TP 1 : PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

⚠ inversion des %

(1)

- 60% non fumeurs → P vie = 0,82
- 40% fumeurs
  - 20% F_{15} — p vie = 0,75
  - 40% F_{15-24} — p vie = 0,69
  - 40% F_{24+} — p vie = 0,60

a) $P_{vie} = (P_{vie} \mid NF) \times P_{NF} + (P_{vie} \mid F_{15}) \times P_{15} + P(vie \mid F_{15-24}) \times P_{15-24}$

$+ (P_{vie} \mid F_{24+}) \times P_{24+}$

$= 0,82 \times 0,6 + 0,75 \times 0,08 + 0,69 \times 0,16 + 0,60 \times 0,16$

$= 0,7584$

b) $(P_{vie} \mid F) = P(vie \mid F, F_{14}) \times P(F_{14}) + P(vie \mid F, F_{14-24}) \times P(F_{14-24}) + P(vie \mid F, F_{24+}) \times P(F_{24+})$

$= 0,75 \times 0,20 + 0,69 \times 0,40 + 0,60 \times 0,40$

$= 0,666$

c) $P(F \mid vie) = \dfrac{P(vie \mid F) \times P(F)}{P(vie)} = \dfrac{0,666 \times 0,40}{0,7584} = 0,35$

(2)

{Anvers, Bruxelles}
{Bruxelles, Charleroi}

4 routes pour aller d'A à C
→ toutes ont une proba p d'ê bloquée par la neige.

a) $P(A \to C) = P(A \to B \cap B \to C)$

$= P(A \to B) \cdot P(B \to C)$

$= P(A \to B)^2$

$P(A \to B) = P(R_1 \text{ ouverte}) + P(R_2 \text{ ouverte}) - P(R_1 \text{ ouverte} \cap R_2 \text{ ouverte})$

$= 1 - p + 1 - p - (1-p) \times (1-p)$

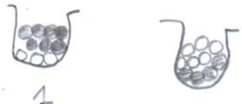
$= 1 - p^2$

$\Rightarrow P(A \to C) = 1 - p^2$

b) $(A \to C) = P(A \to B)^2 + P(R_5 \text{ ouverte}) - P(P(A \to B)^2 \cup R_5 \text{ ouverte})$

$$= (1-p^2)^2 + 1 - p - (1-p^2)^2 \times (1-p)$$

(5)



1 2

$$P(B_2 | B_1) = \frac{P(B_1 | B_2) \times P(B_2)}{P(B_1)}$$

$P(B_1 | B_2) = 3/10$

$P(B_1) = 3/10$

$P(B_2) = P(B_2 | B_1) \times P(B_1) + P(B_2 | N_1) \times P(N_1)$

$$= \frac{7}{11} \times \frac{3}{10} + \frac{6}{11} \times \frac{7}{10} = 0,573$$

$$\Rightarrow P(B_2 | B_1) = \frac{3/10 \times 0,573}{3/10}$$

pas bien lu la question ...

(6) a) $P(\text{eff}) = P(\text{eff} | ♀) \times P(♀) + P(\text{eff} | ♂) \times P(♂)$

b) $$P(♀ | \text{eff}) = \frac{P(\text{eff} | ♀) \times P(♀)}{P(\text{eff})}$$

d) $$P(♂ | \text{pas eff}) = \frac{P(\text{pas eff} | ♂) \times P(♂)}{P(\text{pas eff})}$$

(7) 20 % malade

→ $P(T^+ | \text{malade}) = 0,90$

$P(T^- | \text{sain}) = 0,95$

→ $$P(\text{malade} | T^+) = \frac{P(T^+ | \text{malade}) \times P(\text{malade})}{P(T^+)}$$

$$P(T^+) = P(T^+ \mid \text{malade}) \times P(\text{malade}) + P(T^+ \mid \text{sain}) \times P(\text{sain})$$

$$= 0{,}90 \times 0{,}20 + 0{,}05 \times 0{,}80 = 0{,}22$$

$$\Rightarrow P(\text{malade} \mid T^+) = \frac{0{,}90 \times 0{,}20}{0{,}22} = 0{,}82.$$

(8) $P(\text{connait}) = p$; $P(\text{juste} \mid \text{connait pas}) = \frac{1}{m}$

$P(\text{connait pas}) = 1 - p$

$$P(\text{connait} \mid \text{juste}) = \frac{P(\text{juste} \mid \text{connait}) \times P(\text{connait})}{P(\text{juste})}$$

$P(\text{juste} \mid \text{connait}) = 1$

$$P(\text{juste}) = P(\text{juste} \mid \text{connait}) \times P(\text{connait}) + P(\text{juste} \mid \text{connait pas}) \times P(\text{connait pas})$$

$$= 1 \times p + \frac{1}{m} \times (1 - p)$$

$$P(\text{connait} \mid \text{juste}) = \frac{p}{p + \frac{1-p}{m}}$$

TP 2

lois discrètes :

→ Bernoulli : expérience qui a 2 résultats possibles

↳ un paramètre : p (→ réussite)

→ binomiale (n, p) : n × la m̄ que Bernoulli

→ s'intéresse au nb de x où expérience sera réussie (p)

→ binomiale négative (r, p) : on refait Bernoulli jusqu'à avoir r succès

→ s'intéresse au nb de x qu'on l'a faite pour avoir r

rem : la loi géométrique (≃ la loi binomiale négative)

$$F_X(x) = P(X \leqslant x)$$

→ hypergéométrique (n, N, M) : on a un groupe de N objets, divisés en 2 sous-groupes, le sous groupe d'intérêt à M objets.

Parmi N, on tire n objets

↳ combien d'objets n proviennent du sous-groupe M.

→ Poisson (μ) : on compte le nb de x qu'un événement se produit ds un laps de temps fixé.

μ = # événements / unité de temps

TP 2 : VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

① a) $p(♂) = 2/5$ $\quad\quad$ $p(♀) = 3/5$

a.1) $P(X=3) = \binom{5}{3} p^3 (1-p)^{5-3} = \binom{5}{3} \times \frac{2}{5}^3 (1-2/5)^2$

a.2) $P(X=3) = \binom{2}{0} (1-3/5)^2 \times (3/5)^1$

~~a.3) $P(X=3) = \binom{5}{3}(2/5)^3(1-2/5)^2$~~

a.3) $P(X=5) = \binom{4}{2}(1-2/5)^{5-3} (2/5)^3$

(2) binomiale négative :

$r = 10$ $\quad\quad$ $p(r) = 1/6$

a) $P(X=10) = \binom{9}{9}(1-1/6)^0 \times (1/6)^9$

b) $P(X=50) = \binom{49}{9}(1-1/6)^{40} \times (1/6)^9$

③ $p(\text{cancer} \mid F) = 2/5$ $\quad\quad$ $p(F) = 0,60$

$p(\text{cancer} \mid NF) = 1/40$

a) → sur 20 F → p(d'avoir 1 cancer)

$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0)$

$P(X=0) = \binom{20}{0} \cdot 2/5^0 (1-2/5)^{20}$

b) $P(X=3) = \binom{10}{3} \times P(\text{cancer})^3 \times (1 - P(\text{cancer}))^7$

$P(\text{cancer}) = P(\text{cancer} \mid F) \times P(F) + P(\text{cancer} \mid NF) \times P(NF)$

(4) 20 ♀♂ $\left\langle \begin{array}{l} 12 ♀ \\ 8 ♂ \end{array} \right.$ 7 ♀♂ reçoivent un cadeau

a) hypergéométrique

$N = 20$
$M = 12$
$n = 7$
$m = 2$

$$P(X=2) = \frac{\binom{12}{2}\binom{8}{5}}{\binom{20}{7}}$$

b) $P(X \leqslant 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$

(5) succès = 1 → p(succès) = 1/6 qd # succès = 1 ⇒ géométrique

binomiale négative

a) $P(X=3) = (1-1/6)^2 \times 1/6$

b) $P(X<3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$

(6) p(cible) = 1/5 X = 10

→ doit réussi l'épreuve au min. 2x ⇒ binomiale

$$P(X \geqslant 2 \mid X \geqslant 1) = \frac{P(X \geqslant 2 \cap X \geqslant 1)}{P(X \geqslant 1)}$$

$$= \frac{P(X \geqslant 2)}{P(X \geqslant 1)}$$

$P(X \geqslant 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1)$

$P(X=1) = \binom{10}{1} \times 1/5^1 \, (1-1/5)^9$

(7) $N = 12$
$M = 4$
$n = 5$

a) $P(X=0) = \dfrac{\binom{4}{0}\binom{8}{5}}{\binom{12}{5}}$ b) $P(X=4) = \dfrac{\binom{4}{4}\binom{8}{0}}{\binom{12}{5}}$

(8) 20 ménages francophones ds une population où $p(frs) = 0,60$
$\rightarrow r = 20$

$P(X = 50) = \binom{49}{19}(1-0,60)^{30} \times 0,60^{20}$

(9) 1 particule / min pdt 100 min

a) $P(X=0) = \dfrac{e^{-\mu}\mu^0}{0!}$ $\mu = \bar{x} = 1$ particule / min

b) $P(X=1) = \dfrac{e^{-\mu}\mu^1}{1!}$

c) $P(X \geq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1)$

(10) A $\rightarrow$ 2ha $\rightarrow$ $p_A = 0,125$
B $\rightarrow$ 3ha $p_B = 0,20$
C $\rightarrow$ 5ha $p_C = 0,30$

20 pommes $\rightarrow$ $p_{inc} = 3/20 = 0,15$ $\Rightarrow$ $X = 3$

P(caisse inc = caisse A)

$$P(\text{caisse } A \mid X=3) = \frac{P(X=3 \mid \text{caisse } A) \times P(\text{caisse } A)}{P(X=3 \mid \text{caisse } A) \times P(\text{caisse } A) + P(X=3 \mid \text{caisse } B) \times P(\text{caisse } B) + P(X=3 \mid \text{caisse } C) \times P(\text{caisse } C)}$$

$P(X=3 \mid \text{caisse}A) = \binom{20}{3} \times 0{,}125^3 \, (1-0{,}125)^{17}$

→ binomiale

$P(A) = 0{,}20$

→ (11) ~~cuve A → 25 / l = 0,025~~

à vérifier

~~cuve B → 4 / l = 0,04~~

~~cuve C → 6 / l = 0,06~~

$P_A = 2/10$

$P_B = 3/10$

$P_C = 5/10$

Faut utiliser la loi de poisson pour déterminer $P(X=4)$ et $P(X=3)$

~~1L : cuve inc → 3 g~~

~~1L : cuve inc → 4 g~~

$$\cancel{P(x=4 \mid x=3) = \frac{P(X=3 \mid X=4) \times P(X=4)}{P(X=3)}}$$

(12) A. si pas embout → P(camionnettes) = 1/6

à vérifier

$P_A = 1/2$

B - si embout $P_{cam} = 1/4$

$P_B = 0{,}3$

C - $P_{cam} = 2/5$

$P_C = 1/5$

$$P(A \mid x=3) = \frac{P(x=3 \mid A) \times P(A)}{P(x=3)}$$

→ $P(X=3) = P(X=3 \mid A) \cdot P(A) + P(X=3 \mid B) \cdot P(B) + P(X=3 \mid C) \cdot P(C)$

→ géométrique car s'arrête dès qu'à une 1ère camionnette

→ $P(X=3 \mid A) = (1-1/6)^2 \; 1/6$

$P(X=3 \mid B) = (1-1/4)^2 \cdot 1/4$

$P(X=3 \mid C) = (1-2/5)^2 \cdot 2/5$

$P_A = 0{,}5$

$P_B = 0{,}3$

$P_C = 0{,}2$

$\Rightarrow P(A \mid X=3) = 0{,}45.$

(13) $k=0$ sans accident : $t = 25$ min $P = 1/3$

à vérifier

$k=1$ 1 accident : $t = 38$ min $P = 1/3$

$k=2$ 2 accidents ou + : $t = 45$ min $P = 1/3$

k attendu $= 1{,}2 = \mu$

a)

b) $t \geqslant 40$ $$P(k=1 \mid t \geqslant 40) = \frac{P(t \geqslant 40 \mid k=1) \times P(k=1)}{P(t \geqslant 40)}$$

$$P(t \geqslant 40) = P(t \geqslant 40 \mid k=0) \times P(k=0) + P(t \geqslant 40 \mid k=1) \times P(k=1) + P(t \geqslant 40 \mid k \geqslant 2) \times P(k \geqslant 2)$$

