ENS Cachan **Mathématiques**
Préparation à l'agrégation **Année 2018/2019**

Interpolation, approximation polynomiale et intégration numérique

Maxime Breden'

Références

[CLF] A. Chambert-Loir et S. Fermigier. *Exercices de maths pour l'agrégation, Analyse 2.* Masson, 1996.

[CM1] M. Crouzeix et A.-L. Mignot. *Analyse numérique des équations différentielles.* Masson, 1982.

[CM2] M. Crouzeix et A.-L. Mignot. *Exercices d'analyse numérique des équations différentielles.* Masson, 1982.

[D] J.-P. Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles.* EDP Sciences, 2006.

[G] X. Gourdon. *Les maths en tête, Algèbre.* Ellipses, 2009.

[GT] S. Gonnord et N. Tosel. *Thèmes d'analyse pour l'agrégation : Topologie et analyse fonctionnelle.* Ellipses, 1996.

[P] A. Pommellet. *Agrégation de Mathématiques, Cours d'analyse.* Ellipses, 1994.

[R] J.-E. Rombaldi. *Thèmes pour l'agrégation de mathématiques.* EDP Sciences, 1999.

[W] D. Williams. *Probability with Martingales.* Cambridge University Press, 1991.

[ZQ] C. Zuily et H. Queffélec. *Analyse pour l'agrégation.* Dunod, 2007.

1 Interpolation

Notations 1. Dans toute cette partie on considère

(i) $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue,

(ii) $\|f\|_\infty = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$,

(iii) $x_0, \dots, x_n$ des points deux à deux distincts de $[a, b]$,

(iv) $\Pi_{n+1}(X) = \prod\limits_{i=0}^{n} (X - x_i)$.

1.1 Existence, unicité et calcul explicite du polynôme d'interpolation

Proposition 1. *Pour tout* $(y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$*, il existe un unique polynôme* $P \in \mathbb{R}_n[X]$ *tel que*

$$P(x_i) = y_i, \quad \forall\ 0 \leq i \leq n.$$

Exercice 1.

1. Prouver la proposition 1 en considérant l'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1} \\ P \mapsto (P(x_0), \dots, P(x_n)) \,. \end{cases}$$

2. Prouver la proposition 1 en considérant la base des *polynômes de Lagrange*

$$l_i(X) = \prod_{j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Définition 1. On appelle *polynôme d'interpolation de Lagrange* de f aux points $x_0, \dots, x_n$ l'unique polynôme $P_n(f) \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$P_n(f)(x_i) = f(x_i), \quad \forall\ 0 \leq i \leq n.$$

Exercice 2. Évaluation du polynôme d'interpolation : méthode des différences divisées [D] p.24.

1. On note $c_0^n, \dots, c_k^n, \dots, c_n^n$ les coefficient du polynôme d'interpolation $P_n(f)$ dans la base des *polynômes de Newton*, *i.e.*

$$P_n(f) = \sum_{k=0}^{n} c_k^n \Pi_k.$$

   Montrer que $c_k^{n+1} = c_k^n$ pour tout $k \leq n$, autrement dit les coefficient de degré inférieur ou égal à n du polynôme d'interpolation ne changent pas si on rajoute un point d'interpolation.

2. On note $f[x_0, \dots, x_n]$ le coefficient de degré n (dans la base canonique) du polynôme d'interpolation $P_n(f)$ aux points $x_0, \dots, x_n$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$c_n^n = f[x_0, \dots, x_n]$$

   puis que

$$f[x_0, \dots, x_{n+1}] = \frac{f[x_1, \dots, x_{n+1}] - f[x_0, \dots, x_n]}{x_{n+1} - x_0}.$$

3. En déduire que

$$P_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, \dots, x_k]\Pi_k(x), \quad \forall\, x \in [a, b]. \tag{1}$$

Comparer cette formule d'évaluation à celles que l'on pourrait obtenir en considérant $P_n(f)$ dans la base canonique ou dans la base des polynômes de Lagrange.

Remarque 1. En pratique on utilise un schéma de type *Horner* pour évaluer (1) :

$$P_n(f)(x) = (\dots(f[x_0, \dots, x_n](x - x_n) + f[x_0, \dots, x_{n-1}])\,(x - x_{n-1}) + \dots f[x_0, x_1])\,(x - x_1) + f[x_0].$$

Exercice 3. Interpolation de Hermite On suppose que f est dérivable sur $[a, b]$.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme $Q_n(f) \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ tel que

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad (Q_n(f)(x_i), Q_n(f)'(x_i)) = (f(x_i), f'(x_i)).$$

2. Montrer que $Q_n(f)$ peut s'écrire $Q_n(f) = \sum_{i=0}^{n}(f(x_i)H_{i,0} + f'(x_i)H_{i,1})$ avec

$$\begin{cases} H_{i,0} = (1 - 2l_i'(x_i)(x - x_i))l_i^2, \\ H_{i,1} = (x - x_i)l_i^2, \end{cases}$$

où les polynômes l_i sont les polynômes de Lagrange définis dans l'exercice 1.

