta c) \circ (a \Delta b \Delta c)$$

$$\mathrm{P3}, \mathrm{P7}, \mathrm{P8} \Rightarrow a \circ b \circ c \circ (a \Delta b) \circ (a \Delta c) \circ (b \Delta c) \circ (a \Delta b \Delta c) = \\ a \circ b \circ c \circ (a \Delta b) \circ (a \Delta c) \circ (b \Delta c) \circ (a \Delta b \Delta c)$$

1.2 ZADATAK:

Dokazati:

Zakon idempotentnosti operacije $\vee$: $a \vee a = a$

Zakon idempotentnosti operacije $\wedge$: $a \wedge a = a$

REŠENJE:

$$a \vee a \overset{\mathrm{P2B}}{\Rightarrow} (a \vee a) \wedge i \overset{\mathrm{P4A}}{\Rightarrow} (a \vee a) \wedge (a \vee \bar{a}) \overset{\mathrm{P5B}}{\Rightarrow} a \vee (a \wedge \bar{a}) \overset{\mathrm{P4B}}{\Rightarrow} a \vee e \overset{\mathrm{P2A}}{\Rightarrow} a$$

$$a \wedge a \overset{\mathrm{P2A}}{\Rightarrow} (a \wedge a) \vee e \overset{\mathrm{P4B}}{\Rightarrow} (a \wedge a) \vee (a \wedge \bar{a}) \overset{\mathrm{P5A}}{\Rightarrow} a \wedge (a \vee \bar{a}) \overset{\mathrm{P4A}}{\Rightarrow} a \wedge i \overset{\mathrm{P2B}}{\Rightarrow} a$$

1.3 ZADATAK:

Dokazati zakon apsorpcije $\vee$: $a \vee (a \wedge b) = a$

REŠENJE:

Za potrebe dokazivanja zakona apsorpcije operacije $\vee$ prvo ćemo dokazati sledeću lemu:

lema I: $i \vee a = i$

dokaz leme I: $i \vee a \overset{P2B}{\Rightarrow} (a \vee i) \wedge i \overset{P4A}{\Rightarrow} (a \vee i) \wedge (a \vee \bar{a}) \overset{P5B}{\Rightarrow} a \vee (i \wedge \bar{a}) \overset{P2B}{\Rightarrow} a \vee \bar{a} \overset{P4A}{\Rightarrow} i$

Sledi dokaz teoreme: $a \vee (a \wedge b) \overset{P2B}{\Rightarrow} (a \wedge i) \vee (a \wedge b) \overset{P5A}{\Rightarrow} a \wedge (i \vee b) \overset{LEMA\ I}{\Rightarrow} a \wedge i \overset{P2B}{\Rightarrow} a$

1.4 ZADATAK:

Dokazati zakon apsorpcije $\wedge$: $a \wedge (a \vee b) = a$

REŠENJE:

Za potrebe dokazivanja zakona apsorpcije operacije $\wedge$ prvo ćemo dokazati sledeću lemu:

lema II: $a \wedge e = e$

dokaz leme II: $a \wedge e \overset{P2A}{\Rightarrow} (a \wedge e) \vee e \overset{P4B}{\Rightarrow} (a \wedge e) \vee (a \wedge \bar{a}) \overset{P5A}{\Rightarrow} a \wedge (e \vee \bar{a}) \overset{P2A}{\Rightarrow} a \wedge \bar{a} \overset{P4B}{\Rightarrow} e$

Sledi dokaz teoreme: $a \wedge (a \vee b) \overset{P2A}{\Rightarrow} (a \vee e) \wedge (a \vee b) \overset{P5B}{\Rightarrow} a \vee (e \wedge b) \overset{LEMA\ II}{\Rightarrow} a \vee e \overset{P2A}{\Rightarrow} a$

1.5 ZADATAK:

Dokazati zakon involucije: $\bar{\bar{a}} = a$

REŠENJE:

Dokaz sledi neposredno iz skupa aksioma P4a i P4b, uzimajući u obzir komutativnost obe operacije.