$\Rightarrow$ Loi de Poisson : $P(X=x) = \dfrac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!}$

- $P(k=0) = \dfrac{e^{-1,2}\, 1{,}2^{0}}{0!} = 0{,}30$
- $P(k=1) = e^{-1,2} \cdot 1{,}2^{1} = 0{,}36$
- $P(k \geqslant 2) = 1 - P(k=0) - P(k=1) = 0{,}34$

$P(t \geqslant 40 \mid k=0) = 1 - e^{-1/25 \cdot 40} = 0{,}798$

$P(t \geqslant 40 \mid k=1) = 1 - e^{-1/38 \cdot 40} = 0{,}681$

$P(t \geqslant 40 \mid k \geqslant 2) = 1 - e^{1/45 \cdot 40} = 0{,}589$

$\Rightarrow P(t \geqslant 40) = 0{,}798 \times 0{,}30 + 0{,}681 \times 0{,}36 + 0{,}589 \times 0{,}34$
$= 0{,}67$

$$P(k = 1 \mid t > 40) = \frac{0{,}651 \times 0{,}36}{0{,}67}$$

$$= 0{,}35$$

TP 3 : VARIABLES ALÉATOIRES CONTINUES

① $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x/60 & \text{si } 0 \leq x < 60 \\ 1 & \text{si } x \geq 60 \end{cases}$ bus toutes les 10 min àpd midi

a) $P(X \leq 30) = \frac{x}{60} = \frac{30}{60}$

b) $P(30 \leq X \leq 40) = P(X \leq 40) - P(X \leq 30) = \frac{40}{60} - \frac{30}{60}$

c) $P(t < 5) =$

→ bus arrive toutes les 10 min donc

12h00, 12h10, 12h20, 12h30, 12h40, 12h50, 13h00

$\Rightarrow P(t < 5) = P(X=5) + P(X=15) + P(X=25) + P(X=35) + P(X=45) + P(X=55)$

d) $P(0 \leq X \leq 15 \cup 45 \leq X \leq 30) = P(X=15) - P(X=0) + P(X=45) - P(X=30)$

$- P(X \in [0,15] \cup [30,45])$

$= \frac{15}{60} - 0 + \frac{45}{60} - \frac{30}{60}$

② $f(x) = \begin{cases} 6(x - x^2) & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

$$F(X) = \int_0^{1/3} f(x) = \int_0^{1/3} 6(x - x^2)\,dx = 6\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^{1/3}$$

$$= \frac{3}{9} - \frac{2}{27} = \frac{9}{27} - \frac{2}{27} = \frac{7}{27}$$

③ $\mu = 100$ $\sigma = 10$ $\sim N(0,1)$

a) $P(100 \leq X \leq 105) = P(X \leq 105) - P(X \leq 100)$

$= P\left(Z \leq \frac{105-100}{10}\right) - P\left(Z \leq \frac{100-100}{10}\right)$

$= P(Z \leq 0{,}5) - P(Z \leq 0)$

$= 0{,}6915 - 0{,}5 = 0{,}1915$

c) $P(X \geq 120) = P\left(Z \geq \frac{120-100}{10}\right)$

$= 1 - P\left(Z \leq \frac{20}{10}\right)$

$= 1 - 0,9772 = 0,0228$

d) $P(X > x) = P\left(Z > \frac{x-100}{10}\right) = 0,10$

$\Rightarrow 1 - P\left(Z < \frac{x-100}{10}\right) = 0,10$

$P\left(Z < \frac{x-100}{10}\right) = 1 - 0,10 = 0,90$

$\rightarrow \frac{x-100}{10} = 1,28$

$x = 12,8 + 100 = 112,8$

(4) $P(X \leq 30) = P\left(Z \leq \frac{30-\mu}{\sigma}\right) = 0,9772$

$P(X > 15) = P\left(Z \geq \frac{15-\mu}{\sigma}\right) = 0,8413$

$\rightarrow \frac{30-\mu}{\sigma} = 2$

$\rightarrow P\left(Z \geq \frac{15-\mu}{\sigma}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{15-\mu}{\sigma}\right) = 0,8413$

$\rightarrow P\left(Z \leq \frac{15-\mu}{\sigma}\right) = 1 - 0,8413$
$= 0,1587$

↳ pas ds le tableau

$P\left(Z \geq \frac{-(15-\mu)}{\sigma}\right) = 0,1587$

$\rightarrow P\left(Z \leq \frac{\mu-15}{\sigma}\right) = 1 - 0,1587 = 0,8413$

$\frac{\mu-15}{\sigma} = 1$

$\Rightarrow \mu = \sigma + 15$

$\rightarrow \frac{30-\sigma-15}{\sigma} = 2 \rightarrow 15 = 3\sigma$

$\sigma = 5 \rightarrow \mu = 20$

(5) $X \sim N(8;\ 2,25)$

$Y \sim N(4, 1)$

$\rightarrow P(6 < X \leqslant 9,5) = P(X < 9,5) - P(X < 6)$

$= P\left(Z < \frac{9,5-8}{\sqrt{2,25}}\right) - P\left(Z \leqslant \frac{6-8}{\sqrt{2,25}}\right)$

$= P(Z < 1) - P(Z \leqslant -4/3)$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \parallel$

$P(Z \geqslant 4/3)$

$= 1 - P(Z \leqslant 4/3)$

$= P(Z \leqslant 1) + P(Z \leqslant 4/3) - 1$

$= 0,5 + 0,9082 - 1 = 0,4082$

$\rightarrow P(3,5 < Y < 9,5)$

$\Rightarrow$ P(pièce mauvaise) $= P(6 < X < 9,5) \times P(3,5 < Y < 9,5)$

(6) $\mu = 72$

$\sigma = 9$

$P(X \geqslant x) = P\left(Z \geqslant \frac{x-72}{9}\right) = 0,10$

$= 1 - P\left(Z \leqslant \frac{x-72}{9}\right) = 0,10$

$\rightarrow P\left(Z \leqslant \frac{x-72}{9}\right) = 0,90$

$\frac{x-72}{9} = 1,28 \quad \Rightarrow x = 83,52$

(7) $\mu = 101$

a) $\sigma = 0,75$

$$P(X < 100) = P\left(Z < \frac{100-101}{0,75}\right) = P(Z \leq -4/3) = P(Z \geq 4/3)$$
$$= 1 - P(Z \leq 4/3)$$
$$= 1 - 0,9082$$
$$= 0,0918$$
$$= 9\%$$

b) $$P(X < 100) = P\left(Z < \frac{100-101}{\sigma}\right) = 0,02$$

$$= P\left(Z \geq \frac{1}{\sigma}\right) = 0,02$$

$$= 1 - P(Z < 1/\sigma) = 0,02$$

$$\rightarrow P(Z \leq 1/\sigma) = 1 - 0,02 = 0,98$$

$$1/\sigma = 2,05 \quad \rightarrow \sigma = 0,49$$

(8) 100 tests $\rightarrow \mu_{test} = 10$ $\sim Exp \Rightarrow$ perte de mémoire

a) $$P(X < 900) = P\left(Z < \frac{900 - \mu}{\sigma}\right)$$

$$\mu = E[X] = 100 \times 10 = 1000$$

$$var(\Sigma X_i) = \sum^{100} var(X_i) = 100 \cdot 10^2 = 10\ 000$$

$$\rightarrow \sigma = \sqrt{10\ 000}$$

b) $12 \times 10 = 120 min$

9) $A \rightarrow 20\%$ $\quad \mu_A = 2{,}5 \rightarrow \lambda_A = 0{,}4$

$B \rightarrow 30\%$ $\quad \mu_B = 4 \quad \lambda_B = 0{,}25$

$C \rightarrow 50\%$ $\quad \mu_C = 6 \quad \lambda_C = 0{,}167$

$$P(X<4 \mid X>3) = P(X<4 \mid X>3 \cap A) \cdot P(A \mid T) + P(X<4 \mid X>3 \cap B) \cdot P(B \mid T) + P(X<4 \mid X>3 \cap C) \cdot P(C \mid T)$$

- $P(A \mid T) = \dfrac{P(T \mid A) \cdot P(A)}{P(T \mid A) P(A) + P(T \mid B) \cdot P(B) + P(T \mid C) \cdot P(C)}$

$P(T \mid A) = 1 - e^{-0{,}4 \cdot 3} = 0{,}699$

$P(T \mid B) = 1 - e^{-0{,}25 \cdot 3} = 0{,}528$

$P(T \mid C) = 1 - e^{-0{,}167 \cdot 3} = 0{,}394$

$\rightarrow P(A \mid T) = 0{,}28$

- $P(B \mid T) = 0{,}320$
- $P(C \mid T) = 0{,}398$

- $P(X<4 \mid X>3 \cap A) = P(X<1 \mid X \sim Exp(0{,}4)) = 1 - e^{-0{,}4} = 0{,}330$

- $P(X<4 \mid X>3 \cap B) = 1 - e^{-0{,}25} = 0{,}221$
- $P(X<4 \mid X>3 \cap C) = 1 - e^{-0{,}167} = 0{,}154$

$\Rightarrow P(X<4 \mid X>3) = 0{,}224$

10

$IMC \sim \log N\,(\ln(25), \sigma)$

$p(\text{succès} \mid IMC > 25) = 0,43$

$p(\text{succès} \mid IMC < 25) = 0,51$

$$P(IMC < 25 \mid 2 \text{ tests}^+ \text{ sur } 3) = \frac{P(2T^+/3 \mid IMC < 25) \times P(IMC < 25)}{P(2T^+/3)}$$

⊛ $P(2T^+/3) \rightarrow$ binomiale

$\rightarrow$ sachant que $IMC < 25 \rightarrow p(T^+) = 0,43$

$$\Rightarrow P(X=2) = \binom{3}{2} 0,51^2 (1 - 0,49)^1$$

$$= \frac{3!}{2!\,1!} \times 0,51^2 \times 0,49$$

$$= \frac{3 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2}} \times 0,51^2 \times 0,49 = 0,382$$

⊛ $P(IMC < 25) = P(\log(IMC) < \ln(25))$

$$= P\left(Z < \frac{\ln(25) - \mu}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(Z < \frac{\ln(25) - \ln(25)}{\sigma}\right)$$

$$P(Z < 0) = 0,5$$

$$\Rightarrow P(IMC < 25 \mid 2T^+/3) = \frac{0,382 \times 0,5}{0,382 \times 0,5 + \underbrace{P(2T^+/3 \mid IMC > 25)}_{\substack{3 \times 0,43^2 \times 0,57 \\ = 0,316}} \times \underbrace{P(IMC > 25)}_{= 0,5}}$$

$$= 0,547$$

(11)

$\mu_A = 1000 \rightarrow P(A) = 1/3 \rightarrow \lambda_A = 1/1000$

$\mu_B = 500 \qquad P(B) = 2/3 \qquad \lambda_B = 1/500$

$P(X > 2000 \mid X > 1000) = P(X > 1000)$

→ car perte de mémoire donc peut simplifier comme ça.