3. Si de plus f est $2n + 2$ fois dérivable sur $[a, b]$, montrer que pour tout $x \in [a, b]$ il existe $\xi_x \in [a, b]$ tel que

$$f(x) - Q_n(f)(x) = \frac{\Pi_{n+1}(x)^2}{(2n + 2)!} f^{(2n+2)}(\xi_x).$$

1.2 Estimations d'erreur

Proposition 2. ***Erreur d'interpolation.*** *On suppose que f est $n+1$ fois dérivable sur $[a, b]$. Alors, pour tout $x \in [a, b]$, il existe $\xi_x \in [a, b]$ tel que*

$$f(x) - P_n(f)(x) = \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi_x).$$

En particulier,

$$\|f - P_n(f)\|_\infty \le \frac{\|\Pi_{n+1}\|_\infty}{(n + 1)!} \left\| f^{(n+1)} \right\|_\infty . \tag{2}$$

Exercice 4. Prouver la proposition 2.

Proposition 3. ***Cas des points équidistants*** *On suppose que les points x_i sont équidistants, montrer que*

$$\frac{1}{n\sqrt{n}}\left(\frac{b-a}{e}\right)^{n+1} \leq \|\Pi_{n+1}\|_\infty \leq \frac{C}{\ln n\sqrt{n}}\left(\frac{b-a}{e}\right)^{n+1}. \tag{3}$$

Exercice 5. [D] p.28. Le but de cet exercice est d'établir la proposition 3. On note $h = \dfrac{b-a}{n}$ le pas de la subdivision et

$$\varphi_n(s) = \left|\prod_{i=0}^{n}(s-i)\right|.$$

1. Montrer que
$$\|\Pi_{n+1}\|_\infty = h^{n+1}\max_{s\in[0,n]}\varphi_n(s).$$
2. En considérant $\varphi_n\left(\dfrac{1}{2}\right)$, montrer la première inégalité de (3).
3. En considérant $\dfrac{\varphi_n(s+1)}{\varphi_n(s)}$ pour $s \in \left[0, \dfrac{n}{2}-1\right]$ non entier, montrer que
$$\max_{s\in[0,n]}\varphi_n(s) = \max_{s\in[0,1]}\varphi_n(s),$$
puis qu'il existe $s_n \in]0,1[$ tel que $\varphi_n(s_n) = \max_{s\in[0,n]}\varphi_n(s)$.
4. Montrer que $s_n \leq \dfrac{C}{\ln n}$ et que $\varphi_n(s_n) \leq C\dfrac{n!}{\ln n}$.
5. En déduire la deuxième inégalité de (3).

Exercice 6. Meilleurs points d'interpolation : les points de Tchebychev, [D] p.29. Pour tout $x \in [-1,1]$, on pose $T_n(x) = \cos(n\arccos(x))$.

1. Montrer que $T_n(\cos x) = \cos(nx)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'on a la relation de récurrence $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ pour tout $x \in [-1,1]$.
2. En déduire que T_n est un polynôme de degré n, que le monôme de plus haut degré est $2^{n-1}x^n$ (pour $n \geq 1$) et que les racines de T_n sont exactement les nombres $\theta_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)$, $k = 0,\dots,n-1$. *Les θ_k sont appelés points de Tchebychev.*
3. Montrer que $|T_n|$ atteint son maximum sur $[-1,1]$ aux points $\beta_k = \cos\left(\frac{k}{n}\pi\right)$, $k = 0,\dots,n$, et que $T_n(\beta_k) = (-1)^k$.
4. On considère $\tilde{T}_n = \frac{1}{2^{n-1}}T_n = (x-\theta_0)\cdots(x-\theta_{n-1})$. Montrer que $\tilde{T}_n$ minimise la quantité $\sup_{x\in[-1,1]}|\Pi_n(x)|$ parmi les polynômes Π_n formés à partir de toutes les familles de points $(x_0,\dots,x_{n-1})$ deux à deux distincts dans $[-1,1]$.

5. Si les points x_i sont les points de Tchebychev α_i, montrer que

$$\|\Pi_{n+1}\|_\infty \leq C \left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1}. \tag{4}$$

Comparer cette inégalité avec (3).

Exercice 7. Cas où f est développable en série entière, [D] p.31. On suppose que f est développable en série entière en $\frac{a+b}{2}$, de rayon de convergence

$$R > \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\lambda}\right)(b-a),$$

où $\lambda = e$ si on considère des points d'interpolations équidistants et $\lambda = 4$ si on considère les points de Tchebychev. Montrer que $\|f - P_n(f)\|_\infty \to 0$. *On pourra utiliser la formule de Cauchy (voir cours/TD d'analyse complexe) :*

$$\frac{f^{(n)}(x)}{n!} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(x+re^{i\theta})e^{-in\theta}}{r^n} d\theta,$$

valable si f est holomorphe sur un domaine contenant $\overline{B}(x,r)$.