1.6 ZADATAK:

Dokazati I De Morganov zakon (ILI zakon): $\overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b}$

REŠENJE:

Ako pretpostavimo tačnost ove teoreme tada moraju važiti iskazi:

$(a \vee b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) = i$ (P4a)

$(a \vee b) \wedge (\bar{a} \wedge \bar{b}) = e$ (P4b)

Polazeći od ovih iskaza sledi:

$$(P4a) \Rightarrow \quad (a \vee b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) \overset{P5b}{=} (a \vee b \vee \bar{a}) \wedge (a \vee b \vee \bar{b}) \overset{P3a}{=}$$

$$(a \vee \bar{a} \vee b) \wedge (a \vee b \vee \bar{b}) \overset{P4a}{=} (i \vee b) \wedge (a \vee i) \overset{Lema\,I}{=} i \wedge i \overset{P2b}{=} i$$

$$(P4b) \Rightarrow \quad (a \vee b) \wedge (\bar{a} \wedge \bar{b}) \overset{P5a}{=} (a \wedge \bar{a} \wedge \bar{b}) \vee (b \wedge \bar{a} \wedge \bar{b}) \overset{P3b, P4b}{=}$$

$$(e \wedge \bar{b}) \vee (e \wedge \bar{a}) \overset{Lena\,II}{=} e \vee e \overset{P2a}{=} e$$

Time je dokazan I De Morganov zakon.
Može se definisati i generalisani oblik I De Morganova Teorema:

$$\overline{a_1 \vee a_2 \vee a_3 .... \vee a_n} = \overline{a_1} \wedge \overline{a_2} \wedge \overline{a_3} \wedge .... \wedge \overline{a_n}$$

1.7 ZADATAK:

Dokazati II De Morganov zakon (I zakon): $\overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b}$

REŠENJE:

Ako pretpostavimo tačnost ove teoreme tada moraju važiti iskazi:

$(a \wedge b) \wedge (\bar{a} \vee \bar{b}) = e$ (P4b)

$(a \wedge b) \vee (\bar{a} \vee \bar{b}) = i$ (P4a)

Polazeći od ovih iskaza sledi:

$$(P4b) \Rightarrow \quad (a \wedge b) \wedge (\bar{a} \vee \bar{b}) \overset{P5a}{=} (a \wedge b \wedge \bar{a}) \vee (a \wedge b \wedge \bar{b}) \overset{P3b}{=}$$

$$(a \wedge \bar{a} \wedge b) \vee (a \wedge b \wedge \bar{b}) \overset{P4b}{=} (e \wedge b) \vee (a \wedge e) \overset{Lema\,II}{=} e \vee e \overset{P2a}{=} e$$

$$(P4a) \Rightarrow \quad (a \wedge b) \vee (\bar{a} \vee \bar{b}) \overset{P5b, P3a}{=} (a \vee \bar{a} \vee \bar{b}) \wedge (b \vee \bar{a} \vee \bar{b}) \overset{P4a}{=}$$

$$(i \vee \bar{b}) \wedge (i \vee \bar{a}) \overset{Lema\,I}{=} i \vee i \overset{P2b}{=} i$$

Time je dokazan II De Morganov zakon.
Može se definisati i generalisani oblik II De Morganova zakona:

$$\overline{a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 \wedge .... \wedge a_n} = \overline{a_1} \vee \overline{a_2} \vee \overline{a_3} \vee .... \vee \overline{a_n}$$

1.8 ZADATAK:

Formirati kombinacionu tablicu Bulove funkcije od 3 promenljive ako je $f^{(0)}$ dato skupom indeksa $f^0 = \{1, 2, 5, 6\}$. Izraziti funkciju preko njenog brojnog indeksa.

