Ausgewählte Kapitel der Funktionentheorie

Marc Nieper-Wißkirchen

Wintersemester 2014/15[1]

[1] 29. Januar 2015

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Dirichletsche Reihen

1.1 Allgemeine Dirichletsche Reihen

Definition 1.1. Sei eine Folge (λ_n) aufsteigender reeller Zahlen gegeben, für die $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$ gilt. Eine *Dirichletsche Reihe mit Exponenten* (λ_n) ist eine Reihe der Form

$$\sum_n a_n e^{-\lambda_n s}$$

mit $a_n \in \mathbf{C}$ und einer komplexen Variable $s \in \mathbf{C}$, deren Realteil wir im folgenden immer mit σ und deren Imaginärteil wir mit t bezeichnen wollen ($s = \sigma + it$).

Beispiel 1.2. Sei $\lambda_n = \log(n)$. Dann heißt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} := \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(\log n)s}$$

eine *gewöhnliche Dirichletsche Reihe.*

Beispiel 1.3. Sei $\lambda_n = n$. Dann ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-ns} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (e^{-s})^n$$

eine Potenzreihe in $z = e^{-s}$.

Lemma 1.4 (Abelsches Lemma)**.** *Seien* (a_n) *und* (b_n) *zwei Folgen komplexer Zahlen. Setzen wir*

$$A_{m,p} := \sum_{n=m}^{p} a_n$$

und

$$S_{m,m'} := \sum_{n=m}^{m'} a_n b_n,$$

so gilt

$$S_{m,m'} = \sum_{n=m}^{m'-1} A_{m,n}(b_n - b_{n+1}) + A_{m,m'} b_{m'}.$$

Beweis. Durch $a_n = A_{m,n} - A_{m,n-1}$ eliminieren wir a_n im Ausdruck $S_{m,m'}$ auf der linken Seite. □

Lemma 1.5. *Seien $0 < \alpha < \beta$ zwei reelle Zahlen. Sei weiter $s = \sigma + it$ mit $\sigma > 0$. Dann gilt*

$$|e^{-\alpha s} - e^{-\beta s}| \leq \frac{|s|}{\sigma}(e^{-\alpha\sigma} - e^{-\beta\sigma}).$$

Beweis. Es ist

$$e^{-\alpha s} - e^{-\beta s} = s \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\lambda s}\, d\lambda.$$

Also

$$|e^{-\alpha s} - e^{-\beta s}| \leq |s| \int_{\alpha}^{\beta} |e^{-\lambda s}|\, d\lambda = |s| \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\lambda\sigma}\, d\lambda = \frac{|s|}{\sigma}(e^{-\alpha\sigma} - e^{-\beta\sigma}). \qquad \square$$

Proposition 1.6. *Konvergiere die Dirichletsche Reihe $f(s) = \sum_n a_n \exp^{-\lambda_n s}$ für $s = s_0$. Dann konvergiert sie gleichmäßig auf jedem Winkel der Form*

$$\{s \mid 0 \leq |s - s_0|/(\sigma - \sigma_0) \leq k\}$$

mit $k \geq 0$.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $s_0 = 0$. Wir müssen die gleichmäßige Konvergenz auf jedem Winkel $\{s \mid 0 \leq |s|/\sigma \leq k\}$ zeigen. Sei $\epsilon > 0$. Nach Voraussetzung ist die Reihe $\sum_n a_n$ konvergent, so daß in den Bezeichnungen von Lemma 1.4 gilt, daß $|A_{m,m'}| < \epsilon$ für $m, m' \gg 0$. Wenden wir das Lemma auf $b_n = e^{-\lambda_n s}$ an, so erhalten wir

$$S_{m,m'} = \sum_{n=m}^{m'-1} A_{m,n}(e^{-\lambda_n s} - e^{-\lambda_{n+1} s}) + A_{m,m'} e^{-\lambda_{m'} s}.$$

Nach Lemma 1.5 erhalten wir also

$$|S_{m,m'}| \leq \epsilon \left(\frac{|s|}{\sigma} \sum_{n=m}^{m'-1} (e^{-\lambda_n \sigma} - e^{-\lambda_{n+1}\sigma}) + 1 \right) \leq \epsilon\, (k\, (e^{-\lambda_m \sigma} - e^{-\lambda_{m'}\sigma}) + 1).$$

Es folgt $|S_{m,m'}| < \epsilon\,(k+1)$ für $m, m' \gg 0$, also die gleichmäßige Konvergenz. □

Folgerung 1.7. *Konvergiere die Dirichletsche Reihe $f(s)$ für $s = s_0$, so konvergiert sie auch auf der offenen Halbebene $\sigma > \sigma_0$, und zwar stellt sie dort eine holomorphe Funktion dar.*

Beweis. Daß $f(s)$ auf $\{s \mid \sigma > \sigma_0\}$ holomorph ist, folgt aus dem Weierstraßschen Konvergenzsatz. □

Folgerung 1.8. *Für jede Dirichletsche Reihe $f(s) = \sum_n a_n e^{-\lambda_n s}$ existiert genau ein $-\infty \leq \rho \leq \infty$, so daß $f(s)$ auf der offenen Halbebene $\sigma > \rho$ konvergiert, auf der offenen Halbebene $\sigma < \rho$ aber divergiert. Der Wert ρ heißt die* Konvergenzabzisse von $f(s)$. *Die Konvergenzabzisse ρ^+ von $\sum_n |a_n| e^{-\lambda_n s}$ heißt die* absolute Konvergenzabzisse von $f(s)$. *Es konvergiert $f(s)$ absolut für die offene Halbebene $\sigma > \rho^+$ und divergiert absolut für die offene Halbebene $\sigma < \rho^+$. Insbesondere gilt $\rho^+ \geq \rho$.* □

Beispiel 1.9. Im Falle von $\lambda_n = n$, also einer Potenzreihe, gilt $\rho = \rho^+$.

Folgerung 1.10. *Die Dirichletsche Reihe $f(s)$ konvergiere für s_0. Sie stellt dann eine stetige Funktion auf jedem Winkel $\{s \mid 0 \leq |s - s_0|/(\sigma - \sigma_0) \leq k\}$ mit $k \geq 0$ dar.*

Beweis. Der Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen ist wieder stetig. □

Folgerung 1.11. *Die Funktion $f(s) = \sum_n a_n e^{-\lambda_n} s$ verschwindet genau dann identisch, wenn alle Koeffizienten a_n verschwinden.*

Beweis. Sei $f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n}$. Es reicht offensichtlich, $a_0 = 0$ zu zeigen. Aus der gleichmäßigen Konvergenz folgt

$$0 = \lim_{\sigma\to\infty} (e^{\lambda_0 s} f(s)) = \lim_{\sigma\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{(\lambda_0 - \lambda_n)s} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lim_{\sigma\to\infty} e^{(\lambda_0-\lambda_n)s} = a_0. \quad \square$$

1.2 Dirichletsche Reihen mit positiven Koeffizienten

Proposition 1.12. *Sei $f(s) = \sum_n a_n e^{-\lambda_n s}$ eine Dirichletsche Reihe mit reellen Koeffizienten $a_n \geq 0$. Sei $\rho \in \mathbf{R}$, so daß $f(s)$ in der Halbebene $\sigma > \rho$ konvergiert. Weiter möge sich die Funktion $f(s)$ analytisch auf eine Umgebung um den Punkt $\rho \in \mathbf{C}$ fortsetzen. Dann existiert ein $\epsilon > 0$, so daß $f(s)$ auf der Halbebene $\sigma > \rho - \epsilon$ konvergiert.*

Mit anderen Worten wird der Konvergenzbereich von $f(s)$ durch eine Singularität auf der reellen Achse begrenzt.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß $\rho = 0$. Nach Voraussetzung ist der Konvergenzradius der Taylorentwicklung von $f(s)$ um $s = 1$ größer als 1, etwa $1 + 2\epsilon$ mit $\epsilon > 0$.

Nach dem Weierstraßschen Konvergenzsatz ist

$$f^{(k)}(s) = \sum_n a_n(-\lambda_n)^k e^{-\lambda_n s},$$

also

$$f^{(k)}(1) = (-1)^k \sum_n \lambda_n^k a_n e^{-\lambda_n}.$$

Es gilt

$$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(s-1)^k}{k!} f^{(k)}(1)$$

für $|s - 1| < 1 + 2\epsilon$, und insbesondere ist

$$f(-\epsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+\epsilon)^k}{k!} (-1)^k f^{(k)}(1)$$

eine konvergente Reihe.

Es ist $(-1)^k f^{(k)}(1) = \sum_n \lambda_n^k a_n e^{-\lambda_n}$ sogar eine absolut konvergente Reihe. Die Doppelreihe

$$f(-\epsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_n a_n \frac{(1+\epsilon)^k}{k!} \lambda_n^k e^{-\lambda_n}$$

ist damit ebenfalls absolut konvergent, und durch Umordnung folgt:

$$f(-\epsilon) = \sum_n a_n e^{-\lambda_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+\epsilon)^k}{k!} \lambda_n^k = \sum_n a_n e^{-\lambda_n} e^{\lambda_n(1+\epsilon)} = \sum_n a_n e^{\lambda_n \epsilon},$$

so daß die Dirichletsche Reihe auch für $-\epsilon$ konvergiert. □

1.3 Gewöhnliche Dirichletsche Reihen

Proposition 1.13. *Sei die Folge (a_n) beschränkt. Dann konvergiert die (gewöhnliche) Dirichletsche Reihe*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

absolut auf der Halbebene $\sigma > 1$.

Beweis. Sei $\alpha > 1$ reell. Die Reihe $\sum_n \frac{|a_n|}{n^\alpha}$ wird bis auf einen konstanten Faktor durch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ nach oben abgeschätzt, die bekanntlich konvergiert. Damit gilt $\rho^+ \leq 1$ für die absolute Konvergenzabzisse von $f(s)$. □

Proposition 1.14. *Seien die Partialsummen $A_{m,p} := \sum_{n=m}^{p} a_n$ beschränkt. Dann konvergiert die Reihe*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

auf der Halbebene $\sigma > 0$.

Beweis. Aufgrund des Konvergenzverhalten allgemeiner Dirichletscher Reihen reicht es zu zeigen, daß $f(s)$ für reelles $s > 0$ konvergiert.

Sei C eine obere Schranke der $|A_{m,p}|$. Nach Lemma 1.4 gilt dann mit den dortigen Bezeichnungen und $b_n = \frac{1}{n^s}$, daß

$$|S_{m,m'}| \leq C \left(\sum_{n=m}^{m'-1} \left| \frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right| + \left| \frac{1}{m'^s} \right| \right) = \frac{C}{m^s},$$

woraus die Konvergenz nach dem Cauchyschen Kriterium folgt. □

Kapitel 2

L-Funktionen

2.1 Eulersche Produkte

Definition 2.1. Eine Funktion $f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{C}$ heißt *multiplikativ*, falls $f(1) = 1$ und falls

$$f(mn) = f(m)f(n)$$

für alle teilerfremden positiven natürlichen Zahlen m und n.

Lemma 2.2. *Sei f eine beschränkte multiplikative Funktion. Dann konvergiert die Dirichletsche Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

auf der Halbebene $\sigma > 1$ absolut gegen das konvergente unendliche Produkt

$$\prod_p \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{f(p^m)}{p^{ms}} \right),$$

wobei p hier und im folgenden jeweils die Menge der Primzahlen durchlaufe.

Beweis. Die absolute Konvergenz der Dirichletschen Reihe folgt aus Proposition 1.13 aufgrund der Beschränktheit der Folge $(f(n))$. Die einzelnen Faktoren des unendlichen Produktes sind bis auf eine multiplikative Konstante durch $\sum_{m=0}^{\infty} p^{-m\sigma} = \frac{1}{1-p^{-\sigma}}$ beschränkt und damit absolut konvergent und konvergieren für $p \to \infty$ gegen 1.

Sei $\mathbf{N}(x)$ die Menge der natürlichen Zahlen, deren Primfaktoren alle höchstens x sind. Aufgrund des Satzes über die eindeutige Primfaktorzerlegung gilt dann

$$\sum_{n \in \mathbf{N}(x)} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_{p \le x} \left(\sum_{m=0}^{\infty} f(p^m) p^{-ms} \right).$$

Der Limes $x \to \infty$ liefert dann die Behauptung. $\square$

Beispiel 2.3. Ist f sogar multiplikativ im strikten Sinne, das heißt

$$f(nn') = f(n)f(n')$$

für alle positiven natürlichen Zahlen n und n', so gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - f(p)p^{-s}}.$$

Proposition 2.4. *Sei f strikt multiplikativ und beschränkt und*

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

die zugehörige Dirichletsche Reihe. Für die logarithmische Ableitung *von $F(s)$ gilt dann*

$$-\frac{d}{ds} \log F(s) := -\frac{F'(s)}{F(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)\Lambda(n)}{n^s}$$

in kompakter Konvergenz auf der offenen Halbebene $\sigma > 1$, wobei $\Lambda\colon \mathbf{N} \to \mathbf{C}$ die von Mangoldtsche Funktion *ist, die durch $\Lambda(p^m) = \log p$ für Primzahlen p und $m \geq 1$ und $\Lambda(n) = 0$ für alle anderen n gegeben ist.*

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{ds} \log F(s) &= -\frac{d}{ds} \log \prod_p \frac{1}{1 - f(p)p^{-s}} \\
&= \sum_p \frac{d}{ds} \log(1 - f(p)p^{-s}) \\
&= \sum_p \frac{f(p)(\log p)p^{-s}}{1 - f(p)p^{-s}} \\
&= \sum_p \sum_{m \geq 1} f(p^m)(\log p)p^{-ms} \\
&= \sum_{n \geq 1} \frac{f(n)\Lambda(n)}{n^s}.
\end{aligned}$$

□

2.2 Die Riemannsche Zeta-Funktion

Definition 2.5. Die *Riemannsche Zeta-Funktion* $\zeta(s)$ ist auf der offenen Halbebene $\sigma > 1$ die dort absolut konvergente Dirichletsche Reihe

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

Proposition 2.6. *(a) Die Riemannsche Zeta-Funktion hat keine Nullstelle für $\sigma > 1$ und ist dort holomorph.*

(b) Die Funktion

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$$

läßt sich zu einer holomorphen Funktion $\phi(s)$ auf die offene Halbebene $\sigma > 0$ fortsetzen.

Beweis. Die Behauptung (a) ist klar. Um (b) zu zeigen, benutzen wir

$$\frac{1}{s-1} = \int_1^\infty k^{-s}\,dk = \sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1} k^{-s}\,dk.$$

Damit ist

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{n^s} - \int_n^{n+1} k^{-s}\,dk \right) = \sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1} (n^{-s} - k^{-s})\,dk.$$

Die Summanden

$$\phi_n(s) = \int_n^{n+1} (n^{-s} - k^{-s})\,dk$$

sind für $\sigma > 0$ holomorph, so daß es nach dem Weierstraßschen Konvergenzsatz zu zeigen reicht, daß

$$\phi(s) = \sum_{n=1}^\infty \phi_n(s)$$

auf $\sigma > 0$ kompakt konvergiert: Nach dem Mittelwertsatz ist

$$\begin{aligned} |\phi_n(s)| &\leq \sup\{|n^{-s} - k^{-s}| \mid n \leq k \leq n+1\} \\ &\leq \sup\{|sk^{-(s+1)}| \mid n \leq k \leq n+1\} \leq \frac{|s|}{n^{\sigma+1}}. \end{aligned}$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^\infty |\phi_n(s)|$ konvergiert damit gleichmäßig auf jeder offenen Halbebene $\sigma > \sigma_0 > 0$, so daß die Reihe $\phi(s)$ dort ebenfalls gleichmäßig konvergiert. □

Folgerung 2.7. *Die Riemannsche Zeta-Funktion läßt sich zu einer meromorphen Funktion $\zeta(s)$ auf die offene Halbebene $\sigma > 0$ fortsetzen und besitzt dort einen einzigen Pol an der Stelle* 1. *Dieser Pol ist einfach mit Residuum* 1. □

2.3 L-Funktionen

Definition 2.8. Sei χ ein Dirichletscher Charakter modulo q, wie auch alle weiteren Charaktere im folgenden. Dann ist die *L-Funktion* $L(s,\chi)$ auf der offenen Halbebene $\sigma > 1$ die dort absolut konvergente Dirichletsche Reihe

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

Proposition 2.9. *Für einen nicht trivialen Charakter $\chi \neq 1_q$ konvergiert die Reihe $L(s,\chi)$ kompakt auf der offenen Halbebene $\sigma > 0$ und absolut auf der offenen Halbebene $\sigma > 1$. Dort gilt*[1]

$$L(s,\chi) = \prod_p \frac{1}{1 - \chi(p)p^{-s}}.$$

[1] Die Produktdarstellung gilt auch für den trivialen Charakter $\chi = 1_q$.

Beweis. Die Aussage für $\sigma > 1$ folgt aus Lemma 2.2 und Beispiel 2.3.