Remarque 2. Phénomène de Runge, [D] p.36. Considérons, pour $\alpha > 0$, la fonction

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{x^2+\alpha^2}, \quad x \in [-1,1].$$

f_α est développable en série entière en 0, avec un rayon de converge $R = \alpha$, donc d'après l'exercice 7 $P_n(f)$ converge uniformément vers f si α est assez grand. Cependant on peut montrer que pour $\alpha < 0.5$ et des points d'interpolations uniformément répartis, la suite $(P_n(f)(x))_n$ diverge lorsque x est proche d'un bord de l'intervalle $[-1,1]$. Il existe donc des fonctions très régulières pour lesquelles le polynôme d'interpolation ne converge pas (avec des points d'interpolation uniformément répartis). On verra dans la suite que ce comportement pathologique est évité si on utilise les points de Tchebychev.

1.3 Constante de Lebesgue

Définition 2. On appelle *constante de Lebesgue*, et on note Λ_n, la norme de l'opérateur d'interpolation de Lagrange :

$$L_n : \begin{cases} C([a,b]) \to \mathbb{R}_n[X] \\ f \mapsto P_n(f). \end{cases}$$

Proposition 4. ***[D] p.46.***

1. La norme de L_n est donnée par

$$\Lambda_n = \sup_{x\in[a,b]} \sum_{i=0}^n |l_i(x)|.$$

2. *De plus, on a les estimations*
$$\Lambda_n \sim \frac{2^{n+1}}{en\ln n}, \tag{5}$$
si les points x_i sont équidistants, et
$$\Lambda_n \sim \frac{2}{\pi}\ln n, \tag{6}$$
si les points x_i sont les zéros du $n+1$-ième polynôme de Tchebychev.

Exercice 8. Un encadrement de Λ_n dans le cas des points d'interpolations équidistants [D] p.47. Dans le cas des points d'interpolations équidistants, montrer que

$$\frac{1}{4n^2}\frac{n!}{(n-i)!i!} \leq |l_i(x)| \leq \frac{n!}{(n-i)!i!}, \quad \forall\, x \in [a,b],\ \forall\, 0 \leq i \leq n,$$

et en déduire que
$$\frac{2^{n+1}}{2n^2} \leq \Lambda_n \leq \frac{2^{n+1}}{2}.$$

Exercice 9. Une majoration de Λ_n dans le cas des points d'interpolations de Tchebychev [D] p.48. Le but de cet exercice est de montrer que dans le cas des points d'interpolation de Tchebychev, $\Lambda_n \leq C\ln n$. On commence par fixer n et on considère un polynôme de Lagrange l_i, pour $0 \leq i \leq n$. Sans perte de généralité on considérera pour tout l'exercice que $[a,b] = [-1,1]$.

1. Exprimer l_i en fonction de Π_{n+1} et de Π'_{n+1}, puis en fonction de T_{n+1} et de T'_{n+1}.
2. En utilisant le changement de variable $x = \cos\theta$, montrer que
$$|l_i(\cos\theta)| = \frac{|\sin(\theta_i)\cos((n+1)\theta)|}{(n+1)\,|\cos(\theta)-\cos(\theta_i)|}.$$
3. A l'aide de formules de trigonométrie, en déduire que
$$|l_i(\cos\theta)| \leq \pi\frac{|\cos((n+1)\theta)|}{(n+1)\,|\theta-\theta_i|}.$$
4. On fixe $\theta \in [0,\pi]$ et on note θ_j le point de Tchebychev le plus proche de θ. Montrer que
$$|l_i(\cos\theta)| \leq \begin{cases} \pi, & |i-j| \leq 1, \\ \dfrac{1}{|i-j|-1}, & \text{sinon.} \end{cases}$$
5. Conclure.

Exercice 10. Un résultat négatif de convergence. En utilisant la proposition 4, montrer que même avec les points de Tchebychev, il existe une fonction continue f pour laquelle le polynôme d'interpolation $P_n(f)$ diverge. *On pourra penser au théorème de Banach-Steinhaus, cf. le cours/TD d'analyse fonctionnelle.*

Remarque 3. La constante de Lebesgue permet de contrôler la stabilité de l'interpolation de Lagrange :

$$\left\|P_n(\tilde{f}) - P_n(f)\right\|_\infty \leq \Lambda_n \left\|\tilde{f} - f\right\|_\infty,$$

mais elle apporte aussi de l'information au sujet de la convergence du polynôme d'interpolation. En effet, pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\begin{aligned}\|P_n(f) - f\|_\infty &\leq \|P_n(f) - Q\|_\infty + \|Q - f\|_\infty \\ &= \|P_n(f) - P_n(Q)\|_\infty + \|Q - f\|_\infty \\ &\leq (\Lambda_n + 1)\|f - Q\|_\infty .\end{aligned}$$

On a donc, en plus de (2), une autre estimation pour l'erreur d'interpolation qui est donnée par

$$\|P_n(f) - f\|_\infty \leq (1 + \Lambda_n) \inf_{Q \in \mathbb{R}_n[X]} \|f - Q\|_\infty . \tag{7}$$

On verra dans la partie suivante comment contrôler la distance entre une fonction f et $\mathbb{R}_n[X]$, et ce qu'on peut en conclure concernant la convergence des polynômes d'interpolation.