REŠENJE:

$f^0 \equiv 0 \qquad f^1 \equiv 1$

i	x_1	x_2	x_3	f	
0	0	0	0	1	$1 \cdot 2^0 = 1$
1	0	0	1	0	$0 \cdot 2^1 = 0$
2	0	1	0	0	$0 \cdot 2^2 = 0$
3	0	1	1	1	$1 \cdot 2^3 = 8$
4	1	0	0	1	$1 \cdot 2^4 = 16$
5	1	0	1	0	$0 \cdot 2^5 = 0$
6	1	1	0	0	$0 \cdot 2^6 = 0$
7	1	1	1	1	$1 \cdot 2^7 = 128$
					$\sum = 153$

$N_f = 153$

1.9 ZADATAK:

Napisati sve Bulove funkcije nula promenljivih.

REŠENJE:

Broj promenljivih je nula, ne zavisi od vrednosti sloga, odnosno jednaka je konstanti za bilo koji slog. Prema tome postoje samo 2 Bulove funkcije nula promenljivih:

KONSTANTA NULA: $f(x_1, x_2, x_3, \ldots.. x_n) = 0$

KONSTANTA JEDINICA: $f(x_1, x_2, x_3, \ldots.. x_n) = 1$

1.10 ZADATAK:

a) Napisati konstituentu jedinicu funkcije 5 promenljivih na slogu 6

b) Napisati konstituentu nule funkcije 6 promenljivih na slogu 11

REŠENJE:

a) $f(x_4, x_3, x_2, x_1, x_0)$

$f(0, 0, 1, 1, 0) = 1$

$$K_6^1 = \overline{x_4} \cdot \overline{x_3} \cdot x_2 \cdot x_1 \cdot \overline{x_0}$$

b) $f(x_5, x_4, x_3, x_2, x_1, x_0)$

$f(0, 0, 1, 0, 1, 1) = 0$

$$K_{11}^0 = x_5 + x_4 + \overline{x_3} + x_2 + \overline{x_1} + \overline{x_0}$$

1.11 ZADATAK:

Predstaviti u obliku SDNF prekidačku funkciju pet argumenata koja je jednaka 1 na slogovima 5,15,16 i 31.

REŠENJE:

$f^1 = \{5,15,16,31\}$

Decimalni indeks sloga	Binarni indeks sloga	Konstituenta jedinica
5	00101	$K_5^1 = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot \overline{x_4} \cdot x_5$
15	01111	$K_{15}^1 = \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5$
16	10000	$K_{16}^1 = x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4} \cdot \overline{x_5}$
31	11111	$K_{31}^1 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5$

$$f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = \sum_{i=0}^{2^n-1} f_i K_i^1 \quad \Rightarrow \quad SDNF = K_5^1 + K_{15}^1 + K_{16}^1 + K_{31}^1$$

1.12 ZADATAK:

Predstaviti u obliku SKNF prekidačku funkciju tri argumenata koja ima vrednost nula na slogovima 0, 3 i 5.

REŠENJE:

$f^0 = \{0, 3, 5\}$

Decimalni indeks sloga	Binarni indeks sloga	Konstituenta nula
0	000	$K_0^0 = x_1 + x_2 + x_3$
3	011	$K_3^0 = x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3}$
5	101	$K_5^0 = \overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3}$

$$f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = \prod_{i=0}^{2^n-1} (f_i + K_i^0) \Rightarrow SKNF = K_0^0 \cdot K_3^0 \cdot K_5^0$$

1.13 ZADATAK:

Funkciju četiri promenljive sa brojnim indeksom $N_f = 33702$ predstaviti u obliku SDNF.

REŠENJE:

Brojni indeks se izražava jednačinom $N_f = \sum_{i=0}^{2^n-1} f_i \cdot 2^i$.