Es bleibt die Konvergenz für $\sigma > 0$ zu zeigen. Nach Proposition 1.14 reicht es zu zeigen, daß die Partialsummen $\sum_{n=u}^{v} \chi(n)$ beschränkt sind. Dies folgt aus der Tatsache, daß χ als nicht trivialer Charakter die Relation $\chi(0)+\cdots+\chi(q-1) = 0$ erfüllt und q-periodisch ist. □

Proposition 2.10. *Die L-Reihe zum trivialen Charakter erfüllt*

$$L(s, 1_q) = \zeta(s) \prod_{p|q} (1 - p^{-s}).$$

Insbesondere läßt sich $L(s, 1_q)$ analytisch auf die offene Halbebene $\sigma > 0$ mit einem einzigen Pol bei $s = 1$ fortsetzen. Der Pol ist einfach hat Residuum $\frac{\phi(q)}{q}$; insbesondere gilt also $\phi(q) = q \prod_{p|q} (1 - p^{-1})$.

Beweis. Die Aussagen über die analytische Fortsetzbarkeit, die Anzahl der Polstellen und ihre Ordnungen folgen aus den entsprechenden Aussagen für die Riemannsche Zeta-Funktion. Es bleibt, den Wert des Residuums zu berechnen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{s=1} L(s, 1_q) &= \mathrm{Res}_{s=1} \sum_{\chi} L(s, \chi) \\
&= \frac{\phi(q)}{q} + \mathrm{Res}_{s=1} \left(\sum_{\chi} L(s, \chi) - \frac{\phi(q)}{q} \zeta(s) \right) \\
&= \frac{\phi(q)}{q} + \mathrm{Res}_{s=1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{\chi} \chi(n) - \frac{\phi(q)}{q}}{n^s} \\
&= \frac{\phi(q)}{q}.
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit folgt aus der Tatsache, daß sich die Reihe $\frac{\sum_{\chi} \chi(n) - \frac{\phi(q)}{q}}{n^s}$ nach Proposition 1.14 zu einer holomorphen Funktion auf $\sigma > 0$ fortsetzen läßt. □

2.4 Die Dedekindsche Zeta-Funktion

Definition 2.11. Die *Dedekindsche Zeta-Funktion (des q-ten Kreisteilungskörpers)* ist

$$\zeta_q(s) = \prod_{\chi} L(s, \chi),$$

wobei χ hier wie auch im folgenden alle Charaktere modulo q durchläuft.

Proposition 2.12. *Sei p ein Primzahl, die teilerfremd zu q ist. Wir bezeichnen mit f_p die kleinste ganze Zahl $f > 0$ mit $p^f \equiv 1$ (modulo q)*[2] *und setzen $g_p := \frac{\phi(q)}{f_p}$*[3]*, Auf der offenen Halbebene $\sigma > 1$ gilt dann die Produktdarstellung*

$$\zeta_q(s) = \prod_{p \nmid q} \frac{1}{(1 - p^{-f_p s})^{g_p}}$$

[2] Die Zahl f_p ist die Ordnung von p in $\mathbf{Z}/(q)$.

[3] Die Zahl g_p ist der Index der von p erzeugten Untergruppe in $\mathbf{Z}/(q)$.

und die Dedekindsche Zeta-Funktion wird dort durch eine gewöhnliche Dirichletsche Reihe mit ganzzahligen Koeffizienten $a_n \geq 0$ dargestellt. Genauer dominieren ihre Koeffizienten die der Reihe $L(\phi(q)s, 1)$.

Beweis. Nach Proposition A.7 ist

$$\zeta_q(s) = \prod_\chi \prod_p \frac{1}{1-\chi(p)p^s} = \prod_{p \nmid q} \prod_\chi \frac{1}{1-\chi(p)p^s} = \prod_{p\nmid q} \frac{1}{(1-p^{-f_p s})^{g_p}},$$

womit die erste Behauptung bewiesen ist. Daraus folgt

$$\zeta_q(s) = \prod_{p\nmid q} \left(\sum_{m=0}^{\infty} p^{-m f_p s} \right)^{g_p}.$$

Entwickeln wir die rechte Seite in eine Dirichletsche Reihe sehen wir, daß ihre Koeffizienten wegen $f(p)g(p) = \phi(p)$ die Koeffizienten der Reihe

$$\prod_{p\nmid q} \sum_{m=0}^{\infty} p^{-m\,\phi(q)s} = \sum_{(n,q)=1} \frac{1}{n^{\phi(q)s}} = L(\phi(q)s, 1_q)$$

dominieren. □

Satz 2.13. *Für jeden nicht trivialen Charakter $\chi \neq 1_q$ gilt $L(1,\chi) \neq 0$.*

Beweis. Angenommen $L(1,\chi) = 0$ für einen nicht trivialen Charakter. Dann wäre $\zeta_q(s)$ holomorph bei 1 und damit auf der ganzen offenen Halbebene $\sigma > 0$. Da die Koeffizienten der Dirichletschen Reihe von $\zeta_q(s)$ alle nicht negativ sind, konvergiert nach Proposition 1.12 die Reihe dann auch für alle $\sigma > 0$. Nach dem Zusatz in Proposition 2.12 konvergiert dann auch die Dirichletsche Reihe zu $L(\phi(q)s, 1_q)$ etwa an der Stelle $s = \frac{1}{\phi(q)} < 1$. Das ist aber absurd, denn $L(s, 1_q)$ hat bei 1 einen Pol, das heißt $\frac{1}{\phi(q)}$ ist kleiner als die Konvergenzabzisse. □

Folgerung 2.14. *Die Dedekindsche Zeta-Funktion ζ_q hat einen einfachen Pol bei 1.*

Beweis. Wir wissen schon, daß $L(s, 1_q)$ einen einfachen Pol bei $s = 1$ hat. Damit folgt die Behauptung aus der eben bewiesenen Tatsache, daß die übrigen Faktoren $L(s,\chi)$, $\chi \neq 1_q$ bei $s = 1$ nicht verschwinden. □

Kapitel 3

Der Primzahlsatz

3.1 Vorbereitungen

Definition 3.1. Die auf $x \geq 0$ definierte Funktion

$$\psi(x) \coloneqq \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = \sum_{p^m \leq x} \log p,$$

heißt die *(zweite) Tschebyschowsche Funktion.*

Proposition 3.2. *Für $x \geq 0$ gilt die Abschätzung*

$$\psi(x) \leq 12(\log 2)x.$$

Beweis. Wir setzen $\theta(x) \coloneqq \sum_{p \leq x} \log p$. Dann gilt

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \theta(x^{\frac{1}{k}}) = \sum_{k \leq \log_2 x} \theta(x^{\frac{1}{k}}).$$

Für eine natürliche Zahl n gilt

$$2^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} > \binom{2n}{n} \geq \prod_{n < p \leq 2n} p,$$

also

$$\theta(2n) - \theta(n) < 2n \log 2.$$

Aufsummieren über $n = 1, 2, 4, \ldots, 2^{m-1}$ liefert

$$\theta(2^m) < 2\,(2^m - 1) \log 2 < 2^{m+1} \log 2$$

wegen $\theta(1) = 0$. Für $2^{m-1} < x \leq 2^m$ gilt

$$\theta(x) \leq \theta(2^m) < 2^{m+1} \log 2 = 4 \cdot 2^{m-1} \log 2 < 4(\log 2)x$$

und damit $\theta(x) < 4(\log 2)$ für alle x. Damit ist

$$\psi(x) < 4(\log 2)x \sum_{k \leq \log_2 x} x^{\frac{1}{k}-1} < 4(\log 2)x(1 + x^{-\frac{1}{2}} \log_2 x) < 12(\log 2)x. \qquad \square$$

Folgerung 3.3. *Sei a eine ganze Zahl modulo q. Definieren wir dann*

$$\psi_{q,a}(x) \coloneqq \phi(q) \sum_{p^m \leq x, p^m \equiv a} \log p = \phi(q) \sum_{n \leq x, n \equiv a} \Lambda(n)$$

für $x \geq 0$, so gilt

$$\psi_{q,a}(x) < 12 \log(2)\, \phi(q) x.$$

□

Lemma 3.4. *Sei a eine ganze Zahl modulo q. Bezeichnen wir dann mit $\pi_{q,a}(x)$ die Anzahl der Primzahlen p mit $p \leq x$ und $p \equiv a \pmod q$, so gilt*

$$\liminf_{x \to \infty} \frac{\psi_{q,a}(x)}{x} = \liminf_{x \to \infty} \frac{\phi(q) \log(x) \pi_{q,a}(x)}{x}$$

und

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{\psi_{q,a}(x)}{x} = \limsup_{x \to \infty} \frac{\phi(q) \log(x) \pi_{q,a}(x)}{x}.$$

Beweis. Zunächst ist

$$\begin{aligned}
\psi_{q,a}(x) &= \phi(q) \sum_{p^m \leq x, p^m \equiv a} \log p \\
&= \phi(q) \left(\sum_{p \leq x, p \equiv a} \log p + \sum_{p^m \leq x, m \geq 2} \log p \right) \\
&\leq \phi(q) \left((\log x) \pi_{q,a}(x) + \frac{1}{2} (\log x)(\log_2 x) x^{\frac{1}{2}} \right).
\end{aligned}$$

Daraus folgt wegen $\lim_{x \to \infty} (\log x)^2 x^{-\frac{1}{2}} = 0$, daß

$$\liminf_{x \to \infty} \frac{\psi_{q,a}(x)}{x} \leq \liminf_{x \to \infty} \frac{\phi(q) \log(x) \pi_{q,a}(x)}{x}$$

und

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{\psi_{q,a}(x)}{x} \leq \limsup_{x \to \infty} \frac{\phi(q) \log(x) \pi_{q,a}(x)}{x}.$$

Für $\epsilon > 0$ gilt andererseits

$$\begin{aligned}
\psi_{q,a}(x) &= \phi(q) \sum_{p^m \leq x, p^m \equiv a} \log \\
&\geq \phi(q) \sum_{x^{1-\epsilon} \leq p \leq x, p \equiv a} \log p \\
&\geq \phi(q) \sum_{x^{1-\epsilon} \leq p \leq x, p \equiv a} \log(x^{1-\epsilon}) \\
&\geq \phi(q)(1-\epsilon) \log(x) (\pi_{q,a}(x) - x^{1-\epsilon}),
\end{aligned}$$

also

$$\frac{\psi_{q,a}(x)}{x} \geq (1-\epsilon)\, \phi(q) \left(\frac{\log(x) \pi_{q,a}(x)}{x} - \frac{\log x}{x^\epsilon} \right).$$

Da $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^\epsilon} = 0$, haben wir

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\psi_{q,a}(x)}{x} \geq (1-\epsilon) \liminf_{x\to\infty} \frac{\phi(q)\log(x)\pi_{q,a}(x)}{x}$$

und

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\psi_{q,a}(x)}{x} \geq (1-\epsilon) \limsup_{x\to\infty} \frac{\phi(q)\log(x)\pi_{q,a}(x)}{x}$$

für alle $\epsilon > 0$, so daß wir formal $\epsilon = 0$ setzen können. □

3.2 Nullstellen der Dedekindschen Zeta-Funktion

Proposition 3.5. *Die Dedekindsche Zeta-Funktion $\zeta_q(s)$ hat auf der Halbebene $\{s \mid \sigma \geq 1\}$ keine Nullstellen*[1].

Beweis. Aufgrund der Produktdarstellung von $\zeta_q(s)$ für $\sigma > 1$ reicht es, nur Nullstellen mit $\sigma = 1$ zu betrachten. Wir wissen schon, daß ζ_q bei $s = 1$ einen Pol, dort also insbesondere keine Nullstelle hat. Weitere Pole gibt es für $\sigma = 1$ nicht. Sei $\mu \geq 0$ die Nullstellenordnung von $\zeta_q(s)$ an einer Stelle $s = 1 + it$ mit $t \neq 0$. Wir müssen $\mu = 0$ zeigen. Dazu betrachten wir außerdem die Nullstellenordnung ν von $\zeta_q(s)$ an $s = 1 + 2it$. Da das komplex Konjugierte eines Charakters wieder ein Charakter ist, ist

$$\overline{\zeta_q(s)} = \prod_\chi \overline{L(s,\chi)} = \prod_\chi L(\overline{s}, \overline{\chi}) = \zeta_q(\overline{s}).$$

Damit hat ζ_q an $s = 1 - it$ ebenfalls eine Nullstelle der Ordnung μ und an $s = 1 - 2it$ eine Nullstelle der Ordnung ν. Wir setzen als nächstes

$$\begin{aligned} f(s) &:= \prod_{r=-2}^{2} \zeta_q(1 + rit + s)^{\binom{4}{2+r}} \\ &= \zeta_q(1 - 2irt + s)\zeta_q(1 - irt + s)^4\zeta_q(1+s)^6\zeta_q(1+s+it)^4\zeta_q(1+s+2it). \end{aligned}$$

Die Polstellenordnung von $f(s)$ an 0 ist $k := 6 - 8\mu - 2\nu$. Wir werden $k \geq 0$ zeigen, denn dann folgt $\mu = 0$, und wir sind fertig.

Nach dem bekannten Zusammenhang der Polstellenordnung und der logarithmischen Ableitung für meromorphe Funktionen hat

$$g(s) = -\frac{f'(s)}{f(s)} = -\frac{d}{ds}\log f(s) = -\sum_{r=-2}^{2} \binom{4}{2+r} \frac{d}{ds} \log \zeta_q(1 + rit + s)$$

bei 0 eine einfache Polstelle mit $\operatorname{Res}_0 g(s) = k$, es ist also $\operatorname{Res}_0 g(s) \geq 0$ zu zeigen.

Auf der offenen Halbebene $\sigma > 1$ gilt

$$-\frac{d}{ds}\log\zeta_q(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_\chi \frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^s} = \phi(q)\sum_{n\equiv 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$$

[1] Damit hat insbesondere die Riemannsche Zeta-Funktion $\zeta(s) = \zeta_1(s)$ keine Nullstellen auf $\sigma \geq 1$.

nach Proposition 2.4. Damit gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{s=0} g(s) &= -\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon \cdot \sum_{r=-2}^{2} \binom{4}{2+r} \frac{d}{ds}\bigg|_{s=\epsilon} \log \zeta_q(1+rit+s) \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \epsilon \cdot \phi(q) \sum_{r=-2}^{2} \binom{4}{2+r} \sum_{n\equiv 1} \frac{\Lambda(n)}{n^{1+rit+\epsilon}} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \epsilon \cdot \phi(q) \sum_{n\equiv 1} \frac{\Lambda(n)}{n^{1+\epsilon}} (n^{\frac{1}{2}it} + n^{-\frac{1}{2}it})^4 \\
&\geq 0. \qquad \square
\end{aligned}$$

Folgerung 3.6. *Sei $a \in \mathbf{Z}$ teilerfremd zu q. Die Funktion*

$$\frac{d}{ds} \log \zeta_{q,a}(s) \coloneqq \sum_{\chi} \chi(a)^{-1} \frac{d}{ds} \log L(s,\chi)$$

ist auf $\sigma > 0$ meromorph. Auf $\{s \mid \sigma = 1\}$ hat sie genau eine Polstelle, und zwar eine erster Ordnung bei $s = 1$. Es gilt

$$\operatorname{Res}_{s=1} \frac{d}{ds} \log \zeta_{q,a}(s) = -1. \qquad \square$$

3.3 Eine Armeleuteversion des Ikehara–Wienerschen Satzes

Satz 3.7. *Sei $f(t)$ eine auf $t \geq 0$ beschränkte, dort lokal L^1-integrierbare Funktion. Läßt sich die für $\sigma > 0$ definierte Funktion $g(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$ holomorph über $\sigma = 0$ fortsetzen, so gilt*

$$\int_0^\infty f(t)\,dt = g(0),$$

insbesondere existiert also das Integral.

Beweis. Für $T > 0$ setzen wir $g_T(s) \coloneqq \int_0^T f(t)e^{-st}\,dt$. Offensichtlich müssen wir $\lim_{T\to\infty} g_T(0) = g(0)$ zeigen.