2 Approximation polynomiale

2.1 Approximation uniforme

2.1.1 Polynôme de meilleure approximation uniforme

Proposition 5. *Soient E l'espace vectoriel $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et $f \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $Q_n(f) \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que*

$$\|Q_n(f) - f\|_\infty = \inf_{Q \in \mathbb{R}_n[X]} \|f - Q\|_\infty .$$

Remarque 4. On dit que $Q_n(f)$ est le *polynôme de meilleure approximation* de f (sous entendu dans $\mathbb{R}_n[X]$ et pour la norme $\|\cdot\|_\infty$).

Exercice 11. Existence et unicité du polynôme de meilleure approximation uniforme, [GT]. Le but de cet exercice est de prouver la proposition 5.

1. Démontrer l'existence d'un polynôme de meilleure approximation de f.
2. Soit Q_n un polynôme de meilleure approximation de f de degré n, on note $g = f - Q_n$. On va démontrer par l'absurde que g prend la valeur $|g|$ en au moins $n+2$ points de l'intervalle $[a,b]$. On suppose donc que g ne prend la valeur $|g|$ qu'en $k+1$ points $x_0 < \ldots < x_k$ avec $k \leq n$. On considère $P_k(f)$ le polynôme d'interpolation de f aux points $x_0, \ldots, x_k$.

(a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V_ε de $\{x_0, \dots, x_k\}$ tel que

$$\sup_{x \in V_\varepsilon} |f(x) - P_k(x)| \leq \varepsilon,$$

et un réel $\eta_\varepsilon > 0$ tel que

$$\sup_{x \notin V_\varepsilon} |g(x)| \leq \|g\|_\infty - \eta_\varepsilon.$$

(b) Pour tout $t \in [0, 1]$, on considère la fonction

$$h_t = (1 - t)g + t(f - P_k).$$

En distinguant selon que $x \in V_\varepsilon$ ou $x \notin V_\varepsilon$, montrer qu'on peut choisir ε et t tels que $\|f - h_t\|_\infty < \|g\|_\infty$.

(c) Conclure.

3. Soient Q_n^0 et Q_n^1 deux polynômes de meilleur approximation de f. En considérant $Q_n^2 = \frac{1}{2}(Q_n^0 + Q_n^1)$, montrer que $Q_n^0 = Q_n^1$. *On pourra considérer $n+2$ points x_i pour lesquels $|f(x_i) - Q_n^2(x_i)| = \|f - Q_n^2\|_\infty$.*

Remarque 5. Pour une démonstration plus visuelle introduisant la notion *d'équioscillation*, voir [D] p.40.

Remarque 6. En pratique, le polynôme de meilleure approximation uniforme est difficile à calculer. On va donc plutôt considérer différentes suites explicites de polynômes et étudier la vitesse de leur convergence vers f.

2.1.2 Estimations de convergence

Exercice 12. ▶ DEV ◀ Théorème de Weierstrass version probabiliste, [W] p.74. & [ZQ] p.518.

1. **Loi faible des grands nombre, version quantitative.** Soit (X_i) une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi $X \in L^2$. On note $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Montrer que

$$\forall \delta > 0, \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(X)\right| > \delta\right) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{n\delta^2}.$$

On pourra utiliser l'inégalité de Tchebychev.

2. Dans toute la suite, on considère $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, $p \in [0, 1]$, et on suppose que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p. Avec les notations de la question précédente, on définit

$$B_n(p) = \mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right).$$

Donner la loi de S_n puis reconnaitre en $B_n(p)$ un polynôme en p (*polynôme de Bernstein*).

3. En introduisant
$$Z_n = \left| f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(p) \right| \quad \text{et} \quad Y_n = \left| \frac{S_n}{n} - p \right|$$
et en séparant $Y_n < \delta$ et $Y_n \geq \delta$, montrer que
$$|B_n(p) - f(p)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

4. **Version plus précise avec vitesse de convergence.** On introduit le *module de continuité* de f
$$w_f(h) = \sup_{|x-y|\leq h} |f(x) - f(y)|.$$
   (a) Montrer que pour tout $h, \lambda > 0$,
   $$w_f(\lambda h) \leq (\lambda + 1) w(h).$$
   (b) Montrer que
   $$\begin{aligned} |B_n(p) - f(p)| &\leq \mathbb{E}\left(w(Y_n)\right) \\ &\leq w_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(1 + \mathbb{E}\left(\sqrt{n}\left|\frac{S_n}{n} - p\right|\right)\right). \end{aligned} \tag{8}$$
   (c) Utiliser (8) et le théorème central limite pour montrer que
   $$|B_n(p) - f(p)| = O\left(w_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).$$
   (d) Toujours à partir de (8), utiliser plutôt une inégalité de Cauchy-Schwarz et la variance de $\frac{S_n}{n}$ pour obtenir une majoration explicite :
   $$|B_n(p) - f(p)| \leq \frac{3}{2} w_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Remarque 7. 1. On vient donc de montrer que, pour tout $x \in [0,1]$,
$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} \right| \leq \frac{3}{2} w_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