$P(X > 1000) = P(X > 1000 \mid A) \cdot P(A)$
$\quad + P(X > 1000 \mid B) \cdot P(B)$

Loi exp donc $P(X \leqslant x)$

$X \sim Exp(\lambda)$

$\rightarrow P(X > 1000 \mid A) = 1 - P(X < 1000 \mid A)$
$= 1 - (1 - e^{-1/1000 \cdot 1000}) = 0,368$

$\rightarrow P(X > 1000 \mid B) = 1 - P(X < 1000 \mid B)$
$= 1 - 1 + e^{-1/500 \times 1000} = 0,135$

$\Rightarrow P(X > 1000) = 0,368 \times 1/3 + 0,135 \times 2/3 = 0,213$

(12)

A → 20% $\quad \mu_A = 5$

B → 30% $\quad \mu_B = 8$

C → 50% $\quad \mu_C = 12$

$P(X < 3 \mid X > 4) = P(X < 3 \mid X > 4 \cap A) \cdot P(A \mid T)$
$+ P(X < 3 \mid X > 4 \cap B) \cdot P(B \mid T)$
$+ P(X < 3 \mid X > \cap C) \cdot P(C \mid T)$

$X \sim$ uniforme (a, b)

$P(X < 3 \mid X > 4 \cap A) = \int_3^5 \frac{1}{5-0} dx = \left[\frac{1}{5} x\right]_3^5 = \frac{5}{5} - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

$P(X < 3 \mid X > 4 \cap B) = \int_3^8 \frac{1}{8-0} dx = [x]_3^8 =$

→ méthode qui devrait fonctionner mais pas le cas...

autre méthode, utilisable pour une loi uniforme

⊗ $P(X \leq 4 \mid X > 3 \cap A) = \dfrac{P(X \leq 4 \cap X > 3)}{P(X < 3)}$ → $\dfrac{\#\text{ cas fav}}{\#\text{ cas total}}$

$= \dfrac{\frac{4-3}{5-0}}{\frac{5-3}{5-0}} = \dfrac{1}{2}$

⊗ $P(X \leq 4 \mid X \geq 3 \cap B) = \dfrac{\frac{4-3}{8-0}}{\frac{8-3}{8-0}} = \dfrac{1}{5}$

⊗ $P(X \leq 4 \mid X > 3 \cap C) = \dfrac{4-3}{12} \times \dfrac{12}{12-3} = 1/9$

⊗ $P(A \mid T) = \dfrac{P(T \mid A) \times P(A)}{P(T)}$

$P(T \mid A) = P(X > 3 \mid A) = 1 - P(X < 3 \mid A)$

$= 1 - \dfrac{1}{5-0} = \dfrac{4}{5}$

$A \in [0,5)$

unif : $\dfrac{1}{A-B}$

⊗ $P(T B) = 1 - \dfrac{1}{8-0} = 7/8$

$B \in [0,8]$

⊗ $P(T \mid C) = 1 - \dfrac{1}{12-0} = 11/12$

$C \in [0,12]$

$\Rightarrow P(X \leq 4 \mid X > 3) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{4/5 \times 0{,}20}{\underbrace{4/5 \times 0{,}20 + 7/8 \times 0{,}3 + 11/12 \times 0{,}5}_{0{,}182}} + \dfrac{1}{5} \times \dfrac{7/8 \times 0{,}3}{\underbrace{P(T)}_{0{,}298}} + \dfrac{1}{9} \times \dfrac{11/12 \times 0{,}5}{\underbrace{P(T)}_{0{,}520}}$

$= 0{,}208$

erreur $f_X = \dfrac{1}{A-B}$ mais c'est fct densité → mettre fct de répartition

$\Rightarrow P(X < 3 \mid A) = \dfrac{5-3}{5-0}$ ↗ cas favorables ↘ cas totaux $= \dfrac{2}{5}$

$\Rightarrow P(X < 3 \mid B) = \dfrac{8-3}{8-0} = \dfrac{5}{8}$ et $P(X < 3 \mid C) = \dfrac{9}{12}$

(13) $x_1, x_2, x_3 \sim Exp(\lambda)$

$x_1 \geqslant a$

$x_3 \geqslant a$

$Y = x_1 + x_2 + x_3 - 2a$

$P(x_1 + x_2 + x_3 - 2a \leqslant k \mid x_1 \geqslant a \,;\, x_3 \geqslant a)$

$= P(x_1 + x_2 + x_3 \leqslant k + 2a \mid x_1 \geqslant a \,,\, x_3 \geqslant a)$

→ on peut éliminer la condition en la soustrayant :

$P(x_1 + x_2 + x_3 \leqslant k + 2a - a - a)$

$= P(x_1 + x_2 + x_3 \leqslant k)$ ⇒ ~~somme~~ d'Exp ⇒ Erlang

→ erlang : $\dfrac{(x_1+x_2+x_3)^2 \cdot \lambda^3 \cdot e^{-\lambda(x_1+x_2+x_3)}}{2!}$

(14) a) la 1ère est un Bayes pour une fct continue → fct de densité

la 2ᵉ est un Bayes pour une fct discrète.

b)

A	→	50%	$E[X]_A = 27$
B	→	30%	$E[X]_B = 38$
C	→	20%	$E[X]_C = 65$

$\sigma = \sqrt{2,568}$

$$P(C \mid X=18) = \frac{f_{X=18|C} \times P(C)}{f_{X=18|A} \times P(A) + f_{X=18|B} \times P(B) + f_{X=18|C} \times P(C)}$$

$$f_{X=18|A} = P(X=18 \mid A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2,568}} e^{-\frac{(\ln 18 - \mu)^2}{2 \cdot 2,568}}$$

$\rightarrow \mu \Rightarrow e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} = 27$

- $\mu_{27} = 2,011$
- $\mu_{38} = 2,35$
- $\mu_{65} = 2,89$

TP 4 : ESPERANCE, VARIANCE ET LOIS JOINTES

(2) $p(T_1^+) = 1/2$

$p(T_2^+ | T_1^+) = 1/2$ $\qquad$ $P(T_2^+ | T_1^-) = 1/4$

$p(T_3^+ | T_2^+) = 1/2$ $\qquad$ $P(T_3^+ | T_2^-) = 1/4$

$$P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3)$$

$$P(X=2) = P(T_1^+) \times P(T_2^+ | T_1^+) \times P(T_3^- | T_2^+)$$
$$+ P(T_1^+) \times P(T_2^- | T_1^+) \times P(T_3^+ | T_2^-)$$
$$+ P(T_1^-) \times P(T_2^+ | T_1^-) \times P(T_3^+ | T_2^+)$$

$$P(X=3) = P(T_1^+) \times P(T_2^+ | T_1^+) \times P(T_3^+ | T_2^+)$$

(3)

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \, f(x) = \int_{-\infty}^{0} x.0 \, dx + \int_0^1 6x(x - x^2) \, dx + \int_1^{\infty^+} 0x \, dx$$

$$= 6\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 6\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 6 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$$

$$var(X) = E[X^2] - E^2[X]$$

$$E[X^2] = \int_0^1 x^2 \, 6(x - x^2) \, dx$$

$$= 6\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = 6\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{10}$$

(4)

pour un mois $\qquad \mu = 10000$

$X \sim N \qquad \sigma = 2000$

$$P(4X > x) = 0{,}01 \qquad 4X \sim N(4 \times \mu ; 4 \times \sigma^2)$$
$$N(40\,000 ; 4 \times 2000^2)$$

$$\rightarrow P\left(Z \geq \frac{x - 40\,000}{\sqrt{4 \times 2000^2}}\right) = 0{,}01$$

$$= 1 - P\left(Z \leq \frac{x - 40\,000}{4000}\right) = 0{,}01$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{x - 40000}{4000}\right) = 1 - 0{,}01 = 0{,}99 \Rightarrow \frac{x - 40000}{4000} = 2{,}33$$

$$x = 49\,320$$

(5) 1 valise: $X \sim N(12,2 \; ; \; 2,3^2)$ $\rho_{Y_1 Y_2} = 0,7$

2 valises: $Y \sim N(9,8 \; ; \; 1,7^2)$

$P(X > Y_1 + Y_2) = P(X - Y_1 - Y_2 \geqslant 0)$

$Z = X - Y_1 - Y_2$

$\Rightarrow P(Z \geqslant \frac{0 - \mu}{\sigma})$

$\mu = E[Z] = E[X] + E[-Y_1] - E[-Y_2]$

$= 12,2 - 9,8 - 9,8 = -7,4$

$var(Z) = var(X) + var(-Y) + var(-Y) + 2covar(X, Y_1)$

$+ 2covar(X, Y_2) + 2covar(Y_1 Y_2)$

$covar(Y_1 Y_2) = \rho_{Y_1 Y_2} \times \sqrt{var(Y_1) \times var(Y_2)}$

$= 2,023$

$\rightarrow var(Z) = 13,093$

$\Rightarrow \sigma_Z = 3,62$

$\Rightarrow P(Z \geqslant \frac{0-(-7,4)}{3,62}) = 1 - P(Z \leqslant 2,04) = 1 - 0,9793$

$= 0,0207$

(6) type 1 $\sim (10, 1^2)$ $p(\text{type 1}) = 4$

type 2 $\sim (9, 1^2)$

situation A : 2 type 1 $\rightarrow p(A) = 4/9 \times 3/8 = 1/6$

B : 2 type 2 $\rightarrow p(B) = 5/9 \times 4/8 = 0,278$

C : type 1 + type 2 $\rightarrow p(C) = 5/9 \times 4/8 = 0,278$

$P(A \mid X > 21,2) = \dfrac{P(X > 21,2 \mid A) \times P(A)}{P(X > 21,2)}$

- $P(X > 21{,}2 \mid A)$ $\qquad \mu_A = 2 \times 10 = 20$

$\sigma_A^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \rightarrow \sigma_A = \sqrt{2}$

$\rightarrow P\left(Z > \frac{21{,}2 - 20}{\sqrt{2}}\right) = 1 - P\left(Z < \frac{1{,}2}{\sqrt{2}}\right)$

- $P(X > 21{,}2 \mid B)$ $\qquad \rightarrow \mu_B = 18 \qquad \sigma_B = \sqrt{2}$

$\rightarrow 1 - P\left(Z < \frac{21{,}2 - 18}{\sqrt{2}}\right) = 1 - P(Z < 2{,}26)$

- $P(X > 21{,}2 \mid C)$ $\qquad \rightarrow \mu_C = 19 \qquad \sigma_C = \sqrt{2}$

$\rightarrow P\left(Z \geq \frac{21{,}2 - 19}{\sqrt{2}}\right) = 1 - P\left(Z < \frac{2{,}2}{\sqrt{2}}\right)$

$\Rightarrow P(A \mid X > 21{,}2) = \frac{0{,}1151 \times 1/6}{0{,}1151 \times 1/6 + 7 \times 10^{-4} \times 0{,}278 + 0{,}0139 \times 0{,}278}$

$= 0{,}825$

(7) $X \sim N(3, 3^2)$ $\qquad \rho_{XY} = 1/2$

$Y \sim N(5, 2^2)$

$P(4Y - 2X - 3 > 0) = P\left(Z \geq \frac{0 - \mu}{\sigma}\right)$

$\mu = E[Z] = 4E[Y] + 2E[-X] + E[3]$

$= 4 \cdot 5 - 2 \cdot 3 - 3 = 11$

$\text{covar}(XY) = 1/2 \times \sqrt{9 \times 4}$

$\text{var}(Z) = 4^2 \text{var}(Y) (-2)^2 \text{var}(-X) + \text{var}(3) + 2\,\text{covar}(Y,3) + 2\,\text{covar}(Y,X) + 2\,\text{covar}(X,3)$

$= 4^2 \times 4 + 2^2 \times 9 + (-16) \times 0{,}5 \times \sqrt{4 \times 9}$

$= 52 \qquad \rightarrow \sigma_Z = \sqrt{52}$

$\rightarrow P(Z \geq -1{,}53) = P(Z \leq 1{,}53) = 0{,}9370$

(8) a) $P(X=0) = P(D_1 \leqslant 2 \cap D_2 \leqslant 2) = P(D_1 \leqslant 2) \times P(D_2 \leqslant 2)$

$= \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} = 1/9$

b) $P(X=2 \cup X=4 \cup X=6) = \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$

c)

(9) a) $E[X_A] = 0 \times 0{,}1 + 1 \times 0{,}2 + 2 \times 0{,}3 + 3 \times 0{,}2 + 4 \times 0{,}09 + 5 \times 0{,}07 + 6 \times 0{,}04$

$\mathrm{var}[X_A] = E[X^2] - E^2[X]$

$\rightarrow E[X^2] = 1 \times 0{,}2 + 2^2 \times 0{,}3 + 3^3 \times 0{,}2 + 4^2 \times 0{,}09 + 5^2 \times 0{,}07 + 6^2 \times 0{,}04$

c) $P(X_A > X_B) = P(X_A \geqslant 1 | X_B = 0) \times P(X_B=0) + P(X_A \geqslant 2 | X_B = 1) \times P(X_B=1) + P(X_A \geqslant 3 | X_B = 2) \times P(X_B=2)$