Sei $R \gg 0$ gegeben. Weiter sei γ ein Zykel, der die Menge

$$A = \{s \mid |s| < R, \sigma > -\delta\}$$

umläuft, wobei $0 < \delta \ll 1$, so daß wir annehmen können, daß $g(s)$ holomorph auf einer Umgebung von A ist. Nach dem Cauchyschen Integralsatz ist

$$\begin{aligned}
g(0) - g_T(0) &= (g(0) - g_T(0)) \cdot e^{sT} \cdot \left(1 + \frac{s^2}{R^2}\right)\bigg|_{s=0} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma (g(s) - g_T(s)) \cdot e^{sT} \cdot \left(1 + \frac{s^2}{R^2}\right) \frac{ds}{s}.
\end{aligned}$$

Sei γ_1 derjenige Teil des Zykels γ, der in der Halbebene $\sigma \geq 0$ läuft, und γ_2 derjenige Teil des Zykels, der in der Halbebene $\sigma \leq 0$ läuft. Weiter sei γ_3 der

Halbkreis $\gamma_3(\phi) = R\,e^{i\phi}$, $\frac{\pi}{2} \le \phi \le \frac{3\pi}{2}$. Damit gilt

$$\begin{aligned}|g(0) - g_T(0)| \le \frac{1}{2\pi} &\left| \int_{\gamma_1} (g(s) - g_T(s)) e^{sT} \left(1 + \frac{s^2}{R^2}\right) \frac{ds}{s} \right| \\ + \frac{1}{2\pi} &\left| \int_{\gamma_2} g(s) e^{sT} \left(1 + \frac{s^2}{R^2}\right) \frac{ds}{s} \right| \\ + \frac{1}{2\pi} &\left| \int_{\gamma_2} g_T(s) e^{sT} \left(1 + \frac{s^2}{R^2}\right) \frac{ds}{s} \right|.\end{aligned}$$

Auf der Halbebene $\sigma > 0$ gilt

$$|g(s) - g_T(s)| = \left| \int_T^\infty f(t) e^{-st}\, dt \right| \le B \int_T^\infty |e^{-st}|\, dt = \frac{Be^{-\sigma T}}{\sigma},$$

wobei $B \coloneqq \sup_{t\ge 0} |f(t)|$. Analog ist

$$|g_T(s)| = \left| \int_0^T f(t) e^{-st}\, dt \right| \le B \int_{-\infty}^T |e^{-st}|\, dt = B\frac{e^{-\sigma t}}{|\sigma|}$$

auf der Halbebene $\sigma < 0$. Auf der Spur von γ_1 und γ_3 gilt $\frac{R}{s} + \frac{s}{R} = 2\frac{\sigma}{R}$, also

$$\left| e^{sT} \left(1 + \frac{s^2}{R^2}\right) \frac{1}{s} \right| = \frac{e^{\sigma T}}{R} \left| \frac{R}{s} + \frac{s}{R} \right| = 2e^{\sigma T} \frac{|\sigma|}{R^2}$$

Damit gilt

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma_1} (g(s) - g_T(s)) \cdot e^{sT} \cdot \left(1 + \frac{s^2}{R^2}\right) \frac{ds}{s} \right| \le \frac{B}{R}$$

und

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma_2} g_T(s) e^{sT} \left(1 + \frac{s^2}{R^2}\right) \frac{ds}{s} \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma_3} g_T(s) e^{sT} \left(1 + \frac{s^2}{R^2}\right) \frac{ds}{s} \right| \le \frac{B}{R},$$

wobei das Gleichheitszeiten aus dem Cauchyschen Integralsatz folgt, denn $g_T(s)$ ist eine ganze Funktion. Es folgt

$$|g(0) - g_T(0)| \le \frac{2B}{R} + \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma_2} \cdot g(s) \cdot e^{sT} \left(1 + \frac{s^2}{R^2}\right) \frac{ds}{s} \right|.$$

Es ist

$$\lim_{T\to\infty} \int_{\gamma_2} g(s) \cdot e^{sT} \cdot \left(1 + \frac{s^2}{R^2}\right) \frac{ds}{s} = 0,$$

also

$$\limsup_{T\to\infty} |g(0) - g_T(0)| \le \frac{2B}{R}$$

für alle $R \gg 0$. Es folgt $\lim_{T\to\infty} |g(0) - g_T(0)| = 0$. □

Folgerung 3.8 (Armeleuteversion des Ikehara–Wienerschen Satzes)**.** *Sei $f(x)$ eine für $x \ge 1$ definierte, monoton wachsende Funktion. Es existiere eine Konstante C mit $0 \le f(x) \le Cx$, so daß die* Mellinsche Transformierte

$$g(s) = s \int_1^\infty f(x) x^{-s-1}\, dx$$

eine holomorphe Funktion auf der Halbebene $\sigma > 1$ definiert. Besitzt $g(s)$ dann eine meromorphe Fortsetzung auf eine offene Umgebung von $\{s \mid \sigma \geq 1\}$ mit höchstens einer Polstelle, und zwar bei $s = 1$ von höchstens erster Ordnung, so gilt

$$\operatorname{Res}_{s=1} g(s) = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Beweis. Sei $c = \operatorname{Res}_{s=1} g(s)$. Dann besitzt

$$g(s) - \frac{c}{s-1}$$

nach Voraussetzung eine holomorphe Fortsetzung auf eine Umgebung von

$$\{s \mid \sigma \geq 1\}.$$

Außerdem sehen wir wegen $\lim_{\epsilon\to 0} (1+\epsilon)g(1+\epsilon) \geq 0$, daß $c \geq 0$.

Wir definieren

$$F(t) := e^{-t} f(e^t) - c.$$

mit $t \geq 1$. Dann ist $F(t)$ nach Voraussetzung beschränkt und lokal L^1-integrierbar, so daß die *Laplacesche Transformierte*

$$G(s) = \int_0^\infty F(t) e^{-st}\, dt$$

auf der offenen Halbebene $\sigma > 0$ eine holomorphe Funktion definiert. Die Substitution $x = e^t$ liefert

$$G(s) = \int_1^\infty f(x) x^{-s-2}\, dx - \frac{c}{s} = \frac{1}{s+1}\left(g(s+1) - \frac{c}{s} - c\right),$$

so daß nach Voraussetzung die Funktion $G(s)$ eine analytische Fortsetzung auf eine offene Umgebung von $\{s \mid \sigma \geq 0\}$ besitzt. Damit können wir Satz 3.7 auf die Funktion $F(t)$ anwenden und erhalten, daß das Integral

$$\int_0^\infty F(t)\, dt = \int_0^\infty (e^{-t} f(e^t) - c)\, dt = \int_1^\infty \frac{f(x) - cx}{x^2}\, dx$$

existiert. Wir wollen daraus folgern, daß $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = c$.

Angenommen $\limsup_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} > c$. Dann existiert ein $\delta > 0$, so daß

$$f(y) > (c + 2\delta) y$$

für beliebig große y gilt. Für $y < x < \rho y$ mit $\rho := \frac{c+2\delta}{c+\delta} > 1$ folgt dann

$$f(x) > (c + 2\delta) y > (c + \delta) x.$$

Dann ist aber

$$\int_y^{\rho y} \frac{f(x) - cx}{x^2}\, dx > \int_y^{\rho y} \frac{\delta}{x}\, dx = \delta \log \rho$$

für beliebig große y, und die rechte Seite ist eine positive Konstante. Damit kann das Integral $\int_1^\infty \frac{f(x)-cx}{x^2}\, dx$ nicht existieren, ein Widerspruch. Damit ist also $\limsup_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \leq c$.

Nehmen wir andererseits $\liminf_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} < c$ an, insbesondere also $c > 0$, so können wir dies analog zu einem Widerspruch führen. In diesem Falle existiert ein $\delta > 0$, so daß

$$f(y) < (c - 2\delta)y$$

für beliebig große y, wobei wir δ klein genug wählen, so daß noch $c - 2\delta > 0$. Für $\theta y < x < y$ mit $\theta := \frac{c-2\delta}{c-\delta} > 1$ folgt dann

$$f(x) < (c - 2\delta)y < (c - \delta)x$$

Dann ist aber

$$\int_{\theta y}^{y} \frac{f(x) - cx}{x^2}\, dx < -\int_{\theta y}^{y} \frac{\delta}{x}\, dx = \delta \log \theta$$

für beliebig große y, und die rechte Seite ist eine negative Konstante. Damit kann das Integral $\int_1^\infty \frac{f(x)-cx}{x^2}\, dx$ wiederum nicht existieren, ein Widerspruch. Damit ist also $\liminf_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \geq c$.

Damit müssen also Limes inferior und Limes superior übereinstimmen, und wir haben $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = c$. □

3.4 Der Primzahlsatz

Proposition 3.9. *Sei $a \in \mathbf{Z}$ zu q teilerfremd. Auf der offenen Halbebene $\sigma > 1$ gilt dann*

$$-\frac{d}{ds} \log \zeta_{q,a}(s) = s \int_1^\infty \frac{\psi_{q,a}(x)}{x^{s+1}}\, dx.$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{ds} \log \zeta_{q,a}(s) &= \sum_\chi \chi(a)^{-1} \sum_{n=1}^\infty \frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^s} \\
&= \sum_{n=1} \left(\sum_\chi \chi(a^{-1}n) \right) \frac{\Lambda(n)}{n^s} \\
&= \phi(q) \sum_{n\equiv a} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \\
&= \phi(q) \sum_{n\equiv a} s \int_n^\infty \frac{\Lambda(n)}{x^{s+1}}\, dx \\
&= \phi(q) \cdot s \cdot \sum_{n\equiv a} \sum_{k=n}^\infty \int_k^{k+1} \frac{\Lambda(n)}{x^{s+1}}\, dx \\
&= s \cdot \sum_{k=1}^\infty \int_k^{k+1} \sum_{n\equiv a, n\leq k} \phi(q) \cdot \frac{\Lambda(n)}{x^{s+1}}\, dx \\
&= s \int_1^\infty \frac{\psi_{q,a}(x)}{x^{s+1}}\, dx.
\end{aligned}$$

□

Folgerung 3.10. *Es ist*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi_{q,a}(x)}{x} = 1.$$

Beweis. Wegen Folgerung 3.3 und Folgerung 3.6 können wir Folgerung 3.8 anwenden. □

Satz 3.11. *Sei $q \geq 1$ eine natürliche Zahl, und sei $a \in \mathbf{Z}$ zu q teilerfremd. Bezeichnen wir mit $\pi_{q,a}(x)$ die Anzahl der Primzahlen p mit $p \leq x$ und $p \equiv a$ modulo q, so gilt*

$$\pi_{q,a}(x) \sim \frac{1}{\phi(q)} \frac{x}{\log x}$$

für $x \to \infty$, das heißt

$$\lim_{x \to \infty} \pi_{q,a}(x) \left(\frac{1}{\phi(q)} \frac{x}{\log x} \right)^{-1} = 1.$$

Beweis. Wegen Lemma 3.4 ist dies nur eine Umformulierung von Folgerung 3.10. □

Folgerung 3.12 (Der Primzahlsatz)**.** *Bezeichnen wir mit $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen p mit $p \leq x$, so gilt*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

für $x \to \infty$, das heißt

$$\lim_{x \to \infty} \pi(x) \left(\frac{x}{\log x} \right)^{-1} = 1.$$ □

Folgerung 3.13 (Dirichletscher Primzahlsatz)**.** *Sei $q \geq 1$ eine natürliche Zahl und $a \in \mathbf{Z}$ zu q teilerfremd. Dann gibt es in der* arithmetischen Progression

$$a, a+q, a+2q, a+3q, \ldots$$

unendlich viele Primzahlen. □

Kapitel 4

Die Gamma-Funktion

4.1 Der Wielandtsche Satz

Definition 4.1. Die *Gamma-Funktion* $\Gamma(s)$ ist auf der offenen Halbebene $\sigma > 0$ das dort absolut kompakt konvergente Integral

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} \, dt.$$

Proposition 4.2. *Für die Gamma-Funktion gilt* $\Gamma(1) = 1$ *und* $\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s)$ *auf der offenen Halbebene* $\sigma > 0$.

Beweis. Es ist $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = 1$. Mittels partieller Integration zeigt sich weiter

$$\Gamma(s+1) = \int_0^\infty t^s e^{-t}\,dt = s \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t}\,dt = s\Gamma(s). \qquad \square$$

Folgerung 4.3. *Für jede natürliche Zahl n gilt $n! = \Gamma(n+1)$.* $\square$

Satz 4.4. *Die Gamma-Funktion läßt sich zu einer meromorphen Funktion $\Gamma(s)$ auf $\mathbf{C}$ fortsetzen. Sie genügt dort der Funktionalgleichung $\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s)$ und ist auf jedem Vertikalstreifen $\{s \mid \sigma_0 \leq \sigma < \sigma_1\}$ mit $0 < \sigma_0 < \sigma_1$ beschränkt.*

Sie hat Polstellen genau bei $s = 0, -1, -2, \ldots$. Alle Polstellen sind einfach, und für alle $n \in \mathbf{N}_0$ gilt

$$\operatorname{Res}_{s=-n} \Gamma(s) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Beweis. Für jedes $n \in \mathbf{N}_0$ gilt

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+n+1)}{s \cdot (s+1) \cdots (s+n)}$$

zunächst auf $\sigma > 0$. Die rechte Seite ist aber auch für $\sigma > -(n+1)$ eine meromorphe Funktion, wenn wir $\Gamma(s)$ zunächst nur für $\sigma > 0$ definiert haben. Damit stellt die rechte Seite eine meromorphe Fortsetzung da. Im Grenzwert $n \to \infty$ erhalten wir eine meromorphe Fortsetzung auf die ganze komplexe Ebene $\mathbf{C}$ mit den behaupteten einfachen Polstellen.

Die Behauptung über die Residuen folgt aus

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{s=-n} \Gamma(s) &= \operatorname{Res}_{s=-n} \frac{\Gamma(s+n+1)}{s \cdot (s+1) \cdots (s+n)} \\ &= \frac{\Gamma(1)}{(-n)\cdot(-n+1)\cdots(-1)} \operatorname{Res}_{s=-n} \frac{1}{s+n} = \frac{(-1)^n}{n!}.\end{aligned}$$

Es bleibt, die Beschränktheit in den Vertikalstreifen zu zeigen. Dies folgt aus

$$|\Gamma(s)| \leq \int_0^\infty |t^{s-1}e^{-t}|\, dt = \int_0^\infty t^{\sigma-1}e^{-t}\, dt = \Gamma(\sigma)$$

für $\sigma > 0$ und der Tatsache, daß die stetige Funktion $\Gamma(\sigma)$ auf jedem Kompaktum in $\mathbf{R}_+$ beschränkt ist. $\square$

Satz 4.5 (Wielandtscher Satz)**.** *Sei G ein Gebiet, welches den Vertikalstreifen $\{s \mid 1 \leq \sigma < 2\}$ umfaßt. Ist dann f eine auf G holomorphe Funktion, welche auf dem Vertikalstreifen $\{s \mid 1 \leq \sigma < 2\}$ beschränkt ist und welche $f(1) = 1$ und $f(s+1) = s \cdot f(s)$ für $s,\ s+1 \in G$ erfüllt, so ist schon $f = \Gamma|G$.*

Beweis. Wie im Beweis von Satz 4.4 folgt zunächst (mit f anstelle von Γ), daß f eine meromorphe Fortsetzung auf die ganze komplexe Ebene besitzt, welche Polstellen genau auf $\{0, -1, -2, \dots\}$ besitzt. Alle diese Polstellen sind einfach und das Residuum bei $-n$, $n \in \mathbf{N}_0$ ist durch $\frac{(-1)^n}{n!}$ gegeben. Bezeichnen wir diese Fortsetzung wieder mit $f(s)$, so gilt $f(s+1) = s \cdot f(s)$ für alle $s \notin \{0, -1, -2, \dots\}$.

Damit ist die Funktion $h(s) = f(s) - \Gamma(s)$ hebbar zu einer ganzen Funktion, welche $h(1) = 0$ und $h(s+1) = s \cdot h(s)$ für alle $s \in \mathbf{C}$ erfüllt und welche in dem Vertikalstreifen $\{s \mid 1 \leq \sigma < 2\}$ beschränkt ist, etwa durch C.

Für $0 \leq \sigma < 1$ gilt dann

$$|h(s)| = \frac{1}{|s|}|h(s+1)| \leq \frac{C}{|s|} \leq \frac{C}{|t|},$$

wobei t nach Konvention den Imaginärteil von s bezeichnet. Für $|t| > 1$ ist damit $h(s)$ in $0 \leq \sigma < 1$ gleichmäßig beschränkt. Weiter ist $h(s)$ als stetige Funktion auf der kompakten Menge $\{s \mid 0 \leq \sigma \leq 1, |t| \leq 1\}$ beschränkt. Damit ist insgesamt $h(s)$ gleichmäßig in $0 \leq \sigma < 1$, also auch gleichmäßig in $0 \leq \sigma \leq 1$ beschränkt.