2. Il existe bien entendu de nombreuses autres preuves du théorème de Weierstrass, dont la plupart n'utilisent pas de notions de probabilité.
3. Si on s'intéresse simplement au résultat de densité, on peut voir le théorème de Weierstrass comme un cas particulier du théorème de Stone-Weierstrass (cf. le cours/TD de topologie).

4. Si par contre on s'intéresse à la vitesse de convergence, on peut améliorer le $w_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ en $w_f\left(\frac{1}{n}\right)$ en remplaçant les polynômes de Bernstein par les polynômes de Jackson (cf. le cours/TD d'analyse de Fourier).
5. On peut aussi obtenir une convergence plus rapide si on suppose plus de régularité sur f (toujours avec des techniques issues de l'analyse de Fourier), c'est l'objet de l'exercice suivant.

Exercice 13. Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 2$. On considère la fonction

$$F : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto f(\cos t). \end{cases}$$

1. Que peut-on dire de la convergence de la série de Fourier de F ?
2. En déduire l'existence d'une suite de polynômes (R_n) telle que

$$\|f - R_n\|_\infty = o\left(\frac{1}{n^{k-1}}\right).$$

On pourra penser aux polynômes de Tchebychev et à la relation $\cos(nt) = T_n(\cos(t))$.

Remarque 8. Ces résultats d'approximation uniforme, combinés à l'estimation (6) sur la constante de Lebesgue, permettent de démontrer de bons résultats de convergence pour l'interpolation aux points de Tchebychev (comparativement à l'interpolation aux points équidistants, en particulier on ne peut pas avoir de phénomène de Runge).

Proposition 6. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction Lipschitzienne. Alors les polynômes d'interpolations de f aux points de Tchebychev convergent uniformément vers f :*

$$\|P_n(f) - f\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De plus, si f est de classe $\mathcal{C}^k$ alors

$$\|P_n(f) - f\|_\infty \leq C\frac{\ln(n)}{n^k}\left\|f^{(k)}\right\|_\infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2.2 Approximation quadratique

Notations 2. Soient f et g deux fonctions mesurables à valeurs réelles, et $\omega :]a,b[\to \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue. On définit

(i) $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\omega(x)dx$,

(ii) $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f(x)^2\omega(x)dx}$,

(iii) $L^2_\omega(]a,b[,\mathbb{R}) = \{f,\ \|f\|_2 < \infty\}$.

2.2.1 Polynôme de meilleure approximation quadratique

Proposition 7. *On considère E l'espace vectoriel $L^2_\omega(]a,b[,\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$ et $f \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $Q_n(f) \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que*

$$\|Q_n(f) - f\|_2 = \inf_{Q \in \mathbb{R}_n[X]} \|f - Q\|_2 .$$

Exercice 14.

1. Prouver la proposition 7. *On pourra penser à la projection orthogonale sur un convexe fermé, cf. le cours/TD d'analyse hilbertienne.*
2. Que peut-on dire si on remplace $L^2_\omega(]a,b[,\mathbb{R})$ par $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ (toujours pour la norme $\|\cdot\|_2$) ?

Remarque 9. On peut mettre à profit la structure hilbertienne de L^2_ω pour calculer explicitement le polynôme de meilleure approximation quadratique. On utilise pour cela les *polynômes orthogonaux.*

2.2.2 Polynômes orthogonaux

Exercice 15. Polynômes orthogonaux : existence, unicité, récurrence, racines [D] p.52 & [G] p.104. On suppose que le poids ω est tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^n\omega(x) \in L^1(]a,b[)$.

1. Montrer qu'il existe une unique suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(P_n) = n$, P_n est unitaire et P_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que P_n est à coefficients réels et que les racines de P_n sont réelles, simples et toutes dans $]a,b[$.
3. Montrer que cette suite satisfait une relation de récurrence de la forme

   $$P_n = (X - \lambda_n)P_{n-1} + \mu_n P_{n-2},$$

   où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, λ_n et μ_n sont des réels et à déterminer, et par convention $P_{-1} = 0$.
4. Le but de cette question est d'établir qu'entre deux racines de P_{n+1}, il y a exactement une racine de P_n. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $Q_n := \frac{P_n}{\|P_n\|_2}$ et γ_n le coefficient dominant de Q_n.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$Q_n = \frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}}(X - \langle XQ_{n-1}, Q_{n-1}\rangle)Q_{n-1}) + \frac{\gamma_n\gamma_{n-2}}{\gamma_{n-1}^2}Q_{n-2}.$$

   (b) **Formule de Darboux.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x, y \in [a,b]$

   $$\sum_{i=0}^{n} Q_i(x)Q_i(y) = \frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}} \frac{Q_{n+1}(x)Q_n(y) - Q_n(x)Q_{n+1}(y)}{x - y}.$$

(c) Que peut-on dire du signe de $Q'_{n+1}Q_n - Q'_nQ_{n+1}$?