$+ P(X_A \geqslant 4 | X_B = 3) \times P(X_B=3) + P(X_A \geqslant 5 | X_B = 4) \times P(X_B=4) + P(X_A \geqslant 6 | X_B = 5) \times P(X_B=5)$

$= (1 - 0{,}1) \times 0{,}3 + (1 - 0{,}1 - 0{,}2) \times 0{,}1 + \ldots$

d) $P(X_A + X_B = 3) = P(X_A = 0 | X_B = 3) \times P(B=3)$

$+ P(A=1 | B=2) \times P(B=2)$

$+ P(A=2 | B=1) \times P(B=1)$

$+ P(A=3 | B=0) \times P(B=0)$

e) $P(B \leqslant 3 | A=0) = \frac{P(A=0 | B \leqslant 3) \times P(B \leqslant 3)}{P(A=0)}$

$P(B \leqslant 3 | B \geqslant 1) = P(B=1) + P(B=2) + P(B=3)$

(10) corrélation $(X, Y) = \dfrac{cova(X,Y)}{\sqrt{var X \cdot var Y}}$

$\rightarrow cova(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$

$E[X] = 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times 5/8 = 13/8$

$E[Y] = 0 \times 2/8 + 1 \times 4/8 + 2 \times 2/8 = 1$

$E[XY] = \frac{1}{8} \times 0 \times 1 + \frac{2}{8} \times 1 \times 1 + 0 \times 1 \times 2$

$+ 1/8 \times 2 \times 0 + 2/8 \times 2 \times 1 + 2/8 \times 2 \times 2$

$= 7/4$

$var(X) = \left(1^2 \times \frac{3}{8} + 2^2 \times 5/8\right) - \left(13/8\right)^2 = 15/64$

$var(Y) = \left(4/8 + 4 \times 2/8\right) - 1 = 1/2$

$\Rightarrow cor(XY) = \dfrac{7/4 - 13/8}{\sqrt{15/64 \times 0,5}} = 0,365$

(11) indice de X sur Y = corrélation (XY)

m̃ chose qu'au pt 10.

TP 5 : ESPERANCE ET VARIANCE TOTALE

① $x_i \sim N(20, 10^2)$ $\mu_N = 1000$

$N \sim$ Poisson

$\rightarrow P\left(Z > \frac{21000 - \mu_X}{\sigma_X}\right)$ $\rightarrow E[N] = \mu_N$

$\text{var}[N] = \mu_N$

$$\mu_X = E[X] = E\left[\sum^N x_i\right]$$

$$= E\left[E\left[\sum x_i \mid N\right]\right]$$

→ peut sortir N car chaque client est pris indépendamment.

$$= E\left[\sum^N \underbrace{E[x_i]}_{\mu_{x_i} = 20}\right]$$

$$= E\left[\sum^N 20\right]$$

$$= E[20 \cdot N]$$

$$= 20\, E[N]$$

$$= 20 \cdot 1000 = 20\,000$$

$$\text{var}_X = E[\text{var}(X/N)] + \text{var}(E[X|Y])$$

$$= E\left[\text{var}\left(\sum^N x_i \mid N\right)\right] + \text{var}\left(E\left[\sum^N x_i \mid N\right]\right)$$

$$= E\left[\sum^N \text{var}(x_i)\right] + \text{var}(20N)$$

$$= 10^2\, E[N] + 20^2\, \text{var}(N)$$

$$= 10^2 \cdot 1000 + 20^2\, 1000$$

$$= 100\,000 + 400\,000$$

$$\rightarrow \sigma_X = \sqrt{500\,000}$$

$$1 - P\left(Z \leq \frac{21\,000 - 20\,000}{\sqrt{500\,000}}\right) = 1 - P(Z \leq 1{,}41)$$

$$= 1 - 0{,}9207 = 0{,}0793$$

② $X \sim$ Poisson

$x_i \sim N(7, 4^2)$

a) $P(X > 190) = P\left(Z > \frac{190 - \mu_X}{\sigma_X}\right)$

$\mu_X = E[X] = E[\Sigma x_i]$

$= E[\Sigma E[x_i | N]]$

$= E[7N]$

$= 7 \cdot E[N]$

$= 7 \cdot 20 = 140$

$var_X = E[var X | N] + var(E[X|N])$

$= E[var(\Sigma x_i | N)] + var(7 \cdot N)$

$= 4^2 E[N] + 7^2 var(N)$

$= 4^2 \cdot 20 + 7^2 \cdot 20 = 1300$

$\rightarrow 1 - P\left(Z < \frac{190 - 140}{\sqrt{1300}}\right) = 1 - P(Z \leqslant 1{,}39)$

$= 1 - 0{,}9177$

$= 0{,}0823$

b) qd on centre la loi normale, médiane $= \mu$

si $X \sim \log N(\mu, \sigma^2)$: $\mu = E[\log(x)$ et $\sigma^2 = var(\log(x))$

$\rightarrow$ qd on centre : médiane $= \mu$

c) médiane : $F_X(x) = 0{,}5$

(4)

$X = x \qquad E[Y \mid X = x] = 10x \qquad x_i \sim N(6, 9^2)$

$\qquad\qquad var(Y \mid X = x) = x^2 \qquad n = 20$

$X = 1500 m^3$

$P\left(Z \geq \dfrac{1500 - \mu_x}{\sigma_x}\right) \qquad \rightarrow \quad \mu_y = E[Y] = E[E[Y \mid X]]$

$= E[10x]$

$= 10\, E[x]$

$= 10 \cdot 6 = 60$

$var(Y) = E[var(Y \mid X)] + var(E[X \mid Y])$

$= E[x^2] + var(10x)$

$= E[x] + E^2[x] + 10^2 var(x)$

$= 6 + 6^2 + 10^2 \cdot 9$

$= 942$

$E[X] = E[\sum^{20} Y_i] = E[\sum^{N} [E Y_i \mid N]]$

$= E[60 N] = 60 \cdot 20 = 1200$

$var[X] = \cancel{E[var(Y \mid X)] + var(E[Y \mid X])}$

$\cancel{= E[var(\sum Y_i)] + var(E[\sum Y_i])}$

$\cancel{= E[942\, N] + var(60 \cdot N)}$

$\cancel{= 942 \cdot 20 + 60^2 \cdot 20 = 90\,840}$

$= 20 \cdot var(Y) = 20 \cdot 942 = 18840$

$\rightarrow \quad 1 - P\left(Z \leq \dfrac{1500 - 1200}{\sqrt{18840}}\right) = 1 - P(Z \leq 2{,}19)$

$= 1 - 0{,}9857$

$= 0{,}0143$

(5) $E[Y|X=x] = 9 - \frac{x}{50}$ $\qquad$ $E[X] = 70$

$var(Y|X=x] = 1 + \frac{x}{100}$ $\qquad$ $var[X] = 100$

$Y \sim Log\text{-}N(\mu, \sigma^2)$

$$P(Y > 8,9) = P\left(Z \geq \frac{8,9 - \mu_Z}{\sigma_Z}\right)$$

$$E[Y] = E\left[9 - \frac{x}{50}\right] = 9 - \frac{70}{50} = 7,6$$

$$var(Y) = E[var(Y|X)] + var(E[Y|X]) = E[1 + x/100] + var(9 - x/50) = 1 + \frac{70}{100} + \cancel{92} + \frac{100}{50^2} = 1,74$$

$$\rightarrow E[Y] = e^{\mu + \sigma^2/2} = 7,6$$

$$var(Y) = (e^{\sigma^2} - 1) \cdot \underbrace{e^{2\mu + \sigma^2}}_{E^2[Y]} = 1,74$$

$$\rightarrow 1,74 = 7,6^2 \times (e^{\sigma^2} - 1)$$

$$\ln\left(\frac{1,74}{7,6^2} + 1\right) = \sigma^2 = 0,0297$$

$$\cancel{\ln e^{\sigma} = \sigma \rightarrow \ln(1,015) = 0,015}$$

$$\Rightarrow e^{\mu} \cdot e^{\frac{0,0297}{2}} = 7,6$$

$$e^{\mu} = \frac{7,6}{e^{0,0297/2}} \Rightarrow \mu = 2,01$$

$$\Rightarrow 1 - P\left(Z \leq \frac{\ln(8,9) - 2,01}{\sqrt{0,0297}}\right) = 1 - P(Z \leq 1,02)$$

$$= 1 - 0,8461$$

$$= 0,1539$$

(6) a) si $X=0 \longrightarrow B=0$ $\rightarrow P(B=0) = P(X=0) = p$ $B \sim bin$

si $X \neq 0 \longrightarrow B=1$ $\rightarrow P(X \neq 0) = 0$

montrez que : $var(X) = p(1-p)\, E^2[X|B=1] + (1-p)\, var(X|B=1)$

$$var(X) = E[var(X|B)] + var(E[X|B])$$

bin : $E[X] = np$

$var(X) = np(1-p)$

$$\rightarrow var(X) = E[var(X|B)] + var(E[X|B=1])$$

$$= var(B) + E^2[X|B=1]$$

$$= E[B^2] - E^2[B] + E$$

?

b) 200 j. $x \sim (12, 3^2)$ → pour retard de une minute → 1€

$p(x) = 0{,}20$ ⇒ sur les 200j cmb d'€ perdus?

$$E[X] = E[\Sigma E[x_i]]$$

$$= E[12N]$$

$$= 12\, E[N]$$

$$var(X) = p(1-p) \cdot E^2[X|B=1] + (1-p)\, var(X|B=1)$$

7 $x_i \sim N(20, 4^2)$

a) ne suit pas une exponentielle

b) la vitesse d'une voiture peut influencer la v de la voiture suivante, particulièrement ds le cas d'embouteillages

c) calculer la proba que 50 voitures ~~font~~ fassent un excès de vitesse

car $p(PV) = 1/3$
→ faut en moyenne 150 voitures pour donner 50 PV.

$$\cancel{P(X \geq 50) = P\left(Z \geq \frac{50 - \mu_x}{\sigma_x}\right)}$$

$$\mu_x = E[X] = E[\sum^N x_i]$$
$$= E[E[\sum^N x_i | N]]$$
$$= E[\sum^N E[x_i]]$$
$$= E[20 \cdot N] = 20\, E[N] = 20 \cdot 150 = 3000$$

$$var(X) = var(E[X|N]) + E[var(X|N)]$$
$$= var(E[\sum^N x_i | N]) + E[var(\sum^N x_i | N)]$$
$$= var(\sum^N E[x_i]) + E[\sum^N var(x_i)]$$
$$= var(20N) + E(4^2 \cdot N)$$

→ bin. négative donc $var(N) = \frac{r(1-p)}{p^2} = \frac{50(2/3)}{(1/3)^2}$

$E(N) = r/p = 150$

$$\rightarrow var(X) = 20 \times \frac{50 \times 2/3}{(1/3)^2} + 4^2 \cdot 150 = 1\,224\,000$$

8 $T \sim Exp$

à vérifier

a) montrez que : $E[T^q] = (q-1)!\, E[S]\, \mu_T^{q-1}$

$= (q-1)!\, E[S] \cdot (E[T])^{q-1}$

b)

c) $T \sim Exp$ $\quad \mu_T = 54{,}4$

$E[X|T] = 2t$ $\qquad X \sim LogN$

$var(X|T) = 3t + t^2/4 + t^3/8678$

$P(X>83) = P\left(Z > \frac{\ln(83)-\mu}{\sigma}\right)$

$E[X] = E[E[X|T]] = E[2t]$

$= 2E[t]$ $\sim Exp \rightarrow$

$= 2 \cdot 54{,}4 = 108{,}8$

$var(X) = E[var(X|T)] + var(E[X|T])$

$= E[3t + t^2/4 + t^3/8678] + var(2t)$

$= 3\mu_t + \mu_t^2/4 + \mu_t^3/8678 + 2^2 Var(t)$

$= 1139{,}2$

$\Rightarrow \mu = \ln(E[X]) - \sigma^2/2 = \ln(108{,}8) - \frac{0{,}092}{2}$

$\approx 4{,}64$

$\Rightarrow \sigma^2 = \ln\left(\frac{var(X)}{E^2[X]} + 1\right) = \ln\left(\frac{1139{,}2}{108{,}8^2} + 1\right)$

$= 0{,}092$

$P\left(Z > \frac{\ln(83) - 4{,}64}{\sqrt{0{,}092}}\right) = P(Z > -0{,}73)$

$= P(Z < 0{,}73)$

$= 0{,}7673$

d) car la loi $\log N$ est asymétrique

(9) $n = 18$ $E[x_1] = 17$ → pour chaque joueur → soit joue soit joue pas ⇒ binomiale

$P(\text{joue}) = 0,9$ $n \sim bin(0,9 \; ; 18)$

→ $E[X]$ = durée attendue du tournoi.

$$E[X] = E[E[\sum^{n} x_i \mid N]]$$
$$= E[\sum^{n} E[x_i]]$$
$$= E[17n] = 17\,E[n]$$

n = le nb de match → doit d'abord déterminer combien vont jouer → $p(\text{jeu}) = 0,9$

⇒ # joueurs $= 18 \times 0,9$
$= 16,2$
⇒ 16 joueurs

donc # match $= \frac{16 \cdot 15}{2} = 120$

→ $E[X] = 17 \cdot E[n] = 17 \cdot 120 = 2040$
→ 34 h.