Prvo treba izvršiti konverziju decimalnog broja u binarni:

Nf = 33702	0	0	LSB
16851	1	1	
8425	1	2	
4212	0	3	
2106	0	4	
1053	1	5	
526	0	6	
263	1	7	
131	1	8	
65	1	9	
32	0	10	
16	0	11	
8	0	12	
4	0	13	
2	0	14	
1	1	15	MSB

Na bazi sračunatih vrednosti se formira SDNF zadate funkcije $f(x_3, x_2, x_1, x_0)$:

$$\text{SDNF}: \quad f = \overline{x_3} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_1} \cdot x_0 + \overline{x_3} \cdot \overline{x_2} \cdot x_1 \cdot \overline{x_0} + \overline{x_3} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_1} \cdot x_0 + \overline{x_3} \cdot x_2 \cdot x_1 \cdot x_0 + x_3 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_1} \cdot \overline{x_0} + x_3 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_1} \cdot x_0 + x_3 \cdot x_2 \cdot x_1 \cdot x_0$$

1.14 ZADATAK:

Za prekidačku funkciju tri nepoznate $f(x_2, x_1, x_0) = x_2 + \overline{x_1} \cdot x_0$, odrediti kombinacionu tablicu, skup decimalnih indeksa na kojima funkcija ima vrednost 1 i obe SNF.

REŠENJE:

Kad se radi o manjem broju nezavisnih promenljivih onda je SNF-ove lakše dobiti iz kombinacione tablice.

$n=3$ $\qquad 0 \le i \le 2^n - 1$

$\qquad\qquad 0 \le i \le 7$

Na osnovu zadate funkcije formira se tablica sa $n+2=5$ kolona i $2^n+1=2^3+1=9$ vrsta:

i	x_2	x_1	x_0	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

Na osnovu tablice dobijamo skup decimalnih indeksa slogova na kojima funkcija ima vrednost 1:

$$f^{(1)} = \{1,4,5,6,7\}$$

Na osnovu toga sledi savršena disjunktivna normalna forma za datu funkciju:

SDNF : $f = \overline{x_2} \cdot \overline{x_1} \cdot x_0 + x_2 \cdot \overline{x_1} \cdot \overline{x_0} + x_2 \cdot \overline{x_1} \cdot x_0 + x_2 \cdot x_1 \cdot \overline{x_0} + x_2 \cdot x_1 \cdot x_0$

Sličnim postupkom dobija se i skup decimalnih indeksa slogova na kojima funkcija ima vrednost 0 i savršena konjuktivna normalna forma:

$f^{(0)} = \{0,2,3\}$ SKNF : $f = (x_2 + x_1 + x_0) \cdot (x_2 + \overline{x_1} + x_0) \cdot (x_2 + \overline{x_1} + \overline{x_0})$

1.15 ZADATAK:

Prevesti u SDNF: $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1} \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + \overline{x_4}$

Odrediti skup decimalnih indeksa na kojima funkcija ima vrednost 1 i skup decimalnih indeksa na kojima funkcija ima vrednost 0.

REŠENJE:

U prevođenju postojećih jednačina koristićemo sledeće prinicipe:

$$a \cdot 1 = a \qquad a + \overline{a} = 1 \qquad a + a = a$$

$$\overline{x_4} = \overline{x_4}\left(x_1 + \overline{x_1}\right) = \overline{x_4} \cdot x_1 + \overline{x_4} \cdot \overline{x_1}$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1} \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + \overline{x_4} \cdot x_1 + \overline{x_4} \cdot \overline{x_1}$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1} \cdot x_4 \cdot \left(x_2 + \overline{x_2}\right) + x_2 \cdot x_3 \cdot \left(x_1 + \overline{x_1}\right) + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + \overline{x_4} \cdot x_1 \cdot \left(x_2 + \overline{x_2}\right) + \overline{x_4} \cdot \overline{x_1} \cdot \left(x_2 + \overline{x_2}\right)$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_4 + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_4 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_4} + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_4} + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_4} + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_4}$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_4\left(x_3 + \overline{x_3}\right) + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_4\left(x_3 + \overline{x_3}\right) + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3\left(x_4 + \overline{x_4}\right) + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3\left(x_4 + \overline{x_4}\right) + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_4}\left(x_3 + \overline{x_3}\right) + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_4}\left(x_3 + \overline{x_3}\right) + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_4}\left(x_3 + \overline{x_3}\right) + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_4}\left(x_3 + \overline{x_3}\right)$$