(d) Soient $x_{n,1} < ... < x_{n,n}$ les racines de Q_n. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et k compris entre 1 et n :

$$x_{n+1,k} < x_{n,k} < x_{n+1,k+1}$$

Remarque 10. Quelques exemples classiques :

1. Polynômes de Legendre : $]a,b[=]-1,1[$, $\omega = 1$,
2. Polynômes de Tchebychev : $]a,b[=]-1,1[$, $\omega(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$,
3. Polynômes de Hermite : $]a,b[=\mathbb{R}$, $\omega(x) = e^{-x^2}$,
4. Polynômes de Laguerre : $]a,b[=]0,+\infty[$, $\omega(x) = e^{-x}$.

Les polynômes orthogonaux classiques sont des solutions particulières d'EDO du second ordre (voir par exemple [CM2])

Remarque 11. On verra dans le cours/TD d'analyse hilbertienne que sous une condition de croissance à l'infini sur le poinds ω, les polynômes orthogonaux forment une base hilbertiennes de L^2_ω.

3 Calcul approché d'intégrales

Notations 3. Dans toute cette partie on considère

(i) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue,

(ii) $\|f\|_\infty = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$,

(iii) $x_0, \dots, x_n$ des points deux à deux distincts de $[a,b]$,

(iv) $\Pi_{n+1}(X) = \prod\limits_{i=0}^{n}(X - x_i)$.

3.1 Méthode de quadrature de Newton-Cotes

On cherche à approcher $\int_a^b f(x)dx$ par une formule du type $I(f) = \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i)$.

Définition 3. 1. On dit qu'une méthode I est *d'ordre au moins* N si

$$I(Q) = \int_a^b Q(x)dx \quad \forall\ Q \in \mathbb{R}_N[X],$$

et qu'elle est *d'ordre* N si elle est d'ordre au moins N et qu'il existe un polynôme Q de degré $N+1$ tel que

$$I(Q) \neq \int_a^b Q(x)dx.$$

2. On définit l'erreur d'une méthode I (pour une fonction f), par

$$E(f) = \int_a^b f(x)dx - I(f).$$

3.1.1 Formules élémentaires

Définition 4. La méthode de Newton-Cotes de rang n est donnée par

$$I_n(f) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i),$$

où

$$x_i = a + i\frac{b-a}{n} \quad \text{et} \quad \lambda_i = \int_a^b l_i(x)dx.$$

Remarque 12.
1. La méthode de Newton-Cotes est obtenue prenant

$$I_n(f) = \int_a^b P_n(f)(x)dx,$$

   où $P_n(f)$ est le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points x_i.
2. Si $n = 0$, on prend $x_i = \frac{a+b}{2}$ et $\lambda_i = b - a$.
3. Ces formules ont des interprétations géométriques, on parle de *formule du point milieu* pour $n = 0$ et de *formule des trapèzes* pour $n = 1$.
4. On peut se contenter de calculer les coefficients λ_i pour l'intervalle $[-1, 1]$ et en déduire les formules pour un intervalle $[a, b]$ quelconque par une transformation affine.

Proposition 8. *La formule de Newton-Cotes de rang n est d'ordre*
- *n, si n est impair.*
- *$n + 1$, si n est pair.*

Exercice 16. Montrer que la formule de Newton-Cotes de rang n est d'ordre
- au moins n, si n est impair.
- au moins $n + 1$, si n est pair.

Proposition 9. *On considère l'erreur pour la formule de Newton-Cotes d'ordre n*

$$E_n(f) = \int_a^b f(x)dx - I_n(f).$$

On a

$$|E_n(f)| \leq \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{n+2}}{(n+1)!} \left\| f^{(n+1)} \right\|_\infty, & \textit{si } f \textit{ est de classe } \mathcal{C}^{n+1}, \\ \dfrac{(b-a)^{n+3}}{(n+1)!} \left\| f^{(n+2)} \right\|_\infty, & \textit{si } n \textit{ est pair et } f \textit{ est de classe } \mathcal{C}^{n+2}. \end{cases}$$

Exercice 17. Preuve. Démontrer la proposition 9.

Remarque 13.
1. Les constantes utilisées ici sont non optimales (on verra plus loin comment obtenir de meilleurs constantes), mais l'ordre de dérivation nécessaire sur f et la dépendance en la taille $b-a$ de l'intervalle (crucial dans ce qui va suivre) sont optimaux.