(10) x_1 → $p(x=1) = 0,05$ . . . . . .

$N \sim$ Poisson

$E[N] = 25,2$ → $E[X] = \mu$
$\text{var}[X] = \mu$

$$P(X \geq 93) = P(Z \geq \frac{93 - \mu}{\sigma})$$

$\mu = E[X] = E[\sum E[x_i]]$

↳ $E[x_i] = \bar{x} = \mu = 0,05 \times 1 + 2 \times 0,45 + 3 \times 0,10 + 4 \times 0,20 + 5 \times 0,10 + 6 \times 0,10$
$= 3,15$

→ $E[3,15 \cdot N] = 3,15 \cdot E[N]$
$= 3,15 \cdot 25,2 = 79,38$

$$\text{var}(X) = E[\text{var}(X|N)] + \text{var}(E[X|N])$$

$$= E[\text{var}(\Sigma x_i)] + \text{var}(E[\Sigma x_i])$$

$$= E[\sum^{n} \underbrace{\text{var}(x_i)}_{\substack{=\mu \\ =3,15}}] + \text{var}(\sum^{n} \underbrace{E[x_i]}_{3,15})$$

$$= 3,15 \times E[N] + \text{var}(x_i) \times \text{var}(N)$$

$$= 3,15 \times 25,2 +$$

$\text{var}(x_i) = E[x^2] - E^2[x]$

$E[x^2] = 1^2 \times 0,05 + 2^2 \times 0,45 + \ldots$

$= 12,05$

$E^2[x] = (3,15)^2$

$\rightarrow \text{var}(x) = 2,13$

$\rightarrow \text{var}(N) = \mu = 3,15$

$$\text{var}(X) = 3,15 \times 25,2 + 3,15^2 \times 25,2 = 303,7$$

$$\Rightarrow P(X \geqslant 93) = 1 - P\left(Z \leqslant \frac{93 - 79,38}{\sqrt{303,7}}\right)$$

$$= 1 - P(Z \leqslant 0,78)$$

$$= 1 - 0,7823$$

$$= 0,21$$

TP 6 : ESTIMATEURS SANS BIAIS ET VRAISEMBLANCE

un estimateur de θ = toute statistique à valeur ds un espace

un estimateur sans biais = un estimateur $\hat{\theta}$ de θ est dit sans biais si

$$E_\theta[\hat{\theta}] = \theta \qquad \forall \theta \in (\text{espace})$$

→ la différence $E_\theta[\hat{\theta}] - \theta$ = le biais

→ $\hat{\theta}$ = la moyenne = $\frac{1}{n} \sum x_i$ comme estimateur

la vraisemblance max. = une fct des paramètres d'un modèle statistique calculé à partir de données observées (x)

→ cas discret : probabilité jointe

$$L_\theta(X) = L_\theta(X_1, \dots, X_n)$$
$$= \prod_{i=1}^{n} p_\theta(X_i) \qquad p = \text{fct de masse}$$

→ cas continu : densité jointe

$$L_\theta(X) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(X_i) \qquad f = \text{fct de densité}$$

(1) construire un estimateur sans biais de λ

$\lambda \sim \text{Poisson}(\lambda)$

Poisson : $E[X] = \mu \quad \rightarrow \quad E_\theta[\theta] = \mu$

sachant que $\hat{\theta} = \frac{1}{m} \sum^{m} x_i \quad \rightarrow \quad E[\hat{\theta}] = E\left[\frac{1}{m} \sum^{m} x_i\right]$

$$= \frac{1}{m} \sum^{m} E[x_i] = \frac{1}{m} \cdot m\,\mu$$

$\rightarrow E[\hat{\theta}] = \mu$

(2) estimateur sans biais pour $\mu \sim \text{Normale}(\mu, \sigma^2)$

$$E_\mu[\hat{\mu}] = E_\mu\left[\frac{1}{m} \sum^{m} x_i\right] = \frac{1}{m} \cdot m \, \underbrace{E_\mu[\hat{\mu}]}_{=\mu} = \mu.$$

③ estimateur sans biais pour $\lambda \sim Exp(\lambda)$

$E[X] = \frac{1}{\lambda} \rightarrow E[\hat{\lambda}] = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow$ pas bon car doit $\hat{=}$ au paramètre

$\Rightarrow E[\hat{\lambda}] = \lambda$

1 - on isole λ : $\lambda = \frac{1}{E[X]}$

2 - propose que $\hat{\lambda} = \frac{1}{\frac{1}{m}\sum^{m} x_i}$

3 - on remplace

$$\Rightarrow E[\hat{\lambda}] = E\left[\frac{1}{\frac{1}{m}\sum^{m} x_i}\right] = mE\left[\frac{1}{\sum x_i}\right]$$

$\Rightarrow$ peut pas sortir la somme si en position dénominateur

$\Rightarrow$ peut pas aller + loin ici

$\rightarrow$ on ne sait pas déterminer si son estimateur est sans biais.

④ $f_\theta = \begin{cases} \frac{4x^3}{\theta^4} & \text{si } 0 < x < \theta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$\rightarrow E[X] = \int x f_\theta = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0 \, dx + \int_0^\theta x \frac{4x^3}{\theta^4} dx + \int_\theta^{+\infty} x \cdot 0 \, dx$$

$$= \frac{4}{\theta^4}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^\theta = \frac{4}{\theta^4} \cdot \frac{\theta^5}{5} = \frac{4}{5}\theta$$

$\rightarrow$ var $= E[X^2] - E^2[X]$

$$E[X^2] = \int x^2 \cdot \frac{4x^3}{\theta^4} dx = \frac{4}{\theta^4}\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^\theta = \frac{2}{3}\theta^2$$

$$E^2[X] = \left(\frac{4}{5}\theta\right)^2 = \frac{16}{25}\theta^2$$

$$\Rightarrow \text{var} = \frac{2}{3}\theta^2 - \frac{16}{25}\theta^2$$

estimateur pour θ $\qquad \frac{4}{5}\theta$

$$E[\hat{\theta}] = E\left[\frac{1}{n}\hat{\Sigma}\theta\right] = \frac{1}{n}\hat{\Sigma}\overbrace{E[\theta]}^{e} = \frac{1}{n}\hat{\Sigma}\frac{4}{5}\theta$$

$\rightarrow E[\hat{\theta}] = \frac{4}{5}\theta \quad \Rightarrow$ pas bon.

1 - isole : $\theta = \frac{5\,E[\theta]}{4}$

2 - proposition : $\boxed{\hat{\theta} = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{n}\sum^{n} x_i}$

3 - on remplace :

$$\rightarrow E[\hat{\theta}] = E\left[\frac{5}{4}\,\frac{1}{n}\sum^{n} x_i\right]$$

$$= \frac{5}{4}\,E[x] = \frac{\cancel{5}}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{4}}{\cancel{5}}\theta$$

$$E[\hat{\theta}] = \theta$$

(5) calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance

(1) - calculer la vraisemblance

(2) - prendre le ln (astuce de calcul)

(3) - dériver partiellement selon le paramètre

(4) - égaliser à 0 (= détermination du max) et isoler le paramètre pour déterminer l'estimateur max. de vraisemblance

a) poisson $\rightarrow$ discret.

(1) $L_\theta(X) = \prod_{i=1}^{n} p_\theta(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\mu}\mu^{x_i}}{x_i!}$

(2) $\ln(L_\theta(X)) = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\mu}\mu^{x_i}}{x_i!}\right)$

$\rightarrow \ln a \times b = \ln a + \ln b$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{e^{-\mu}\cdot\mu^{x_i}}{x_i!}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(-\mu + \ln(\mu^{x_i}) - \ln(x_i!)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(-\mu + x_i\ln(\mu) - \ln(x_i!)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-\mu) + \sum_{i=1}^{n} x_i \ln(\mu) - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i!)$$

$$= -n\mu + \sum_{i=1}^{n} x_i \ln(\mu) - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i!)$$

$$\frac{d}{d\mu} = -n + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{1}{\mu} - 0 = 0$$

$$\rightarrow \sum^{n} x_i \cdot \frac{1}{\mu} = n$$

$$\boxed{\mu = \frac{\sum^{n} x_i}{n}} \Longrightarrow = \operatorname{Arg\,max}_{\mu} L_{\mu}(X)$$

b) Binomiale → discrete $\qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

$$L_\theta(X) = \prod_{i=1}^{n} P_\theta(X = x) = \prod_{i=1}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{n!}{k_i!\,(n-k_i)!} p^{k_i} (1-p)^{n-k_i}$$

$$\ln(L_\theta(X)) = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{n!}{k_i!\,(n-k_i)!} p^{k_i} (1-p)^{n-k_i}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{n!}{k_i!\,(n-k_i)!} \cdot p^{k_i} \cdot (1-p)^{n-k_i}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\ln \frac{n!}{k_i!\,(n-k_i)!} + k_i \ln(p) + (n-k_i) \ln(1-p)\right)$$

$=$

c) normale → continue

$$L_\theta(X) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\ln(L_\theta(X)) = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right)$$

$$= \sum^{n} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right)$$

$$\sum^{n} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) + \sum^{n} \ln(\sigma^{-1}) - \sum \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

$$= n\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) - n\ln(\sigma) - \sum^{n} \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

$$\frac{d}{d\sigma} = 0 - n\cdot\frac{1}{\sigma} - \sum^{n} \frac{(x_i-\mu)^2}{\sigma^3} = 0$$

$$\frac{n}{\sigma} = \frac{\sum^{n}(x_i-\mu)^2}{\sigma^3} \rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$\frac{d}{d\mu} = 0 + 0 - \sum^{n} \frac{1}{2\sigma^2}\cdot(x_i^2 - 2x_i\mu + \mu^2)'$$

$$= 0 + 0 - \sum^{n} \frac{-\cancel{2}x_i + \cancel{2}\mu}{\cancel{2}\sigma^2} = 0$$

$$\rightarrow \sum^{n} \frac{\mu - x_i}{\sigma^2} = 0 \rightarrow \frac{n\mu - \sum x_i}{\sigma^2} = 0$$

$$\rightarrow \mu = \frac{1}{n}\sum x_i$$

6

a) $$E[X] = \int_{-\infty}^{0} x\cdot 0 + \int_{0}^{\lambda} x\cdot\frac{3x^2}{\lambda^3}\,dx + \int_{x}^{\infty^+} x\cdot 0\,dx$$

$$= \frac{3}{\lambda^3}\int_0^\lambda x^3\,dx = \frac{3}{\lambda^3}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^\lambda \Rightarrow \frac{3}{\lambda^3}\cdot\frac{\lambda^4}{4} = \frac{3}{4}\lambda$$

$$\mathrm{var}(X) = E[X^2] - E^2[X]$$

$$E[X^2] = \int_0^\lambda x^2\cdot\frac{3x^2}{\lambda^3}\,dx = \frac{3}{\lambda^3}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^\lambda$$

$$= \frac{3}{\lambda^3}\cdot\frac{\lambda^5}{5} = \frac{3}{5}\lambda^2$$

$$E^2[X] = \frac{9}{16}\lambda^2$$

$$\Rightarrow \mathrm{var} = \frac{3}{5}\lambda^2 - \frac{9}{16}\lambda^2$$

b) estimateur sans biais :

→ estimateur $\hat{\theta}$ de θ est dit sans biais

si $E[\hat{\theta}] = \theta$ ⇒ = au paramètre

→ un estimateur : $\hat{\theta}$ ici est estimé à la moyenne empirique : $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$

c) $E[\hat{\lambda}] = E[\frac{1}{n}\sum^{n} x_i]$

$= \frac{1}{n} \cdot \sum^{n} E[x_i]$ et $E[x_i] = \frac{3}{4}\lambda$

→ $E[\hat{\lambda}] = \frac{3}{4}\lambda \neq \lambda$ ⇒ pas bon.