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\; & \overset{7}{\overline{x_1}\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4}+\overset{5}{\overline{x_1}\cdot x_2\cdot \overline{x_3}\cdot x_4}+\\
& \overset{3}{\overline{x_1}\cdot \overline{x_2}\cdot x_3\cdot x_4}+\overset{1}{\overline{x_1}\cdot \overline{x_2}\cdot \overline{x_3}\cdot x_4}+\\
& \overset{15}{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4}+\overset{14}{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot \overline{x_4}}+\\
& \overset{7}{\overline{x_1}\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4}+\overset{6}{\overline{x_1}\cdot x_2\cdot x_3\cdot \overline{x_4}}+\\
& \overset{14}{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot \overline{x_4}}+\overset{12}{x_1\cdot x_2\cdot \overline{x_3}\cdot \overline{x_4}}+\\
& \overset{10}{x_1\cdot \overline{x_2}\cdot x_3\cdot \overline{x_4}}+\overset{8}{x_1\cdot \overline{x_2}\cdot \overline{x_3}\cdot \overline{x_4}}+\\
& \overset{6}{\overline{x_1}\cdot x_2\cdot x_3\cdot \overline{x_4}}+\overset{4}{\overline{x_1}\cdot x_2\cdot \overline{x_3}\cdot \overline{x_4}}+\\
& \overset{2}{\overline{x_1}\cdot \overline{x_2}\cdot x_3\cdot \overline{x_4}}+\overset{0}{\overline{x_1}\cdot \overline{x_2}\cdot \overline{x_3}\cdot \overline{x_4}}
\end{aligned}
$$

Na osnovu dobijene SDNF dobija se skup decimalnih indeksa na kojima funkcija ima vrednost 1:

$$f^{(1)}=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,10,12,14,15\}$$

Iz prethodnog izraza dobijamo skup decimalnih indeksa na kojima funkcija ima vrednost 0 određivanjem indeksa slogova koji nisu obuhvaćeni dobijenim skupom:

$$f^{(0)}=\{9,11,13\}$$

1.16 ZADATAK:

Prevesti u SKNF: $f(x_1, x_2, x_3, x_4)=(\overline{x_2}+\overline{x_3})(x_1+x_3+x_4)(\overline{x_1}+\overline{x_3}+x_4)$

REŠENJE:

U prevođenju postojećih jednačina koristićemo sledeće prinicipe:

$$a+0=a \qquad a\cdot\overline{a}=0 \qquad a+bc=(a+b)(a+c)$$

$$f=(\overline{x_2}+\overline{x_3}+x_1\overline{x_1})(x_1+x_3+x_4)(\overline{x_1}+\overline{x_3}+x_4)$$

$$f=(x_1+\overline{x_2}+\overline{x_3})(\overline{x_1}+\overline{x_2}+\overline{x_3})(x_1+x_3+x_4)(\overline{x_1}+\overline{x_3}+x_4)$$

$$
\begin{aligned}
f=\; & (x_1+\overline{x_2}+\overline{x_3}+x_4\overline{x_4})(\overline{x_1}+\overline{x_2}+\overline{x_3}+x_4\overline{x_4})\\
& (x_1+x_3+x_4+x_2\overline{x_2})(\overline{x_1}+\overline{x_3}+x_4+x_2\overline{x_2})
\end{aligned}
$$

$$f = \overset{6}{\left(x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3} + x_4\right)} \overset{7}{\left(x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3} + \overline{x_4}\right)} \overset{14}{\left(\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3} + x_4\right)} \overset{15}{\left(\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3} + \overline{x_4}\right)}$$

$$\overset{0}{\left(x_1 + x_2 + x_3 + x_4\right)} \overset{4}{\left(x_1 + \overline{x_2} + x_3 + x_4\right)} \overset{10}{\left(\overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3} + x_4\right)} \overset{14}{\left(\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3} + x_4\right)}$$