Wir schreiben dann $H(s) := h(s) \cdot h(1-s)$. Diese Funktion ist also gleichmäßig in $0 \leq \sigma \leq 1$ beschränkt. Eine kleine Rechnung zeigt $H(s+1) = -H(s)$ für alle $s \in \mathbf{C}$; insbesondere muß $H(s)$ auf der ganzen komplexen Ebene beschränkt sein. Nach dem Liouvilleschen Satz ist also $H(s) \equiv H(0) = 0$. Es folgt, daß $h(s) \cdot h(1-s) \equiv 0$, das heißt die Nullstellen von $h(s)$ häufen sich bei $\frac{1}{2}$. Nach dem Identitätssatz ist damit $h(s) = 0$, also $f(s) = \Gamma(s)$. $\square$

4.2 Die Produktdarstellung der Gamma-Funktion

Proposition 4.6. *Der Grenzwert*

$$\gamma := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right),$$

die Euler–Mascheronische Konstante*, existiert und ist gleich*

$$\gamma = \lim_{s\to 1}\left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right).$$

Beweis. Wir haben schon gesehen, daß

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{k^s}\right)\,dk$$

für $\sigma > 0$, das heißt

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 1}\left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{k}\right)\,dk \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n} - \log(n+1)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n} - \log n\right),
\end{aligned}$$

da $\lim_{n\to\infty}\big(\log n - \log(n+1)\big) = 0$. □

Lemma 4.7. *Das unendliche Produkt*

$$s\cdot e^{\gamma s}\cdot\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{\nu}\right)e^{-\frac{s}{\nu}}$$

konvergiert kompakt auf der komplexen Ebene und stellt somit eine ganze Funktion dar.

Beweis. Für jedes komplexe z mit $|z| < 1$ gilt

$$|\log(1+z) - z| = \left|\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{n}\right| \le |z|^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|z|^k}{k+2} \le |z|^2\sum_{k=0}^{\infty}|z|^k = \frac{|z|^2}{1-|z|}.$$

Seien $r > 0$, und sei $n_0 \ge r$ eine natürliche Zahl. Mit der obigen Abschätzung folgt, daß

$$\sum_{\nu=n_0}^{\infty}\left|\log\left(1+\frac{s}{\nu}\right) - \frac{s}{\nu}\right| \le \sum_{\nu=n_0}\left|\frac{s}{\nu}\right|^2\frac{1}{1-|\frac{s}{\nu}|} \le \frac{r^2}{2}\sum_{\nu=n_0}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}.$$

für $|s| \le \frac{r}{2}$. Aus der Konvergenz von $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}$ folgt damit, daß

$$\sum_{\nu=n_0}^{\infty}\left|\log(1+\frac{s}{\nu}) - \frac{s}{\nu}\right|$$

auf der abgeschlossenen Kreisscheibe $\{s \mid |s| \le \frac{r}{2}\}$ kompakt konvergiert. Damit ist das unendliche Produkt

$$\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{\nu}\right)\cdot e^{-\frac{s}{\nu}}.$$

auf der ganzen komplexen Ebene kompakt konvergent. □

Satz 4.8 (Gaußsche Produktentwicklung)**.** *Die meromorphe Funktion* $\frac{1}{\Gamma(s)}$ *läßt sich zu einer ganzen Funktion* $G(s)$ *fortsetzen für die*

$$G(s) = s \cdot e^{\gamma s} \cdot \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{\nu}\right) e^{-\frac{s}{\nu}} = \lim_{n\to\infty} \frac{s \cdot (s+1) \cdots (s+n)}{n! \cdot n^s}$$

für alle $s \in \mathbf{C}$ *gilt.*

Beweis. Zunächst ist

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{s \cdot (s+1) \cdots (s+n)}{n! \cdot n^s} &= \lim_{n\to\infty} s \cdot e^{-s \log n} \cdot \prod_{\nu=1}^{n} \left(1 + \frac{s}{\nu}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} s \cdot e^{s \cdot (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n)} \cdot \prod_{\nu=1}^{n} (1 + \frac{s}{\nu}) \cdot e^{-\frac{s}{\nu}} \\
&= s \cdot e^{\gamma s} \cdot \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{\nu}\right) \cdot e^{-\frac{s}{\nu}},
\end{aligned}$$

und die rechte Seite ist das kompakt konvergente Produkt aus dem vorhergehenden Lemma, das heißt $G(s)$ ist insbesondere eine ganze Funktion.

Es bleibt nachzurechnen, daß $\frac{1}{G(s)}$ die Voraussetzungen des Wielandtschen Satzes erfüllt. Für $\sigma > 0$ ist zunächst

$$\left|\frac{1}{G(s)}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n! \cdot |n^s|}{|s| \cdot |s+1| \cdots |s+n|} \le \lim_{n\to\infty} \frac{n! \cdot n^\sigma}{\sigma \cdot (\sigma+1) \cdots (\sigma+n)} = \frac{1}{G(\sigma)}$$

und die rechte Seite ist auf dem Kompaktum $\{\sigma \mid 1 \le \sigma \le 2\}$ beschränkt, womit $\frac{1}{G(s)}$ auf dem Vertikalstreifen $\{s \mid 1 \le \sigma < 2\}$ beschränkt ist.

Schließlich ist

$$\frac{1}{G(1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n! \cdot n}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{1}{G(s+1)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot n^{s+1}}{(s+1) \cdot (s+2) \cdots (s+n+1)} \\
&= s \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{s+1} \cdot \frac{(n+1)!}{s \cdot (s+1) \cdots (s+n+1)} \\
&= s \cdot \frac{1}{G(s)}.
\end{aligned}$$

für alle $s \in \mathbf{C} \setminus \{0, 1, 2, \dots\}$. □

Folgerung 4.9. *Die Gamma-Funktion* Γ *hat keine Nullstellen in der komplexen Ebene.* □

Satz 4.10 (Eulerscher Ergänzungsatz)**.** *Es gilt*

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$$

als Gleichheit zwischen meromorphen Funktionen.

Beweis. Die Funktion

$$f(s) := \Gamma(s)\Gamma(1-s) - \frac{\pi}{\sin \pi s}$$

hat isolierte Singularitäten genau an allen $n \in \mathbf{Z}$, und zwar höchstens Pole erster Ordnung. Da das Residuum von $\frac{\pi}{\sin \pi s}$ bei n aber gerade $\frac{\pi}{\pi \cos(\pi n)} = (-1)^n$ ist, heben sich die Residuen der Summanden von $f(s)$ gerade auf. Die Funktion $f(s)$ können wir also zu einer ganzen Funktion fortsetzen.

Es ist $f(s)$ auf $\{s \mid 0 \leq \sigma \leq 1, |t| > 1\}$ beschränkt, denn dies gilt für ihre beiden Summanden. Außerdem ist $f(s)$ als stetige Funktion auf dem Kompaktum $\{s \mid 0 \leq \sigma \leq 1, |t| \leq 1\}$ beschränkt. Es folgt, daß $f(s)$ auf $\{s \mid 0 \leq \sigma \leq 1\}$ insgesamt beschränkt ist. Da

$$f(s+1) = -f(s)$$

für alle s, ist damit $f(s)$ insgesamt eine beschränkte Funktion, nach dem Liouvilleschen Satz also konstant. Indem wir $s = -\frac{1}{2}$ in die Formel für die Quasi-Periodizität von $f(s)$ einsetzen, erhalten wir $f(\frac{1}{2}) = f(-\frac{1}{2}) = -f(\frac{1}{2})$, also $f(\frac{1}{2}) = 0$. Damit ist $f(s) \equiv 0$. □

Folgerung 4.11. *Es ist* $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. □

Folgerung 4.12. *Es ist*

$$\frac{\sin \pi z}{\pi} = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

im kompakter Konvergenz auf $\mathbf{C}$. □

Folgerung 4.13 (Partialbruchentwicklung des Kotangens)**.** *Es ist*

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n, n \neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right)$$

in kompakter Konvergenz, wobei n alle ganzen Zahlen (außer 0*) durchläuft.*

Beweis. Wir haben

$$\frac{d}{dz} \log \frac{\sin \pi z}{\pi} = \frac{\sin' \pi z}{\sin \pi z} = \pi \cot \pi z.$$

Auf der anderen Seite ist

$$\frac{\sin \pi z}{\pi} = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) = z \prod_{|n|=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}}$$

und damit

$$\frac{d}{dz} \log \frac{\sin \pi z}{\pi} = \frac{1}{z} + \sum_{|n|=1}^{\infty} \frac{d}{dz} \log\left(\left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}}\right) = \frac{1}{z} + \sum_{|n|=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right).$$ □

Folgerung 4.14 (Legendresche Relation)**.** *Es gilt folgende Gleichheit meromorpher Funktionen:*

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{s-1}} \Gamma(s).$$

Beweis. Es reicht nachzuweisen, daß die Funktion

$$f(s) = \frac{2^{s-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)$$

die Voraussetzungen des Wielandtschen Satzes erfüllt: Zunächst ist die Funktion auf dem Vertikalstreifen $\{s \mid 1 \le \sigma \le 2\}$ beschränkt, da dies für ihre Faktoren gilt. Weiter ist

$$f(1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1) = 1$$

und

$$f(s+1) = \frac{2^s}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right) = \frac{s}{2}\frac{2^s}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = sf(s). \qquad \square$$

4.3 Die Stirlingsche Formel

Lemma 4.15. *Sei* log *der Hauptzweig des komplexen Logarithmus. Für die auf der negativ geschlitzten Ebene G definierte Funktion*

$$H_0(z) = \left(z + \frac{1}{2}\right)(\log(z+1) - \log z) - 1$$

gilt dann

$$|H_0(z)| \le \frac{1}{2}\left|\frac{1}{2z+1}\right|^2$$

für alle $z \in G$ mit $\left|z + \frac{1}{2}\right| > 1$.

Beweis. Für $z > 0$ und $w := \frac{1}{2z+1}$ gilt

$$\frac{1}{2w}\log\frac{1+w}{1-w} - 1 = H_0(z)$$

nach den elementaren Rechenregeln des Logarithmus. Aus dem Identitätssatz folgt, daß die Gleichheit dann auch schon für alle komplexen z mit $\Re z > 1$ gelten muß (denn dort sind beide Seiten wohldefiniert). Da die Potenzreihenentwicklungen

$$-\log(1-w) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{w^k}{k}$$

und entsprechend

$$\log(1+w) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{w^k}{k}$$

für $|w| < 1$ gelten, folgt

$$H_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{w^{2n}}{2n+1}$$

auf diesem Bereich. Für $|w| < \frac{1}{2}$, also $\left|z + \frac{1}{2}\right| > 1$, können wir dies wie folgt durch die geometrische Reihe abschätzen:

$$H_0(z) \le \frac{1}{3}|w|^2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{4}{9}|w|^2 < \frac{1}{2}|w|^2 = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{2z+1}\right|^2.$$

$\square$

Proposition 4.16. *Die Reihe*

$$H(z) := \sum_{n=0}^{\infty} H_0(z+n)$$

konvergiert in der negativ geschlitzten komplexen Ebene G absolut kompakt. In jedem Winkel $W = \{re^{i\phi} \mid -\pi + \delta \leq \phi \leq \pi - \delta\}$ mit $0 < \delta \leq \pi$ gilt

$$\lim_{z \to \infty} H(z) = 0.$$

Beweis. Jede kompakte Teilmenge von G liegt in einem geeigneten Winkel W. Aus diesem Grunde reicht es, gleichmäßige Konvergenz auf einem solchen W nachzurechnen. Aufgrund des Lemmas gibt es eine natürliche Zahl $N \geq 0$ und eine reelle Zahl $C \geq 0$, so daß

$$|H_0(z+n)| \leq \frac{C}{n^2},$$

wenn nur $n \geq N$. Damit ist die Zeta-Reihe $\zeta(2)$ in geeigneter Weise eine Majorante für die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |H_0(z+n)|$ auf W, womit die gleichmäßige Konvergenz nachgewiesen ist.

Weiter gilt nach dem Hilfssatz, daß $\lim_{z\to\infty} H_0(z+n) = 0$ für alle n. Schreiben wir also

$$|H(z)| \leq \sum_{n=0}^{M-1} |H_0(z+n)| + \sum_{n=M}^{\infty} |H_0(z+n)| \leq \sum_{n=0}^{M-1} |H_0(z+n)| + \sum_{n=M}^{\infty} \frac{C}{n^2},$$

wobei $M \geq N$, so gilt

$$\limsup_{z\to\infty} |H(z)| \leq \sum_{n=M}^{\infty} \frac{C}{n^2}.$$

Der Grenzübergang $M \to \infty$ liefert dann das gewünschte Resultat. □

Lemma 4.17. *Die auf der negativ geschlitzten komplexen Ebene G definierte holomorphe Funktion*

$$h(z) := z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} e^{H(z)}$$

ist in dem Vertikalstreifen $\{x + iy \mid 2 \leq x \leq 3\}$ beschränkt. (Hierbei ist $z^{z-\frac{1}{2}} = e^{(z-\frac{1}{2})\log z}$, wobei log *weiterhin den Hauptzweig des Logarithmus' bezeichnet.)*

Beweis. Wir behaupten zunächst, daß $e^{(z-\frac{1}{2})\log z}$ in jedem Vertikalstreifen

$$\{x + iy \mid a \leq x \leq b\}$$

mit $0 < a < b$ beschränkt ist. Dazu reicht es offensichtlich nachzuweisen, daß

$$\Re\left(\left(z - \frac{1}{2}\right)\log z\right) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\log r - y\phi = -y\phi\left(1 + \left(x - \frac{1}{2}\right)\frac{\log r}{y}\right)$$

nach oben beschränkt ist, wobei wir $z = x + iy = re^{i\phi}$ mit $-\pi < \phi < \pi$ geschrieben haben. Dies folgt aber aus der Tatsache, daß $\lim_{y\to\pm\infty} \phi = \pm\frac{\pi}{2}$ lokal gleichmäßig in x, also $\lim_{y\to\pm\infty}(-y\phi) = -\infty$, und daß

$$\lim_{y\to\pm\infty}\left(1 + \left(x - \frac{1}{2}\right)\frac{\log r}{y}\right) = 1,$$

wieder lokal gleichmäßig in x.

Mit einem ähnlichen Vorgehen wie im Beweis der Proposition folgt aus Lemma 4.15, daß $H(z)$ im Vertikalstreifen, in dem $2 \leq x \leq 3$ gilt, beschränkt ist. Aus Stetigkeitsgründen folgt, daß $e^{H(z)}$ dort ebenso beschränkt ist. Damit ist insgesamt $h(z)$ dort beschränkt. $\square$

Satz 4.18 (Stirlingsche Formel)**.** *Mit*

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(z + n + \frac{1}{2}\right) \log\left(1 + \frac{1}{z+n}\right) - 1 \right)$$

gilt

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi} z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} e^{H(z)}$$

für alle z in der negativ geschlitzten Ebene G. In jedem Winkelbereich

$$W = \{re^{i\phi} \mid -\pi + \delta \leq \phi \leq \pi - \delta\}$$

mit $0 < \delta \leq \pi$ konvergiert $H(z)$ für $z \to \infty$ gegen 0.