- isole : $\lambda = \frac{4}{3} E[x_i]$

- proposition : $\hat{\lambda} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{n} \sum^{n} x_i$

- test :

$E[\hat{\lambda}] = E\left[\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum^{n} x_i\right]$

$= \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum^{n} E[x_i]$

$= \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4}\lambda$

⇒ $E[\hat{\lambda}] = \lambda$.

7 a) $E[X] = \int_0^\theta x \cdot \frac{6}{\theta^3}(\theta - x)x \, dx$

$= \int_0^\theta \frac{6\theta x^2 - 6x^3}{\theta^3} dx = \frac{6}{\theta^3}\left[\frac{\theta x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^\theta$

$= \frac{6}{\theta^3}\left(\frac{\theta^4}{3} - \frac{\theta^4}{4}\right) = \frac{6}{\theta^3} \cdot \frac{\theta^4}{12} = \frac{1}{2}\theta$

$var(X) = E[X^2] - E^2[X]$

$$E[X^2] = \int_0^\theta x^2 \frac{6(\theta - x)x}{\theta^3} dx$$

$$= \frac{6}{\theta^3}\left[\frac{\theta x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^\theta = \frac{\cancel{6}}{\theta^3}\frac{\theta^5}{20} = \frac{3}{10}\theta^2$$

$$E^2[X] = \frac{1}{4}\theta^2$$

$$\Rightarrow var = \left(\frac{3}{10} - \frac{1}{4}\right)\theta^2$$

3) $E[\hat{\theta}] = E\left[\frac{1}{n}\sum^n x_i\right] = \frac{1}{n}\sum^n E[x_i]$ et $E[x_i] = \frac{\theta}{2}$

$$= \frac{\theta}{2} \neq \theta$$

(1) idée : $\theta = 2E[X]$

(2) proposition : $\hat{\theta} = \frac{2}{n} \cdot \sum^n x_i$

→ test : $E[\hat{\theta}] = E\left[\frac{2}{n}\sum^n x_i\right]$

$$= \frac{2}{n}\sum^n E[x_i] = \frac{2}{n} n \cdot \frac{\theta}{2}$$

$$= \theta \rightarrow \text{ok}.$$

8 a) $E[X] = \sum^n x_i p$

$$\begin{cases} x = -1 \rightarrow p = p \\ x = 2 \rightarrow p = 1 - p \end{cases}$$

$p \in [1; 0]$

$$E[X] = -1 \cdot p + 2(1-p)$$

$$= -p + 2 - 2p = 2 - 3p$$

$var = E[X^2] - E^2[X]$

$$E[X^2] = (-1)^2 \cdot p + (2)^2(1-p) = p + 4 - 4p = 4 - 3p$$

$$\rightarrow var(X) = 4 - 3p - (2-3p)^2$$

$$= 4 - 3p - (4 - 12p + 9p^2)$$

$$= 9p - 9p^2 = 9p(1 - p^2)$$

2) $E[\hat{p}] = E[\frac{1}{n} \sum^n x_i]$

$= \frac{1}{n} \cdot \sum^n E[x_i]$ et $E[x_i] = 2 - 3p$

$= 2 - 3p \neq p$

(1) - isole : $p = \frac{-E[x_i] + 2}{3} = \frac{2 - E[x_i]}{3}$

(2) - proposition : $\hat{p} = \frac{2 - \frac{1}{n} \sum^n x_i}{3}$

→ test : $E[\hat{p}] = E\left[\frac{2 - \frac{1}{n} \sum^n x_i}{3}\right]$

$= \frac{2 - \frac{1}{n} \cdot n\, E[x_i]}{3} = \frac{2 - (2 - 3p)}{3} = \frac{2 - 2 + 3p}{3} = p$

3) $\hat{p} = \frac{2 - \frac{1}{n} \sum^n x_i}{3}$

→ $var\left(\frac{2 - \frac{1}{n} \sum^n x_i}{3}\right) = var\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3n} \cdot \sum^n x_i\right)$

→ $var \frac{2}{3} = 0$ car $\frac{2}{3} = c^{ste}$

→ $var\left(\frac{1}{3n}\right) = \left(\frac{1}{3n}\right)^2$ ⇒ qd on sort qlq chose d'une variance on met au carré SAUF qd sort une Σ

→ $var\left(\sum^n x_i\right) = \sum^n var(x_i)$

→ $var(\hat{p}) = \frac{1}{9n^2} \cdot \sum^n var(x_i)$

$= \frac{1}{9\cancel{n^2}} \cdot \cancel{n} \cdot (9p(1 - p^2))$

$= \frac{p(1 - p^2)}{n}$

9 a) $E[Z] = \int_0^1 z \cdot z \, dz + \int_1^2 z(2-z)\, dz$

$E[X] = E[\theta + Z]$
$= E[\theta] + E[Z]$
$= \theta + 1$

$= \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{2}{2}z^2 - \frac{z^3}{3}\right]_1^2$

$= \frac{1}{3} + \left(\left(2^2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left(1 - \frac{1}{3}\right)\right) = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = 1$

$4 - 8/3$ $\quad \frac{2}{3}$

$\frac{16}{4} - \frac{8}{3}$

$\frac{3 \cdot 16 - 4 \cdot 8}{12} - \frac{2}{3}$

$\operatorname{var}(X) = E[X^2] - E^2[X] = \theta^2 + 2\theta + E[Z^2] - E^2[Z]$

$E[Z^2] = \int_0^1 z^2 \cdot z \, dz + \int_1^2 z^2(2-z)\, dz$

$= \left[\frac{z^4}{4}\right]_0^1 + \left[\frac{2z^3}{3} - \frac{z^4}{4}\right]_1^2$

$= \frac{1}{4} + \left(\left(\frac{2 \cdot 8}{3} - \frac{16}{4}\right) - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right)\right) = 7/6$

$\operatorname{var}(Z) = 7/6 - 1 = 1/6$

b) $E[\hat{X}] = \frac{1}{n} \sum^n E[X] =$

$\rightarrow$ isolar: $E[Z] = 1 +$

TP 7 : tests d'une moyenne

1 a) $\bar{x} = 24,5$ $\quad \sigma = 1,5 \quad n = 9$

2. $\alpha = 0,05$

$$Q_{\alpha/2} \leqslant \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leqslant Q_{1-\alpha/2}$$

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot Q_{\alpha/2} - \bar{x} \leqslant -\mu_0 \leqslant \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot Q_{1-\alpha/2} - \bar{x}$$

$$Q_{1-\alpha/2} = Q_{0,975} = 1,96$$

$T_{H_0} \sim N(0,1)$

$$25,48 \geqslant \mu_0 \geqslant 23,52$$

3. a) $H_0 : \mu < 22,8$
$H_1 : \mu > 22,8$ $\quad \to R_{H_0}$ si $T_{H_0} > Q_{1-\alpha}$ $\quad \alpha = 0,01$

$$\to T_{H_0} : \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{24,5 - 22,8}{1,5/\sqrt{9}} = 3,4$$

$$Q_{1-\alpha} = Q_{0,99} = 2,33 \quad \Rightarrow R_{H_0}.$$

b) $P(R_{H_0} \mid \mu = 23) = P(T_{H_0} > Q_{1-\alpha} \mid \mu = 23)$

$$T_{H_a} : \frac{\bar{x} - \mu_a}{\sigma/\sqrt{n}} + \frac{\mu_a - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow P\left(T_{H_a} > Q_{1-\alpha} - \left(\frac{\mu_a - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)\right)$$

$$P\left(T_{H_a} > Q_{0,99} - \left(\frac{23 - 22,8}{1,5/3}\right)\right)$$

$$= P(T_{H_a} > 2,33 - 0,4)$$

$$= 1 - P(T_{H_a} \leqslant 1,93)$$

$$= 1 - 0,9732 = 0,0268$$

4) a) $H_0 : \mu = 22,8$
$H_1 : \mu \neq 22,8$

$\rightarrow R_{H_0}$ si $T_{H_0} \notin [Q_{\alpha/2} \,;\, Q_{1-\alpha/2}]$

$\alpha = 0,01 \quad \rightarrow Q_{0,995} = 2,58$

$\rightarrow [-2,58 \,;\, 2,58]$

$T_{H_0} : \quad \dfrac{24,5 - 22,8}{0,5} = 3,4 \qquad \Rightarrow R_{H_0}$.

b) $P(R_{H_0} \mid \mu = 23,5) = P(T_{H_0} \notin [-2,58 \,;\, 2,58] \mid \mu = 23,5)$

$= 1 - P(T_{H_0} \in [-2,58 \,;\, 2,58] \mid \mu = 23,5)$

$= 1 - P\left(-2,58 \leq T_{H_a} + \dfrac{\mu_a - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq 2,58\right)$

$= 1 - P\left(-2,58 - \left(\dfrac{23,5 - 22,8}{0,5}\right) \leq T_{H_a} \leq 2,58 - (1,4)\right)$

$= 1 - P\left(-3,98 \leq T_{H_a} \leq \quad \right)$

$= 1 - P(T_{H_a} \leq 1,18) - P(T_{H_a} \leq -3,98)$

$= 1 - 0,8810 - 0 \quad = 0,119$

2 μ
$\sigma = 4$
$\alpha = 0,01$

③ $\bar{x} = 22,53$ $n = 17$ $s = 1,25$

a) $\alpha = 0,10$

$$Q_{\alpha/2} \leqslant T_{H_0} \leqslant Q_{1-\alpha/2} \qquad \mu \sim t_{n-1}$$

$$-1,746 \leqslant \frac{\sqrt{n-1}\,(\bar{x} - \mu_0)}{s} \leqslant 1,746 \qquad \rightarrow Q_{1-\alpha/2} = Q_{16;0,95} = 1,746$$

$$\frac{-1,746 \times 1,25}{\sqrt{16}} - 22,53 \leqslant -\mu_0 \leqslant -21,98$$

$$23,08 \geqslant \mu_0 \geqslant 21,98$$

b) $H_0 : \mu \leqslant 22$ $\alpha = 0,05$ $Q_{1-\alpha} = Q_{16;\,0,95} = 1,746$

$H_1 : \mu > 22$

$$H_0 = \frac{22,53 - 22}{1,25/4} = 1,696 \Rightarrow \text{pas } R_{H_0}$$

c) $H_0 : \mu = 23$

$H_1 : \mu \neq 23$ R_{H_0} si $T_{H_0} \notin [Q_{\alpha/2} ; Q_{1-\alpha/2}]$

$$\alpha = 0,01 \rightarrow Q_{16;\,0,995} = \pm 2,921$$

$$T_{H_0} : \frac{22,53 - 23}{1,25/4} = -1,504 \Rightarrow \text{pas } R_{H_0}$$

④ $n = 400$ $\bar{x} = 45,12$ $s^2 = 900$

a) $H_0 : \mu = 50$ $\alpha = 0,05$ $\rightarrow \mu \sim N(0,1)$

$H_1 : \mu \neq 50$

$$Q_{1-\alpha/2} = Q_{0,975} = 1,96$$

$$\rightarrow T_{H_0} = \frac{45,12 - 50}{\sqrt{900}/\sqrt{399}} = -3,25 \Rightarrow R_{H_0}.$$

b) $P(T_{H_0} \mid \mu = 46) = 1 - P(T_{H_0} \in [Q_{\alpha/2} ; Q_{1-\alpha/2}] \mid \mu = 46)$

$$1 - P\left(Q_{\alpha/2} - \left(\frac{\mu_1 - \mu_0}{30/\sqrt{399}}\right) \leqslant T_{H_1} \leqslant Q_{1-\alpha/2} - \underbrace{\left(\frac{46-50}{30/\sqrt{399}}\right)}_{-2,66}\right)$$