Na osnovu dobijene SKNF dobija se skup decimalnih indeksa na kojima funkcija ima vrednost 0: $f^{(0)} = \{0, 4, 6, 7, 10, 14, 15\}$

1.17 ZADATAK

Napisati prekidačku funkciju čiji je analitički izraz zadat indeksima slogova na kojima funkcija ima vrednost jedan: $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_2 \overline{x_5}$

REŠENJE:

Pošto funkcija ima pet promenljivih u proizvodu $x_2 \overline{x_5}$ je sažeto $2^{5-2} = 8$ potpunih proizvoda. Zbog toga zadata funkcija je jednaka jedinici na 8 slogova. To prikazuje naredna tabela.

$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) =$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	indeks sloga
0	1	0	0	0	8
0	1	0	1	0	10
0	1	1	0	0	12
0	1	1	1	0	14
1	1	0	0	0	24
1	1	0	1	0	26
1	1	1	0	0	28
1	1	1	1	0	30

Na osnovu dobijene tabele dobija se skup indeksa slogova na kojima funkcija ima vrednost 1:

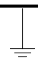
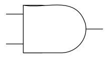
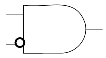
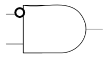
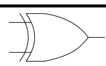
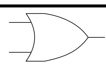
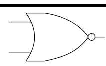
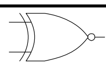
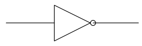
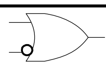
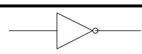
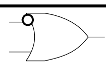
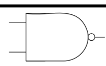
$$f^{(1)} = \{8, 10, 12, 14, 24, 26, 28, 30\}$$

Time je zadata funkcija u potpunosti definisana.

1.18 ZADATAK:

Napisati sve bulove funkcije dve Bulove promenljive.

REŠENJE:

x_2 0101 / x_1 0011	Naziv	Analitički izraz	
f_0 0000	Konstanta 0	$f_0 = 0$	
f_1 0001	Konjukcija	$f_1 = x_1 \cdot x_2$	
f_2 0010	Zabrana po x_2	$f_2 = x_1 \cdot \overline{x_2}$	
f_3 0011	Promenljiva x_1	$f_3 = x_1$	
f_4 0100	Zabrana po x_1	$f_4 = \overline{x_1} \cdot x_2$	
f_5 0101	Promenljiva x_2	$f_5 = x_2$	
f_6 0110	EX ILI	$f_6 = \overline{x_1} \cdot x_2 + x_1 \cdot \overline{x_2}$	
f_7 0111	ILI	$f_7 = x_1 + x_2$	
f_8 1000	NILI	$f_8 = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$	
f_9 1001	EX NILI	$f_9 = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} + x_1 \cdot x_2$	
f_{10} 1010	Negacija x_2	$f_{10} = \overline{x_2}$	
f_{11} 1011	Implikacija od x_2 ka x_1	$f_{11} = x_1 + \overline{x_2}$	
f_{12} 1100	Negacija x_1	$f_{12} = \overline{x_1}$	
f_{13} 1101	Implikacija od x_1 ka x_2	$f_{13} = \overline{x_1} + x_2$	
f_{14} 1110	NI	$f_{14} = \overline{x_1} + \overline{x_2}$	
f_{15} 1111	Konstanta 1	$f_{15} = 1$	 Vcc