Beweis. Wegen $H(z) - H(z+1) = H_0(z)$ und

$$h(z) = e^{(z-\frac{1}{2}) \log z - z + H(z)}$$

gilt

$$\begin{aligned} h(z+1) &= e^{(z+\frac{1}{2}) \log(z+1) - z - 1 + H(z) - H_0(z)} \\ &= e^{(z+\frac{1}{2}) \log z - z + H(z)} \\ &= zh(z). \end{aligned}$$

Die Funktion $h(z+1)$ ist weiterhin auf dem Vertikalstreifen $\{z \mid 1 \leq x < 2\}$ beschränkt. Damit ist dort aber auch $h(z)$ wegen $|h(z)| = \frac{|h(z+1)|}{|z|} \leq |h(z+1)|$ beschränkt. Wir können damit den Wielandtschen Satz anwenden und erhalten, daß

$$\Gamma(z) = A \cdot h(z)$$

für eine noch zu bestimmende Konstante A. Dies können wir mit Hilfe der Legendreschen Relation

$$A \cdot h\left(\frac{n}{2}\right) \cdot h\left(\frac{n+1}{2}\right) = 2^{1-n} \sqrt{\pi} \cdot h(n)$$

mit $n > 0$ bestimmen. Umgeformt ergibt eine kurze Rechnung, daß

$$\sqrt{\pi} = A \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot 2^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} + H(\frac{n}{2}) + H(\frac{n+1}{2}) - H(n)}.$$

Wegen $\lim_{x\to\infty} H(x) = 0$ und

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} = \sqrt{e}$$

können wir $\sqrt{\pi} = A \cdot \sqrt{e} \cdot 2^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}}$, also

$$A = \sqrt{2\pi}$$

folgern. $\square$

Folgerung 4.19. *Es gilt die Asymptotik*

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\Big(\frac{n}{e}\Big)^n$$

für $n \to \infty$. *Genauer existiert für alle* $n \in \mathbf{N}_0$ *ein* $0 < \theta(n) < 1$, *so daß*

$$n! = \sqrt{2\pi n}\Big(\frac{n}{e}\Big)^n e^{\frac{\theta(n)}{12n}}.$$

Beweis. Sei $x > 0$ eine positive reelle Zahl. Mit $0 < y := \frac{1}{2x+1} < 1$ haben wir schon gesehen, daß

$$H_0(x) = y^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{2n}}{2n+3} > 0,$$

also

$$H_0(x) \leq \frac{1}{3} y^2 \sum_{n=0}^{\infty} y^{2n} = \frac{y^2}{3}\frac{1}{1-y^2} = \frac{1}{12x(x+1)} = \frac{1}{12}\Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\Big).$$

Es folgt

$$0 < H(x) < \frac{1}{12} \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1}\Big) = \frac{1}{12x}$$

und damit $H(x) = \frac{\theta}{12x}$ für ein $0 < \theta < 1$. Es folgt mit $x = n$, daß

$$n! = n\Gamma(n) = \sqrt{2\pi n}\Big(\frac{n}{e}\Big)^n e^{\frac{\theta}{12n}}.$$

□

Kapitel 5

Die Riemannsche Zeta-Funktion

5.1 Die Jacobische Theta-Reihe

Definition 5.1. Die *Jacobische Theta-Reihe* ist

$$\theta(z,\tau) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i(n^2\tau+2nz)},$$

wobei $z \in \mathbf{C}$ eine komplexe Variable und $\tau \in \mathbf{H} = \{\omega \mid \Im\omega > 0\}$ eine Variable in der oberen Halbebene ist, die *modulare Variable.*

Proposition 5.2. *Die Jacobische Theta-Reihe $\theta(z,\tau)$ konvergiert kompakt absolut auf $\mathbf{C}\times\mathbf{H}$. Damit stellt $\theta(z,\tau)$ für festes $\tau \in \mathbf{H}$ eine ganze Funktion in z und für festes $z \in \mathbf{C}$ eine holomorphe Funktion auf $\mathbf{H}$ dar.*

Beweis. Mit v bezeichnen wir den Imaginärteil von τ, mit y den von z. Wir zeigen, daß die Reihe auf jeder Menge der $\{(z,\tau) \mid -y_0 \leq y \leq y_0, v \geq v_0\}$ mit $y_0, v_0 > 0$ gleichmäßig absolut konvergiert: Die Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |e^{\pi i(n^2\tau+2\pi z)}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi(n^2v+2ny)}.$$

wird von $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi(2ny_0-n^2v_0)}$ dominiert. Da $2ny_0 - n^2v_0 \leq -\frac{1}{2}n^2v_0$ bis auf endlich viele n, reicht es damit, die Konvergenz von

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{2}n^2v_0}$$

nachzuweisen. Die letzte Reihe ist aber Teilreihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}$, $q = e^{-\frac{\pi}{2}v_0} < 1$, der (absolut) konvergenten geometrischen Reihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{|n|}$. □

Satz 5.3 (Fourierdarstellung periodischer holomorpher Funktionen)**.** *Sei $f(z)$ eine holomorphe Funktion, welche auf einem* Parallelstreifen

$$G := \{z \mid y_0 < y < y_1\}$$

mit $-\infty \le y_0 < y_1 \le \infty$ definiert ist (wobei y wie üblich den Imaginärteil der komplexen Variable z bezeichnet). Ist dann $f(z)$ eine 1-periodische Funktion, das heißt $f(z+1) = f(z)$, so läßt sich $f(z)$ in eine auf G kompakt konvergente Fourierreihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$$

entwickeln. Für jedes $y \in (y_0, y_1)$ sind die Fourierkoeffizienten *a_n durch*

$$a_n = \int_0^1 f(z) e^{-2\pi i n(x+iy)}\, dx$$

bestimmt.

Beweis. Die Abbildung $q(z) \coloneqq e^{2\pi i z}$ bildet das Gebiet G auf den Kreisring

$$K \coloneqq \{q \mid r < |q| < R\}$$

ab, wobei $r \coloneqq e^{-2\pi y_1}$ und $R \coloneqq e^{-2\pi y_0}$. Da $q(z) = q(z')$ genau dann gilt, wenn $z - z' \in \mathbf{Z}$, gibt es wegen der 1-Periodizität von $f(z)$ genau eine Funktion $g\colon K \to \mathbf{C}$ mit

$$g(e^{2\pi i z}) = f(z)$$

für $z \in G$. Entwickeln wir die Funktion $g(q)$ in eine Laurentreihe um 0, so erhalten wir

$$g(q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n q^n,$$

wobei die a_n eindeutig durch

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|q|=\rho} \frac{g(q)}{q^{n+1}}\, dq = \int_0^1 \frac{g(\rho \cdot e^{2\pi i x})}{\rho^n \cdot e^{2\pi i n x}}\, dx$$

mit $\rho \in (r, R)$ bestimmt sind. Schreiben wir $\rho = e^{-2\pi y}$, $y \in (y_0, y_1)$, so erhalten wir

$$a_n = \int_0^1 f(x+iy) e^{-2\pi i n(x+iy)}\, dx.$$

□

Satz 5.4. *Die Jacobische Theta-Funktion genügt den folgenden Transformationsformeln*

$$\theta(z, \tau + 2) = \theta(z, \tau)$$

und

$$\theta\left(z, -\frac{1}{\tau}\right) = e^{\pi i z^2 \tau} \sqrt{\frac{\tau}{i}}\, \theta(z\tau, \tau)$$

in der modularen Variable τ, wobei die Wurzel den Zweig mit $\sqrt{1} = 1$ bezeichnet.

Beweis. Die erste Transformationseigenschaft ist sicherlich wahr, wie die Rechnung

$$\theta(z, \tau + 2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i (n^2(\tau+2) + 2nz)} = \sum_{n=-\infty^{\infty}} e^{2\pi i n^2} \cdot e^{\pi i (n^2 \tau + 2nz)} = \theta(z, \tau)$$

zeigt. Die zweite Transformationseigenschaft ist weit weniger trivial. Wir schreiben dazu zunächst

$$f(z) := e^{\pi i z^2 \tau}\,\theta(z\tau,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i z^2\tau + 2\pi i n z\tau + \pi i n^2\tau} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i (n+z)^2\tau}.$$

Die rechte Seite ist sicherlich 1-periodisch in z, so daß eine Fourierentwicklung

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{2\pi m z}$$

mit

$$a_m = \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i (n+z)^2\tau - 2\pi i m z}\,dx$$

existiert, wobei wir den Imaginärteil y von $z = x + iy$ beliebig wählen können.

Wegen der lokal gleichmäßigen absoluten Konvergenz der Reihe dürfen wir die Reihe aus dem Integral ziehen und erhalten

$$a_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 e^{\pi i (n+z)^2\tau - 2\pi i m z}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i z^2\tau - 2\pi i m z}\,dx,$$

wobei wir im Integral z durch $z - n$ substituiert haben und $e^{2\pi i m(z-n)} = e^{2\pi i m z}$ ausgenutzt haben.

Quadratische Ergänzung liefert weiter

$$a_m = e^{-\pi i \frac{m^2}{\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i m z^2\tau - 2\pi i m z + \pi i \frac{m^2}{\tau}}\,dx = e^{-\pi i \frac{m^2}{\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i \tau (z - \frac{m}{\tau})^2}\,dx.$$

Der Imaginärteil y von z ist für jedes m frei wählbar, das heißt wir können annehmen, daß $z - \frac{m}{\tau}$ eine reelle Zahl ist. Eine weitere Substitution von x durch $x + \Re\frac{m}{\tau}$ liefert dann

$$a_m = e^{-\pi i \frac{m^2}{\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i \tau x^2}\,dx.$$

Im nächsten Schritt wollen wir das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i \tau x^2}$ berechnen, und zwar wollen wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i \tau x^2} = \sqrt{\frac{\tau}{i}}^{-1}$$

zeigen. Beiden Seiten der Gleichung sind holomorph in $\tau \in \mathbf{H}$, nach dem Identitätssatz reicht es also, die Gleichung für $\tau = iv$ mit $v > 0$ zu beweisen: In diesem Falle ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i \tau x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi v x^2}\,dx = \sqrt{\frac{\tau}{i}}^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2}\,dt$$

mit der Substitution $t = \sqrt{y}\,x$. Das Integral auf der rechten Seite hat aber den aus der Analysis bekannten Wert

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2}\,dt = 1.$$

Wir haben damit

$$a_m = e^{-\pi i \frac{m^2}{\tau}} \sqrt{\frac{\tau}{i}}^{-1},$$

also

$$f(z) = \sqrt{\frac{\tau}{i}}^{-1} \sum_{m-\infty}^{\infty} e^{-\pi i \frac{m^2}{\tau} + 2\pi i m z} = \sqrt{\frac{\tau}{i}}^{-1} \theta(z, -\frac{1}{\tau}). \qquad \square$$

5.2 Die Funktionalgleichung der Riemannschen Zeta-Funktion

Satz 5.5 (Riemannsche Funktionalgleichung)**.** *Die meromorphe Funktion*

$$\xi(s) := \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big) \zeta(s),$$

$\sigma > 0$*, läßt sich zu einer meromorphen Funktion* $\xi(s)$ *auf* $\mathbf{C}$ *fortsetzen. Ihre einzigen Pole sind einfache Pole bei* $s = 0$ *und* $s = 1$*, und sie genügt der Funktionalgleichung*

$$\xi(s) = \xi(1-s)$$

für alle s*.*

Beweis. Es reicht, die Funktionalgleichung für $\sigma > 0$ nachzurechnen, denn mit ihrer Hilfe können wir ξ auf $\sigma < \frac{1}{2}$ durch die Werte für $\sigma > \frac{1}{2}$ fortsetzen. Für $\sigma > \frac{1}{2}$ hat $\xi(s)$ genau einen Pol, nämlich einen einfach bei $s = 1$, der vom entsprechenden Pol der Riemannschen Zeta-Funktion herrührt. Aus der Funktionalgleichung folgt dann, daß $\xi(s)$ einen weiteren Pol, ebenfalls erster Ordnung, bei $s = 0$ hat.

Um die Funktionalgleichung für $\sigma > 0$ zu beweisen, schauen wir uns zunächst den Gamma-Faktor an. Die Substitution $t = \pi n^2 x$ liefert

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) n^{-s} = \pi^{-\frac{s}{2}} n^{-s} \int_0^\infty t^{\frac{s}{2}} e^{-t} \frac{dt}{t} = \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}} e^{-\pi n^2 x} \frac{dx}{x}.$$

Sei für einen Moment $\sigma > 1$. Summieren wir die Gleichung dann über alle $n \in \mathbf{N}$, so erhalten wir

$$\xi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}} e^{-\pi n^2 x} \frac{dx}{x} = \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x} \frac{dx}{x},$$

wobei die Reihe aufgrund lokal gleichmäßiger absoluter Konvergenz in das Integral gezogen werden darf.

Setzen wir $\omega(x) = \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 x} = \frac{\theta(0,ix)-1}{2}$, so gilt nach der Theta-Transformationsformel, daß

$$\omega\Big(\frac{1}{x}\Big) = \frac{\theta(0, -\frac{1}{ix}) - 1}{2} = \frac{\sqrt{x} \cdot \theta(0, ix) - 1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{x}}{2} + \sqrt{x} \cdot \omega(x).$$

Damit haben wir

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^{\frac{s}{2}}\omega(x)\,\frac{dx}{x} &= \int_1^\infty x^{-\frac{s}{2}}\omega\Big(\frac{1}{x}\Big)\,\frac{dx}{x} \\
&= \int_1^\infty x^{-\frac{s}{2}}\Big(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{x}}{2}+\sqrt{x}\cdot\omega(x)\Big)\,\frac{dx}{x} \\
&= -\frac{1}{s}+\frac{1}{s-1}+\int_1^\infty x^{\frac{1-s}{2}}\omega(x)\,\frac{dx}{x}.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\xi(s) &= \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}}\omega(x)\,\frac{dx}{x} \\
&= \int_0^1 x^{\frac{s}{2}}\omega(x)\,\frac{dx}{x}+\int_1^\infty x^{\frac{s}{2}}\omega(x)\,\frac{dx}{x} \\
&= -\frac{1}{s(s-1)}+\int_1^\infty \Big(x^{\frac{s}{2}}+x^{\frac{1-s}{2}}\Big)\omega(x)\,\frac{dx}{x}.
\end{aligned}$$

Die Integral auf der rechten Seite ist für alle $s \in \mathbf{C}$ definiert, da $\omega(x)$ schnell genug für $x \to \infty$ abfällt. Die rechte Seite stellt also eine meromorphe Funktion auf $\mathbf{C}$ dar. Nach dem Identitätssatz gilt die Gleichheit beider Seiten daher insbesondere auch für $\sigma > 0$. Die Funktionalgleichung für $\xi(s)$ folgt, denn die rechte Seite ist offensichtlich symmetrisch in der Vertauschung von s mit $1-s$. □

Folgerung 5.6. *Die Riemannsche Zeta-Funktion besitzt eine meromorphe Fortsetzung $\zeta(s)$ auf $\mathbf{C}$. Ihr einziger Pol ist ein einfacher Pol bei $s=1$. Außerhalb des* kritischen Streifens $0<\sigma<1$ *sind ihre einzigen Nullstellen bei $s=-2$, -4, -6, …, die* trivialen Nullstellen. *Sie genügt der Funktionalgleichung*

$$\zeta(s) = 2^s\pi^{s-1}\Gamma(1-s)\sin\Big(\frac{\pi s}{2}\Big)\,\zeta(1-s).$$

Beweis. Die meromorphe Fortsetzung der Riemannschen Zeta-Funktion auf $\mathbf{C}$ ist durch

$$\zeta(s) = \frac{\xi(s)}{\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})}$$

gegeben.

Die Funktionalgleichung der Riemannschen Zeta-Funktion folgt aus der der Funktion $\xi(s)$: Zunächst ist

$$\zeta(s) = \frac{\xi(s)}{\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} = \frac{\xi(1-s)}{\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} = \frac{\pi^{s-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}.$$

Anwendung der Eulerschen Ergänzungsformel für die Gamma-Term im Nenner liefert dann

$$\zeta(s) = \pi^{s-\frac{3}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}+1\right)\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(1-s).$$

Schließlich liefert die Anwendung der Legendreschen Relation, daß

$$\zeta(s) = 2^s\pi^{s-1}\Gamma(1-s)\sin\Big(\frac{\pi s}{2}\Big)\,\zeta(1-s).$$

Diese Funktionalgleichung erlaubt uns, die Werte von $\zeta(s)$ für $\sigma \leq 0$ aus denen von $\sigma \geq 1$ zu bestimmen: Da $\Gamma(1) = 0$ und der Pol von $\zeta(s)$ bei $s = 1$ von erster Ordnung ist, hat $\zeta(s)$ für $\sigma \leq 0$ keinen Pol. Da weiter $\Gamma(s)$ für $\sigma \geq 1$ keine weitere Nullstelle hat und ebenso $\zeta(s)$ für $\sigma \geq 1$ keine Nullstelle besitzt, hat $\zeta(s)$ für $s \leq 0$ genau die Nullstellen von $\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)$, also $s = -2, -4, -6, \ldots$. □

5.3 Die Bernoullischen Zahlen und Werte der Riemannschen Zeta-Funktion

Definition 5.7 (Bernoullische Zahlen)**.** Die *Bernoullischen Zahlen* B_0, B_1, B_2, ... sind durch die Taylorkoeffizienten einer ganzen Funktion gegeben:

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}.$$

Beispiel 5.8. Es gilt $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_5 = 0$, $B_6 = \frac{1}{42}$, ...

Proposition 5.9 (Taylorentwicklung des Kotangens)**.** *Der Kotangens erlaubt folgende Taylorreihenentwicklung um* 0*:*

$$\pi z \cot(\pi z) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{(2\pi i z)^n}{n!}.$$

Beweis. Nach Definition des Kotangens gilt

$$\pi z \cot(\pi z) = \pi z \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \pi i z \frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} = \pi i z + \frac{2\pi i z}{e^{2\pi i z} - 1}.$$

Nach Definition der Bernoullischen Zahlen haben wir also

$$\pi z \cot(\pi z) = \pi i z + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{(2\pi i z)^n}{n!}.$$

Da $B_0 = 1$ und $B_1 = -\frac{1}{2}$, folgt schließlich

$$\pi z \cot(\pi z) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{(2\pi i z)^n}{n!}.$$ □

Lemma 5.10. *In einer Umgebung um den Nullpunkt gilt*

$$\pi z \cot(\pi z) = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \zeta(2k) z^{2k}.$$

Beweis. Die Partialbruchzerlegung des Kotangens liefert

$$\begin{aligned}
\pi z \cot(\pi z) &= 1 + \sum_{|n|=1}^{\infty} \Big(\frac{z}{z-n} + \frac{z}{n} \Big) \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{z}{z-n} + \frac{z}{z+n} \Big) \\
&= 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{n^2 - z^2} \\
&= 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{2k}}{n^{2k}}.
\end{aligned}$$

Da die Doppelreihe absolut konvergiert, dürfen wir die Summation vertauschen und erhalten

$$\pi z \cot(\pi z) = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2k}}{n^{2k}} = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \zeta(2k) z^{2k}. \qquad \square$$

Satz 5.11. *Für jede natürliche Zahl $n > 1$ gilt*

$$\zeta(2n) = (-1)^{n-1} \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} B_{2n}.$$

Beweis. Der Satz folgt durch Koeffizientenvergleich aus der vorhergehenden Proposition und dem vorhergehenden Lemma. $\square$

Beispiel 5.12. Es ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}, \quad \ldots$$

Folgerung 5.13. *Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 0$ gilt*

$$B_n = -n\zeta(1-n).$$

Beweis. Sei $k \geq 1$ eine natürliche Zahl. Nach der Funktionalgleichung der Riemannschen Zeta-Funktion ist

$$\zeta(1-2k) = 2^{1-2k} \pi^{-2k} \cdot \Gamma(2k) \cdot \sin\Big(\frac{\pi(1-2k)}{2} \Big) \cdot \zeta(2k) = -\frac{B_{2k}}{2k},$$

womit die Aussage für alle geraden n mit $n \geq 2$ bewiesen ist. Für ungerades $n > 1$ ist $\zeta(1-n) = 0$. Auf der anderen Seite folgt aus der Taylorreihenentwicklung des Kotangens und der Tatsache, daß $\pi z \cot(\pi z)$ eine gerade Funktion ist, daß B_n für ungerades $n > 1$ ebenfalls verschwindet.