$= 1 - \left(P\underbrace{\left(T_{H_1} \leq 1,62\right)}_{0,9999} - P\underbrace{\left(T_{H_1} \leq 0,72\right)}_{0,7580}\right)$

$= 1 - (0,9999 - 0,7580)$

$= 0,7581$

(5)

$n_A = 16 \quad \bar{x}_A = 101,5 \quad \sigma_A = 2 \quad \alpha = 0,05$

$n_B = 12 \quad \bar{x}_B = 103 \quad \sigma_B = 3$

$$Q_{\alpha/2} \leq T_{H_0} \leq Q_{1-\alpha/2}$$

$$T_{H_0} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}}$$

$$-1,96 \times 1 - 101,5 + 103 \leq -(\mu_1 - \mu_2 \leq 3,46$$

$$0,46 \geq \mu_1 - \mu_2 \geq -3,46$$

(6)

$\sigma_1 = \sigma_2 \quad n_a = 10 \quad \bar{x}_1 = 7,22 \quad s_1^2 = 1,194$

$n_b = 10 \quad \bar{x}_2 = 6,39 \quad s_2^2 = 0,742$

$\alpha = 0,05$

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad \rightarrow \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad \sim t_{n_1 + n_2 - 2}$

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

R_{H_0} si $T_{H_0} \notin [Q_{\alpha/2} ; Q_{1-\alpha/2}]$

$= [-2,101 ; 2,101]$

$\rightarrow T_{H_0} : \dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{Sp\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \qquad Sp = \dfrac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$

$= 1,076$

$= \dfrac{7,22 - 6,39}{Sp\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}}} = 1,73$

$\hookrightarrow$ Pas R_{H_0}

(7) $n_a = 50$ $\qquad n_b = 50$ $\qquad \alpha = 0,05$

$\bar{x}_a = 15$ $\qquad \bar{x}_b = 12$

$\sigma_a = 6$ $\qquad \sigma_b = 4$

→ si rendement de A meilleur que B → $\mu_a > \mu_b$

$H_0 : \mu_a \leqslant \mu_b$

$H_1 : \mu_a > \mu_b$

$$\rightarrow T_{H_0} : \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \underbrace{(\mu_1 - \mu_2)}_{=0}}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1 - 1} + \frac{s_2^2}{n_2 - 1}}}$$

⇒ utilise cette formule car pas précisé si population gaussienne ou non et $n \geqslant 50$

$$= \frac{15 - 12}{\sqrt{\frac{6^2}{49} + \frac{4^2}{49}}} = 2,91$$

$\rightarrow Q_{1-\alpha} = Q_{0,95} \sim N(0,1) = 1,65$

$\Rightarrow T_{H_0} > Q_{1-\alpha} \Rightarrow R_{H_0}$ donc $\mu_a > \mu_b$.

(8) $n_1 = 5$ $\qquad n_2 = 5$ $\qquad \alpha = 0,10$

$\bar{x}_1 = \frac{7+4+5+5+4}{5} = 5$ $\qquad \bar{x}_2 = 3$

$\sigma_1 = \sqrt{2}$ $\qquad \sigma_2 = \sqrt{3}$

$H_0 : \mu_1 \leqslant \mu_2$

$H_1 : \mu_1 > \mu_2$

$$T_{H_0} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - 0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = 2$$

$Q_{1-\alpha} \sim N(0,1) \rightarrow Q_{0,90} = 1,28$

$\Rightarrow R_{H_0}$

$\mu_1 < \mu_2$

⇒ régime 2 + efficace que 1.

(9) ≠ significative del μ_1 et μ_2 ?

$$\boxed{s^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2}$$

→ si ce n'est pas le cas : $\mu_1 - \mu_2 = 0$

→ si c'est le cas $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$

⇒ $H_0 : \mu_3 = 0$

$H_1 : \mu_3 \neq 0$

	x_i
1	2,4
2	1
3	0,7
4	0
5	1,1
6	1,6
7	1,1
8	−0,4
9	0,1
10	0,7

$$\bar{x}_3 = \frac{8-5,6 + 8,4-7,4 + 8-7,3 + \dots}{n}$$

$$\rightarrow \bar{x} = \frac{2,4+1+0,7+0+\dots}{n}$$

$$= 0,83$$

$$s^2 = \frac{(2,4-0,83)^2 + (1-0,83)^2 + (0,7-0,83)^2 \dots}{9}$$

$$= 0,667$$

$2,4 - 0,83 = 1,57$
$1 - 0,83 = 0,17$
$0,7 - 0,83 = -0,13$
$0 - 0,83 = -0,83$
$1,1 - 0,83 = 0,27$
$1,6 - 0,83 = 0,77$
$1,1 - 0,83 = 0,27$
$-0,4 - 0,83 = -1,23$
$0,1 - 0,83 = -0,73$
$0,7 - 0,83 = -0,13$

$$T_{H_0} = \frac{\bar{x} - \mu_3}{s/\sqrt{n-1}}$$

$$= \frac{0,83 - 0}{0,667/3}$$

$$= 3,73$$

$$Q_{1-\alpha/2} = Q_{0,975} = 2,262$$

$\sim t_{n-1}$

→ $[-2,262 \ , \ 2,262]$

⇒ RH_0.

TP 8 : TEST D'UNE PROPORTION

① $p = 0{,}25$

IC à 95% $\rightarrow \alpha = 0{,}05$

$T_{H_0} \sim N(0,1)$

$Q_{1-\alpha/2} = Q_{0,975} = 1{,}96$

$$\rightarrow Q_{\alpha/2} \leq T_{H_0} \leq Q_{1-\alpha/2}$$

$$Q_{\alpha/2} \leq \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \leq Q_{1-\alpha/2}$$

$\rightarrow$ peut estimer p_0 à $\hat{p}$ qd recherche IC.

$$Q_{\alpha/2} \leq \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}} \leq Q_{1-\alpha/2}$$

$$-1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} - \hat{p} \leq -p_0 \leq -0{,}165$$

$$0{,}33 \geq p_0 \geq 0{,}165$$

② $p = \frac{340}{500} = 0{,}68$

a) $-1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}68(1-0{,}68)}{500}} - 0{,}68 \leq -p_0 \leq -0{,}64$

$$0{,}72 \geq p_0 \geq 0{,}64$$

b) $L = Q_{1-\alpha/2} - Q_{\alpha/2}$

$\frac{L}{2} = 0{,}02 \quad \rightarrow Q_{1-\alpha/2} - Q_{\alpha/2} = 0{,}04$

$$\frac{L}{2} = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \cdot Q_{1-\alpha/2} = 0{,}02$$

$$\rightarrow 0{,}02^2 \cdot n = \hat{p}(1-\hat{p}) \cdot (Q_{1-\alpha/2})^2$$

$$n = \frac{0{,}68(0{,}32) \cdot 1{,}96^2}{0{,}02^2} = 2089{,}8$$

$$\Rightarrow n \geq 2090.$$

③ $n = 1000$

$p = 34/1000$

a) $H_0 : p \leqslant 0{,}3$ $\rightarrow \alpha = 0{,}10$

$H_1 : p > 0{,}3$

$$\rightarrow T_{H_0} : \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0{,}034 - 0{,}3}{\sqrt{\frac{0{,}3 \times 0{,}7}{1000}}} = -18{,}36$$

$Q_{1-\alpha} = Q_{0{,}90} = 1{,}28$ $\rightarrow$ pas RH_0.

b) $P(RH_0 \mid p_a = 0{,}32)$

$$= P(T_{H_0} > Q_{1-\alpha} \mid p_a = 0{,}32)$$

$$= P\left(T_{H_a} > Q_{1-\alpha} - \frac{p_a - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}\right)$$

$$= P\left(T_{H_a} > 1{,}28 - \left(\frac{0{,}32 - 0{,}3}{\sqrt{\frac{0{,}3 \times 0{,}7}{1000}}}\right)\right)$$

$$= P(T_{H_a} > -0{,}1)$$

$$= P(T_{H_a} < 0{,}1) = 0{,}5398$$

④ $p_2 = 0{,}60$

nouveau médic : $p_1 = 0{,}70$ $\alpha = 0{,}05$

FAUX $\rightarrow$ peut pas considérer que $n_2 = 100$

$\rightarrow$ nouveau médic + efficace que ancien ?

$Q_{1-\alpha} = Q_{0{,}95} = 1{,}65$

$H_0 : p_1 \leqslant p_2$ $\rightarrow p_1 - p_2 = 0$

$H_1 : p_1 > p_2$

$$\rightarrow T_{H_0} = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

$$\hat{p} = \frac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1 + n_2} = 0{,}65$$

$$= \frac{0{,}70 - 0{,}60 - 0}{\sqrt{0{,}65 \times 0{,}35\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100}\right)}} = 1{,}48$$

$\Rightarrow$ pas RH_0

donc nouveau médic + efficace.

Bonne méthode :

si nvx médic + efficace que ancien alors $p_0 > p_1$

$H_0 : p_0 \leq 0,6$ $\qquad \hat{p} = 0,70 \qquad n = 100$

$H_1 : p_0 > 0,6$

$$\rightarrow T_{H_0} : \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0,70 - 0,60}{\sqrt{\frac{0,70 \times 0,60}{100}}} = 2,04$$

$\rightarrow Q_{1-\alpha} = Q_{0,95} = 1,65$

$\rightarrow 2,04 > 1,65 \Rightarrow R_{H_0} \Rightarrow$ oui + efficace.

(5) $n = 10 \qquad \hat{p} = 0,7$

a) $H_0 : p_0 \leq 1/2$ $\qquad \alpha = 0,05 \rightarrow Q_{1-\alpha} = Q_{0,95} = 1,65$

$H_1 : p_0 > 1/2$

$$T_{H_0} : \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0,7 - 0,5}{\sqrt{\frac{0,5 \times 0,5}{10}}} = 1,27$$

$\rightarrow$ pas $R_{H_0} \Rightarrow p_0 \leq 1/2$

b) $P(R_{H_0} \mid p_a = 0,15)$

$$= P\left(T_{H_1} > Q_{1-\alpha} - \left(\frac{p_a - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}\right)\right)$$

$$= P\left(T_{H_1} > 1,65 - \left(\frac{0,15 - 0,5}{\sqrt{\frac{0,5 \times 0,5}{10}}}\right)\right)$$

$$= 1 - P(T_{H_1} \leq 3,86)$$

⑥ $p_{\text{médic}\,(1)} = 99/320 = 0,31$ $n_{\text{médic}} = 320$

$p_{\text{placebo}\,(2)} = 62/299 = 0,21$ $n_{\text{placebo}} = 299$

a) IC 95% → $p_1 - p_2$ $Q_{1-\alpha/2} = Q_{0,975} = 1,96$

$$Q_{\alpha/2} \leq \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \leq Q_{1-\alpha/2}$$

$$\hat{p} = \frac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1 + n_2} = \frac{320 \times 0,31 + 299 \times 0,21}{320 + 299}$$

$$= 0,26$$

$$-1,96 \times \sqrt{0,26 \times 0,74 \times \left(\frac{1}{320} + \frac{1}{299}\right)} - \hat{p}_1 + \hat{p}_2 \leq -(p_1 - p_2) \leq -0,03$$

$$0,17 \leq p_1 - p_2 \leq 0,03$$

b) $H_0 : p_1 \leq p_2$ → $p_1 - p_2 = 0$

$H_1 : p_1 > p_2$ $Q_{1-\alpha} = Q_{0,95} = 1,65$

$$T_{H_0} = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - 0}{\sqrt{\hat{p} \times (1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{0,31 - 0,21}{\sqrt{0,26 \times 0,74 \times \left(\frac{1}{320} + \frac{1}{299}\right)}}$$

$$= 2,83$$

$\Rightarrow R_{H_0}$ $\Rightarrow p_1 > p_2$

médicament + efficace que placebo

⑦ $\hat{p}_1 = 30/140 = 0,214$

$\hat{p}_2 = 50/70 = 0,71$

a) $H_0 : p_1 = p_2$ → R_{H_0} si $T_{H_0} \notin [Q_{\alpha/2} ; Q_{1-\alpha/2}]$

