

Monte_Carlo(BT)

December 8, 2023

Monte Carlo simulation

Bài 1

Đề bài: Mô phỏng Lấy mẫu từ Phân phối Chuẩn (Normal Distribution) Hãy mô phỏng quá trình lấy mẫu từ một phân phối chuẩn hai chiều (bivariate normal distribution) có hàm mật độ xác suất (PDF) được định nghĩa bởi:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right), -\infty < x_1, x_2 < \infty$$

trong đó: * μ_1, μ_2 là giá trị kỳ vọng (mean) của x_1 và x_2 tương ứng * σ_1, σ_2 là độ lệch chuẩn (standard deviation) của x_1 và x_2 tương ứng * ρ là hệ số tương quan giữa x_1 và x_2 ($-1 \leq \rho \leq 1$)

Hãy mô phỏng quá trình lấy mẫu N điểm từ phân phối trên, sử dụng thuật toán Metropolis-Hastings. Hiển thị kết quả bằng biểu đồ scatter.

Note:

input: X_0 , cỡ mẫu N, hàm mật độ xác suất mục tiêu $f(x)$, hàm đề xuất $q(x, y)$

output: X_1, \dots, X_n (phụ thuộc) được phân phối xấp xỉ theo $f(x)$

Các thông số cần thiết:

$N = 10^4$

$\mu_1, \mu_2 = 0$

$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 2$

$\rho = 0.5$

```
[ ]: # Cài đặt thư viện cần thiết

# Khởi tạo các thông số cần thiết

# Hàm mật độ xác suất

# Lấy mẫu bằng Metropolis-Hastings

# Hiển thị kết quả bằng biểu đồ scatter
```

Bài 2

Xét tích phân sau:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

Với $\alpha = 95\%$, Ước tính giá trị tích phân và tính khoảng tin cậy

```
[ ]: # Cài đặt thu viện cần thiết

# Khởi tạo các thông số cần thiết

# Hàm tích phân

# Tạo ra N phần tử x bất kì trong khoảng (0,1)

# Tính N giá trị của y(x) tương ứng với N giá trị của x

# Tính trung bình giá trị của Y

# Tính phương sai của Y

# Tính sai số

# In ra
```

Bài 3

Thuật toán

Khởi tạo v_0 , đặt $n^{elite} \leftarrow \lceil \varrho N \rceil$ và $t \leftarrow 0$

while điều kiện dừng chưa thỏa

- $t \leftarrow t + 1$
- Mô phỏng các mẫu X_1, \dots, X_N từ hàm mật độ $f(\cdot|v_{t-1})$.
- Đánh giá kết quả biểu diễn $S(X_1), \dots, S(X_N)$ và sắp xếp chúng theo thứ tự tăng dần: $S_{(1)}, \dots, S_{(N)}$.
- Gọi γ_t là mẫu ϱ -quantile (phân vị) của một giá trị hàm S:

$$\gamma_t \leftarrow S_{(N^{elite})}$$

- Xác định tập elite sample $\mathcal{E} = \{X_i : S(X_i) \leq \gamma_t\}$
- Đặt v'_t là MLE của elite samples:

$$v'_t \leftarrow \operatorname{argmax}_v \sum_{X \in \mathcal{E}_t} \ln f(X|V)$$

- Cập nhật lại tham số mẫu:

$$v_t \leftarrow \alpha v'_t + (1 - \alpha)v_{t-1}$$

return γ_t, v_t

Note:

input: Hàm S , khởi tạo tham số lấy mẫu ban đầu v_0 , cỡ mẫu N , tham số độ hiếm ρ , tham số làm mịn α .

output: Tối thiểu gần đúng của hàm S và tham số lấy mẫu tối ưu v .

Các thông số cần thiết:

$N = 100$

$N^{elite} = 10$

$\mu = 0$

$\sigma = 3$

$\epsilon = 10^{-5}$

$$S(x) = \begin{cases} -e^{-x^2/100} \sin(13x - x^4)^5 \sin(1 - 3x^2)^2, & \text{if } -2 \leq x \leq 2, \\ \infty, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

```
[ ]: # Khai báo thư viện cần thiết

# Khởi tạo hàm S(x)

# Đặt độ chính xác chữ số thập phân thứ 3

# Khai báo các biến

# Bắt đầu vòng lặp với điều kiện dừng là khi sigma < eps:

    # Tạo mẫu ngẫu nhiên, cỡ mẫu N theo phân phối chuẩn, chia tỷ lệ theo
    # độ lệch chuẩn sigma và có giá trị trung bình mu:

    # Chuyển đổi data gốc X và S(X) thành ma trận Sx:

    # Sắp xếp data Sx dựa trên các giá trị được chuyển đổi trong cột 2
    # và chọn các hàng Nel trên cùng làm elite sample:

    # Cập nhật li giá trị trung bình mu và độ lệch chuẩn sigma theo elite
    ↪sample:

    # In các giá trị đã cập nhật:
```

Bài 4

Bạn đang xem xét việc thuê máy móc cho một quy trình sản xuất nào đó. Hợp đồng thuê máy trong vòng một năm tốn cho bạn \$400,000 và bạn không thể hủy bỏ sớm. Bạn muốn biết liệu mức sản xuất hàng năm và sự tiết kiệm trong bảo trì, lao động và nguyên liệu có đủ lớn để chứng minh việc thuê máy không. Từ các chuyên gia, bạn có được các phạm vi biến số sau (lưu ý rằng tất cả các phạm vi đều có khoảng tin cậy 90% và các giá trị được phân phối chuẩn):

Tiết kiệm bảo trì: 10–20 USD trên mỗi đơn vị

Tiết kiệm lao động: -2–8 USD trên mỗi đơn vị

Nguyên liệu thô Tiết kiệm: 3–9 USD trên mỗi đơn vị

Mức sản xuất: 15.000–35000 đơn vị mỗi năm

Thuê hàng năm: 400000 USD tiết kiệm hàng năm = (tiết kiệm bảo trì + tiết kiệm lao động + tiết kiệm nguyên liệu thô) * mức sản xuất

Với độ tin cậy 90%, trong trường hợp tiết kiệm bảo trì, giá trị trung bình = \$15. Độ lệch chuẩn 3.29. Tính xác suất hỏng hóc là bao nhiêu (tiết kiệm hàng năm nhỏ hơn giá thành của chiếc máy).

Cài đặt các thư viện cần thiết

```
[ ]: # Import các thư viện cần thiết
```

Tính chi phí tiết kiệm

```
[ ]: # Tính z với độ tin cậy 90%

# Định nghĩa phân phối chuẩn cho các thành phần chi phí khác nhau

# Thiết lập số lượt mô phỏng

# Tạo mẫu ngẫu nhiên từ các phân phối đã định nghĩa

# Tạo DataFrame để lưu kết quả mô phỏng

# Tính toán tổng chi phí tiết kiệm
```

Đặt ngưỡng lợi nhuận và Vẽ biểu đồ

```
[ ]: # Đặt ngưỡng lợi nhuận

# Vẽ histogram của tổng lợi nhuận

# Vẽ đường thẳng lợi nhuận
```

Tính toán xác suất tiết kiệm hàng năm nhỏ hơn chi phí của chiếc máy (xác suất thua lỗ).

```
[ ]:
```