2. Au vu des résultat de cette partie, seules les formules de Newton-Cotes d'ordre pair (et la méthode des trapèzes) sont intéressantes en pratique.
3. Pour $n \geq 8$, il apparait des coefficients λ_i négatif, ce qui rend la méthode numériquement instable.
4. Au lieu d'augmenter le rang n de la méthode, on peut découper l'intervalle $[a, b]$ en petit sous-intervalles et appliquer une méthode de Newton-Cotes élémentaire sur chaque sous-intervalle. C'est l'objet de la prochaine partie.

3.1.2 Formules composites

Notations 4. On considère toujours un intervalle $[a, b]$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Étant donné $m \in \mathbb{N}^*$, on définit

(i) un pas $h = \dfrac{b-a}{m}$,

(ii) une subdivision $a_i = a + ih$, $0 \leq i \leq m$,

(iii) une formule composite

$$I_n^h(f) = \sum_{i=0}^{m-1} I_n^{[a_i, a_{i+1}]}(f),$$

où $I_n^{[a_i, a_{i+1}]}$ est la formule de Newton-Cotes élémentaire de rang n sur l'intervalle $[a_i, a_{i+1}]$.

Remarque 14. Bien entendu, on pourrait considérer une subdivision non régulière et utiliser une formule différente sur chaque sous intervalle, mais par soucis de simplicité on ne le fera pas ici.

Exemple 1. Pour la formule des trapèzes composite, on obtient

$$I_1^h(f) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{f(a_i) + f(a_{i+1})}{2} = \frac{f(a)}{2} + \sum_{i=1}^{m-1} f(a_i) + \frac{f(b)}{2}.$$

Proposition 10. *On considère l'erreur pour une formule composite*

$$E_n^h(f) = \int_a^b f(x)dx - I_n^h(f).$$

On a

$$\left|E_n^h(f)\right| \leq \begin{cases} (b-a)\dfrac{h^{n+1}}{(n+1)!}\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty, & \textit{si } f \textit{ est de classe } \mathcal{C}^{n+1}, \\ (b-a)\dfrac{h^{n+2}}{(n+1)!}\left\|f^{(n+2)}\right\|_\infty, & \textit{si } n \textit{ est pair et } f \textit{ est de classe } \mathcal{C}^{n+2}. \end{cases}$$

3.2 Méthode de Gauss

Ces méthodes sont utilisées lorsqu'on veut calculer de manière approchées des intégrales à poids $\int_a^b f(x)\omega(x)dx$.

3.2.1 Description

On se donne un poids ω sur $]a,b[$. Encore une fois on va cherche une méthode d'intégration approchée du type

$$I_\omega(f) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

Proposition 11. ***Ordre de la méthode, unicité des points et des coefficients.*** *Étant donné $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique choix des points $x_0, \ldots, x_n$ et des coefficients $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ pour que la méthode soit d'ordre au moins $N = 2n+1$. Ces x_i sont les racines du polynôme orthogonal P_{n+1} pour le poids ω. La méthode I_ω associée à ces points x_i et ces coefficients λ_i est appelée* méthode de Gauss *(à $n+1$ points).*

Exercice 18. Preuve.

1. En considérant Π_{n+1}, montrer que si la méthode est d'ordre au moins $2n+1$, les points x_i et les coefficients λ_i sont imposés.
2. Montrer que ce choix donne une méthode qui est bien d'ordre au moins $2n+1$. *On pourra encore faire intervenir* Π_{n+1}.

3.2.2 Formule d'erreur de Peano

Définition 5. On considère l'erreur de la méthode I_ω :

$$E(f) = \int_a^b f(x)\omega(x)dx - I_\omega(f).$$

Le *noyau de Peano* d'ordre N associé à la méthode est donné par

$$K_N(t) = E\left(x \mapsto (x-t)_+^N\right),$$

où $(x-t)_+ = \max(x-t, 0)$.

Proposition 12. ***Formule d'erreur de Peano.*** *Si la méthode est d'ordre au moins N et que f est de classe $\mathcal{C}^{N+1}$, alors*

$$E(f) = \frac{1}{N!}\int_a^b K_N(t) f^{(N+1)}(t)dt. \tag{9}$$

Si de plus K_N est de signe constant, alors il existe $\xi \in]a,b[$ tel que

$$\begin{aligned} E(f) &= \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{N!}\int_a^b K_N(t)dt \\ &= \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} E\left(x \mapsto x^{N+1}\right). \end{aligned} \tag{10}$$

Exercice 19. Preuve.

1. Démontrer la formule (9). *On pourra utiliser une formule de Taylor avec reste intégral et le fait que la méthode est d'ordre au moins N.*
2. **Formule de la moyenne.** Soient $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ et $g \geq 0$ une fonction intégrable sur $]a,b[$. Montrer qu'il existe $\xi \in]a,b[$ tel que
$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$
3. En déduire la formule (10).

Remarque 15. 1. On peut aussi utiliser la formule d'erreur de Peano pour les méthodes de Newton-Cotes (avec $\omega = 1$ et en considérant l'ordre approprié).
2. On peut montrer que pour les méthodes de Newton-Cotes, le noyau de Peano est de signe constant.