$H_1 : p_1 \neq p_2$ $\alpha = 5\%$

$$T_{H_0} : \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - 0}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

$$\hat{p} = \frac{n_1 \hat{p}_1 + n_2 \hat{p}_2}{n_1 + n_2} = 0,38$$

$\rightarrow T_{H_0} = -6,98$ $\qquad Q_{1-\alpha/2} = Q_{0,975} = 1,96$

b) $Q_{\alpha/2} \leq T_{H_0} \leq Q_{1-\alpha/2}$

$$-1,96 \times \sqrt{0,38 \times (1-0,38) \times \left(\frac{1}{140} + \frac{1}{70}\right)} - 0,214 + 0,71 \leq -(p_1 - p_2) \leq 0,64$$

$\rightarrow -0,36 \geqslant p_1 - p_2 \geqslant -0,64$

(8) $p_1 = 7/35$

$p_2 = 11/33$

a) $\alpha = 0,05$ IC

$$Q_{\alpha/2} \leq \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}} \leq Q_{1-\alpha/2}$$

b) + de fumeurs en physique $\rightarrow$ oui si $p_2 > p_1$

$\rightarrow H_0 : p_1 \leq p_2$

$H_1 : p_1 > p_2$

(9) $p_1 = 4/36 = 0,111$

$p_2 = 6/43 = 0,14$

a) IC à 99% pour p_1 $\qquad Q_{1-\alpha/2} = Q_{0,995}$

$\alpha = 0,01$ $\qquad = 2,58$

$$-2,58 \times \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n}} - 0,111 \leq -p_0 \leq 0,024$$

$$0,25 \geqslant p_0 \geqslant -0,024$$

b) $\alpha = 0,02$

$H_0 : p_1 \leq p_2$ $\rightarrow$ maths déménagent moins que physiciens

$H_1 : p_1 > p_2$

$$T_{H_0} : \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - \overbrace{(p_1 - p_2)}^{=0}}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \qquad \hat{p} = \frac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1 + n_2}$$

$$= 0{,}127$$

$$= -0{,}39 \qquad Q_{1-\alpha} = Q_{0{,}98} = 2{,}05$$

$$\rightarrow p_1 \leq p_2$$

10 $\hat{p}_1 = 56/100$

$\hat{p}_2 = 60/100$

a) IC à 99% pour $\hat{p}_1$

$$Q_{1-\alpha/2} = Q_{0{,}995} = 2{,}58$$

$$-2{,}58 \leq \frac{\hat{p}_1 - p_1}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n}}} \leq 2{,}58$$

$$-2{,}58 \times 0{,}050 - 0{,}56 \leq -p_1 \leq -0{,}481$$

$$0{,}689 \geq p_1 \geq 0{,}481$$

b) $H_0 : p_1 \leq p_2$

$H_1 : p_1 > p_2$

$\alpha = 0{,}10$

$\rightarrow Q_{1-\alpha} = Q_{0{,}90} = 1{,}28$

$$\rightarrow T_{H_0} = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \qquad \hat{p} = \frac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1 + n_2} = 0{,}58$$

$$= \frac{0{,}56 - 0{,}60}{\sqrt{0{,}58 \times 0{,}42 \times \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100}\right)}}$$

$$= -0{,}573$$

$$\Rightarrow p_1 \leq p_2 .$$

TP 9 : TESTS χ^2

① H_0 : $p_1 = 1/6$ $p_2 = 1/6$ $p_3 = 1/6$ $p_4 = 1/6$ $p_5 = 1/6$ $p_6 = 1/6$

H_1 : au moins une valeur $\neq$

$\rightarrow R_{H_0}$ si $T_{H_0} > \chi^2_{k-1\,;\,1-\alpha}$ $\alpha = 0,05$

$$T_{H_0} = \sum \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$$

$$= \frac{(20 - 120 \cdot 1/6)^2}{120/6} + \frac{(30 - 120/6)^2}{120/6} + \frac{(20 - 120/6)^2}{120/6} + \frac{(25 - 120/6)^2}{120/6}$$

$$+ \frac{(15 - 120/6)^2}{120/6} + \frac{(15 - 120/6)^2}{120/6}$$

$$= 12,5$$

$\Rightarrow R_{H_0}$.

$\chi^2_{k-1\,;\,1-\alpha} = \chi^2_{5\,;\,0,95} = 11,1$

② $n = 560$ $\alpha = 0,01$

H_0 : $PP = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ $FP = 1/4$ $k = 4$

$PF = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ $FF = 1/4$

H_1 : une valeur $\neq$

$$\rightarrow T_{H_0} = \frac{(207 - 560/4)^2}{560/4} + \frac{(146 - 560/4)^2}{560/4} + \frac{(121 - 560/4)^2}{560/4} + \frac{(86 - 560/4)^2}{560/4}$$

$$= 32,06 + 0,257 + 2,58 + 20,83$$

$$= 55,73$$

$\Rightarrow R_{H_0}$.

$\chi^2_{5\,;\,0,99} = 15,1$

(3) $n = 200$

$n_{RF} = 100$ $n_{RW} = 70$ $n_{RB} = 30$ $\alpha = 0,10$

H_0 : $p_F = 0,60$ $p_W = 0,30$ $p_B = 0,10$ $k = 3$

H_1 : une valeur $\neq$

$$\to T_{H_0} = \frac{(100 - 200 \times 0,60)^2}{200 \times 0,60} + \frac{(70 - 200 \times 0,30)^2}{200 \times 0,30} + \frac{(30 - 200 \times 0,10)^2}{200 \times 0,10}$$

$$= 10/3 + 5/3 + 5$$

$$= 10$$

$\to$ RH0

$$\chi^2_{2;\,0,90} = 4,61$$

(4) $n = 20$ $\alpha = 0,05$ $C \sim N(0,1)$

C_1 : $]-\infty ; -0,5]$ $\to$ $-0,513$ $-1,787$ $-0,525$ $-0,508$ $-1,229$ $\Rightarrow$ 5

C_2 : $]-0,5 ; 0,5]$ $\to$ $0,464$ $-0,068$ $-0,486$ $0,137$ $-0,482$ $-0,261$ $-0,323$ $-0,057$ $\Rightarrow$ 8

C_3 : $]0,5 ; +\infty[$ $\to$ $2,455$ $0,881$ $1,046$ $0,906$ $1,678$ $0,595$ $1,237$ $\Rightarrow$ 7

$p_1 = P(N(0,1)) \in C_1)$

$p_1 = P(N(0,1) < -0,5)$

$= P(N(0,1) > 0,5)$

$= 1 - P(Z \leq 0,5) = 1 - 0,6915 = 0,3085$

$p_2 = P(-0,5 < Z < 0,5)$

$= P(Z < 0,5) - P(Z < -0,5)$

$= P(Z < 0,5) - P(Z > 0,5)$

$= P(Z \leq 0,5) - (1 - P(Z \leq 0,5))$

$= 0,6915 - 1 + 0,6915 = 0,383$

$P_3 = P(Z > 0,5) = 1 - P(Z < 0,5)$

$= 1 - 0,6915$

$= 0,3085$

$\rightarrow H_0 : \quad P_1 = 0,3085 \quad P_2 = 0,383 \quad P_3 = 0,3085$

$$T_{H_0} = \frac{(5 - 20\times 0,3085)^2}{20\times 0,3085} + \frac{(8 - 20\times 0,383)^2}{20\times 0,383} + \frac{(7 - 20\times 0,3085)^2}{20\times 0,3085}$$

$= 0,22 + 0,015 + 0,112$

$= 0,35$

$\chi_{2;\,0,95} = 5,99 \qquad \rightarrow$ pas RH_0

(5) $n = 40$
$k = 5$

$T_{H_0} \sim$ Poisson

$$\rightarrow P(X=x) = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}$$

$$\mu = E[X] = \frac{0\times 6 + 1\times 16 + 2\times 9 + 3\times 7 + 4\times 2}{40}$$

$= 1,575$

$P_0(X=0) = 0,207$

$P_1(X=1) = \frac{e^{-1,575}\cdot 1,575}{1} = 0,326$

$P_3 = \frac{e^{-\mu}\cdot\mu^3}{3\cdot 2} = 0,135$

$P_2(X=2) = \frac{e^{-1,575}\cdot\mu^2}{2} = 0,257$

$P_4 = (X \geq 4) = 1 - P_0 - P_1 - P_2 - P_3$

$= 0,076$

$$\rightarrow T_{H_0} = \frac{(6 - 40\times 0,207)^2}{40\times 0,207} + \frac{(16 - 40\times 0,326)^2}{40\times 0,326} + \frac{(9 - 40\times 0,257)^2}{40\times 0,257}$$

$$+ \frac{(7 - 40\times 0,135)^2}{40\times 0,135} + \frac{(2 - 40\times 0,076)^2}{40\times 0,076}$$

$= 0,63 + 0,67 + 0,159 + 0,47 + 0,36 = 2,289$

$\chi^2_{4\,;\,0,95} = 9,49$

$\rightarrow$ pas RHo.

(6) $T_{Ho} \sim$ géométrique$(1/4)$ $\rightarrow p = 0,25$

$n = 50$ $\quad \hookrightarrow P(X=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$

$$P_1 = (1-1/4)^0 \cdot 1/4 = 1/4$$
$$P_2 = (1-1/4)^1 \cdot 1/4 = 0,1875$$
$$P_3 = (1-1/4)^2 \cdot 1/4 = 0,141$$
$$P_4 = (1-1/4)^3 \cdot 1/4 = 0,106$$
$$P_5 = (1-1/4)^4 \cdot 1/4 = 0,079$$
$$P_6 = P(X \geq 6) = 1 - P_1 - P_2 - P_3 - P_4 - P_5$$
$$= 0,24$$

$$T_{Ho} = \frac{(14 - 50\times 0,25)^2}{50\times 0,25} + \frac{(12-50\times 0,1875)^2}{50\times 0,1875} + \frac{(7-50\times 0,141)^2}{50\times 0,141}$$
$$+ \frac{(5-50\times 0,106)^2}{50\times 0,106} + \frac{(4-50\times 0,079)^2}{50\times 0,24} + \frac{(8-50\times 0,24)^2}{50\times 0,24}$$

$$= 0,18 + 0,735 + 3,54\times 10^{-4} + 0,017 + 6\times 10^{-4} + 1,33$$
$$= 2,26$$

$\chi^2_{5\,;\,0,95} = 11,1$ $\rightarrow$ pas RHo.

(7) $n = 1000$

indépendance rel i et j ?

$$T_{Ho} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \frac{\left(n_{ij} - \frac{n_{i\cdot} n_{\cdot j}}{n}\right)^2}{\frac{n_{i\cdot} n_{\cdot j}}{n}}$$

$j \backslash i$	QI faible	moy.	élevé	Σ
mod.	50	186	114	350
moy	78	268	104	450
élevé	72	91	37	200
Σ	200	545	255	

$$T_{H_0} = \frac{\left(50 - \frac{350 \times 200}{1000}\right)^2}{\frac{350 \times 200}{1000}} + \frac{\left(186 - \frac{350 \times 545}{1000}\right)^2}{\frac{350 \times 545}{1000}} + \frac{\left(114 - \frac{350 \times 255}{1000}\right)^2}{\frac{350 \times 255}{1000}}$$

$$+ \frac{\left(78 - \frac{200 \times 480}{1000}\right)^2}{\frac{200 \times 480}{1000}} + \ldots$$

$k = 6$

$\chi^2_{5;\,0,95} = 9,49$

8

$j \backslash i$	A	B	Σ
oui	630	150	780
non	1170	450	1620
Σ	1800	600	

$$T_{H_0} = \frac{\left(630 - \frac{780 \times 1800}{2400}\right)^2}{\frac{780 \times 1800}{2400}} + \frac{\left(150 - \frac{780 \times 600}{2400}\right)^2}{\frac{780 \times 600}{2400}}$$

$$+ \frac{\left(1170 - \frac{1620 \times 1800}{2400}\right)^2}{\frac{1620 \times 1800}{2400}} + \frac{\left(450 - \frac{1620 \times 600}{2400}\right)^2}{\frac{1620 \times 600}{2400}}$$

$= 3,46 + 10,39 + 5/3 + 5$

$= 20,52$

$\rightarrow \chi^2_{2;\,0,95} = 3,84 \quad \Rightarrow \quad R_{H_0}$.