Es bleibt damit, $\zeta(0) = -B_1 = -\frac{1}{2}$ zu zeigen. Dazu bestimmen wir das Residuum beider Seiten der Funktionalgleichung der Riemannschen Zeta-Funktion an der Stelle $s = 1$ und erhalten

$$\operatorname{Res}_{s=1} \zeta(s) = 2 \sin\Big(\frac{\pi}{2} \Big) \zeta(0) \cdot \operatorname{Res}_{s=1} \Gamma(1-s).$$

Da $\operatorname{Res}_{s=1} \zeta(s) = 1$ und $\operatorname{Res}_{s=1} \Gamma(1-s) = -\operatorname{Res}_{s=0} \Gamma(s) = -1$, haben wir $1 = -2\zeta(0)$, also $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$. $\square$

Kapitel 6

Elliptische Funktionen

6.1 Die modulare Gruppe

Proposition 6.1. *Die Gruppe* $\mathrm{SL}(\mathbf{R}, 2)$ *operiert vermöge*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \tau := \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

auf der oberen Halbebene $\mathbf{H}$*. Die Gruppe der biholomorphen Abbildungen von* $\mathbf{H}$ *auf sich selbst ist der Quotient* $\mathrm{PSL}(\mathbf{R}, 2)$ *der Gruppe nach ihrem Zentrum, gegeben durch die Matrizen* $\pm\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$*.*

Beweis. Für jedes $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ und τ ist

$$\Im(A\tau) = \frac{\Im(\tau)}{|c\tau + d|^2},$$

also wieder $A\tau \in \mathbf{H}$. Dies zeigt, daß die Operation wohldefiniert ist. Daß eine Gruppenoperation vorliegt, zeigt eine explizite Rechnung.

Die Aussage über die Automorphismengruppe von $\mathbf{H}$ läßt sich vermöge der biholomorphen Abbildung $\tau \to \frac{\tau - i}{\tau + i}$ von $\mathbf{H}$ auf $\mathbf{E}$ auf die durch das Schwarzsche Lemma bekannte Automorphismen bekannte Automorphismengruppe der Einheitskreisscheibe $\mathbf{E}$ zurückführen. □

Definition 6.2. Die *modulare Gruppe* Γ ist das Bild von $\mathrm{SL}(\mathbf{Z}, 2)$ in der Automorphismengruppe $\mathrm{PSL}(\mathbf{R}, 2)$ von $\mathbf{H}$.

Proposition 6.3. *Die modulare Gruppe* Γ *wird von den biholomorphen Abbildungen*

$$\tau \mapsto \tau + 1$$

und

$$\tau \mapsto -\frac{1}{\tau}$$

erzeugt.

Beweis. Die Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ erzeugen die $\mathrm{SL}(\mathbf{Z}, 2)$. □

Lemma 6.4. *Sei*

$$D := \left\{\tau \in \mathbf{H} \mid |\tau| \geq 1, |\Re(\tau)| \leq \frac{1}{2}\right\}.$$

Jedes Kompaktum in **H** *wird durch endliche viele Bilder von D unter Elementen $\gamma \in \Gamma$ überdeckt.*

Beweis. Sei zunächst $\tau \in \mathbf{H}$ beliebig. Da für ein $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ gilt, daß

$$\Im(\gamma\tau) = \frac{\tau}{|c\tau + d|^2},$$

und jeweils nur endlich viele c, d existieren, so daß $|c\tau+d|^2$ unter einer gegebenen Schranke liegt, existiert ein $\gamma \in \Gamma$, so daß

$$\Im(\gamma\tau)$$

sein Maximum annimmt. Da Translation in horizontaler Richtung am Imaginärteil nichts ändern, können wir ohne Einschränkung annehmen, daß $|\Re(\gamma\tau)| \leq \frac{1}{2}$. Wäre jetzt $|\tau'| < 1$ mit $\tau' := \gamma\tau$, so wäre $\Im(-\frac{1}{\tau'}) = \frac{\Im(\tau)}{|\tau|^2} > \Im(\tau')$, ein Widerspruch zur Wahl von γ. Damit liegt $\tau' \in D$, so daß wir gezeigt haben, daß die γD, $\gamma \in \Gamma$ ganz **H** überdecken.

Schließlich bemerken wir, daß jeder Punkt τ in D eine offene Umgebung $U(\tau)$ besitzt, die nur durch endlich viele γD überdeckt wird. Die $\gamma U(\tau)$, $\gamma \in \Gamma$ bilden eine offene Überdeckung von **H**, das für jede kompakte Menge K in **H** gibt es eine endliche Teilüberdeckung der $\gamma U(\tau)$, welche jeweils wiederum durch endliche viele Bilder von D unter den Elementen in Γ überdeckt werden. $\square$

6.2 Eigenschaften elliptischer Funktionen

Definition 6.5. Eine *elliptische Funktion* zur modularen Variable $\tau \in \mathbf{H}$ (oder zum Gitter $\Lambda := \mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau$) ist eine meromorphe Funktion $f(z)$ in der komplexen Variable $z \in \mathbf{C}$, welche bezüglich 1 und τ doppelt-periodisch ist, das heißt $f(z) = f(z+1)$ und $f(z+\tau) = f(z)$.

Definition 6.6. Der *Grad einer elliptischen Funktion* $f(z)$ ist die Anzahl ihrer Polstellen mit Vielfachheiten modulo Λ, das heißt

$$-\sum_a \nu_{z=a}(f(z)),$$

wobei die Summe ein Repräsentantensystem der Polstellen modulo Λ durchläuft.

Beispiel 6.7. Eine elliptische Funktion vom Grade 0 ist holomorph und ist nach dem Liouvilleschen Satze damit eine Konstante.

Proposition 6.8. *Sei $f(z)$ eine elliptische Funktion. Dann gilt*

$$\sum_a \operatorname{Res}_{z=a} f(z) = 0,$$

wobei die Summe ein Repräsentantensystem (der Polstellen) modulo Λ durchläuft.

Beweis. Sei $z_0 \in \mathbf{C}$, und sei A das Parallelogramm mit den Ecken z_0, $z_0 + 1$, $z_0 + 1 + \tau$, $z_0 + \tau$. Sei $\gamma = \partial A$ die Randkurve, die diese Ecken genau in dieser Reihenfolge durchläuft. Da die Spur von γ kompakt ist und die Polstellen von $f(z)$ isoliert sind, können wir z_0 so wählen, daß γ keine Polstelle von $f(z)$ trifft. Nach dem Residuensatz gilt dann

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z)\, dz = \sum_a \operatorname{Res}_{z=a} f(z).$$

Aufgrund der Periodizität von $f(z)$ verschwindet aber das Integral auf der linken Seite, da sich jeweils die Beiträge der gegenüberliegenden Seiten von A aufheben. □

Beispiel 6.9. Es gibt keine elliptischen Funktionen vom Grade 1.

Folgerung 6.10. *Ist $f(z)$ eine elliptische Funktion, so gilt*

$$\sum_a \nu_{z=a}(f(z)) = 0,$$

wobei die Summe ein Repräsentantensystem modulo Λ durchläuft, das heißt mit Vielfachheiten hat jede elliptische Funktion modulo Λ gleich viele Null- wie Polstellen.

Beweis. Wir wenden die Proposition auf die elliptische Funktion $\frac{f'(z)}{f(z)}$ an und erinnern uns an das Null- und Polstellen zählende Integral. □

Proposition 6.11. *Für jedes τ hat die Jacobische Thetareihe $\theta(z, \tau)$ nur einfache Nullstellen und zwar bei allen Punkten des Gitters $\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2} + \Lambda$.*

Beweis. Die Jacobische Theta-Reihe $\theta(z, \tau)$ erfüllt

$$\theta(z + 1, \tau) = \theta(z)$$

und

$$\theta(z + \tau, \tau) = e^{-\pi i(\tau + 2z)} \theta(z, \tau)$$

wie eine kurze Rechnung zeigt. (Wir sagen auch, $\theta(z, \tau)$ sei *quasi-elliptisch in z*.) Sei $z_0 \in \mathbf{C}$, und sei A das Parallelogramm mit den Ecken z_0, $z_0 + 1$, $z_0 + 1 + \tau$, $z_0 + \tau$. Sei $\gamma = \partial A$ die Randkurve, die diese Ecken genau in dieser Reihenfolge durchläuft. Dann liefert das Null- und Polstellen zählende Integral wegen der Quasi-Elliptizität, daß

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{\theta'(z, \tau)}{\theta(z, \tau)}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{z_0 + \tau}^{z_0 + \tau + 1} 2\pi i\, dz = 1,$$

wobei der Strich bei $\theta'(z, \tau)$ für die partielle Ableitung nach z steht. Da $\theta(z, \tau)$ als ganze Funktion keine Polstellen hat, besitzt $\theta(z, \tau)$ modulo Λ damit genau eine Nullstelle z_1. Wir behaupten, daß diese gerade bei $\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}$ liegt:

$$\begin{aligned}\theta\Big(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}, \tau\Big) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i(n^2\tau + n\tau + n)} \\ &= e^{-\pi i\frac{\tau}{4}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i(\tau(n+\frac{1}{2})^2 + n)} \\ &= e^{-\pi i\frac{\tau}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{\pi i(\tau(n+\frac{1}{2})^2)}(e^{\pi i n} + e^{-\pi i(n+1)}) \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

Satz 6.12. *Seien $a_1, \ldots, a_k$ und $b_1, \ldots, b_k$ Punkte in $\mathbf{C}$ modulo Λ. Dann existiert genau dann eine elliptische Funktion, deren Nullstellen mit Vielfachheiten gerade die $a_1, \ldots, a_k$ modulo Λ sind und deren Polstellen mit Vielfachen gerade die $b_1, \ldots, b_k$ modulo Λ sind, wenn*

$$\sum_i a_i = \sum_i b_i$$

modulo Λ.

Beweis. Existiere zunächst eine elliptische Funktion $f(z)$, deren Null- und Polstellen modulo Λ mit Vielfachheit gerade $a_1, \ldots, a_k$ bzw. $b_1, \ldots, b_k$ sind. Sei $z_0 \in \mathbf{C}$, und sei A das Parallelogramm mit den Ecken z_0, $z_0 + 1$, $z_0 + 1 + \tau$, $z_0 + \tau$. Sei $\gamma = \partial A$ die Randkurve, die diese Ecken genau in dieser Reihenfolge durchläuft. Dann können wir annehmen, daß jeweils a_i, $b_i \in A$. Da die Spur von γ kompakt ist, können wir sogar annehmen, daß die a_i und b_i im Inneren von A liegen. Nach dem Residuensatz ist

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma z\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{p\in A} p\,\mathrm{Res}_{z=p} \frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_i a_i - \sum_i b_i.$$

Auf der anderen Seite folgt aus der Elliptizität von $f(z)$ und damit der von $\frac{f'(z)}{f(z)}$, daß

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma z\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{z_0+1}^{z_0+\tau+1} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz - \tau\int_{z_0}^{z_0+1} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz\right) = m + n\tau$$

für gewisse m, $n \in \mathbf{Z}$, also $\sum_i a_i - \sum_i b_i \in \Lambda$.

Seien umgekehrt a_i und b_i mit $\sum_i a_i - \sum_i b_i \in \Lambda$ gegeben, etwa $\sum_i a_i - \sum_i b_i = m + n\tau$ für m, $n \in \mathbf{Z}$. Wir haben eine elliptische Funktion zu diesen Null- bzw. Polstellen zu konstruieren. Wir setzen

$$g(z) := \frac{\prod_i \theta(z - a_i - \frac{1}{2} - \frac{\tau}{2})}{\prod_j \theta(z - b_i - \frac{1}{2} - \frac{\tau}{2})}.$$

Nach dem Lemma hat diese genau die gesuchten Null- und Polstellen. Weiter ist offensichlich $g(z+1) = g(z)$. Außerdem gilt

$$g(z+\tau) = e^{2\pi i(\sum_i a_i - \sum_i b_i)} g(z) = e^{2\pi i n\tau} g(z)$$

wegen $\theta(z+\tau, z) = e^{-\pi i(\tau+2z)}\theta(z,\tau)$. Damit ist

$$f(z) = e^{-2\pi i n z} g(z)$$

eine elliptische Funktion. Da diese außerdem dieselben Pol- und Nullstellen wie $g(z)$ hat, sind wir fertig. □

6.3 Die Weierstraßsche $\wp$-Funktion

Lemma 6.13. *Sei $\tau \in \mathbf{H}$. Dann konvergiert die Reihe*

$$\sum_{\omega \in \Lambda'} \frac{1}{\omega^s}$$

auf der offenen Halbebene $\sigma > 2$ kompakt absolut, wobei $\Lambda' := \Lambda \setminus \{0\}$ und

$$\Lambda := \{m + n\tau \mid m, n \in \mathbf{Z}\}.$$

Beweis. Die Reihe $\sum_{\omega\in\Lambda'} \frac{1}{|\omega|^\sigma}$ mit $\sigma \geq \sigma_0$ wird bis auf eine Konstante durch das Integral

$$\iint_K \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{\sigma_0}{2}}}\, dxdy$$

majorisiert, wobei $K = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \geq r_0\}$ mit geeignetem $r_0 > 0$. Umrechnung in Polarkoordinaten liefert

$$\iint_K \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{\sigma_0}{2}}} = \int_0^{2\pi}\int_{r_0}^{\infty} r^{1-\sigma_0}\, drd\phi = 2\pi \int_{r_0}^{\infty} r^{1-\sigma_0}\, dr,$$

und das Integral auf der rechten Seite konvergiert für $\sigma_0 > 2$. □

Proposition 6.14. *Die* Weierstraßsche $\wp$-Funktion

$$\wp(z,\tau) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in\Lambda'} \Big(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\Big)$$

konvergiert kompakt absolut auf $\{(z,\tau) \mid z \notin \Lambda\}$ und stellt für alle $\tau \in \mathbf{H}$ eine elliptische Funktion in z zur modularen Variable τ dar. Ihre einzigen Pole in z sind Pole doppelter Ordnung bei allen $\omega \in \Lambda$.

Beweis. Sei $r > 0$. Für $|z| \leq \frac{r}{2}$ und $\omega > r$ gilt dann

$$\Big|\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\Big| = \Big|\frac{2\omega z - z^2}{\omega^2(z-\omega)^2}\Big| = \Big|\frac{z(2-\frac{z}{\omega})}{\omega^3(1-\frac{z}{\omega})^2}\Big| \leq \frac{5r}{|\omega|^3}.$$

Für

$$\tau \in D = \Big\{\tau \in \mathbf{H} \mid |\tau| \geq 1, |\Re(\tau)| \leq \frac{1}{2}\Big\}$$

gilt weiter

$$|m+n\tau|^2 = m^2\tau\overline{\tau} + 2mn\Re(\tau) + n^2 \geq m^2 - mn + n^2 = |m\rho - n|^2.$$

mit $\rho := e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Bis auf einen meromorphen Anfangsterm wird die Reihe der Absolutglieder von $\wp(z,\tau)$ auf $|z| \le \frac{r}{2}$ und $\tau \in D$ damit durch

$$\sum_{m,n \in \mathbf{Z}, (m,n) \neq 0, |m+n\tau| > r} \frac{5r}{|\omega|^3} \le 5r \sum_{m,n \in \mathbf{Z}, (m,n) \neq 0} \frac{1}{|m\rho - n|^3}$$

majorisiert. Die rechte Seite ist nach dem Lemma aber konvergent. Es folgt, daß $\wp(z,\tau)$ auf $\{(z,\tau) \in \mathbf{C} \times D \mid z \notin \Lambda\}$ kompakt absolut konvergiert.