Exercice 20. Calculer le noyau puis l'erreur de Peano pour les méthodes du point milieu ($n = 0$) et de Simpson ($n = 2$). Comparer les constantes obtenues avec celles de la proposition 9.

Proposition 13. *Pour la méthode de Gauss à $n+1$ points, le noyau de Peano K_{2n+1} est positif, et pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^{2n+2}$, il existe $\xi \in]a,b[$ tel que*
$$E(f) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\int_a^b \Pi_{n+1}(x)^2\omega(x)dx.$$

Corollaire 1. *La méthode de Gauss à $n+1$ points est exactement d'ordre $N = 2n+1$.*

Exercice 21. Preuves.

1. Montrer que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ et toute fonction ϕ telle que $\phi^{(2n+2)} = \varphi$,
$$\int_a^b K_{2n+1}(x)\varphi(x)dx = (2n+1)!E(\phi).$$
2. On suppose par l'absurde que K_{2n+1} n'est pas positif. Justifier l'existence d'un polynôme φ, tel que
$$\varphi(x) \leq 0,\ \forall\ x \in [a,b] \quad \text{et} \quad \int_a^b K_{2n+1}(x)\varphi(x)dx < 0.$$
Dans toute la suite de cet exercice, ϕ désigne un polynôme tel que $\phi^{(2n+2)} = \varphi$.
3. En considérant la division euclidienne de ϕ par Π_{n+1}^2 :
$$\phi = Q\Pi_{n+1}^2 + R,$$
montrer qu'il existe $\xi \in]a,b[$ tel que
$$E(\phi) = Q(\xi)\int_a^b \Pi_{n+1}(x)^2\omega(x)dx.$$
On pourra utiliser la formule de la moyenne.

4. En considérant
$$g = \phi - r - \Pi_{n+1}^2 Q(\xi) = \Pi_{n+1}^2 (Q - Q(\xi)),$$
montrer que $Q(\xi) \geq 0$. *On pourra appliquer le lemme de Rolle à g.*
5. Trouver une contradiction et en déduire la proposition 13.
6. En considérant le polynôme X^{2n+2}, démontrer le corollaire 1.

4 Accélération de convergence

4.1 Extrapolation de Richardson et méthode de Romberg

Exercice 22. Extrapolation de Richardson. Soit

$$u_h = u + C_1 h^\alpha + O\left(h^\beta\right), \quad \beta > \alpha > 0.$$

Montrer qu'on peut définir une combinaison linaire de u_h et u_{2h} (noté v_h), telle que

$$v_h = u + O\left(h^\beta\right).$$

Remarque 16. On peut utiliser ce type de procédé pour accélérer la convergence de la méthode des trapèzes composites. En effet pour cette méthode on connait par la formule d'Euler-MacLaurin (cf. par exemple [D] p.77), un développement asymptotique de l'erreur avec un nombre arbitraire de termes. On peut ainsi répéter plusieurs fois le procédé d'extrapolation de Richardson.

4.2 Méthode d'Aitken

Exercice 23. Méthode d'Aitken, [R, CLF]. On considère une suite réelle (u_n) qui converge vers un réel l, telle que $u_n \neq l$ pour tout n et $u_{n+1} \neq u_n$ pour tout n suffisamment grand. On suppose que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1} - l}{u_n - l} = \lambda \in]-1, 1[\setminus\{0\}.$$

1. Soit ν un réel et (v_n) la suite définie par
$$v_n = \frac{u_{n+1} - \nu u_n}{1 - \nu}.$$
Sous quelles conditions la suite (v_n) converge-t-elle vers l plus vite que (u_n) (au sens où $(v_n - l) = o(u_n - l)$) ?

2. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}-u_n}{u_n-u_{n-1}} = \lambda.$$
3. On définit pour tout n
$$\lambda_n = \frac{u_{n+1}-u_n}{u_n-u_{n-1}}.$$
Montrer que la suite définie par
$$v_n = \frac{u_{n+1}-\lambda_n u_n}{1-\lambda_n}$$
converge vers l plus rapidement que la suite (u_n)
4. On note $\Delta u_n = u_{n+1}-u_n$ et $\Delta^2 u_n = u_{n+2}-2u_{n+1}+u_n$. Montrer que
$$v_{n+1} = u_n - \frac{(\Delta u_n)^2}{\Delta^2 u_n}.$$
5. Soient a et b des réels avec $0 < |a| < 1$ et (w_n) la suite arithmético-géométrique définie par
$$w_{n+1} = aw_n + b.$$
Étudier la convergence de (w_n) puis son accélération d'Aitken.
6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 ayant un point fixe l tel que $0 < |f'(l)| < 1$ et $f''(l) \neq 0$. Montrer que l'accélération d'Aitken appliquée à la suite définie par
$$w_{n+1} = f(w_n)$$
(pour w_0 assez proche de l), converge vers l à la vitesse $f'(l)^2$.