Schreiben wir für den Moment $\Lambda(\tau)$ für Λ, so gilt offensichtlich $\Lambda(\tau+1) = \Lambda(\tau)$ und $\Lambda(-\frac{1}{\tau}) = -\frac{1}{\tau}\Lambda(\tau)$. Damit gilt

$$\wp(z, \tau+1) = \wp(z,\tau)$$

und

$$\wp\Big(z, -\frac{1}{\tau}\Big) = \tau^2 \wp(\tau z, \tau).$$

Damit folgt die Aussage für allgemeine $\tau \in \mathbf{H}$ aus Lemma 6.4.

Die Aussagen über die Polstellen folgen wie beim Mittag-Lefflerschen Satz. Es bleibt damit zu zeigen, daß die so definierte Funktion $\wp(z,\tau)$ in z eine elliptische Funktion ist. Dazu betrachten wir ihre Ableitung

$$f(z) = \frac{\partial}{\partial z}\wp(z,\tau) = -2 \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z-\omega)^3}.$$

Für diese gilt offensichtlich $f(z+\lambda) = f(z)$ für alle $\lambda \in \Lambda$. Damit muß $\wp(z+\lambda,\tau) = \wp(z,\tau) + c$ für eine von z unabhängige Konstante c gelten. Da $\wp(z,\tau)$ nach Definition aber eine gerade Funktion in z ist, das heißt $\wp(z,\tau) = \wp(-z,\tau)$, folgt mit $z = -\frac{\lambda}{2}$, daß

$$c = \wp\Big(\frac{\lambda}{2}\Big) - \wp\Big(-\frac{\lambda}{2}\Big) = 0. \qquad \square$$

Folgerung 6.15. *Die Ableitung*

$$\wp'(z,\tau) := \frac{\partial}{\partial z}\wp(z,\tau) = -2 \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z-\omega)^3}$$

ist ebenfalls eine elliptische Funktion in z zur modularen Variablen τ. $\square$

Proposition 6.16. *Für jedes $\tau \in \mathbf{H}$ ist die Laurentreihenentwicklung der Weierstraßschen $\wp$-Funktion um $z = 0$ durch*

$$\wp(z,\tau) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=2}^{\infty} (2k-1) G_{2k}(\tau) z^{2k-2}$$

gegeben, wobei die G_n für $n \ge 3$ die sogenannten Eisensteinschen Reihen

$$G_n(\tau) = \sum_{\omega \in \Lambda'} \frac{1}{\omega^n}$$

sind. (Offensichtlich ist $G_n = 0$ für ungerades n.)

Beweis. Wir führen zunächst die sogenannte *Weierstraßsche Zeta-Funktion* ein, welche durch
$$\zeta(z,\tau) = \frac{1}{z} + \sum_{\omega\in\Lambda'} \left(\frac{1}{z-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right)$$
definiert ist und deren Konvergenz sich zum Beispiel analog der der Weierstraßschen $\wp$-Funktion zeigen läßt. Eine kurze Rechnung zeigt, daß

$$\wp(z,\tau) = -\zeta'(z,\tau),$$

wobei der Strich wieder für die Ableitung nach der komplexen Variablen z steht. Außerdem zeigt Entwicklung in eine geometrische Reihe, daß

$$\zeta(z,\tau) = \frac{1}{z} - \sum_{\omega\in\Lambda'} \sum_{n\geq 3} \frac{z^{n-1}}{\omega^n}.$$

Aufgrund absoluter Konvergenz dürfen wir die Summationen vertauschen und erhalten
$$\zeta(z,\tau) = \frac{1}{z} - \sum_{n\geq 3} G_n(\tau) z^{n-1},$$
woraus sich durch Ableiten die zu beweisende Aussage über die Weierstraßsche $\wp$-Funktion ergibt. □

Proposition 6.17. *Die Weierstraßsche $\wp$-Funktion erfüllt die Differentialgleichung*
$$\wp'(z,\tau)^2 = 4\wp(z,\tau)^3 - g_2(\tau)\wp(z,\tau) - g_3(\tau)$$
mit $g_2(\tau) := 60G_4(\tau)$ und $g_3(\tau) := 140G_6(\tau)$.

Beweis. Aus Notationsgründen unterdrücken wir im folgenden die modulare Variable τ. Aus der Laurentreihenentwicklung für die Weierstraßsche $\wp$-Funktion folgt

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + 3G_4 z^2 + 5G_6 z^4 + \cdots$$

und

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + 6G_4 z + 20G_6 z^3 + \cdots .$$

Also ist

$$\begin{aligned} \wp'^2(z) &= \frac{4}{z^6} - \frac{24G_4}{z^2} - 80G_6 + \cdots , \\ \wp^3(z) &= \frac{1}{z^6} + \frac{9G_4}{z^2} + 15G_6 + \cdots \end{aligned}$$

und damit

$$\wp'^2(z) - 4\wp^3(z) = -\frac{60G_4}{z^2} - 140G_6 + \cdots .$$

Insgesamt ergibt sich also

$$\wp'^2(z) - 4\wp^3(z) + 60G_4\wp(u) = -140G_6 + \cdots ,$$

wobei die Punkte für positive Potenzen in z stehen. Die Funktion auf der rechten Seite hat bei 0 keinen Pol, denn sie ist durch eine Potenzreihe gegeben. Damit hat die linke Seite, welche offensichtlich eine elliptische Funktion darstellt, bei 0 ebenfalls keinen Pol und damit an allen Gitterpunkten von Λ ebenfalls nicht. Da ihre Summanden außerhalb von Λ keine Pole haben, ist sie damit eine ganze elliptische Funktion und nach dem Liouvilleschen Satze damit konstant, nämlich gleich $-140G_6$. □

Beispiel 6.18. Die Weierstraßsche $\wp$-Funktion $\wp(z,\tau)$ ist eine in z elliptische Funktion vom Grade 2. Ihre Ableitung $\wp'(z,\tau)$ ist eine elliptische Funktion vom Grade 3.

Lemma 6.19. *Sei $f(z)$ eine gerade elliptische Funktion. Dann gibt es genau eine rationale Funktion $R(z)$ mit $f(z) = R(\wp(z,\tau))$.*

Beweis. Sei $f(z)$ vom Grade r. Wir wählen eine Konstante c, so daß die elliptische Funktion $f(z) - c$ modulo Λ insgesamt r einfache Nullstellen $z_1, \ldots, z_r$ hat. Wir behaupten, daß $z_1 \neq -z_1$ modulo Λ. Andernfalls hätten wir nämlich, daß

$$f(z_1 + z) = f(-z_1 + z) = f(z_1 - z),$$

also $f'(z_1 + z) = -f'(z_1 - z)$, also $f'(z_1) = 0$, das heißt z_1 wäre eine doppelte Nullstelle von $f(z)$.

Da $f(z)$ gerade ist, ist also $-z_1$ modulo Λ eine weitere Nullstelle von $f(z)-c$, das heißt, wir können insgesamt $r = 2k$ schreiben und die Nullstellen von $f(z)-c$ in der Form

$$z_1, -z_1, z_2, -z_2, \ldots, z_k, -z_k$$

anordnen. Wählen wir ein weitere Konstante $c' \neq c$ mit den gleichen Eigenschaften, so bekommen wir analog Nullstellen

$$z_1', -z_1', z_2, -z_2', \ldots, z_k', -z_k'$$

von $f(z) - c'$. Damit hat

$$F(z) := \frac{f(z) - c}{f(z) - c'}$$

als Nullstellen genau die $\pm z_i$ und als Polstellen genau die $\pm z_i'$.

Da $\wp(z,\tau)$ vom Grade 2 ist, hat die gleichen Null- und Polstellen aber auch die Funktion

$$Q(z) := \frac{(\wp(z) - \wp(z_1)) \cdots (\wp(z) - \wp(z_k))}{(\wp(z) - \wp(z_1')) \cdots (\wp(z) - \wp(z_k'))},$$

so daß $F(z) = CQ(z)$ für eine holomorphe elliptische Funktion C, das heißt für eine Konstante C. Lösen wir diese Gleichung nach $f(z)$ auf, erhalten wir die Existenzaussage der Behauptung.

Gäbe es zwei rationale Funktionen $R_i(z)$ mit $f(z) = R_i(\wp(z,\tau))$, so könnten wir daraus eine Relation der Form $P(\wp(z,\tau)) = 0$ mit einem nicht trivialen Polynom $P(z)$ von einem Grade n machen. Der Grad der linken Seite als elliptische Funktion ist dann $2n$, ein Widerspruch. □

Satz 6.20. *Sei $f(z)$ eine elliptische Funktion. Dann existiert eindeutige rationale Funktionen $R(z)$ und $S(z)$, so daß*

$$f(z) = R(\wp(z,\tau)) + \wp'(z,\tau) \cdot S(\wp(z,\tau)),$$

das heißt der Körper der elliptischen Funktionen ist durch

$$\mathbf{C}(\wp)[\wp']/(\wp'^2 - 4\wp^3 - g_2\wp - g_3)$$

gegeben.

Beweis. Es ist $\wp(z,\tau)$ eine gerade Funktion und $\wp'(z,\tau)$ eine ungerade Funktion, so daß der erste Summand in der gegebenen Darstellung gerade ist und der zweite ungerade ist. Ist also $f(z)$ eine gerade Funktion, so folgt der Satz sofort aus dem Lemma. Ist $f(z)$ ungerade, so ist $\frac{f(z)}{\wp'(z,\tau)}$ eine gerade elliptische Funktion, so daß der Satz wieder aus dem Lemma folgt.

Ist schließlich $f(z)$ eine beliebige elliptische Funktion, so können wir diese gemäß

$$f(z) = \frac{1}{2}(f(z) + f(-z)) + \frac{1}{2}(f(z) - f(-z))$$

eindeutig in einen geraden und in einen ungeraden Summanden zerlegen. □

Satz 6.21. *Durch*

$$\mathbf{C} \setminus \Lambda \to \mathbf{C}^2, z \mapsto (\wp(z,\tau), \wp'(z,\tau))$$

wird eine modulo Λ bijektive Abbildung auf die algebraische Menge

$$E \coloneqq \{(x,y) \in \mathbf{C}^2 \mid y^2 - 4x^3 - g_2(\tau)x - g_3(\tau) = 0\}$$

definiert.

Beweis. Daß das Bild in der angegebenen Menge liegt, folgt sofort aus der Differentialgleichung für die Weierstraßsche $\wp$-Funktion.

Ist $(x,y) \in E$, so hat die Gleichung $\wp(z,\tau) = x$ modulo Λ mit Vielfachheiten genau zwei Lösungen z_1 und z_2, denn $\wp(z,\tau) - x$ hat modulo Λ mit Vielfachheiten genau zwei Nullstellen, und zwar gilt $z_2 = -z_1$ modulo Λ. Für diese gilt $\wp'(z_1) = -\wp'(z_2)$. Da gleichzeitig $\wp'(z_i)^2 = 4\wp(z_i)^3 - g_2\wp(z_i) - g_3 = 4x^3 - g_2x - g_3$, folgt $y = \pm\wp'(z_i)$. Im Falle von $y \neq 0$ gibt es damit genau ein z_i modulo Λ, dessen Bild gerade (x,y) ist. Im Falle $y = 0$ ist z_1 offensichtlich eine doppelte Nullstelle von $\wp(z,\tau)$, also $z_1 = z_2$, und wir sind wieder fertig. □

6.4 Modulformen

Definition 6.22. Sei $n \in \mathbf{Z}$. Eine *Modulfunktion vom Gewicht k* ist eine meromorphe Funktion $f(\tau)$ auf der oberen Halbebene, welche den Transformationsgleichungen

$$f(\tau + 1) = f(\tau)$$

und

$$f\Big(-\frac{1}{\tau}\Big) = \tau^k f(\tau),$$

das heißt

$$f(\tau) = (c\tau + d)^{-k} f(\gamma \cdot \tau)$$

für alle $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$ genügt und welche auch noch meromorph in $i\infty$ ist, das heißt, deren Fourierentwicklung

$$f(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n q^n$$

mit $q = e^{2\pi i \tau}$ endlichen Hauptteil $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n q^n$ besitzt. Ist f auf $\mathbf{H}$ und auch bei $i\infty$ holomorph, das heißt verschwindet insbesondere der Hauptteil ihrer Fourierentwicklung bei $q = 0$, so heißt f *Modulform (vom Gewicht k).*

Beispiel 6.23. Ist $f(\tau)$ eine Modulfunktion vom Gewichte k, so ist

$$f(\tau) = \left(-\frac{1}{\tau}\right)^k f\left(-\frac{1}{\tau}\right) = (-1)^k f(\tau),$$

das heißt, außer der trivialen Nullform gibt es keine Modulformen ungeraden Gewichtes.

Proposition 6.24. *Die Eisensteinschen Reihen $G_k(\tau)$, $k \geq 3$ sind Modulformen vom Gewicht k.*

Beweis. Wir können k gerade annehmen. Aus der Reihendarstellung

$$G_k(\tau) = \sum_{(m,n) \neq 0} \frac{1}{(m + n\tau)^k}$$

folgt sofort das Transformationsverhalten unter der modularen Gruppe Γ. Es bleibt damit zu zeigen, daß G_k holomorph bei $i\infty$ ist:

$$\lim_{\tau \to i\infty} \sum_{(m,n) \neq 0} \frac{1}{(m + n\tau)^k} = \sum_{(m,n) \neq 0} \lim_{\tau \to i\infty} \frac{1}{(m + n\tau)^k} = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^k} = 2\zeta(k),$$

das heißt, wir kennen insbesondere die Werte der Eisensteinschen Reihen bei $i\infty$. (Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe in D, welche sogar für $\tau \to i\infty$ richtig bleibt, durften wir den Limes in die Summe ziehen.) $\square$

Satz 6.25. *Sei f eine nicht verschwindende Modulfunktion vom Gewicht k. Dann gilt*

$$\nu_{i\infty}(f) + \frac{1}{2}\nu_i(f) + \frac{1}{3}\nu_\rho(f) + \sum_p \nu_p(f) = \frac{k}{12},$$

wobei die Summe über ein Repräsentantensystem von $\mathbf{H}$ modulo Γ läuft, welches die Klassen von $i = e^{\frac{\pi i}{2}}$ und $\rho = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ ausspart. Die Nullstellenordnung von $f(\tau)$ bei $i\infty$ wird hierbei durch

$$\nu_{i\infty}(f) = \nu_{q=0} f(q)$$

definiert.

Beweis. Zunächst stellen wir fest, daß die Summe $\sum_p \nu_p(f)$ im Satz in der Tat endlich ist: Zunächst können wir annehmen, daß $p \in D$, da jede Klasse modulo Γ einen Repräsentanten in D besitzt, welcher sogar eindeutig ist, wenn er im Inneren von D liegt. Da $f(q)$ bei $q = 0$ meromorph ist, können sich die Null- und Polstellen dort nicht häufen, das heißt es existiert ein $r > 0$, so daß $f(q)$

keine Null- und Polstellen für $0 < |q| < r$ besitzt. Es folgt, daß $f(\tau)$ keine Null- und Polstellen für $\Im\tau > v := \frac{1}{2\pi}\log(\frac{1}{r})$ besitzt. Damit sind alle p mit $\nu_p(f) \neq 0$ in $D' := \{\tau \in D \mid \Im\tau < v\}$ enthalten und letztere Menge ist kompakt. Da die Null- und Polstellen isoliert sind, folgt die Endlichkeit der Summe. Als nächstes betrachten den Rand von D' als geschlossenen Integrationsweg γ, der beim Punkt $-\frac{1}{2} + iv$ beginnt und über die Punkte ρ, i, $-\frac{1}{\rho}$ und $\frac{1}{2} + iv$ wieder zurück nach $-\frac{1}{2} + iv$ läuft.

Nehmen wir für den Moment vereinfachend an, daß sich auf γ weder Null- noch Polstellen von $f(\tau)$ befinden, so liefert das Null- und Polstellen zählende Integral, daß

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{df}{f} = \sum_p \nu_p(f).$$

Auf der anderen Seite können wir das Integral wie folgt zusammensetzen:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{df}{f} = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{-\frac{1}{2}+iv}^{\rho} \frac{df}{f} + \int_\rho^i \frac{df}{f} + \int_i^{-\frac{1}{\rho}} \frac{df}{f} + \int_{-\frac{1}{\rho}}^{\frac{1}{2}+iv} \frac{df}{f} + \int_{\frac{1}{2}+iv}^{-\frac{1}{2}+iv} \frac{df}{f}\right).$$

Das erste und das vierte Integral heben sich aufgrund der Invariant von $f(\tau)$ unter $\tau \to \tau + 1$ gegenseitig auf, da der Durchlauf in umgekehrter Richtung erfolgt. Das fünfte Integral berechnet sich durch

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{1}{2}+iv}^{-\frac{1}{2}+iv} \frac{df}{f} = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{|q|=r} \frac{df}{f} = -\nu_{i\infty}(f),$$

wobei das Minuszeichen aus der Tatsache resultiert, daß beim Durchlauf von τ von $\frac{1}{2} + iv$ nach $-\frac{1}{2} + iv$ der Kreis mit Radius r um $q = 0$ in negativer Richtung durchlaufen wird. Das dritte Integral über den Kreisbogen um 0 von i nach $-\frac{1}{\rho}$ behandeln wir mit der Substitution $\tau \mapsto -\frac{1}{\tau}$ und erhalten

$$\frac{1}{2\pi i}\int_i^{-\frac{1}{\rho}} \frac{df}{f} = \frac{1}{2\pi i}\int_i^\rho \Big(\frac{df}{f} + k\,\frac{d\tau}{\tau}\Big)$$

wegen $f(-\frac{1}{\tau}) = \tau^k f(\tau)$. Damit ergibt die Summe vom zweiten und dritten Integral insgesamt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_i^\rho k\,\frac{d\tau}{\tau} = \frac{k}{12}.$$

Wir erhalten damit insgesamt

$$\sum_p \nu_p(f) = -\nu_{i\infty}(f) + \frac{k}{12},$$

womit die Formel für den zunächst betrachteten Spezialfall bewiesen ist.

Sollten Null- oder Polstellen a auf der Vertikalen von $-\frac{1}{2} + iv$ nach ρ liegen, so können wir an diesen Stellen und den entsprechenden Stellen $a + 1$ auf der Vertikalen von $-\frac{1}{2}+iv$ ein Stück der Kurve γ durch einen kleinen Halbkreisbogen ersetzen, der a zur Hälfte positiv umläuft und $a + 1$ negativ umläuft. Die obige Argumentation bleibt richtig, so daß wir den Satz auch in diesem Falle bewiesen haben. Ähnlich können wir argumentieren, wenn Null- und Polstellen auf dem Kreisbogen echt zwischen ρ und i liegen.

Es bleibt der Fall, daß Null- und Polstellen bei ρ, i oder $-\frac{1}{\rho}$ liegen. In diesem Falle ersetzen wir den Integrationsweg γ bei ρ und ρ' durch einen kleinen Sechstelkreis ins Innere von D' und bei i durch einen kleinen Halbkreis ebenfalls ins innere von D'. Das Integral (inklusive dem Faktor $\frac{1}{2\pi i}$ über die beiden Sechstelkreise gibt dann jeweils $-\frac{1}{6}\nu_\rho(f)$ und das Integral über den kleinen Halbkreis $-\frac{1}{2}\nu_i(f)$ (die Vorzeichen entstehen, da die Sechstel- und Halbkreise in negativer Richtung umlaufen werden). Insgesamt bekommen wir noch einen Beitrag von $\frac{1}{2}\nu_i(f) + \frac{1}{3}\nu_\rho(f)$, da $\nu_{-\frac{1}{\rho}}(f) = \nu_\rho(f)$. Wir erhalten damit die allgemeine Formel. $\square$

Folgerung 6.26. *Die* Diskriminante

$$\Delta(\tau) \coloneqq g_2(\tau)^3 - 27 g_3(\tau)^2$$

ist eine auf $\mathbf{H}$ *nirgends verschwindende Modulform vom Gewicht* 12*, welche eine einfache Nullstelle bei* $i\infty$ *besitzt.*

Beweis. Daß $\Delta(\tau)$ eine Modulform vom Gewicht 12 darstellt ist klar, denn dies gilt für ihre beiden Summanden, da g_2 eine Modulform vom Gewicht 4 und g_3 eine Modulform vom Gewicht 6 ist.

Aus dem Satz folgt für g_2, daß

$$\nu_{i\infty}(g_2) + \frac{1}{2}\nu_i(g_2) + \frac{1}{3}\nu_\rho(g_2) = \frac{1}{3}.$$

(Der Summenterm muß verschwinden, da alle Beiträge mindestens 1 sind.) Diese Gleichung erlaubt in den nicht-negativen ganzen Zahlen nur die Lösung $\nu_{i\infty}(g_2) = 0$, $\nu_i(g_2) = 0$, $\nu_\rho(g_2) = 1$, das heißt g_2 hat eine einzige Nullstelle modulo Γ, nämlich bei ρ. Ganz ähnlich folgt, daß g_3 ebenfalls nur eine einzige Nullstelle modulo Γ hat, nämlich bei i. Damit ist insbesondere $\Delta(i) = g_2(i)^3 \neq 0$, das heißt Δ ist eine nicht verschwindende Modulform. Wegen

$$\begin{aligned}\Delta(i\infty) &= g_2(i\infty)^3 - 27 \cdot g_3(i\infty)^2 \\ &= (120\zeta(4))^3 - 27 \cdot (280\zeta(6))^2 \\ &= \left(\frac{4}{3}\pi^2\right)^3 - 27 \cdot \left(\frac{8}{27}\pi^3\right)^2 \\ &= 0,\end{aligned}$$

ist $\nu_{i\infty}(\Delta) \geq 1$. Damit folgt aber aus dem Satz, daß $\Delta(\tau)$ keine weiteren Nullstellen hat und die Nullstelle bei $i\infty$ einfach ist. $\square$

Folgerung 6.27. *Die Kleinsche j-Funktion*

$$j(\tau) \coloneqq 1728 \cdot \frac{g_2(\tau)^3}{\Delta(\tau)}$$

ist eine Modulfunktion vom Gewicht 0*. Sie ist holomorph auf* $\mathbf{H}$ *und hat einen einfachen Pol bei* $i\infty$*. Sie induziert eine Bijektion von* $\Gamma\backslash\mathbf{H}$ *auf* $\mathbf{C}$.

Beweis. Daß $j(\tau)$ vom Gewicht 0 ist, folgt aus der Tatsache, daß Zähler und Nenner beide Modulformen vom Gewicht 12 sind. Daß $j(\tau)$ holomorph ist mit einem einfachen Pol bei $i\infty$, folgt aus der Nullstellenfreiheit von $\Delta(\tau)$ auf $\mathbf{H}$

und der Tatsache, daß $\Delta(\tau)$ bei $i\infty$ eine einfache Nullstelle hat, $g_2(\tau)$ dort aber nicht verschwindet. Sei $c \in \mathbf{C}$. Der Satz auf $f(\tau) := j(\tau) - c$ angewandt liefert dann

$$-1 + \frac{1}{2}\nu_i(f) + \frac{1}{3}\nu_\rho(f) + \sum_p \nu_p(f) = 0,$$

das heißt nur genau einer der Beiträge $\nu_i(f)$, $\nu_\rho(f)$ oder $\nu_p(f)$ nimmt einen von Null verschiedenen Wert an. □

Folgerung 6.28. *Für je zwei Zahlen c_2, $c_3 \in \mathbf{C}$ mit $c_2^3 - 27c_3^2 \neq 0$ existiert ein $\tau \in \mathbf{H}$, so daß*

$$g_2(\tau) = \alpha^4 c_2 \quad \textit{und} \quad g_3(\tau) = \alpha^6 c_3$$

für ein $\alpha \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$.

Beweis. Die Surjektivität der Kleinschen j-Funktion liefert die Existenz von $\tau \in \mathbf{H}$ mit

$$\frac{g_2(\tau)^3}{g_2(\tau)^3 - 27g_3(\tau)^2} = \frac{c_2^3}{c_2^3 - 27c_3^2},$$

das heißt, es existiert ein $\alpha \neq 0$ mit $g_2(\tau)^3 = \alpha^{12}a_2^3$ und $g_3(\tau)^2 = \alpha^{12}a_3^2$. Da wir α noch um eine zwölfte Einheitswurzel abändern können, folgt die Behauptung. □

Anhang A

Charaktere

A.1 Charaktere endlicher abelscher Gruppen

Definition A.1. Sei G eine endliche abelsche Gruppe, hier und im folgenden multiplikativ geschrieben. Ein *Charakter* von G ist ein Gruppenhomomorphismus $\chi\colon G \to \mathbf{C}^\times$ von G in die multiplikative Gruppe von $\mathbf{C}$.

Die Menge der Charaktere wird durch punktweise Multiplikation zu einer Gruppe, der *dualen Gruppe* $\widehat{G}$ *von* G.

Beispiel A.2. Sei G eine zyklische Gruppe der Ordnung n[1] mit Erzeuger s[2] $\chi\colon G \to \mathbf{C}^\times$ ein Charakter, so ist $\chi(s)^n = \chi(s^n) = \chi(1) = 1$, das heißt, $\chi(s)$ ist eine n-te Einheitswurzel $e^{\frac{2\pi i k}{n}}$, $k = 0, \dots, n-1$.

Ist umgekehrt ω eine n-te Einheitswurzel, so definiert $\chi(s^a) \coloneqq \omega^a$ einen Charakter $\chi\colon G \to \mathbf{C}^\times$ von G.

Mit anderen Worten ist $\widehat{G} \to G, \chi \mapsto \chi(s)$ ein Isomorphismus. Insbesondere ist $\widehat{G}$ wieder zyklisch und von der gleichen Ordnung wie G.

Proposition A.3. *Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe einer endlichen abelschen Gruppe G. Dann ist*

$$\hat{G} \to \hat{H}, \chi \mapsto \chi|H$$

surjektiv, das heißt jeder Charakter auf H setzt sich zu einem Charakter auf G fort.

Beweis. Sei $\chi\colon H \to \mathbf{C}^\times$ ein Charakter. Sei $\chi'\colon H' \to \mathbf{C}^\times$ eine maximale Fortsetzung von χ, das heißt χ' ist ein Charakter auf einer Untergruppe H' mit $H \subseteq H'$ und $\chi'|H = \chi$ und der Charakter läßt sich nicht weiter fortsetzen.

Angenommen, $H' \neq G$. Dann existiert ein $x \in G \setminus H'$. Sei $n > 1$ minimal mit $x^n \in H'$. Sei $t \coloneqq \chi'(x^n)$ und $\omega \in \mathbf{C}^\times$ mit $\omega^n = t$. Sei

$$H'' = \{h'x^a \mid h' \in H', a \in \mathbf{Z}\}$$

die von H' und x in G erzeugte Untergruppe. Dann definiert

$$\chi''(h'x^a) \coloneqq \chi'(h') \cdot \omega^a$$

[1] Die *Ordnung* einer Gruppe ist bekanntlich die Anzahl ihrer Elemente.

[2] Ein Element s einer Gruppe heißt *Erzeuger*, wenn jedes Gruppenelement eine Potenz von s ist. Hier ist $G = \{1, s, s^2, \dots, s^{n-1}\}$.

einen Charakter χ'' von H'', welcher χ' fortsetzt, ein Widerspruch zur Maximalität von χ'. Also ist $H' = G$ und χ' setzt χ auf G fort. $\square$

Folgerung A.4. *Ist*

$$1 \to H \to G \to G/H \to 1$$

eine kurze exakte Sequenz endlicher abelscher Gruppen, so folgt, daß die Einschränkung $\widehat{G} \to \widehat{H}$ *eine kurze exakte Sequenz*

$$1 \to \widehat{G/H} \to \widehat{G} \to \widehat{H} \to 1$$

definiert. $\square$

Proposition A.5. *Die duale Gruppe* $\widehat{G}$ *einer endlichen abelschen Gruppe* G *hat die gleiche Ordnung wie* G.

Beweis. Wir führen den Beweis per Induktion über die Ordnung n von G. Der Fall $n = 1$ ist trivial. Im Falle $n > 1$ sei $x \neq 1$ ein Element von G und H die von x erzeugte zyklische Untergruppe. Dann ist nach der Folgerung die Ordnung von $\widehat{G}$ das Produkt der Ordnungen von $\widehat{H}$ und $\widehat{G/H}$. Nach Beispiel A.2 hat $\widehat{H}$ die gleiche Ordnung wie H und nach Induktionsvoraussetzung hat $\widehat{G/H}$ die gleiche Ordnung wie G/H. Also ist die Ordnung von $\widehat{G}$ das Produkt der Ordnungen von H und G/H, also die Ordnung von G. $\square$

Proposition A.6. *Sei* G *eine endliche abelsche Gruppe. Der Homomorphismus*

$$\epsilon\colon G \to \hat{\hat{G}}, x \mapsto (\chi \mapsto \chi(x))$$

ist ein Gruppenisomorphismus von G *auf ihr* Bidual $\hat{\hat{G}}$.

Beweis. Da G und $\hat{\hat{G}}$ die gleiche Ordnung haben, reicht es, $\ker \epsilon = 1$ nachzuweisen. Sei dazu $x \neq 1$ ein Element in G. Sei H die von x in G erzeugte zyklische Untergruppe. Nach Beispiel A.2 existiert ein Charakter χ von H mit $\chi(x) \neq 1$. Nennen wir eine Fortsetzung von χ auf G wieder χ. Dann gilt

$$\epsilon(x)(\chi) = \chi(x) \neq 1,$$

also ist jedes $x \neq 1$ nicht im Kern von ϵ. $\square$

Proposition A.7. *Seien* G *eine endliche abelsche Gruppe und* $x \in G$. *Für jede komplexe Zahl* z *gilt dann*

$$\prod_{\chi \in \hat{G}} (1 - \chi(x) z) = (1 - z^f)^g,$$

wobei f *die Ordnung von* x *in* G[3] *und* g *den Index von* x *(das heißt den Index*[4] *der von* x *in* G *erzeugten Untergruppe) bezeichnet.*

[3] Die *Ordnung* eines Elementes x in einer Gruppe G ist die kleinste ganze Zahl $n > 1$, so daß $x^n = 1$

[4] Der *Index* einer Untergruppe H von G ist die Anzahl der Elemente in G/H, das ist die Ordnung von G dividiert durch die Ordnung von H.

Beweis. Sei H die von x erzeugte Untergruppe. Dann durchläuft $\chi'(x)$, $\chi' \in \hat{H}$ genau die f-ten Einheitswurzeln, das heißt

$$\prod_{\chi' \in H} (1 - \chi'(x)z) = (1 - z^f).$$

Unter der surjektiven Abbildung $\hat{G} \to \hat{H}, \chi \mapsto \chi|H$ hat jeder Charakter $\chi' \in H$ genau g Urbilder, woraus die Behauptung folgt. □

A.2 Orthogonalitätsrelationen

Proposition A.8. *Sei G eine endliche abelsche Gruppe der Ordnung n. Für jeden Charakter $\chi \in \hat{G}$ gilt*

$$\sum_{x \in G} \chi(x) = \begin{cases} n & \text{für } \chi = 1 \\ 0 & \text{für } \chi \neq 1. \end{cases}$$

Beweis. Der Fall $\chi = 1$ ist trivial. Sei also $\chi \neq 1$. Es existiert also ein $y \in G$ mit $\chi(y) \neq 1$. Da $G \to G, x \mapsto xy$ eine Bijektion ist, gilt

$$\chi(y) \sum_{x \in G} \chi(x) = \sum_{x \in G} \chi(xy) = \sum_{x \in G} \chi(x),$$

also $(\chi(y) - 1) \sum_{x \in G} \chi(x) = 0$, woraus wegen $\chi(y) \neq 1$ die Behauptung folgt. □

Folgerung A.9. *Sei G eine endliche abelsche Gruppe der Ordnung n. Für jedes Gruppenelement $x \in G$ gilt*

$$\sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(x) = \begin{cases} n & \text{für } x = 1 \\ 0 & \text{für } x \neq 1. \end{cases}$$ □

A.3 Dirichletsche Charaktere

Definition A.10. Sei jetzt und im folgenden $q \geq 1$ eine natürliche Zahl, der *Modulus.* Ein *Dirichletscher Charakter* ist ein Charakter χ der Gruppe

$$(\mathbf{Z}/(q))^\times = \{n \in \mathbf{Z}/(q) \mid (n, q) = 1\}^5$$

der invertierbaren Zahlen modulo q (wobei (n, q) den größten gemeinsamen Teiler von n und q bezeichne).

Wir setzen den Charakter χ durch Null zu einer multiplikativen Abbildung $\chi\colon \mathbf{Z}/(q) \to \mathbf{C}$ fort, also zu einer multiplikativen q-periodischen Abbildung $\chi\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{C}$ fort.

Beispiel A.11. Der *triviale Charakter* $1_q\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{C}$ ist durch

$$1_q(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } (n, q) \neq 1 \text{ und} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben.

[5] Nach dem erweiterten Euklidischen Algorithmus besitzt eine ganze Zahl genau dann eine Inverse modulo q, wenn sie zu q teilerfremd ist.

Definition A.12. Mit $\phi(q)$ bezeichnen wir den Wert der *Eulerschen ϕ-Funktion* an der Stelle q, also die Ordnung der Gruppe $(\mathbf{Z}/(q))^{\times}$[6].

Beispiel A.13. Für die Summe aller Dirichletschen Charaktere modulo q gilt

$$\sum_{\chi} \chi = \begin{cases} \phi(q) & \text{für } n \equiv 1 \text{ modulo } q \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

[6] Diese Ordnung stimmt mit der Anzahl der zu q teilerfremden natürlichen Zahlen in der Menge $0, \ldots, q-1$ überein.